【FdData 高校入試：中学数学 3 年：２次関数 1】

[式の決定／変域／変化の割合／グラフの特徴／座標・長さなど／放物線と直線の式／線分比など／面積を求める：2 つの三角形の和／外側長方形から複数の三角形を引く／面積が等しい・面積比／等積変形の利用／FdData 入試製品版のご案内]

【】式の決定・変化の割合・変域など

【】式の決定

[問題]

関数 $y=ax^2$ について， $x=3$ のとき， $y=18$ である。このとき， a の値を求めよ。

(岡山県)(*)

[解答欄]

[ヒント]

$y=ax^2$ に $x=3$， $y=18$ を代入する。

[解答] $a=2$

[解説]

$y=ax^2$ に $x=3$， $y=18$ を代入すると，

$18=a\times3^2$， $9a=18$， $a=2$

[問題]

y は x の 2 乗に比例し， $x=3$ のとき， $y=-36$ である。このとき， y を x の式で表せ。

(秋田県)(*)

[解答欄]

[ヒント]
$y = ax^2$ とおいて， $y = ax^2$ に x＝3， y＝－36 を代入する。
[解答] $y = -4x^2$
[解説]
$y = ax^2$ とおく。 $y = ax^2$ に x＝3， y＝－36 を代入すると，
$-36 = a \times 3^2$， $9a = -36$， $a = -4$
よって，求める式は， $y = -4x^2$

[問題]
y は x の 2 乗に比例し， x＝1 のとき y＝2 である。 x＝3 のときの y の値を求めよ。
(沖縄県)(*)
[解答欄]

[解答] y＝18
[解説]
$y = ax^2$ とおく。 $y = ax^2$ に x＝1， y＝2 を代入すると，
$2 = a \times 1$， $a = 2$，よって， $y = 2x^2$
$y = 2x^2$ に x＝3 を代入すると， $y = 2 \times 3^2 = 18$

【】変域

[問題]

関数 $y=3x^2$ について，x の変域が $-3 \leqq x \leqq 2$ のときの y の変域を求めよ。

(福島県)(*)

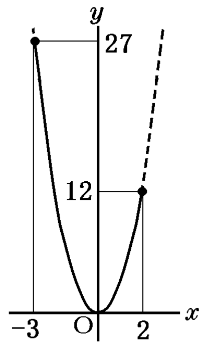
[解答欄]

[ヒント]

x の変域が $-3 \leqq x \leqq 2$ で $x=0$ が変域内にあるので，$x=-3$，$x=0$，$x=2$ のときの y の値を比較する。

[解答]$0 \leqq y \leqq 27$

[解説]



$x=0$ が x の変域内にあるときは3点を比較する。

$x=-3$ のとき，$y=3\times(-3)^2=27$

$x=0$ のとき，$y=0$

$x=2$ のとき，$y=3\times 2^2=12$

よって，y の変域は，$0 \leqq y \leqq 27$

[問題]

関数 $y=\dfrac{2}{3}x^2$ について，x の変域が $-1 \leqq x \leqq 3$ のときの y の変域を求めよ。

(福岡県)(*)

[解答欄]

[解答]$0 \leqq y \leqq 6$

[解説]

$x=0$ が x の変域内にあるときは3点を比較する。

$x=-1$ のとき，$y=\dfrac{2}{3}\times(-1)^2=\dfrac{2}{3}$

$x=0$ のとき，$y=0$

$x=3$ のとき，$y=\dfrac{2}{3}\times 3^2=6$

よって，$0 \leqq y \leqq 6$

[問題]

関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ について，x の変域が，$2 \leqq x \leqq 6$ のときの y の変域を求めよ。

(補充問題)(**)

[解答欄]

[ヒント]

x の変域が $2 \leqq x \leqq 6$ で $x=0$ が変域内にないので，$x=2$，$x=6$ のときの y の値を比較する。

[解答] $2 \leqq y \leqq 18$

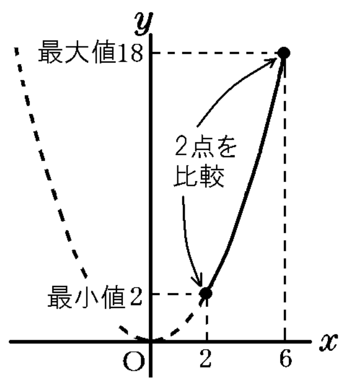
[解説]

$x=0$ が x の変域内にないときは 2 点を比較する。

$x=2$ のとき $y=\frac{1}{2}\times 2^2=2$

$x=6$ のとき $y=\frac{1}{2}\times 6^2=18$

よって，$2 \leqq y \leqq 18$



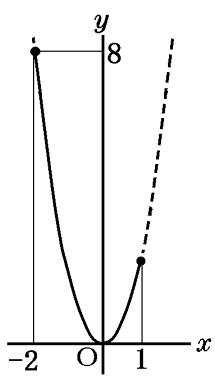
[問題]

関数 $y=ax^2$ について，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 1$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 8$ である。このとき，定数 a の値を求めよ。

(岡山県)(**)

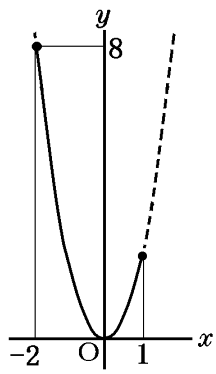
[解答欄]

[ヒント]



[解答] $a=2$

[解説]



「y の変域が $0 \leqq y \leqq 8$ である」より $y \geqq 0$ であるので，$a > 0$ である。

したがって，放物線のグラフは上に開いている。

「x の変域が $-2 \leqq x \leqq 1$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 8$ である」とあるので，グラフは右図のようになる。

右図より，$x = -2$ のとき $y = 8$ になる，

$y = ax^2$ に $x = -2$，$y = 8$ を代入すると，

$8 = a \times (-2)^2$

$4a = 8$，$a = 2$

[問題]

関数 $y = x^2$ について，x の変域を $a \leqq x \leqq a+2$ とするとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 4$ となるような a の値を，次の[　　]の中からすべて選べ。

[-2　-1　0　1　2]

(埼玉県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

$a > 0$ のとき，x の変域($a \leqq x \leqq a+2$)は正の数の範囲にあるので，$y > 0$ となり不適。

[解答]-2，0

[解説]

$a > 0$ のとき，x の変域($a \leqq x \leqq a+2$)は正の数の範囲にあるので，$y > 0$ となり不適。

$a = 0$ のとき，$0 \leqq x \leqq 2$ なので，$0 \leqq y \leqq 4$ となり，適する。

$a = -1$ のとき，$-1 \leqq x \leqq 1$ なので，$0 \leqq y \leqq 1$ となり，不適。

$a = -2$ のとき，$-2 \leqq x \leqq 0$ なので，$0 \leqq y \leqq 4$ となり，適する。

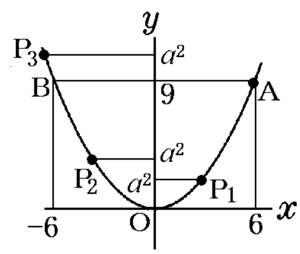
[問題]

関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ で，x の変域が $a \leqq x \leqq 6$ のとき，y の変域は $0 \leqq y \leqq 9$ である。a がとることのできる値の範囲を求めよ。

(徳島県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

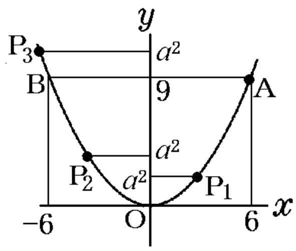


点 P$\left(a,\ \dfrac{1}{4}a^2\right)$を考える。

P が P_1 の位置にあるときは，0≦ y ≦9 にならない。
P が P_2 の位置にあるときは，0≦ y ≦9 になる。
P が P_3 の位置にあるときは，0≦ y ≦9 にならない。

[解答]−6≦ a ≦0

[解説]



$x=6$ のとき， $y=\dfrac{1}{4}x^2=\dfrac{1}{4}\times 6^2=\dfrac{36}{4}=9$

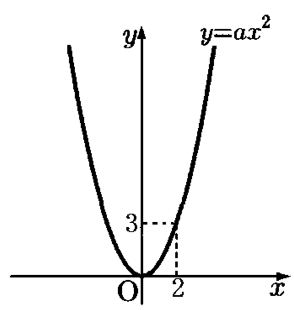
右図のように，点 A の座標を(6，9)とする。
また，図のように，点 B(−6，9)をとる。

$x=a$ のとき， $y=\dfrac{1}{4}x^2=\dfrac{1}{4}a^2$

点 P$\left(a,\ \dfrac{1}{4}a^2\right)$を考える。

0＜ a ≦6 のとき, 点 P は, 図の P_1 のように OA 間にある。x の変域が a ≦ x ≦6 であるので, y の変域は a^2 ≦ y ≦9 になり，0≦ y ≦9 にならない。
−6≦ a ≦0 のとき，点 P は，図の P_2 のように BO 間にある。x の変域が a ≦ x ≦6 であるので， y の変域は，図より，0≦ y ≦9 になる。これは条件を満たす。
a ＜−6 のとき，点 P は，図の P_3 のような位置にある。x の変域が a ≦ x ≦6 であるので，y の変域は，図より，0≦ y ≦ a^2 になり，0≦ y ≦9 にならない。
したがって，条件を満たす a の値の範囲は，−6≦ a ≦0 である。

[問題]



右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点(2，3)がある。次の各問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 次のアとイにあてはまる数をそれぞれ求めよ。
関数 $y=ax^2$ において，x の変域が b ≦ x ≦2 のときの y の変域は 0≦ y ≦3 である。このとき， b の値の範囲は,
(　ア　)≦ b ≦(　イ　)である。

(3) 関数 $y=ax^2$ において， x の変域が−4≦ x ≦3 のときの y の変域と，関数 $y=cx^2$ において， x の変域が−2≦ x ≦3 のときの y の変域とが等しいとき， c の値を求めよ。

(兵庫県)(**)

[解答欄]

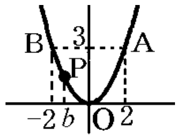
(1)	(2)ア	イ
(3)		

[解答](1)　$a=\dfrac{3}{4}$　(2)ア　－2　イ　0　(3)　$c=\dfrac{4}{3}$

[解説]

(1)　$y=ax^2$ に $x=2$, $y=3$ を代入すると，$3=a\times4$，$a=\dfrac{3}{4}$

(2)　x 座標が b である放物線上の点を P とする。P が右図の OB 間にあるとき，y の変域は $0\leqq y\leqq3$ になる。



よって，$-2\leqq b\leqq0$

(3) (1)より，$a=\dfrac{3}{4}$ なので，この関数の式は $y=\dfrac{3}{4}x^2$

$x=-4$ のとき $y=\dfrac{3}{4}x^2=\dfrac{3}{4}\times(-4)^2=12$

$x=0$ のとき $y=\dfrac{3}{4}x^2=0$

$x=3$ のとき $y=\dfrac{3}{4}x^2=\dfrac{3}{4}\times3^2=\dfrac{27}{4}$

よって，$y=\dfrac{3}{4}x^2$ で，x の変域が $-4\leqq x\leqq3$ のときの y の変域は，$0\leqq y\leqq12$

$y=cx^2$ において，

$x=-2$ のとき $y=cx^2=4c$，

$x=0$ のとき $y=0$

$x=3$ のとき $y=cx^2=9c$

よって，y の変域は，$0\leqq y\leqq9c$

したがって，$9c=12$，$c=\dfrac{12}{9}=\dfrac{4}{3}$

【】変化の割合

[問題]

関数 $y=-3x^2$ について， x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めよ。

(愛知県)(*)

[解答欄]

[ヒント]

(x の増加量)＝3－1，(y の増加量)＝－27－(－3)

$$(変化の割合)=\frac{(yの増加量)}{(xの増加量)}$$

[解答]－12

[解説]

x ＝1 のとき $y=-3x^2$ ＝－3

x ＝3 のとき $y=-3x^2$ ＝－27

よって，(x の増加量)＝3－1＝2，(y の増加量)＝－27－(－3)＝－24

$$(変化の割合)=\frac{(yの増加量)}{(xの増加量)}=\frac{-24}{2}=-12$$

[問題]

関数 $y=ax^2$ において，x の値が 1 から 4 まで増加するときの変化の割合が－5 であるとき，a の値を求めよ。

(広島県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

(x の増加量)＝4－1＝3，(y の増加量)＝$16a-a$ ＝$15a$

[解答] a ＝－1

[解説]

x ＝1 のとき $y=ax^2$ ＝ $a\times1^2$ ＝ a

x ＝4 のとき $y=ax^2$ ＝ $a\times4^2$ ＝$16a$

よって，(x の増加量)＝4－1＝3，(y の増加量)＝$16a-a$ ＝$15a$

$$(変化の割合)=\frac{(yの増加量)}{(xの増加量)}=\frac{15a}{3}=5a$$

「変化の割合が－5 である」とあるので， $5a=-5$， $a=-1$

[問題]

関数 $y=x^2$ について，x が a から $a+5$ まで増加するとき，変化の割合は 7 である。このとき，a の値を答えなさい。(3 点)

(新潟県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

(x の増加量)＝$a+5-a$，(y の増加量)＝$(a+5)^2-a^2$

[解答] $a=1$

[解説]

$x=a$ のとき $y=x^2=a^2$

$x=a+5$ のとき $y=x^2=(a+5)^2$

よって，(x の増加量)＝$a+5-a$ ＝5,

(y の増加量)＝$(a+5)^2-a^2$ ＝ $a^2+10a+25-a^2=10a+25$

(変化の割合)＝$\dfrac{(\text{yの増加量})}{(x\text{の増加量})}$＝$\dfrac{10a+25}{5}$＝$2a+5$

変化の割合は 7 であるので，$2a+5=7$，$2a=2$，$a=1$

[問題]

関数 $y=ax^2$ (a は定数)と関数 $y=-8x+7$ について，x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合が等しいとき，a の値を求めよ。

(愛知県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

一次関数 $y=bx+c$ の変化の割合は常に b になる。

[解答] $a=-2$

[解説]

x ＝1 のとき $y=ax^2=a\times1^2=a$，x ＝3 のとき $y=ax^2=a\times3^2=9a$

よって，(x の増加量)＝3－1＝2,(y の増加量)＝$9a-a=8a$

(変化の割合)＝$\dfrac{(\text{yの増加量})}{(x\text{の増加量})}$＝$\dfrac{8a}{2}$＝$4a$

一次関数 $y=bx+c$ の変化の割合は常に b になるので，x の値が 1 から 3 まで増加するときの $y=-8x+7$ の変化の割合は－8

2 つの関数で変化の割合が同じなので，$4a=-8$，$a=-2$

[問題]

　ある自動車が動き始めてから x 秒間に進んだ距離を y m とすると，0≦ x ≦8 の範囲では $y=\frac{3}{4}x^2$ の関係があった。この自動車が動き始めて 1 秒後から 3 秒後までの平均の速さは毎秒何 m か。

(山口県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

(平均の速さ)＝$\frac{(\text{進んだ道のり})}{(\text{時間})}$

[解答]毎秒 3m

[解説]

$x=1$(秒)のとき，　$y=\frac{3}{4}\times 1^2=\frac{3}{4}$(m)

$x=3$(秒)のとき，　$y=\frac{3}{4}\times 3^2=\frac{27}{4}$(m)

よって，

(時間)＝3－1＝2(秒)

(進んだ道のり)＝$\frac{27}{4}-\frac{3}{4}=\frac{24}{4}$＝6(m)

(平均の速さ)＝$\frac{(\text{進んだ道のり})}{(\text{時間})}=\frac{6}{2}$＝3(m／s)

【】グラフの特徴

[問題]

関数 $y = ax^2$ のグラフの特徴として適切なものを，次のア～オからすべて選び，その記号を書け。

ア　原点を通る。

イ　x 軸について対称な曲線である。

ウ　$a > 0$ のときは上に開き，x 軸より下側にはない。

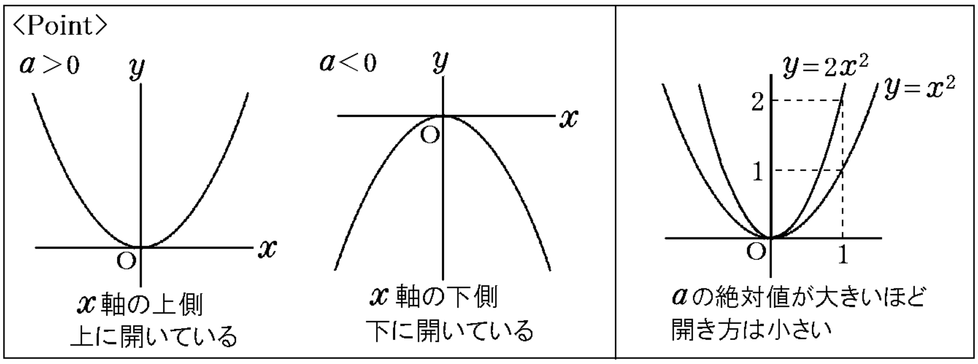
エ　$a < 0$ のとき，x の値が増加すると $x > 0$ の範囲では，y の値は減少する。

オ　a の値の絶対値が大きいほど，グラフの開き方は大きい。

(奈良県)(*)

[解答欄]

[ヒント]

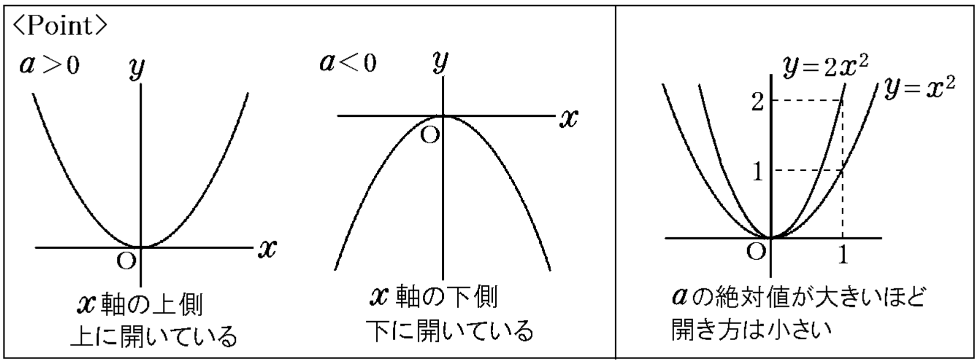


[解答]ア，ウ，エ

[解説]

イは誤り。$y = ax^2$ は y 軸について対称である。

オは誤り。a の値の絶対値が大きいほど，グラフの開き方は小さい。



[問題]

y の値が正の値をとらない関数を，次のア～エから 1 つ選べ。

ア　$y=-\dfrac{x}{2}$　　イ　$y=-\dfrac{2}{x}$　　ウ　$y=-2x+3$　　エ　$y=-2x^2$

(岐阜県)(*)

[解答欄]

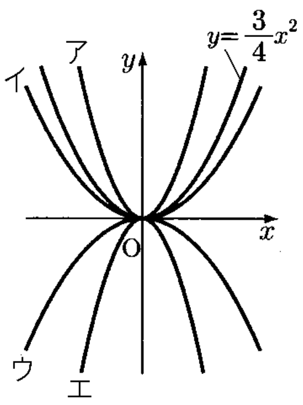
[解答]エ

[解説]

エの $y=-2x^2$ は下に開いており，$y\leqq 0$ となる。

[問題]

右の図のア～エは，$y=ax^2$ の形で表される 4 つのグラフを，関数 $y=\dfrac{3}{4}x^2$ のグラフと同じ座標軸を使ってかいたものであり，そのうちの 1 つが関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフである。関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフを，ア～エから選び，記号で答えよ。



(山口県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

$y=ax^2$ で $a>0$ のときは放物線のグラフは上に開く。

a の絶対値が小さいほど開き方は大きくなる。

[解答]イ

[解説]

$y=ax^2$ で $a>0$ のときは放物線のグラフは上に開いているので，$y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフはアかイである。また，a の絶対値が大きいほど開き方は小さくなり，a の絶対値が小さいほど開き方は大きくなる。$y=\dfrac{1}{2}x^2$ の $\dfrac{1}{2}$ は，$y=\dfrac{3}{4}x^2$ の $\dfrac{3}{4}$ より小さいので $y=\dfrac{1}{2}x^2$ の開き方は $y=\dfrac{3}{4}x^2$ より大きい。よって，$y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフはイである。

[問題]

関数 $y=2x^2$ のグラフと x 軸について対称であるグラフの式が $y=ax^2$ である。このとき，a の値を求めよ。

(沖縄県)(*)

[解答欄]

[解答]－2

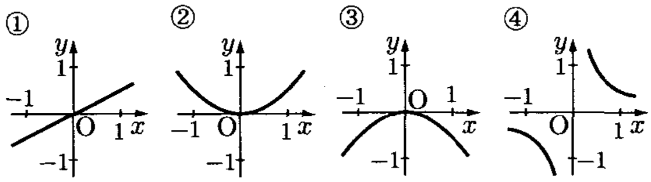
[解説]

$y=2x^2$ と x 軸に対称なグラフの式は $y=-2x^2$ である。

[問題]

関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ について，次の各問いに答えよ。

(1) 次の①～④の中に，関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフがある。そのグラフとして正しいものを 1 つ選べ。



(2) x ＝2 のとき，y の値を求めよ。

(3) x の変域が－1≦ x ≦2 のとき，y の変域を求めよ。

(4) x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合を求めよ。

(5) x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合を m，x の値が 52 から 54 まで増加するときの変化の割合を n とする。m と n の大きさを比べるとき，どのようなことがいえるか，次の①～④の中から正しいものを 1 つ選べ。

① m と n は等しい。

② m の方が大きい。

③ n の方が大きい。

④ m と n のどちらが大きいかは，判断ができない。

(佐賀県)(**)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
(4)	(5)	

[解答](1) ② (2) 2 (3) $0 \leqq y \leqq 2$ (4) 3 (5) ③

[解説]

(1) ①は比例(一次関数)，②は放物線 $y = ax^2$ で $a > 0$，③は放物線 $y = ax^2$ で $a < 0$，④は反比例のグラフである。

(2) $y = \frac{1}{2}x^2$ に $x = 2$ を代入すると， $y = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$

(3) $x = -1$ のとき $y = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}$， $x = 0$ のとき $y = 0$， $x = 2$ のとき $y = 2$

したがって， x の変域が $-1 \leqq x \leqq 2$ のときの y の変域は，$0 \leqq y \leqq 2$

(4) $x = 2$ のとき $y = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$， $x = 4$ のとき $y = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$

$$(\text{変化の割合}) = \frac{(\text{y の増加量})}{(x\text{ の増加量})} = \frac{8-2}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$$

(5) $y = ax^2$ で x が x_1 から x_2 へ増加するとき，

$$(\text{変化の割合}) = \frac{(\text{y の増加量})}{(x\text{ の増加量})} = \frac{a{x_2}^2 - a{x_1}^2}{x_2 - x_1} = \frac{a({x_2}^2 - {x_1}^2)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1)$$

したがって， $y = \frac{1}{2}x^2$ で，

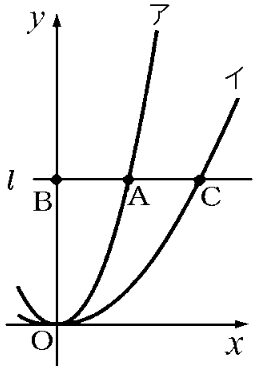
x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合 m は， $m = \frac{1}{2}(2+4) = 3$

x の値が 52 から 54 まで増加するときの変化の割合 n は， $n = \frac{1}{2}(52+54) = 53$

よって， $m < n$ となる。

【】座標・長さなど
【】座標・長さなど
[問題]

右の図において，アは関数 $y=x^2$，イは関数 $y=ax^2$（$a>0$）のグラフである。点 A はア上の点であり，x 座標は 2 である。点 A を通り x 軸に平行な直線を l とする。直線 l と y 軸の交点を B とし，直線 l とイの交点のうち，x 座標が正である点を C とする。点 A が線分 BC の中点であるとき，a の値を求めよ。



(秋田県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

点 A の x 座標は 2→点 A の y 座標→点 C の y 座標

点 A の x 座標は 2，A は線分 BC の中点→点 C の x 座標

点 C の x, y 座標→ $y=ax^2$ に代入

[解答] $a=\dfrac{1}{4}$

[解説]

点 A の x 座標は 2 であるので，

$y=x^2$ に $x=2$ を代入すると，$y=2^2=4$

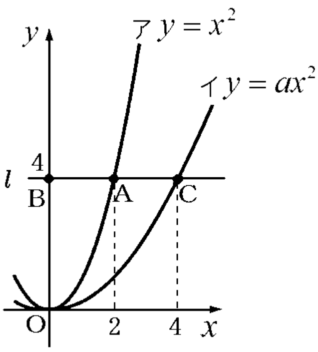
よって，点 A の y 座標は 4 である。

したがって，点 C の y 座標も 4 である。

また，点 A は線分 BC の中点であるので，

点 C の x 座標は 4 である。

よって，点 C の座標は(4，4)である。

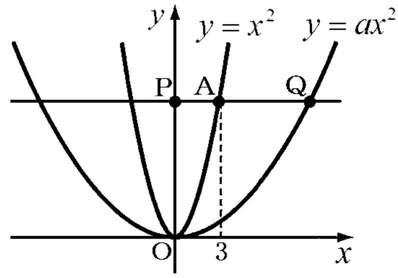


$y=ax^2$ は，点 C(4，4)を通るので，$y=ax^2$ に $x=4$, $y=4$ を代入すると，

$4=a\times4^2$，$16a=4$，$a=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$ が成り立つ。

[問題]

右の図は，2 つの関数 $y=x^2$，$y=ax^2$ ($a>0$)のグラフである。関数 $y=x^2$ のグラフ上で，x 座標が 3 である点を A とする。また，A を通り x 軸に平行な直線が，y 軸と交わる点を P, 関数 $y=ax^2$ のグラフと交わる点のうち，x 座標が正の数である点を Q とする。このとき，OP＝PQ となるような a の値を求めよ。



(栃木県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

点 A の x 座標は 3→点 A の y 座標→点 Q の y 座標

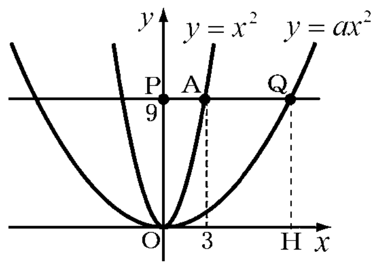
点 A の y 座標→OP→PQ→点 Q の x 座標

点 Q の x, y 座標→ $y=ax^2$ に代入

[解答] $a=\dfrac{1}{9}$

[解説]

点 A の x 座標は 3 であるので，$y=x^2$ に $x=3$ を代入すると，$y=3^2=9$ である。



よって，点 A の y 座標は 9 で，点 Q の y 座標も 9 になる。

したがって，OP＝9 になる。

仮定より OP＝PQ なので，PQ＝ 9

よって，OH＝PQ＝9 なので，点 Q の x 座標は 9 になる。

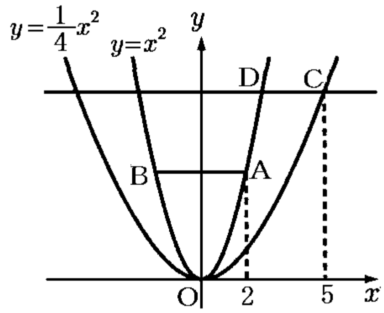
以上より，点 Q の座標は(9，9)であることがわかる。

点 Q は，$y=ax^2$ 上にあるので，$y=ax^2$ に $x=9$, $y=9$ を代入すると，

$9=a\times 9^2$，$81a=9$，$a=\dfrac{9}{81}=\dfrac{1}{9}$ になる。

[問題]

右の図のように，関数 $y=x^2$ のグラフ上に， x 座標が 2 である点 A と，点 A と y 座標が等しく x 座標が異なる点 B をとり，点 A と点 B を結ぶ。また，関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に，x 座標が 5 である点 C をとり，点 C を通り x 軸に平行な直線と関数 $y=x^2$ のグラフとの交点のうち， x 座標が正である点を D とする。線分 AB と線分 CD の長さの比を求めよ。



(宮城県)(**)

[解答欄]

AB：CD＝

[ヒント]

C の x 座標は 5→C の y 座標＝D の y 座標→D の x 座標→CD の長さ

[解答]AB：CD＝8：5

[解説]

まず，線分 AB の長さを求める。「点 A と y 座標が等しく x 座標が異なる点 B」より，点 B の x 座標は－2 である。よって，AB＝2－(－2)＝4･･･①

次に，線分 CD の長さを求める。点 C の x 座標が 5 なので，点 D の x 座標がわかれば CD の長さを求めることができる。

点 C の x 座標が 5 なので， $y=\frac{1}{4}x^2$ に $x=5$ を代入すると， $y=\frac{1}{4}\times 5^2=\frac{25}{4}$

したがって，点 C の y 座標は $\frac{25}{4}$ になる。

点 D の y 座標は，点 C の y 座標と等しいので， $\frac{25}{4}$ である。

$y=x^2$ に $y=\frac{25}{4}$ を代入すると， $\frac{25}{4}=x^2$，よって， $x=\pm\frac{5}{2}$

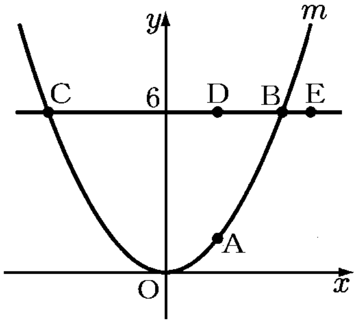
点 D の x 座標は正であるので， $x=\frac{5}{2}$

点 C の x 座標が 5，点 D の x 座標が $\frac{5}{2}$ なので，CD＝$5-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$･･･②

①，②より，AB：CD＝$4:\frac{5}{2}$＝$8:5$

[問題]

右図において，m は $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフを表す。A，B，C は m 上の点であって，A の x 座標は 2 である。B の x 座標は，C の x 座標より大きい。D，E は，B と C とを結んでできる直線上の点であり，B，C，D，E の y 座標はいずれも 6 である。D の x 座標は A の x 座標に等しく，E の x 座標は B の x 座標より大きい。



(1) B の x 座標と C の x 座標をそれぞれ求めよ。

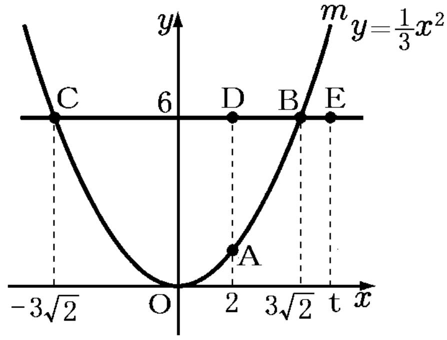
(2) E の x 座標を t とする。DE²＝CE×BE となるときの t の値を求めよ。

(大阪府)(**)

[解答欄]

(1)B：	C：	(2)

[ヒント]



(1) 点 B，C の y 座標は 6→ $y=\frac{1}{3}x^2$ に代入

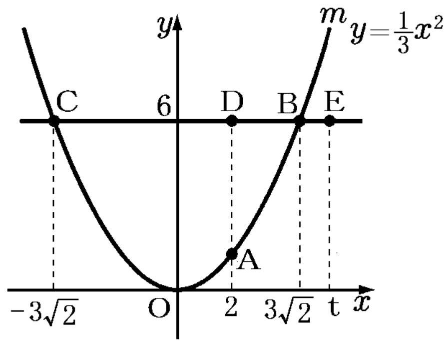
(2) 右図より，DE＝$t-2$

CE＝$t-\left(-3\sqrt{2}\right)$＝$t+3\sqrt{2}$

BE＝$t-3\sqrt{2}$

[解答](1)B：$3\sqrt{2}$　C：$-3\sqrt{2}$　(2) $t=\frac{11}{2}$

[解説]



(1) $y=\frac{1}{3}x^2$ 上の点 B，C の y 座標は 6 であるので，

$y=\frac{1}{3}x^2$ に $y=6$ を代入して，$6=\frac{1}{3}x^2$

$x^2=18$，$x=\pm\sqrt{18}=\pm3\sqrt{2}$

点 B の x 座標は正なので，$x=3\sqrt{2}$

点 C の x 座標は $-3\sqrt{2}$

(2) 右図より，DE＝$t-2$

CE＝$t-\left(-3\sqrt{2}\right)$＝$t+3\sqrt{2}$，BE＝$t-3\sqrt{2}$

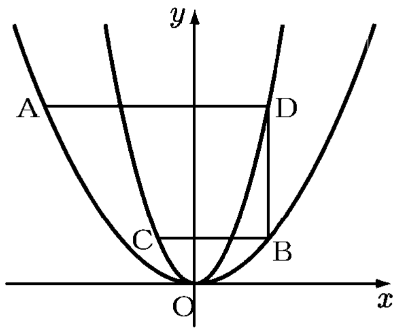
DE²＝CE×BE が成り立つので，$(t-2)^2=\left(t+3\sqrt{2}\right)\left(t-3\sqrt{2}\right)$

$t^2-4t+4=t^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2$，$-4t=-18-4$，$-4t=-22$　よって，$t=\frac{22}{4}=\frac{11}{2}$

[問題]

右の図のように, 関数 $y=x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B, 関数 $y=4x^2$ のグラフ上に 2 点 C，D がある。点 A，C の x 座標は負の数，点 B，D の x 座標は正の数で，線分 AD，BC は x 軸に平行，線分 BD は y 軸に平行である。このとき，AD : BC を求めよ。

(広島県改)(**)

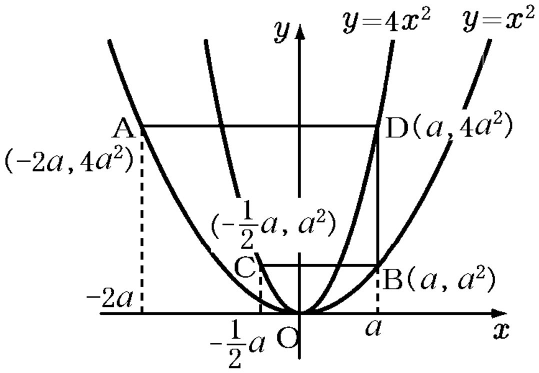


[解答欄]

AD : BC＝

[ヒント]

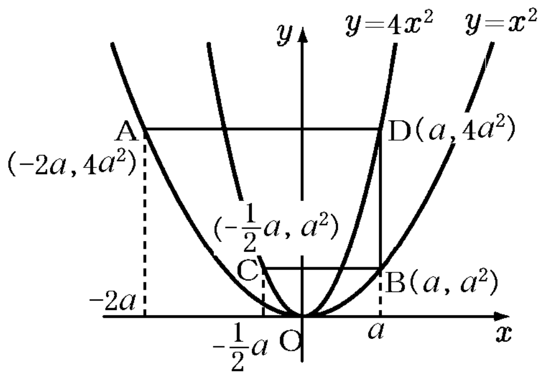
まず，点 B の x 座標を $a\,(a>0)$ として，B，C，D，A の座標を a を使って表す。



[解答]AD : BC＝2 : 1

[解説]

まず，点 B の x 座標を $a\,(a>0)$ として，B，C，D，A の座標を a を使って表す。



点 B は $y=x^2$ 上にあるので， $y=x^2$ に $x=a$ を代入すると， $y=a^2$

よって，点 B の座標は $\left(a,\ a^2\right)$ になる。

点 C の y 座標は点 B の y 座標 (a^2) と同じである。

点 C は $y=4x^2$ 上にあるので，$y=4x^2$ に $y=a^2$ を代入して，

$a^2=4x^2$， $x^2=\dfrac{1}{4}a^2$， $x=\pm\dfrac{1}{2}a$

点 C の x 座標は負であるので， $x=-\dfrac{1}{2}a$

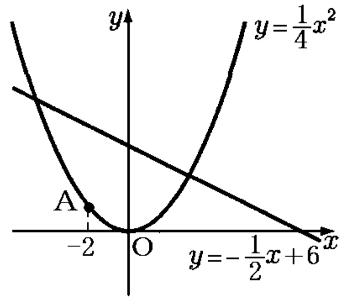
よって，点 C の座標は $\left(-\dfrac{1}{2}a,\ a^2\right)$

点 D は $y=4x^2$ 上にあるので， $y=4x^2$ に $x=a$ を代入すると， $y=4a^2$

よって，点 D の座標は$\left(a,\ 4a^2\right)$になる。
点 A の y 座標は点 D の y 座標($4a^2$)と同じである。
点 A は $y=x^2$ 上にあるので， $y=x^2$ に $y=4a^2$ を代入すると，
$4a^2=x^2$， $x^2=4a^2$， $x=\pm 2a$
点 A の x 座標は負であるので， $x=-2a$
よって，点 A の座標は$\left(-2a,\ 4a^2\right)$
B，C，D，A の座標を記入すると，上図のようになる。図より，
AD＝(点 D の x 座標)－(点 A の x 座標)＝ $a-\left(-2a\right)=a+2a=3a$
BC＝(点 B の x 座標)－(点 C の x 座標)＝ $a-\left(-\frac{1}{2}a\right)=a+\frac{1}{2}a=\frac{3}{2}a$
よって，AD：BC＝ $3a:\frac{3}{2}a=6a:3a=2:1$

[問題]

右の図のように，関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフと直線 $y=-\frac{1}{2}x+6$ がある。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) 関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に，x 座標が－2 となる点 A をとるとき，A の y 座標を求めよ。
(2) 関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上を動く点 P と，直線 $y=-\frac{1}{2}x+6$ 上を動く点 Q がある。P，Q の x 座標が等しく，PQ＝6 であるとき，P の x 座標をすべて求めよ。
(岩手県)(**)
[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]
(2) 放物線が直線より上側にあるとき， $\frac{1}{4}x^2-\left(-\frac{1}{2}x+6\right)=6$
放物線が直線より下側にあるとき， $-\frac{1}{2}x+6-\frac{1}{4}x^2=6$
[解答](1) 1　(2) －8，－2，0，6

[解説]

(1) $x=-2$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入すると， $y=\frac{1}{4}\times 4=1$

(2) 放物線が直線より上側にあるとき，

$\frac{1}{4}x^2-\left(-\frac{1}{2}x+6\right)=6$

$x^2+2x-24=24$， $x^2+2x-48=0$， $(x+8)(x-6)=0$， $x=-8,\ 6$

放物線が直線より下側にあるとき，

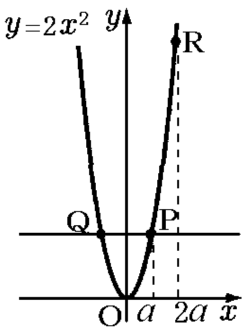
$-\frac{1}{2}x+6-\frac{1}{4}x^2=6$

$-2x-x^2=0$， $x^2+2x=0$， $x(x+2)=0$， $x=0,\ -2$

よって，PQ＝6 であるとき，P の x 座標は，－8，－2，0，6

【】放物線と直線の式

[問題]



右の図のように，関数 $y=2x^2$ のグラフ上に 2 点 P，Q があり，直線 PQ は x 軸に平行である。点 P の x 座標を a とする。このとき，次の各問いに答えよ。ただし，$a>0$ とする。

(1) 点 Q の座標を a を用いて表せ。

(2) 関数 $y=2x^2$ のグラフ上で x 座標が $2a$ である点を R とする。2 点 Q，R を通る直線の傾きが 7 のとき，a の値を求めよ。

(京都府)(**)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(2) 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の傾きは $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ である。

[解答](1) $(-a,\ 2a^2)$　(2) $a=\dfrac{7}{2}$

[解説]

(1) 点 P の x 座標は a であるので，$y=2x^2$ に $x=a$ を代入すると，$y=2a^2$

よって，点 P の座標は $(a,\ 2a^2)$ である。

「直線 PQ は x 軸に平行である」ので，点 Q は y 軸について点 P と線対称の位置にある。

したがって，点 Q の座標は $(-a,\ 2a^2)$ である。

(2) まず，点 R の座標を求める。

点 R の x 座標は $2a$ なので，$y=2x^2$ に $x=2a$ を代入すると，$y=2\times(2a)^2=8a^2$

よって，点 R の座標は $(2a,\ 8a^2)$ となる。

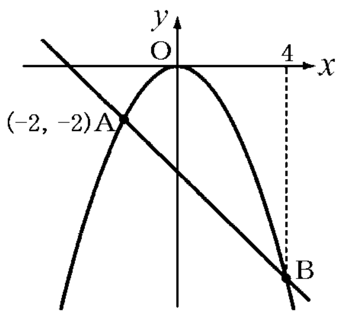
Q$(-a,\ 2a^2)$，R$(2a,\ 8a^2)$ なので，

(直線 QR の傾き)$=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{8a^2-2a^2}{2a-(-a)}=7$

$\dfrac{6a^2}{3a}=7$，$2a=7$，$a=\dfrac{7}{2}$

[問題]

右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点 A(−2，−2)と点 B があり，点 B の x 座標は 4 である。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 点 B の y 座標を求めよ。

(3) 直線 AB の式を求めよ。

(佐賀県)(**)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[ヒント]

[直線の式の求め方] 傾きが a で$(x_1,\ y_1)$を通る直線 $y=a(x-x_1)+y_1$
2点$(x_1,\ y_1)$,$(x_2,\ y_2)$を通る直線 $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$

[解答](1) $-\dfrac{1}{2}$　(2) −8　(3) $y=-x-4$

[解説]

(1) 関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点 A(−2，−2)があるので，$y=ax^2$ に $x=-2$, $y=-2$ を代入すると，$-2=a\times(-2)^2$ が成り立つ。よって，$-2=4a$，$a=-\dfrac{2}{4}$，$a=-\dfrac{1}{2}$

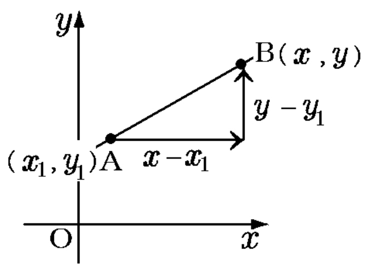
(2) (1)より，$a=-\dfrac{1}{2}$ なので，この放物線の式は，$y=-\dfrac{1}{2}x^2$ になる。

$y=-\dfrac{1}{2}x^2$ に $x=4$ を代入すると，$y=-\dfrac{1}{2}\times 4^2=-8$

(3) 2 点の座標から直線の式を求めるためには，連立方程式で解くこともできるが，計算が煩雑になる。次の公式で簡単に求めることができる。

傾きが m で点$(x_1,\ y_1)$を通る直線の式：$y=m(x-x_1)+y_1$

参考までに右図を使ってこの公式を導いておく。



直線 AB の傾き m は，図から，$m=\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$

$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=m$, $y-y_1=m(x-x_1)$, $y=m(x-x_1)+y_1$

さらに, 2点$(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$が与えられているときは,

$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$なので, mを$y=m(x-x_1)+y_1$に代入すると,

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$となる。

［直線の式の求め方］
傾きがmで$(x_1,\ y_1)$を通る直線 $y=m(x-x_1)+y_1$
2点$(x_1,\ y_1)$,$(x_2,\ y_2)$を通る直線 $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$

この公式を使って直線ABの式を求める。

仮定より A(－2, －2), (2)より B(4, －8)なので,

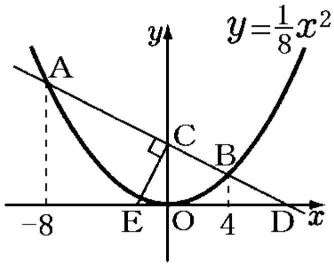
$y=\dfrac{-8-(-2)}{4-(-2)}(x-4)-8$, $y=\dfrac{-6}{6}(x-4)-8$

$y=-(x-4)-8$, $y=-x-4$

※この公式の傾きを求めるとき，ここでは(Bの座標)－(Aの座標)で計算したが，反対にして $\dfrac{-2-(-8)}{-2-4}$ としてもかまわない。また，ここでは，x_1, y_1は点Bの座標を使ったが，点Aの座標を使ってもかまわない。

[問題]

右の図のように，関数$y=\dfrac{1}{8}x^2$のグラフ上に2点A，Bがあり，2点A，Bのx座標はそれぞれ－8，4である。2点A，Bを通る直線とy軸との交点をC，x軸との交点をDとする。また，x軸上に∠ACE＝90°となるように点Eをとる。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) 2点A，Bを通る直線の式を求めよ。

(2) 点Dの座標を求めよ。

(3) 線分DEの長さを求めよ。

(京都府)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(3)「∠ACE＝90°」なので，直線CEは直線ABと垂直である。

傾きmの直線と傾きnの直線が垂直であるとき，$mn=-1$が成り立つ。

したがって，(直線CEの傾き)×(直線ABの傾き)＝－1

[解答](1) $y=-\frac{1}{2}x+4$　(2) (8，0)　(3) 10

[解説]

(1) まず，点A，Bの座標を求める。

点Aの x 座標は－8なので，$y=\frac{1}{8}x^2$ に $x=-8$ を代入して，$y=\frac{1}{8}\times(-8)^2=8$

点Bの x 座標は4なので，$y=\frac{1}{8}x^2$ に $x=4$ を代入して，$y=\frac{1}{8}\times 4^2=2$

よって，A(－8，8)，B(4，2)

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使うと，

$y=\frac{2-8}{4-(-8)}(x-4)+2$，$y=-\frac{1}{2}(x-4)+2$，$y=-\frac{1}{2}x+4$

(2) 点Dは $y=-\frac{1}{2}x+4$ 上にあり，y 座標が0なので，$y=-\frac{1}{2}x+4$ に $y=0$ を代入して，

$0=-\frac{1}{2}x+4$，$0=-x+8$，$x=8$

よって，点Dの座標は(8，0)となる。

(3) まず，直線CEの式を求める。

「∠ACE＝90°」なので，直線CEは直線ABと垂直である。

傾き m の直線と傾き n の直線が垂直であるとき，$mn=-1$ が成り立つ。

したがって，(直線CEの傾き)×(直線ABの傾き)＝－1

(直線CEの傾き)$\times\left(-\frac{1}{2}\right)$＝－1

(直線CEの傾き)＝－1÷$\left(-\frac{1}{2}\right)$＝－1×(－2)＝2

点Cの y 座標が直線CEの y 切片になる。

点Cは直線AB($y=-\frac{1}{2}x+4$)の y 切片でもあるので，y 切片は4である。

したがって，直線CEの式は，$y=2x+4$

$y=2x+4$ に $y=0$ を代入すると，$0=2x+4$，$2x=-4$，$x=-2$

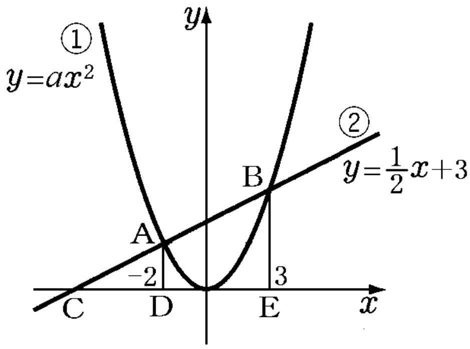
よって，点Eの座標は(－2，0)である。

(DEの長さ)＝(点Dの x 座標)－(点Eの x 座標)＝8－(－2)＝10

【】線分比など

[問題]

右の図において，①は関数 $y=ax^2$ ，②は関数 $y=\frac{1}{2}x+3$ のグラフである。点 A，B は①と②の交点で， x 座標はそれぞれ－2，3 である。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 図のように，②と x 軸との交点を C とし，点 A，B から x 軸に垂線をひき，その交点をそれぞれ D，E とする。BA : AC を最も簡単な整数の比で表せ。

(山梨県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(2) △CAD と△CBE で，AD，BE は x 軸と垂直なので AD // BE となる。
平行線の性質より，BA : AC＝ED : DC が成り立つ。

[解答](1) $a=\frac{1}{2}$　(2) 5 : 4

[解説]

(1) まず，点 A の座標を求める。点 A の x 座標は $x=-2$ なので， $x=-2$ を $y=\frac{1}{2}x+3$ に代入すると， $y=\frac{1}{2}\times(-2)+3=-1+3=2$　よって，点 A の座標は(－2，2)である。

点 A は $y=ax^2$ 上の点であるので， $y=ax^2$ に $x=-2$ ， $y=2$ を代入すると，

$2=a\times(-2)^2$ ， $4a=2$ ， $a=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

(2) △CAD と△CBE で，AD，BE は x 軸と垂直なので AD // BE となる。
平行線の性質より，BA : AC＝ED : DC が成り立つ。･･･①
点 E の x 座標は 3，点 D の x 座標は－2 なので，
ED＝(点 E の x 座標)－(点 D の x 座標)＝3－(－2)＝3＋2＝5･･･②
DC の長さを求めるためには，点 C の x 座標を求める必要がある。

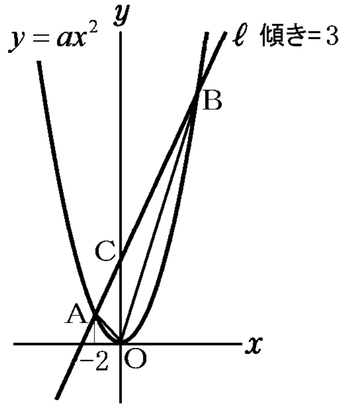
点 C は $y=\frac{1}{2}x+3$ 上にあり， y 座標は 0 であるので， $y=\frac{1}{2}x+3$ に $y=0$ を代入すると，

$0=\dfrac{1}{2}x+3$， $x+6=0$， $x=-6$

したがって，DC＝(点 D の x 座標)－(点 C の x 座標)＝(－2)－(－6)＝－2＋6＝4･･･③

①，②，③より，BA：AC＝ED：DC＝5：4

[問題]



右の図の放物線は関数 $y=ax^2$ のグラフであり，直線 l と 2 点 A，B で交わっている。また，点 C は直線 l と y 軸との交点である。点 A の x 座標が－2，直線 l の傾きが 3 であり，△AOC と△BOC の面積比が 1：3 であるとき，a の値を求めよ。

(三重県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

△AOC の底辺を AC，△BOC の底辺を BC とすると，

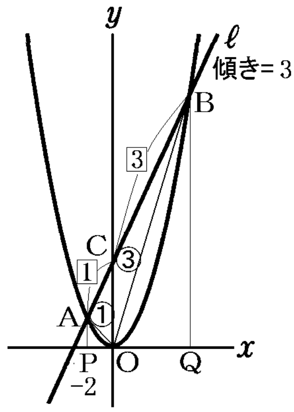
高さは共通になるので，

AC：CB＝(△AOC の面積)：(△BOC の面積)＝1：3 となる。

[解答] $a=\dfrac{3}{4}$

[解説]

<Point> 面積比→底辺の比→x 座標の比



△AOC の底辺を AC，△BOC の底辺を BC とすると，

高さは共通になるので，

AC：CB＝(△AOC の面積)：(△BOC の面積)＝1：3 となる。

図のように，x 軸に垂線 AP，BQ をひくと，AP//CO//BQ なので，

PO：OQ＝AC：CB＝1：3 となる。

点 A の x 座標は－2 なので P の x 座標も－2 で，点 Q の x 座標は 2×3＝6 になる。したがって，点 B の x 座標も 6 になる。

点 A，B は $y=ax^2$ 上にあるので，

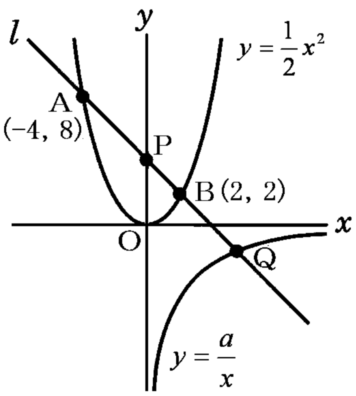
点 A の y 座標は，$x=-2$ を $y=ax^2$ に代入して，$y=a\times(-2)^2=4a$

点 B の y 座標は，$x=6$ を $y=ax^2$ に代入して，$y=a\times6^2=36a$

したがって，(直線 AB の傾き)＝$\dfrac{36a-4a}{6-(-2)}=\dfrac{32a}{8}=4a=3$　よって，$a=3\div4=\dfrac{3}{4}$

[問題]

右の図のように，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上の点 A(−4, 8)，B(2，2)を通る直線 l がある。また，この直線が y 軸および関数 $y=\frac{a}{x}$ (a は負の定数， $x>0$)のグラフと交わる点を，それぞれ P，Q とする。△OAP : △OQP＝2 : 3 になるとき，a の値を求めよ。



(沖縄県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

△OAP の底辺を AP，△OQP の底辺を PQ とすると，高さは O から l におろした垂線の長さで共通になる。

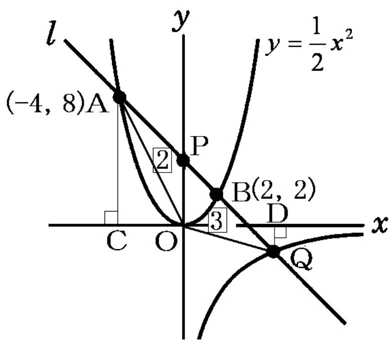
したがって，底辺の比は面積比と等しくなり，

AP : PQ＝△OAP : △OQP＝2 : 3 になる。

右図のように, 点 A, Q から x 軸に垂線 AC, QD をひくと，

AC // PO // QD なので,

CO : OD＝AP : PQ＝2 : 3 になる。



[解答] $a=-12$

[解説]

<Point> 面積比→底辺の比→ x 座標の比

△OAP の底辺を AP，△OQP の底辺を PQ とすると，高さは O から l におろした垂線の長さで共通になる。

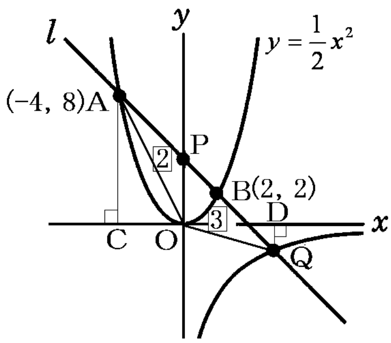
したがって，底辺の比は面積比と等しくなり，

AP : PQ＝△OAP : △OQP＝2 : 3 になる。

右図のように, 点 A, Q から x 軸に垂線 AC, QD をひくと，

AC // PO // QD なので,

CO : OD＝AP : PQ＝2 : 3 なになる。



CO＝4 なので，4 : OD＝2 : 3 となる。

したがって，2OD＝12，OD＝6

よって，点 Q の x 座標は 6 になる。

点 Q の y 座標がわかれば， $y=\frac{a}{x}$ に代入して a の値を求めることができる。

そこで，直線 l の式を求める。

2 点 A(−4，8)，B(2，2)を通る直線の式は，$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$の公式より，

$y=\frac{2-8}{2-(-4)}(x-2)+2$，　$y=-(x-2)+2$，　$y=-x+4$

x座標が 6 である点 Q は直線l上にあるので，$y=-x+4$に$x=6$を代入して，

$y=-6+4=-2$

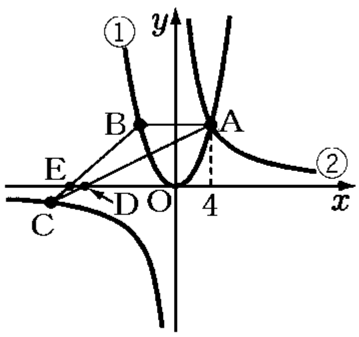
よって，点 Q の座標は(6，−2)

点 Q は$y=\frac{a}{x}$上にもあるので，$x=6,\ y=-2$を$y=\frac{a}{x}$に代入して，

$-2=\frac{a}{6},\ a=(-2)\times 6$　よって，$a=-12$

[問題]

右の図で，点 O は原点であり，放物線①は関数$y=\frac{1}{2}x^2$のグラフである。双曲線②は反比例$y=\frac{a}{x}$のグラフで，$a>0$である。点 A は，放物線①と双曲線②との交点で，そのx座標は 4 である。点 B は，放物線①上の点で，線分 AB はx軸に平行である。点 C は，双曲線②上の点で，そのx座標は負の数である。線分 AC，線分 BC とx軸との交点をそれぞれ D，E とする。



AB : DE＝5 : 1 であるとき，点 C の座標を求めよ。

(香川県)(***)

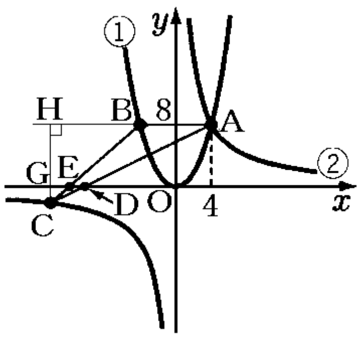
[解答欄]

[ヒント]

右図のように，点 G，H をとると，CH : CG＝AB : DE，

AB : DE＝5 : 1 なので，CH : CG＝5 : 1

よって，CG : GH＝1 : (5−1)＝1 : 4

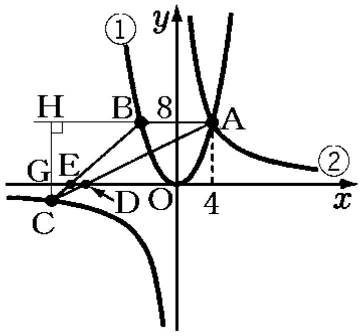


[解答](−16，−2)

[解説]

点 A の x 座標は 4 なので， $x=4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると， $y=\frac{1}{2}\times 16=8$

点 A は $y=\frac{a}{x}$ 上にもあるので， $x=4$， $y=8$ を $y=\frac{a}{x}$ に代入すると，$8=\frac{a}{4}$， $a=32$



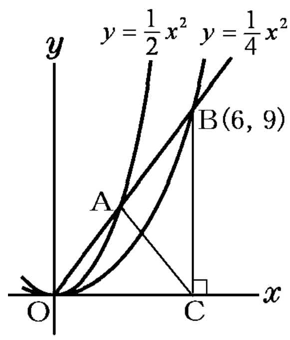
右図のように，点 G，H をとると，CH：CG＝AB：DE,
AB：DE＝5：1 なので，CH：CG＝5：1
よって，CG：GH＝1：(5－1)＝1：4
点 H の y 座標は点 A の y 座標と等しいので 8 である。
したがって，点 C の y 座標は－2 である。

双曲線の式は $y=\frac{32}{x}$ なので， $y=-2$ を代入すると，

$-2=\frac{32}{x}$， $-2x=32$， $x=-16$　よって点 C の座標は(－16，－2)である。

[問題]

右の図のように，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$， $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフと，原点を通る直線との交点をそれぞれ A，B とする。点 B から x 軸に垂線 BC をひく。点 B の座標が(6，9)のとき，△BOC と△BAC の面積の比を求めなさい。



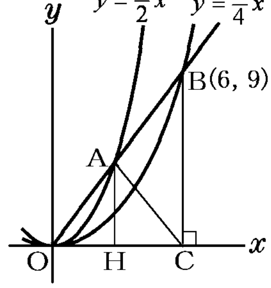
(埼玉県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

<Point> x 座標の比→底辺の比→面積比

△BOC の底辺を OB，△BAC の底辺を AB とすると，高さは共通になる。したがって，△BOC と△BAC の面積の比は底辺の比 OB：AB と等しくなる。点 A の座標がわかれば，この比がわかる。

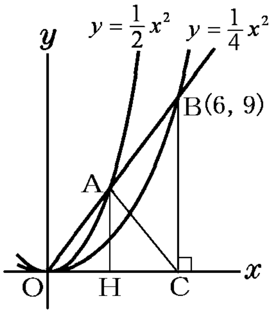


[解答]2：1

[解説]
<Point> x座標の比→底辺の比→面積比

△BOCの底辺をOB，△BACの底辺をABとすると，高さは共通になる。したがって，△BOCと△BACの面積の比は底辺の比OB：ABと等しくなる。

点Aの座標がわかれば，この比がわかる。・・・①



まず，直線OBの式を求める。OBは原点を通る直線なので，その式は$y=ax$とおくことができる。点Bの座標は(6，9)なので，

$x=6,\ y=9$を$y=ax$に代入して，

$9=a\times 6,\ a=9\div 6=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$　よってOBの式は$y=\frac{3}{2}x$となる。

次に，$y=\frac{3}{2}x$と$y=\frac{1}{2}x^2$の交点Aを求める。

$y=\frac{1}{2}x^2$を$y=\frac{3}{2}x$に代入して，$\frac{1}{2}x^2=\frac{3}{2}x$

両辺を2倍して，$x^2=3x$，$x^2-3x=0,\ x(x-3)=0$　よって，$x=0,\ 3$

したがって，点Aのx座標は$x=3$で，右上図のOH＝3となる。

したがって，OA：OB＝OH：OC＝3：6＝1：2

よって，OB：AB＝2：(2－1)＝2：1

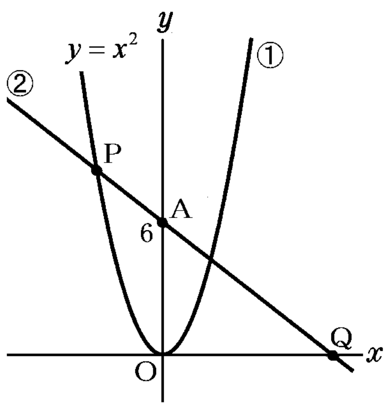
①より，△BOCと△BACの面積の比は2：1となる。

[問題]

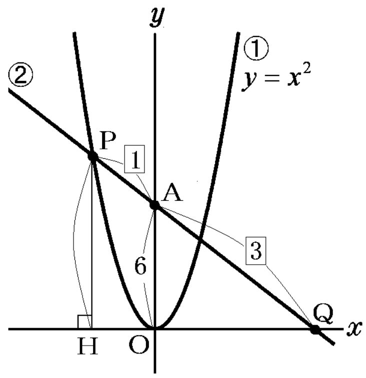
右の図において，曲線①は関数$y=x^2$のグラフである。点A(0，6)を通る右下がりの直線②が曲線①と交わる2点のうちx座標が負の点をPとし，また，直線②とx軸との交点をQとする。PA：AQ＝1：3となるとき，点Pの座標を求めよ。

(茨城県)(***)

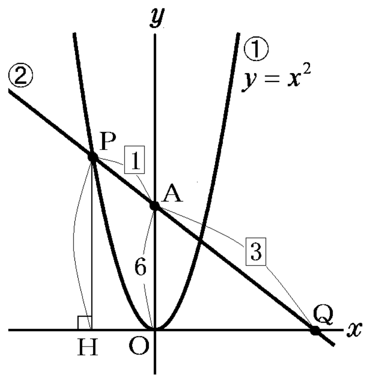
[解答欄]



[ヒント]
P から x 軸に垂線 PH をひく。
AO // PH なので，平行線の性質より，
AO：PH＝QA：QP＝3：(3＋1)＝3：4
AO＝6 より PH を求める。
→点 P の座標

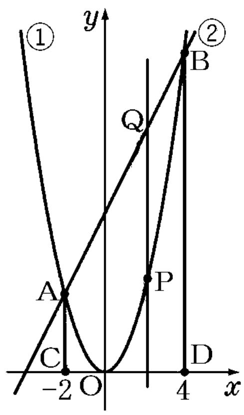


[解答] $\left(-2\sqrt{2},\ 8\right)$
[解説]
P から x 軸に垂線 PH をひく。
AO // PH なので，平行線の性質より，
AO：PH＝QA：QP
PA：AQ＝1：3 なので，QA：QP＝3：(3＋1)＝3：4
また，A の y 座標が 6 なので，AO＝6
よって，6：PH＝3：4
比の内項の積は外項の積に等しいので，
PH×3＝6×4，PH＝6×4÷3＝8
よって，点 P の y 座標は 8 である。



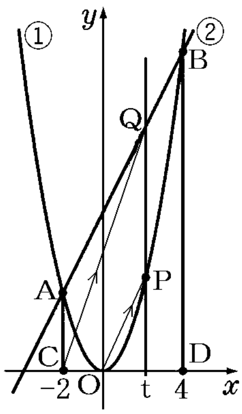
点 P は $y=x^2$ 上の点なので，$y=8$ を $y=x^2$ に代入して，$8=x^2$ となる。
$x<0$ なので，$x=-\sqrt{8}=-\sqrt{4\times 2}=-2\sqrt{2}$　よって，点 P の座標は $\left(-2\sqrt{2},\ 8\right)$ となる。

[問題]
右の図において，①は関数 $y=x^2$，②は関数 $y=2x+8$ のグラフである。2 点 A，B は①と②の交点で，x 座標はそれぞれ－2 と 4 である。点 A，B から x 軸に垂線をひき，x 軸との交点をそれぞれ C，D とする。また，点 P は①のグラフ上を A から B まで動く。点 P の x 座標が正のとき，点 P を通り，y 軸に平行な直線をひき，②のグラフとの交点を Q とする。直線 CQ と直線 OP が平行となるような点 P の座標を求めよ。
(石川県)(***)

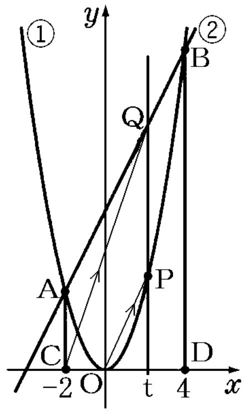


[解答欄]

[ヒント]
点P，Qのx座標を$t(t>0)$とする→点P，Qのy座標
点Pの座標→直線OPの傾き
点C，Qの座標→直線CQの傾き
(直線OPの傾き)＝(直線CQの傾き)で式を立てる。



[解答]$(2\sqrt{2}$，8)
[解説]
点Pのx座標を$t(t>0)$とすると，点Qのx座標もtになる。
点Pは$y=x^2$上にあるので，$x=t$のとき$y=t^2$になる。
よって，点Pの座標は$\left(t,\ t^2\right)$である。
点Qは$y=2x+8$上にあるので，$x=t$のとき$y=2t+8$になる。
よって，点Qの座標は$\left(t,\ 2t+8\right)$である。
「直線CQと直線OPが平行」とあるので，この2つの直線の傾きは等しくなる。



C(−2，0)，$Q\left(t,\ 2t+8\right)$より，
(直線CQの傾き)＝$\dfrac{2t+8-0}{t-(-2)}=\dfrac{2t+8}{t+2}$
O(0，0)，$P\left(t,\ t^2\right)$より，
(直線OPの傾き)＝$\dfrac{t^2-0}{t-0}=t$
よって，$\dfrac{2t+8}{t+2}=t$
両辺に$t+2$をかけると，$2t+8=t^2+2t$，$t^2=8$，$t=\pm\sqrt{8}=\pm2\sqrt{2}$
$t>0$なので，$t=2\sqrt{2}$
よって，点Pのx座標は$x=2\sqrt{2}$
$x=2\sqrt{2}$を$y=x^2$に代入すると，$y=\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$
したがって，点Pの座標は$(2\sqrt{2}$，8)である。

【】面積

【】面積を求める：2 つの三角形の和

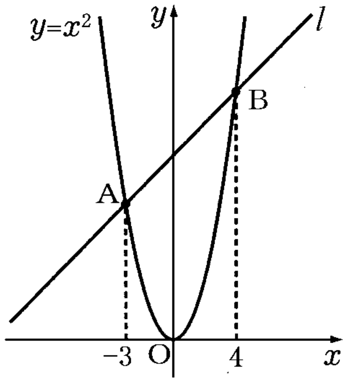
[問題]

右の図のように，関数 $y=x^2$ のグラフと直線 l が 2 点 A，B で交わっている。点 A の x 座標は－3，点 B の x 座標は 4 である。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 直線 l の式を求めよ。

(2) △OAB の面積を求めよ。

(富山県)(***)



[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(1) まず，点 A，B の座標を求める。

2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の式は，

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って求めることができる。

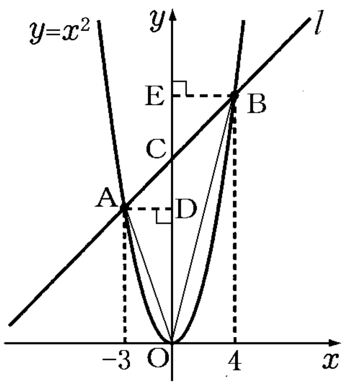
(2) △OAB を△OAC と△OBC に分けて考える。

OC を共通の底辺とすると，

△OAC の高さは AD，

△OBC の高さは BE

になる。



[解答](1) $y=x+12$ (2) 42

[解説]

(1) まず，点 A，B の座標を求める。

点 A の x 座標は－3 で，点 A は $y=x^2$ 上にあるので，

$y=x^2$ に $x=-3$ を代入して，$y=(-3)^2=9$

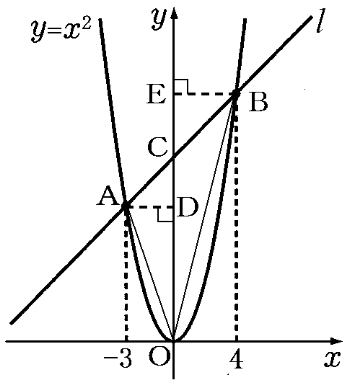
よって，点 A の座標は(－3，9)

点 B の x 座標は 4 で，点 B は $y=x^2$ 上にあるので，

$y=x^2$ に $x=4$ を代入して，$y=4^2=16$

よって，点 B の座標は(4，16)

直線 l は，A(－3，9)，B(4，16)を通るので，



$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使うと，

$y=\dfrac{16-9}{4-(-3)}(x+3)+9$，$y=\dfrac{7}{7}(x+3)+9$，$y=x+12$

(2) △OAB を△OAC と△OBC に分けて考える。
点 C は直線 $y=x+12$ の切片(y 切片)なので，点 C の y 座標は 12 である。よって，OC＝12

(△OAC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ AD)＝$\dfrac{1}{2}\times12\times3$＝18

(△OBC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ BE)＝$\dfrac{1}{2}\times12\times4$＝24

よって，(△OAB の面積)＝(△OAC の面積)＋(△OBC の面積)＝18＋24＝42

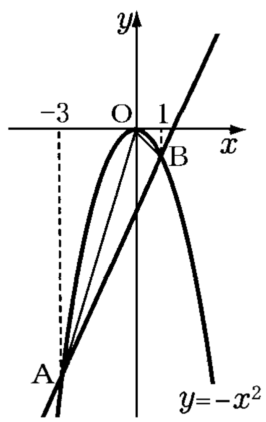
[問題]

右の図のように，関数 $y=-x^2$ のグラフ上に， x 座標がそれぞれ－3，1 となる点 A，B をとるとき，次の各問いに答えよ。

(1) 2 点 A，B を通る直線の式を求めよ。

(2) △OAB の面積を求めよ。

(新潟県)(***)



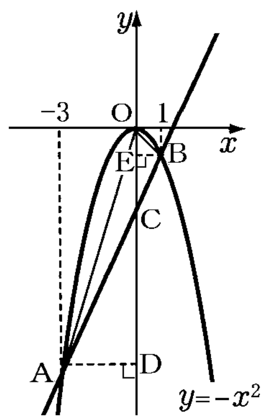
[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $y=2x-3$　(2) 6

[解説]

(1) まず，点 A，B の座標を求める。



点 A の x 座標は－3 で，点 A は $y=-x^2$ 上にあるので，

$y=-x^2$ に $x=-3$ を代入して， $y=-(-3)^2=-9$

よって，点 A の座標は(－3，－9)

点 B の x 座標は 1 で，点 B は $y=-x^2$ 上にあるので，

$y=-x^2$ に $x=1$ を代入して， $y=-1^2=-1$

よって，点 B の座標は(1，－1)

直線 AB は，A(－3，－9)，B(1，－1)を通るので，

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使うと，

$y=\dfrac{-1-(-9)}{1-(-3)}(x-(-3))-9$，　$y=2(x+3)-9$，　$y=2x-3$

(2) △OAB を△OAC と△OBC に分けて考える。

点 C は直線 $y=2x-3$ の y 切片なので，点 C の y 座標は－3 である。よって，OC＝3

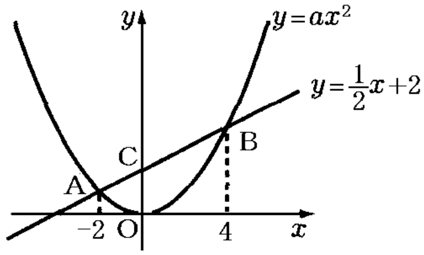
(△OAC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ AD)＝$\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{9}{2}$

(△OBC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ BE)＝$\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{3}{2}$

よって，(△OAB の面積)＝(△OAC の面積)＋(△OBC の面積)＝$\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=\frac{12}{2}=6$

[問題]

右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフと直線 $y=\frac{1}{2}x+2$ が，2 点 A，B で交わっている。2 点 A，B の x 座標が，それぞれ－2，4 であるとき，次の各問いに答えよ。ただし，$a>0$ とする。また，原点 O から点(1，0)までの距離及び原点 O から点(0，1)までの距離をそれぞれ 1cm とする。



(1) a の値を求めよ。

(2) △OAB の面積を求めよ。

(千葉県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(1) $x=-2$ を $y=\frac{1}{2}x+2$ に代入して点 A の座標を求める。点 A は $y=ax^2$ 上にもあるので，点 A の座標を $y=ax^2$ に代入すれば a の値を求めることができる。

[解答](1) $a=\frac{1}{4}$ (2) 6cm²

[解説]

(1) 点 A の x 座標は－2 である。$x=-2$ を $y=\frac{1}{2}x+2$ に代入すると，$y=\frac{1}{2}\times(-2)+2=1$

点 A は $y=ax^2$ 上にもあるので，$x=-2$，$y=1$ を $y=ax^2$ に代入すると，$1=4a$，$a=\frac{1}{4}$

(2) △OAB を△ACO と△BCO に分けて考える。

点 C の y 座標は $y=\frac{1}{2}x+2$ の切片(y 切片)なので 2 である。よって，CO＝2(cm)である。

△ACO の底辺を CO とすると，高さは 2(cm)なので，(△ACO の面積)＝$\frac{1}{2}$×2×2＝2(cm²)

△BCO の底辺を CO とすると，高さは 4(cm)なので，(△BCO の面積)＝$\frac{1}{2}$×2×4＝4(cm²)

よって，(△OAB の面積)＝(△ACO の面積)＋(△BCO の面積)＝2＋4＝6(cm²)

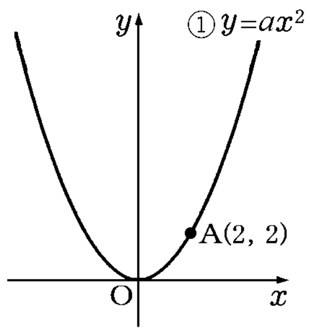
[問題]

右の図のように関数 $y=ax^2$・・・①のグラフが，点 A(2，2)を通っている。このとき，次の各問いに答えよ。ただし，原点は O とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) 点 A を通り，傾きが－1 の直線の式を求めよ。

(3) (2)で求めた直線と①のグラフとの交点のうち，点 A とは異なる点を B とするとき，△OAB の面積を求めよ。



(鳥取県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(1) 点 A(2，2)は $y=ax^2$ 上にあるので，点 A の座標を $y=ax^2$ に代入して a の値を求める。

(2) 傾きが m で点 $(x_1,\ y_1)$ を通る直線の式は，$y=m(x-x_1)+y_1$ の公式を使って求めることができる。

(3) $y=ax^2$ と $y=m(x-x_1)+y_1$ の交点は，$ax^2=m(x-x_1)+y_1$ とおいて求める。

[解答](1) $a=\frac{1}{2}$ (2) $y=-x+4$ (3) 12

[解説]

(1) $y=ax^2$ のグラフが，点 A(2，2)を通っているので，

$x=2,\ y=2$ を $y=ax^2$ に代入して，$2=a\times4$，$a=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

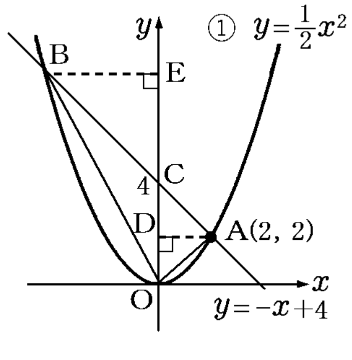
(2) $y=m(x-x_1)+y_1$ の公式を使うと，点 A(2，2)を通り傾きが－1 の直線の式は，

$y=-(x-2)+2$，$y=-x+4$

(3) 右図のように, △OAB を△OAC と△OBC に分けて考える。点 C は直線 $y=-x+4$ の y 切片なので，点 C の y 座標は 4 である。よって，OC＝4

(△OAC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ AD)＝$\frac{1}{2}\times4\times2=4$

△OBC の面積を求めるためには, 高さ BE を求める必要がある。



そこで，点 B の x 座標を求める。

点 B は $y=\frac{1}{2}x^2$ ･･･①と， $y=-x+4$ ･･･②の交点である。

②を①に代入すると， $-x+4=\frac{1}{2}x^2$

$-2x+8=x^2$， $x^2+2x-8=0$， $(x+4)(x-2)=0$， よって， $x=-4,\ 2$

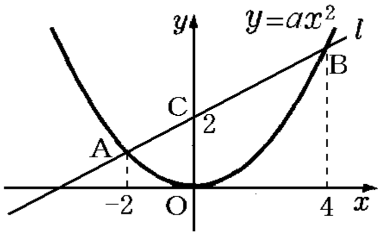
したがって，点 B の x 座標は－4 となり，BE＝4 となる。

(△OBC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ BE)＝$\frac{1}{2}\times4\times4=8$

よって，(△OAB の面積)＝(△OAC の面積)＋(△OBC の面積)＝4＋8＝12

[問題]

右の図で，曲線は関数 $y=ax^2$ のグラフである。曲線上に x 座標が－2，4 である 2 点 A，B をとり，この 2 点を通る直線 l をひく。直線 l が y 軸と点 C(0，2)で交わるとき，次の各問いに答えよ。ただし，座標軸の単位の長さを 1cm とする。



(1) △OBC の面積を求めよ。

(2) a の値を求めよ。

(埼玉県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

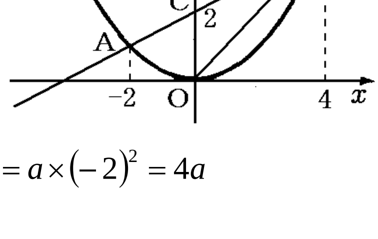
[ヒント]

(2) まず， $y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って 2 点 $A(-2,\ 4a)$，$B(4,\ 16a)$ を通る直線の式を求める。次に，直線 AB は点 C(0，2)を通ることに注目して a の値を求める。

[解答](1) 4cm² (2) $a=\frac{1}{4}$

[解説]

(1) △OBC の底辺を OC とすると，高さは右図の BH である。OC＝2cm，BH＝4cm なので，



(△OBC の面積)＝$\frac{1}{2}$×OC×BH＝$\frac{1}{2}\times2\times4$＝4(cm²)

(2) まず，直線 AB の式を a を使って表す。

点 A の x 座標は－2 なので， $x=-2$ を $y=ax^2$ に代入して， $y=a\times(-2)^2=4a$

よって，点 A$\left(-2,\ 4a\right)$

点 B の x 座標は 4 なので， $x=4$ を $y=ax^2$ に代入して， $y=a\times 4^2=16a$

よって，点 B$\left(4,\ 16a\right)$

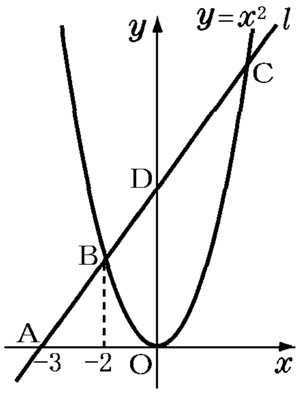
$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)+y_1$ の公式を使って 2 点 A$\left(-2,\ 4a\right)$, B$\left(4,\ 16a\right)$を通る直線の式を求める。

$y=\dfrac{16a-4a}{4-(-2)}\left(x-(-2)\right)+4a$， $y=2a\left(x+2\right)+4a$， $y=2ax+8a$

直線 AB は点 C(0，2)を通るので， $x=0,\ y=2$ を $y=2ax+8a$ に代入すると，

$2=8a$　よって， $a=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

[問題]



右の図で，曲線は関数 $y=x^2$ のグラフである。 x 軸上に x 座標が－3 である点 A をとり，点 A を通り傾きが正の直線 l をひく。直線 l と曲線との交点のうち x 座標が負のものを B, 正のものを C とし，直線 l と y 軸との交点を D とする。点 B の x 座標が－2 のとき，△BOD の面積を求めよ。ただし，座標軸の単位の長さを 1cm とする。

(埼玉県)(***)

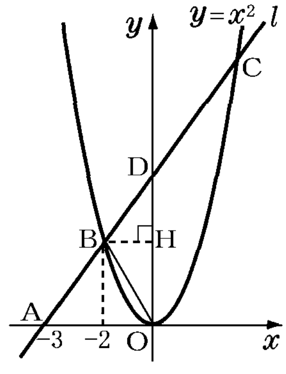
[解答欄]

[ヒント]

△BOD の底辺を OD とすると，高さは 2 である。点 D は直線 l の切片(y 切片)なので，直線 l の式を求めれば，D の座標がわかる。 $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)+y_1$ の公式を使って，2 点 A，B を通る直線 l の式を求めることができる。

[解答]12cm²

[解説]



右図で，△BOD の底辺を OD とすると，高さは BH になる。

点 B の x 座標は－2 なので，BH＝2 である。

点 D の座標がわかれば，OD の長さを求めることができる。

そこで，直線 l の式を求める。

点 A の座標は(－3，0)である。

点 B の x 座標は－2 で，点 B は $y=x^2$ 上にあるので，

$y=x^2$ に $x=-2$ を代入して， $y=\left(-2\right)^2=4$

よって，点 B の座標は(−2，4)

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って 2 点 A(−3，0)，B(−2，4)を通る直線の式を求める。

$y=\dfrac{4-0}{-2-(-3)}(x-(-3))+0$， $y=4(x+3)$， $y=4x+12$

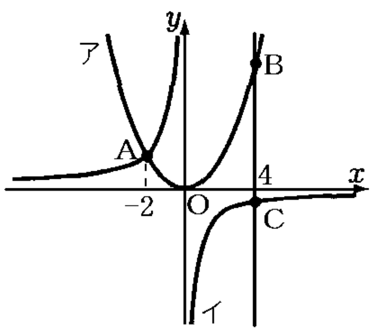
$y=4x+12$ に $x=0$ を代入すると， $y=12$

よって，点 D の y 座標は 12 で，OD＝12

(△BOD の面積)＝$\dfrac{1}{2}$ ×OD×BH＝$\dfrac{1}{2}$×12×2 ＝12(cm^2)

[問題]

右の図において，放物線アは関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフで，放物線ア上にある 2 点 A，B は， x 座標がそれぞれ−2，4 である。また，双曲線イは点 A を通る反比例のグラフで，点 C は, 点 B を通り y 軸に平行な直線と双曲線イとの交点である。次の各問いに答えよ。



(1) A の y 座標を求めよ。

(2) 双曲線イのグラフについて， y を x の式で表せ。

(3) △ABC の面積を求めよ。

(群馬県)(***)

[解答欄]

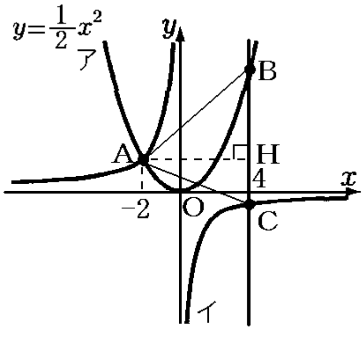
(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(1) 点 A は $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上にあるので， $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に $x=-2$ を代入すれば点 A の y 座標を求めることができる。

(2) 双曲線イのグラフの式を $y=\dfrac{a}{x}$ とおく。点 A は $y=\dfrac{a}{x}$ 上にあるので，点 A の座標を代入すれば a の値を求めることができる。

(3) 右図のように△ABC の底辺を BC とすると，高さは AH になる。BC の長さを求めるために，点 B と点 C の y 座標を求める。



[解答](1) 2　(2) $y=-\frac{4}{x}$　(3) 27

[解説]

(1) 点Aのx座標は−2で，点Aは$y=\frac{1}{2}x^2$上にあるので，

$y=\frac{1}{2}x^2$に$x=-2$を代入して，

$y=\frac{1}{2}\times(-2)^2=2$

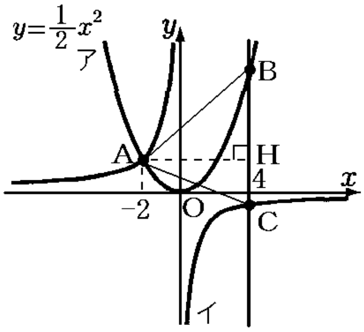
(2) 双曲線イのグラフの式を$y=\frac{a}{x}$とおく。

点A(−2，2)は$y=\frac{a}{x}$上にあるので，$y=\frac{a}{x}$に$x=-2$，$y=2$を代入して，

$2=\frac{a}{-2}$，$a=2\times(-2)=-4$

よって，双曲線イのグラフの式は，$y=\frac{-4}{x}$，$y=-\frac{4}{x}$

(3) 図のように△ABCの底辺をBCとすると，高さはAHになる。BCの長さを求めるために，点Bと点Cのy座標を求める。



点Bは$y=\frac{1}{2}x^2$上にあり，x座標は4なので，$y=\frac{1}{2}x^2$に$x=4$を代入して，$y=\frac{1}{2}\times4^2=8$

点Cは$y=-\frac{4}{x}$上にあり，x座標は4なので，$y=-\frac{4}{x}$に$x=4$を代入して，$y=-\frac{4}{4}=-1$

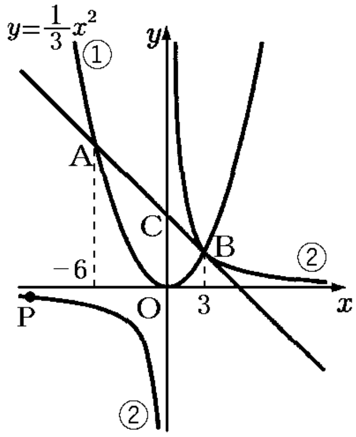
よって，BC＝(点Bのy座標)−(点Cのy座標)＝8−(−1)＝9

また，図より，AH＝4−(−2)＝6

よって，(△ABCの面積)＝$\frac{1}{2}\times$(底辺BC)×(高さAH)＝$\frac{1}{2}\times9\times6=27$

[問題]

右の図において，①は関数$y=\frac{1}{3}x^2$のグラフ，②は反比例のグラフである。①と②は点 B で交わっていて，点 B の x 座標は 3 である。また，①のグラフ上に x 座標が−6 である点 A をとり，直線 AB と y 軸との交点を C とする。②のグラフ上に x 座標が負である点 P をとる。△OAB と△OCP の面積が等しくなるとき，点 P の座標を求めよ。



(山形県)(***)

[解答欄]

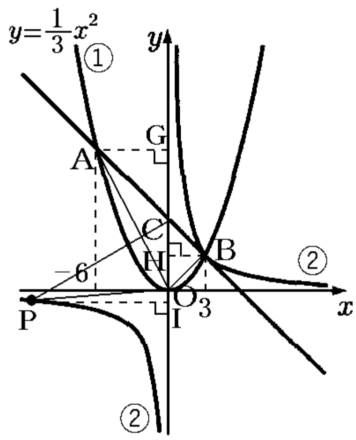
[ヒント]

点 A，B の座標を求める

→直線 AB の式を求める，反比例のグラフ②の式を求める。

→△OAB の面積を△AOC と△BOC に分けて求める。

図のように，△OCP の底辺を OC とすると，高さは PI である。



[解答](−9，−1)

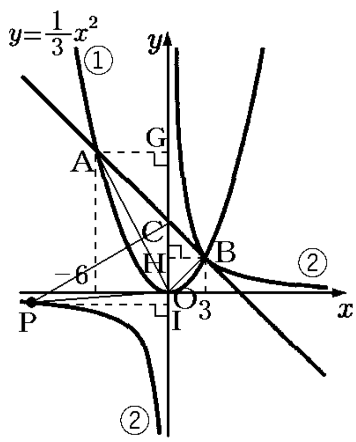
[解説]

まず，△OAB の面積を求める。

右図のように，△OAB を△AOC と△BOC に分けて考える。

右図のように，OC を共通の底辺と考えると，△AOC の高さは AG＝6 で，△BOC の高さは BH＝3 である。・・・(1)

そこで，点 C の座標を求めるために直線 AB の式を求める。



点 A の y 座標は，$y=\frac{1}{3}x^2$に$x=-6$を代入すると，

$y=\frac{1}{3}\times(-6)^2=\frac{36}{3}=12$なので，点 A の座標は(−6，12)

点 B の y 座標は，$y=\frac{1}{3}x^2$に$x=3$を代入すると，

$y=\frac{1}{3}\times 3^2=3$なので，点 B の座標は(3，3)

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$の公式を使って 2 点 A(−6，12)，B(3，3)を通る直線の式を求める。

$y=\dfrac{3-12}{3-(-6)}(x-3)+3$、$y=-(x-3)+3$，$y=-x+6$

点 C は $y=-x+6$ の切片(y 切片)なので，点 C の y 座標は 6 になる。

よって，OC＝6･･･(2)

(1)，(2)より，

(△AOC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ AG)＝$\dfrac{1}{2}\times6\times6$＝18

(△BOC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ BH)＝$\dfrac{1}{2}\times6\times3$＝9

よって，(△OAB の面積)＝(△AOC の面積)＋(△BOC の面積)＝18＋9＝27

次に，点 P の座標を求める。

「△OAB と△OCP の面積が等しくなる」とあるので，

(△OCP の面積)＝27 である。

図のように，△OCP の底辺を OC とすると，高さは PI である。

よって，(△OCP の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ PI)＝27

$\dfrac{1}{2}$×6×(高さ PI)＝27，3×(高さ PI)＝27，(高さ PI)＝27÷3＝9

したがって，点 P の x 座標は－9 になる。

点 P の y 座標を求めるために反比例のグラフ②の式を求める。

反比例なので，②の式は $y=\dfrac{k}{x}$ とおくことができる。

②のグラフは，点 B(3，3)を通るので，$y=\dfrac{k}{x}$ に $x=3$, $y=3$ を代入して，$3=\dfrac{k}{3}$，$k=3\times3=9$

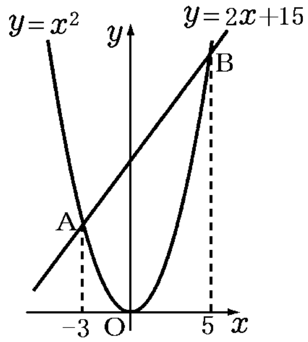
よって，②の式は $y=\dfrac{9}{x}$ となる。点 P の x 座標は－9 なので，$y=\dfrac{9}{-9}=-1$

よって，点 P の座標は(－9，－1)である。

[問題]

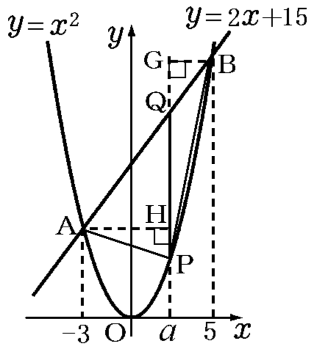
　右の図のように，関数 $y=x^2$ と関数 $y=2x+15$ のグラフがある。2 つのグラフは 2 点 A，B で交わり，点 A，B の x 座標は，それぞれ－3，5 である。関数 $y=x^2$ のグラフ上に点 P を，△APB の面積が 48 になるようにとりたい。ただし，点 P の x 座標は 0＜ x ＜5 とする。点 P の座標を求めよ。

(長野県)(***)



[解答欄]

[ヒント]



右図のように，y 軸に平行な線分 PQ をひき，点 P，Q の x 座標を $x=a$ とする。

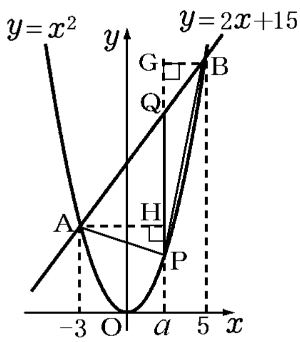
△APB を△APQ と△BPQ に分けて考え，

△APQ と△BPQ の共通の底辺を PQ とする。

△APQ と△BPQ の面積を a を使って表す。

[解答](3，9)

[解説]



右図のように，y 軸に平行な線分 PQ をひき，点 P，Q の x 座標を $x=a$ とする。

△APB を△APQ と△BPQ に分けて考え，

△APQ と△BPQ の共通の底辺を PQ とする。

点 P の x 座標は a で，点 P は $y=x^2$ 上にあるので，

$x=a$ を $y=x^2$ に代入して $y=a^2$

点 Q の x 座標は a で，点 Q は $y=2x+15$ 上にあるので，

$x=a$ を $y=2x+15$ に代入して $y=2a+15$

したがって，(底辺 PQ)＝(点 Q の y 座標)－(点 P の y 座標)＝ $2a+15-a^2$

(△APQ の高さ AH)＝ $a-(-3)=a+3$，(△BPQ の高さ BG)＝ $5-a$

したがって，

(△APQ の面積)＝ $\dfrac{1}{2}$ ×(底辺 PQ)×(高さ AH)＝ $\dfrac{1}{2}\times(2a+15-a^2)\times(a+3)$

$=\dfrac{1}{2}(2a^2+6a+15a+45-a^3-3a^2)=\dfrac{1}{2}(-a^3-a^2+21a+45)$

(△BPQ の面積)＝ $\dfrac{1}{2}$ ×(底辺 PQ)×(高さ BG)＝ $\dfrac{1}{2}\times(2a+15-a^2)\times(5-a)$

$=\dfrac{1}{2}(10a-2a^2+75-15a-5a^2+a^3)=\dfrac{1}{2}(a^3-7a^2-5a+75)$

(△APB の面積)＝(△APQ の面積)＋(△BPQ の面積)

$=\dfrac{1}{2}(-a^3-a^2+21a+45)+\dfrac{1}{2}(a^3-7a^2-5a+75)=\dfrac{1}{2}(-8a^2+16a+120)=-4a^2+8a+60$

「△APB の面積が 48 になる」ので，$-4a^2+8a+60=48$

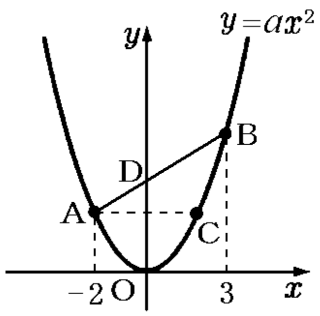
$-4a^2+8a+12=0$，$a^2-2a-3=0$，$(a+1)(a-3)=0$，$a=-1,\ a=3$

「点 P の x 座標は 0＜ x ＜5 とする」とあるので，$a=-1$ は不適，$a=3$ は適する。

点Pは $y=x^2$ 上にあるので，$y=x^2$ に $x=3$ を代入して，$y=3^2=9$
よって，点Pの座標は(3，9)

[問題]

右の図のように，関数 $y=ax^2$（a は正の定数)のグラフ上に，2点A，Bがある。点Aの x 座標を−2，点Bの x 座標を3とする。点Aと y 軸について対称な点をCとし，線分ABと y 軸との交点をDとする。△BCDの面積が10のとき，a の値を求めよ。

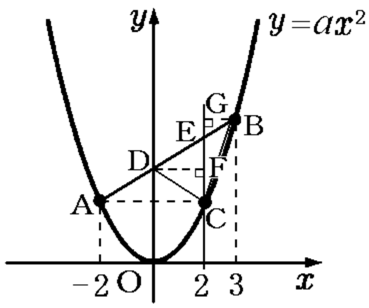


(北海道)(****)

[解答欄]

[ヒント]

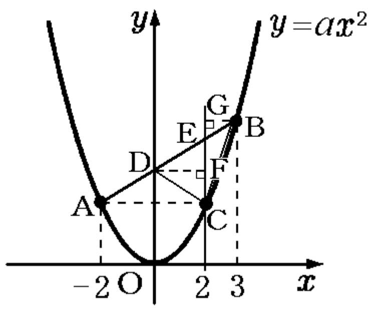
右図のように，y 軸と平行な直線CEをひき，点F，Gをとる。△BCDを△BCEと△DCEに分けて考える。
△BCEと△DCEの共通の底辺をCEとする。
CEの長さを求めるために，点CとEの y 座標を求める。



[解答] $a=\dfrac{5}{3}$

[解説]

x 座標が−2である点Aと y 軸について対称な点Cの x 座標は2である。右図のように，y 軸と平行な直線CEをひき，点F, Gをとる。△BCDを△BCEと△DCEに分けて考える。
△BCEと△DCEの共通の底辺をCEとする。
CEの長さを求めるために，点CとEの y 座標を求める。



点Cは $y=ax^2$ 上にあり，点Cの x 座標は2なので，
$y=ax^2$ に $x=2$ を代入すると，$y=a\times 2^2=4a$
よって，点Cの y 座標は $4a$ である。･･･①
次に，点Eの y 座標を求めるために，直線ABの式を求めておく。
点Aの x 座標は−2なので，$x=-2$ を $y=ax^2$ に代入して，$y=a\times(-2)^2=4a$
よって，点Aの座標は $(-2,\ 4a)$
点Bの x 座標は3なので，$x=3$ を $y=ax^2$ に代入して，$y=a\times 3^2=9a$
よって，点Bの座標は $(3,\ 9a)$

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)+y_1$ の公式を使って 2 点 $\mathrm{A}\left(-2,\ 4a\right)$，$\mathrm{B}\left(3,\ 9a\right)$ を通る直線の式を求める。

$y=\dfrac{9a-4a}{3-\left(-2\right)}\left(x-\left(-2\right)\right)+4a$， $y=a\left(x+2\right)+4a$， $y=ax+6a$

点 E は直線 AB 上にあり，点 E の x 座標は 2 なので， $y=ax+6a$ に $x=2$ を代入して，

$y=a\times 2+6a=2a+6a=8a$　よって，点 E の y 座標は $8a$ である。・・・②

①，②より，CE＝$8a-4a=4a$

また，図より，DF＝2，BG＝3－2＝1

(△BCE の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 CE)×(高さ BG)＝$\dfrac{1}{2}\times 4a\times 1=2a$

(△DCE の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 CE)×(高さ DF)＝$\dfrac{1}{2}\times 4a\times 2=4a$

よって，(△BCD の面積)＝(△BCE の面積)＋(△DCE の面積)＝ $2a+4a$ ＝ $6a$

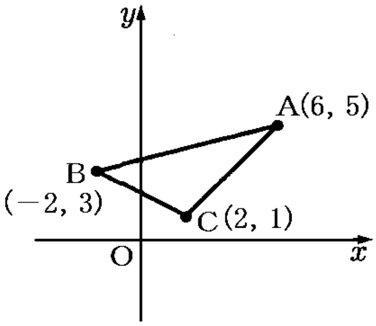
「△BCD の面積が 10」とあるので， $6a=10$， $a=\dfrac{10}{6}=\dfrac{5}{3}$

【】面積を求める：外側長方形から複数の三角形を引く

[問題]

右の図のように，3 点 A(6，5)，B(−2，3)，C(2，1)を頂点とする△ABC がある。△ABC の面積を求めよ。

(佐賀県)(**)

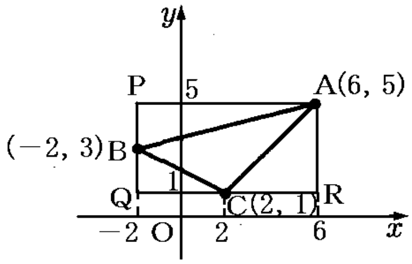


[解答欄]

[ヒント]

右図のように，辺が x 軸， y 軸に平行な長方形 APQR をとる。

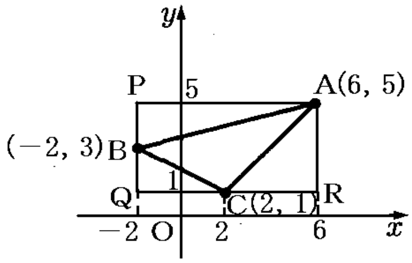
外側の長方形 APQR の面積から△APB，△BQC，△ACR の面積を引いて△ABC の面積を求める。



[解答]12

[解説]

右図のように，辺が x 軸， y 軸に平行な長方形 APQR をとる。



(長方形 APQR の面積)＝AR×QR＝(5−1)×(6−(−2))＝4×8＝32

(△APB の面積)＝$\frac{1}{2}$×AP×BP＝$\frac{1}{2}$×(6−(−2))×(5−3)＝$\frac{1}{2}$×8×2＝8

(△BQC の面積)＝$\frac{1}{2}$×CQ×BQ＝$\frac{1}{2}$×(2−(−2))×(3−1)＝$\frac{1}{2}$×4×2＝4

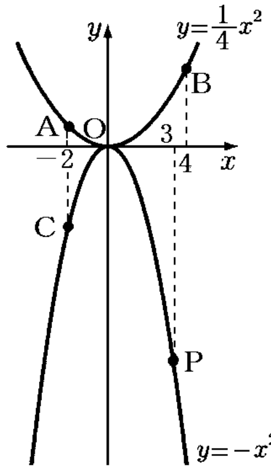
(△ACR の面積)＝$\frac{1}{2}$×CR×AR＝$\frac{1}{2}$×(6−2)×(5−1)＝$\frac{1}{2}$×4×4＝8

よって，

(△ABC の面積)＝(長方形 APQR の面積)−(△APB の面積)−(△BQC の面積)−(△ACR の面積)＝32−8−4−8＝12

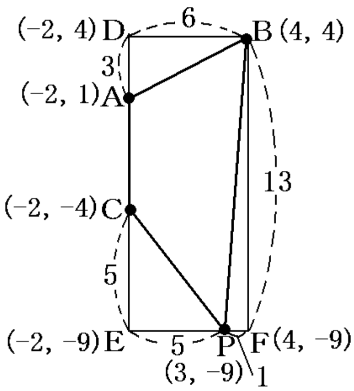
[問題]

右の図のように, 関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があり, その x 座標はそれぞれ－2，4 である。また，関数 $y=-x^2$ のグラフ上に 2 点 C，P があり，点 C の x 座標は－2，点 P はグラフ上を動く点で，その x 座標は正の数である。点 P の x 座標が 3 のとき，四角形 ACPB の面積を求めよ。
(奈良県)(**)

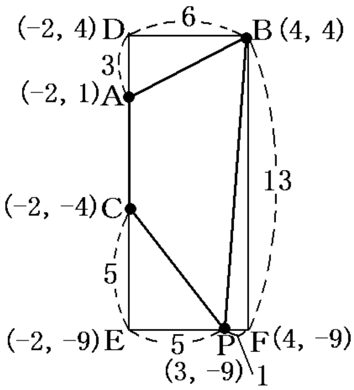


[解答欄]

[ヒント]
右図のように，四角形 ACPB を囲む長方形 BDEF を，長方形の辺が x 軸または y 軸に平行になるようにとる。
外側の長方形 BDEF の面積から，△ABD，△CPE，△BPF の面積を引いて四角形 ACPB の面積を求める。



[解答]50
[解説]
右図のように，四角形 ACPB を囲む長方形 BDEF を，長方形の辺が x 軸または y 軸に平行になるようにとる。
外側の長方形 BDEF の面積から，△ABD，△CPE，△BPF の面積を引いて四角形 ACPB の面積を求める。
まず，A，C，P，B の座標を求める。



A： $x=-2$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入して $y=\frac{1}{4}\times(-2)^2=1$，A(−2，1)
C： $x=-2$ を $y=-x^2$ に代入して $y=-(-2)^2=-4$，C(−2，−4)
P： $x=3$ を $y=-x^2$ に代入して $y=-3^2=-9$，P(3，−9)
B： $x=4$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入して $y=\frac{1}{4}\times 4^2=4$，B(4，4)
A，C，P，B の座標をもとに D，E，F の座標を求めると図のようになる。
これをもとに，各線分の長さを求めると図のようになる。
(長方形 BDEF の面積)＝13×6＝78
(△ABD の面積)＝$\frac{1}{2}$×6×3＝9

(△CPEの面積)＝$\frac{1}{2}$×5×5＝$\frac{25}{2}$

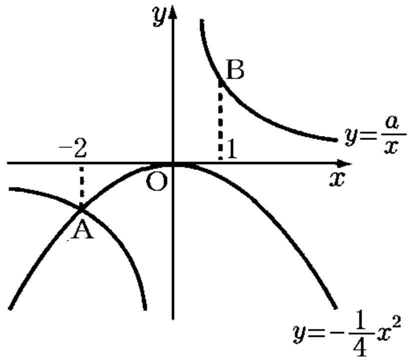
(△BPFの面積)＝$\frac{1}{2}$×1×13＝$\frac{13}{2}$

(四角形ACPB)＝(長方形BDEF)－(△ABD)－(△CPE)－(△BPF)

＝$78-9-\frac{25}{2}-\frac{13}{2}$＝50

[問題]

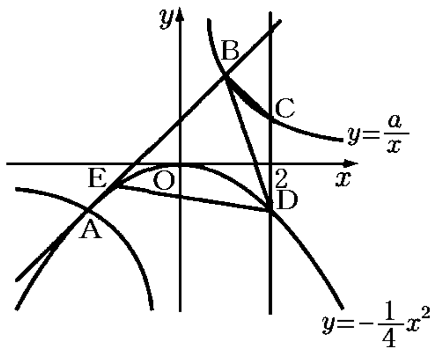
右の図のように，関数$y=\frac{a}{x}$($a>0$)のグラフ上に2点A，Bがあり，それぞれのx座標は－2，1である。関数$y=\frac{a}{x}$と関数$y=-\frac{1}{4}x^2$のグラフは，点Aで交わっている。次の各問いに答えよ。



(1) aの値を求めよ。

(2) 直線ABの式を求めよ。

(3) 右の図のように，関数$y=\frac{a}{x}$のグラフ上にx座標が2である点Cをとる。点Cを通りy軸に平行な直線と関数$y=-\frac{1}{4}x^2$のグラフとの交点をDとする。線分AB上に点Eをとり，△BEDの面積が△BDCの面積の5倍となるようにする。点Eのx座標を求めよ。



(大分県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

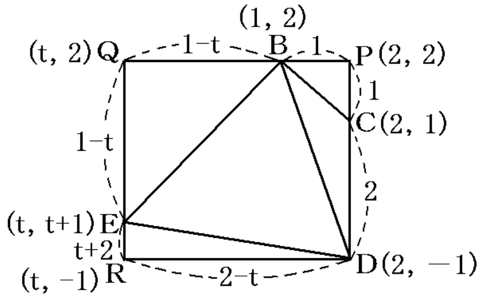
[ヒント]

(1) 点Aは$y=-\frac{1}{4}x^2$上→点Aの座標→$y=\frac{a}{x}$に代入

(2) 点A，Bの座標→直線ABの式

(3) 四角形BCDEを囲む長方形PQRDをとる。

点Eのx座標をtとおいて，各点の座標をtなどを使って表す。



長方形PQRDから各三角形を引いて，△BEDの面積を計算(tで表す)。
(△BEDの面積)＝(△BDCの面積)×5 よりtの式を立てる。

[解答](1) $a=2$ (2) $y=x+1$ (3) $-\dfrac{3}{2}$

[解説]

(1) 点Aは$y=-\dfrac{1}{4}x^2$上にあるので， $x=-2$を$y=-\dfrac{1}{4}x^2$に代入して， $y=-\dfrac{1}{4}\times(-2)^2=-1$

よって，点Aの座標は(−2，−1)

点Aは$y=\dfrac{a}{x}$上にもあるので， $x=-2$, $y=-1$を$y=\dfrac{a}{x}$に代入して，

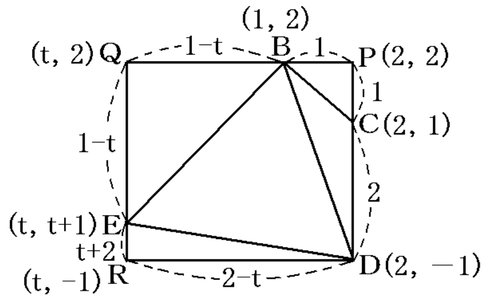
$-1=\dfrac{a}{-2}$， $a=(-1)\times(-2)=2$

(2) 点Bは$y=\dfrac{2}{x}$上にあるので， $x=1$を$y=\dfrac{2}{x}$に代入して， $y=\dfrac{2}{1}=2$

よって，点Bの座標は(1，2)である。(1)より点Aの座標は(−2，−1)なので，

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$の公式より， $y=\dfrac{2-(-1)}{1-(-2)}(x-1)+2$， $y=x-1+2$， $y=x+1$

(3) 右図のように，四角形 BCDE を囲む長方形PQRDを，長方形の辺がx軸またはy軸に平行になるようにとる。



まず，B，C，Dの座標を求める。
(2)より，点Bの座標は(1，2)である。

点Cは$y=\dfrac{2}{x}$上にあり，x座標は2なので，$x=2$を$y=\dfrac{2}{x}$に代入して， $y=\dfrac{2}{2}=1$ よって，点Cの座標は(2，1)

点Dは$y=-\dfrac{1}{4}x^2$上にあり， x座標は2なので， $x=2$を$y=-\dfrac{1}{4}x^2$に代入して，

$y=-\dfrac{1}{4}\times2^2=-1$ よって，点Dの座標は(2，−1)

ここで，点Eのx座標をtとおく。点Eは$y=x+1$上にあるので，
$x=t$を$y=x+1$に代入して， $y=t+1$
よって，点Eの座標は(t， $t+1$)と表すことができる。
B，C，D，Eの座標をもとに，P，Q，Rの座標を求めると図のようになる。
これらの座標から，図のように各辺の長さを求めることができる。図より，
(四角形PQRDの面積)＝PD×RD＝$(1+2)\times(2-t)=6-3t$

(△BDC の面積)$=\frac{1}{2}\times$CD$\times$BP$=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$

「△BED の面積が△BDC の面積の 5 倍となるようにする」とあるので,

(△BED の面積)=(△BDC の面積)×5=1×5=5

(△BCP の面積)$=\frac{1}{2}\times$BP$\times$CP$=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$

(△BEQ の面積)$=\frac{1}{2}\times$BQ$\times$EQ$=\frac{1}{2}\times(1-t)\times(1-t)=\frac{1}{2}(1-t)^2$

(△DER の面積)$=\frac{1}{2}\times$DR$\times$ER$=\frac{1}{2}(2-t)\times(2+t)=\frac{1}{2}(4-t^2)$

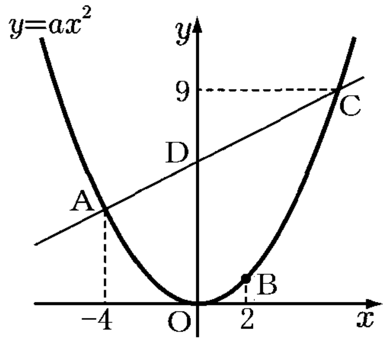
(△BDC)+(△BED)+(△BCP)+(△BEQ)+(△DER)=(四角形 PQRD)なので,

$1+5+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-t)^2+\frac{1}{2}(4-t^2)=6-3t$

$13+(1-t)^2+4-t^2=12-6t$, $13+1-2t+t^2+4-t^2=12-6t$, $6t-2t=12-18$

$4t=-6$, $t=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

[問題]



右の図のように，関数 $y=ax^2$ (a は定数)のグラフ上に 3 点 A，B，C がある。A の x 座標は−4，B の x 座標は 2，C の y 座標は 9 であり，C の x 座標は正である。点 D は直線 AC と y 軸との交点であり，点 O は原点である。また，関数 $y=ax^2$ について，x の変域が$-4\leqq x\leqq 2$ のとき，y の変域は $0\leqq y\leqq 4$ である。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 直線 AC の式を求めよ。

(3) 線分 CD 上に 2 点 C，D とは異なる点 P をとる。四角形 POBC の面積が 20 となるときの P の座標を求めよ。

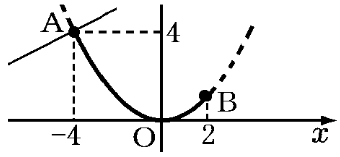
(熊本県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

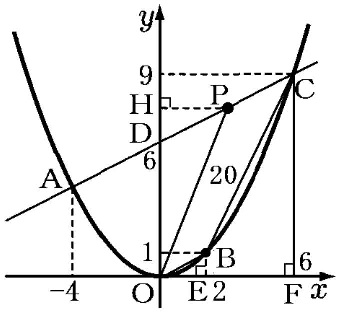
[ヒント]

(1) 「x の変域が－4≦ x ≦2 のとき，y の変域は 0≦ y ≦4 である」とあるので，右図のように，点 A の y 座標は 4 になる。



(3) 右図のように点 P，E，F，H をとり，△POD の面積を求めて PH の長さを求めることで, 点 P の x 座標を計算する。

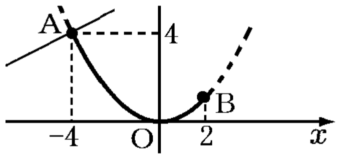
(△POD の面積)＝(台形 ODCF の面積)－{(四角形 POBC の面積)＋(△BOE の面積)＋(台形 EBCF の面積)}



[解答](1) $a=\frac{1}{4}$　(2) $y=\frac{1}{2}x+6$　(3) $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ \frac{20}{3}\right)$

[解説]

(1) 「x の変域が－4≦ x ≦2 のとき， y の変域は 0≦ y ≦4 である」とあるので，右図のように，点 A の y 座標は 4 になる。点 A(－4，4)は $y=ax^2$ 上にあるので， $x=-4,\ y=4$ を $y=ax^2$ に代入して， $4=a\times(-4)^2$，$16a=4$， $a=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$



(2) まず, 点 C の座標を求める。点 C は $y=\frac{1}{4}x^2$ 上にあるので，$y=9$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入して，

$9=\frac{1}{4}x^2$， $x^2=36$， $x>0$ なので， $x=6$　よって，点 C の座標は(6，9)

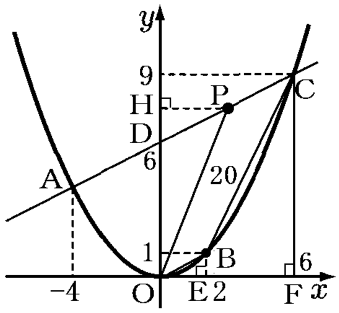
点 A(－4，4)なので， $y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って直線 AC の式を求める。

$y=\frac{9-4}{6-(-4)}(x-6)+9$， $y=\frac{1}{2}(x-6)+9$， $y=\frac{1}{2}x+6$

(3) 右図のように点 P，E，F，H をとり，△POD の面積を求めて PH の長さを求めることで, 点 P の x 座標を計算する。

(台形 ODCF の面積)＝$\frac{1}{2}$×(上底 DO＋下底 CF)×(高さ OF)

$=\frac{1}{2}\times(6+9)\times 6=45$



点 B の x 座標は 2 なので， $x=2$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入して， $y=\frac{1}{4}\times 2^2=1$

よって，点 B の座標は(2，1)

(台形 EBCF の面積)＝$\frac{1}{2}$×(上底 BE＋下底 CF)×(高さ EF)＝$\frac{1}{2}\times(1+9)\times(6-2)=20$

(△BOE の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 BE)×(高さ OE)＝$\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$

また，仮定より，(四角形 POBC の面積)＝20

よって，

(△POD の面積)＋(四角形 POBC の面積)＋(△BOE の面積)＋(台形 EBCF の面積)＝(台形 ODCF の面積)

(△POD の面積)＋20＋1＋20＝45

よって，(△POD の面積)＝45－41＝4

(△POD の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 DO)×(高さ PH)＝4

$\frac{1}{2}$×6×(高さ PH)＝4，3×(高さ PH)＝4

(高さ PH)＝4÷3＝$\frac{4}{3}$

したがって，点 P の x 座標は $\frac{4}{3}$ である。点 P は $y=\frac{1}{2}x+6$ 上にあるので，

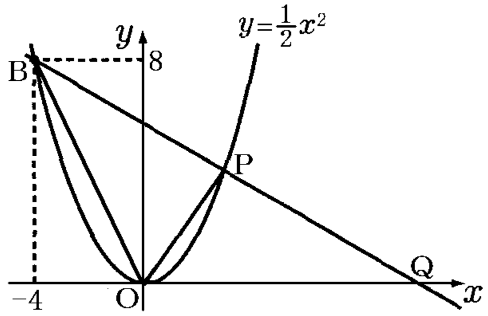
$x=\frac{4}{3}$ を $y=\frac{1}{2}x+6$ に代入して，$y=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}+6=\frac{2}{3}+6=\frac{20}{3}$

よって，点 P の座標は $\left(\frac{4}{3},\ \frac{20}{3}\right)$ になる。

【】面積が等しい，面積比

[問題]

右の図のように関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上を動く点 P がある。この点 P と点 B(−4，8)とを結んでできる直線 BP と x 軸との交点を Q とする。このとき，△OPB の面積と△OPQ の面積が等しくなるような点 P の x 座標を求めよ。ただし，点 P は $x>0$ を満たす範囲を動くものとする。



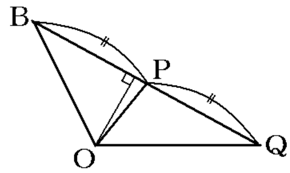
(鳥取県改)(**)

[解答欄]

[ヒント]

・「△OPB の面積と△OPQ の面積が等しくなる」ので，点 P は線分 BQ の中点になる。

・点 B の y 座標が 8，点 Q の y 座標が 0→点 P の y 座標がわかる。

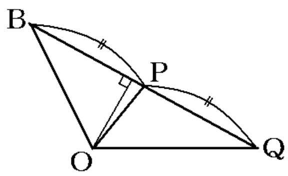


[解答] $2\sqrt{2}$

[解説]

「△OPB の面積と△OPQ の面積が等しくなる」ので，点 P は線分 BQ の中点になる。(それぞれの底辺を BP，QP とすると高さは共通なので，BP＝QP だから 2 つの三角形の面積は等しい)

点 B の y 座標が 8，点 Q の y 座標が 0 なので，点 P の y 座標は 4 になる。点 P は $y=\frac{1}{2}x^2$ 上にあるので，　$y=\frac{1}{2}x^2$ に $y=4$ を代入して，$4=\frac{1}{2}x^2$，$x^2=8$



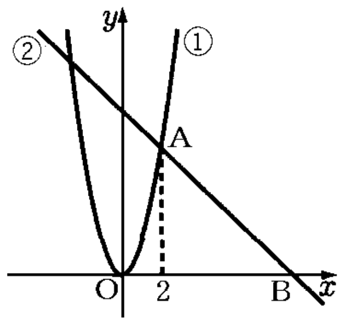
$x>0$ なので，$x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

[問題]

右の図において，①は関数 $y=2x^2$ のグラフで，②は傾きが −1 の直線である。点 A は①と②の交点で，その x 座標は 2 であり，点 B は②と x 軸の交点である。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 直線②の式を求めよ。

(2) 線分 AB 上に点 C をとり，点 O と点 C を通る直線を l とする。この直線 l が三角形 OAB の面積を二等分するとき，直線 l の式を求めよ。



(高知県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

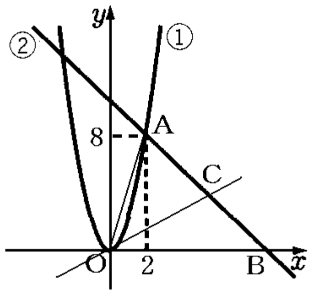
[ヒント]

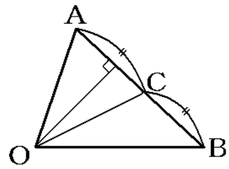
(1) A の座標，B の座標→直線②の式

(2) 直線 OC が三角形 OAB の面積を二等分

→点 C は線分 AB の中点→C の座標

→直線 OC(直線 l の式)





[解答](1) $y=-x+10$ (2) $y=\frac{2}{3}x$

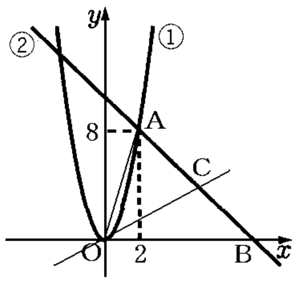
[解説]

(1) まず，点 A の座標を求める。x 座標が 2 である点 A は $y=2x^2$ 上にあるので，$x=2$ を $y=2x^2$ に代入すると，$y=2\times 2^2=8$ よって，点 A の座標は(2，8)

②は傾きが－1 で，点 A を通るので，$y=m(x-x_1)+y_1$ を使って直線の式を求める。

$y=-(x-2)+8$，$y=-x+10$

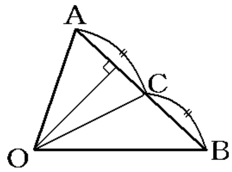
(2) 「直線 l (直線 OC)が三角形 OAB の面積を二等分する」とあるので，点 C は線分 AB の中点になる。



点 A の y 座標は 8，点 B の y 座標は 0 なので，点 C の y 座標は，(8＋0)÷2＝4 になる。

点 C は $y=-x+10$ 上にあるので，$y=4$ を $y=-x+10$ に代入すると，$4=-x+10$，$x=10-4$，$x=6$

よって，点 C の座標は(6，4)になる。



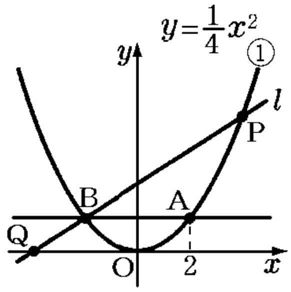
直線 OC(直線 l)は原点 O(0，0)と C(6，4)を通る直線である。

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，この直線の式を求める。

$y=\frac{4-0}{6-0}(x-0)+0$，$y=\frac{2}{3}x$

[問題]

右の図の①は，関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフである。このグラフ上に点 A があり，その x 座標は 2 である。点 A を通り x 軸に平行な直線とグラフ①との交点のうち，点Aと異なる点をBとする。点 P は①のグラフ上を動く点であり，その x 座標は 2 より大きいものとする。図のように，2 点 B，P を通る直線を l とし，直線 l と x 軸との交点を Q とする。△ABQ の面積と△ABP の面積が等しくなるとき，点 P の x 座標を求めよ。

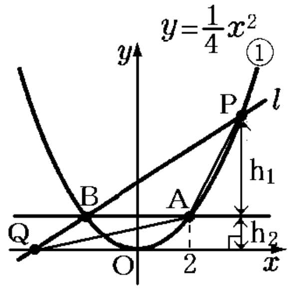


(島根県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

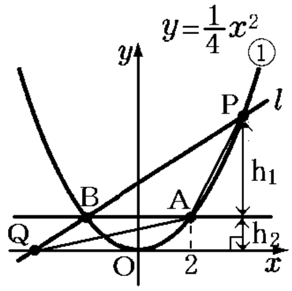
・△ABQ と△ABP の共通の底辺を AB とすると，
　△ABQ の面積と△ABP の面積が等しい
　→高さ h_1，h_2 が等しい
・点 A の y 座標→点 P の y 座標→点 P の x 座標



[解答] $2\sqrt{2}$

[解説]

△ABQ と△ABP の共通の底辺を AB とすると，
右図の h_1，h_2 がそれぞれの三角形の高さになる。
「△ABQ の面積と△ABP の面積が等しくなる」とあり，
底辺が共通で等しいので高さが等しくなる。
よって，$h_1=h_2$ になる。



点 A は $y=\frac{1}{4}x^2$ 上にあり，x 座標が 2 なので，$y=\frac{1}{4}\times 2^2=1$
となり，$h_2=1$ で，$h_1=h_2=1$ となる。
よって，点 P の y 座標は $h_1+h_2=1+1=2$

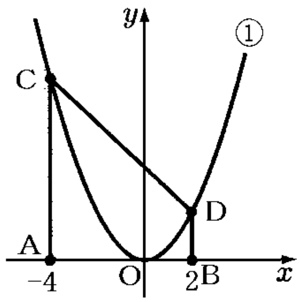
点 P は $y=\frac{1}{4}x^2$ 上にあり，y 座標が 2 なので，$2=\frac{1}{4}x^2$

$x^2=8$，$x=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$，

$x>0$ なので，$x=2\sqrt{2}$

[問題]

右の図で，点 O は原点であり，2 点 A，B の座標はそれぞれ$(-4,\ 0)$, $(2,\ 0)$である。放物線①は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフである。点 A を通り，y 軸に平行な直線をひき，放物線①との交点を C とする。また，点 B を通り，y 軸に平行な直線をひき，放物線①との交点を D とし, 点 C と点 D を結ぶ。線分 CD 上に点 E をとる。直線 AE が台形 ABDC の面積を 2 等分するとき，点 E の x 座標はいくらか。点 E の x 座標を a として，a の値を求めよ。



(香川県)(***)

[解答欄]

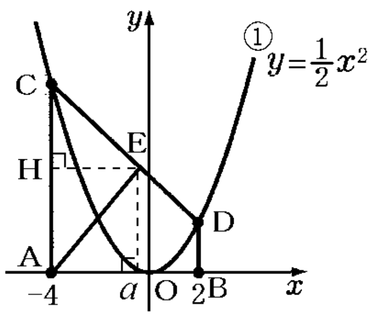
[ヒント]

・点 C と点 D の y 座標を計算→台形 ABDC の面積

・点 E の x 座標を a とする

・△EAC の面積(底辺を AC とすると，高さは EH)

　は台形 ABDC の面積の $\frac{1}{2}$ から a を求める。



[解答] $a=-\frac{1}{4}$

[解説]

まず，台形 ABDC の面積を求めるために，点 C と点 D の y 座標を計算する。

点 C の x 座標は－4 なので，$x=-4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると，$y=\frac{1}{2}\times(-4)^2=8$

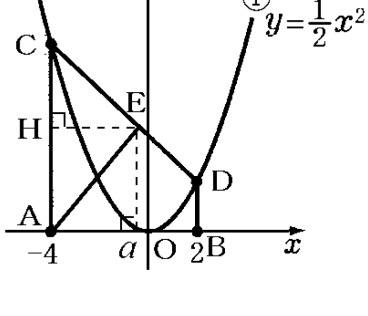
点 D の x 座標は 2 なので，$x=2$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると，$y=\frac{1}{2}\times 2^2=2$

したがって，AC＝8，BD＝2

また，BA＝2－(－4)＝2＋4＝6

(台形 ABDC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(上底 BD＋下底 AC)×(高さ BA)

＝$\frac{1}{2}\times(2+8)\times 6$＝30



右図のように点 E の x 座標を a とする(図では a が負の値である場合を描いているが，正の値でも，以下の計算は成り立つ)。

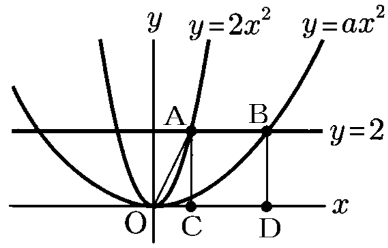
「直線 AE が台形 ABDC の面積を 2 等分する」とあるので，
△EAC の面積は，30÷2＝15 である。
△EAC の底辺を AC(＝8)とすると，高さは EH である。
EH＝$a-(-4)=a+4$

(△EAC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 AC)×(高さ EH)＝15

$\dfrac{1}{2}\times 8\times(a+4)=15$，$4(a+4)=15$，$4a+16=15$，$4a=-1$　よって，$a=-\dfrac{1}{4}$

[問題]

右の図で，O は原点，A，B はそれぞれ，直線 $y=2$ と 2 つの関数 $y=2x^2$，$y=ax^2$(a は定数，$a>0$)のグラフとの交点のうち，x 座標が正である点である。また，C，D は x 軸上の点で，四角形 ACDB は正方形である。このとき，次の問いに答えよ。



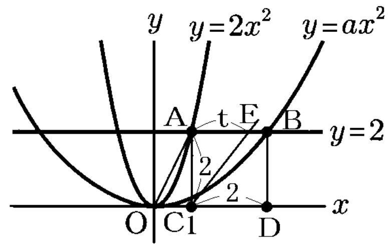
(1) a の値を求めよ。
(2) 点 C を通り，台形 AODB の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。
(愛知県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

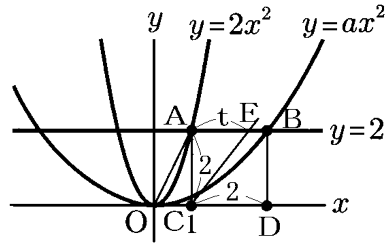
(1) 点 B の y 座標は 2，x 座標は，AC＝AB(正方形なので)を使って求める。
(2) AODB の面積を 2 等分する直線を CE とし，AE＝t とおき，(台形 AOCE の面積)＝(台形 AODB の面積)÷2 から t を求める



[解答](1) $a=\dfrac{2}{9}$　(2) $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{3}$

[解説]

(1) 点 A の y 座標は 2 なので，$y=2x^2$ に $y=2$ を代入して，
$2=2x^2$，$x^2=1$，$x>0$ なので，$x=1$
よって，点 C の x 座標も 1 である。
次に，四角形 ACDB は正方形で，AC＝2 なので，CD＝2



よって，点 D の x 座標は 1＋2＝3 とわかる。
したがって，点 B の座標は(3，2)である。
点 B は $y=ax^2$ 上の点なので， $y=ax^2$ に $x=3,\ y=2$ を代入して，
$2=a\times 3^2$，$9a=2$

よって， $a=\frac{2}{9}$

(2) (台形 AODB の面積)＝(上底 AB＋下底 OD)×(高さ AC)÷2＝(2＋3)×2÷2＝5
点 C を通り，台形 AODB の面積を 2 等分する直線を右上図の CE とし，AE＝t とおく。
(台形 AOCE の面積)＝(上底 AE＋下底 OC)×(高さ AC)÷2＝(t＋1)×2÷2＝t＋1
与えられた条件より，(台形 AOCE の面積)＝(台形 AODB の面積)÷2

よって， $t+1=\frac{5}{2}$，$t=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$

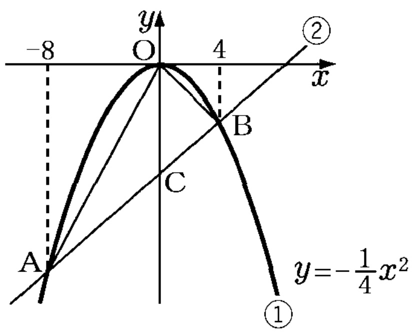
(直線 CE の傾き)＝$\frac{AC}{AE}=AC\div AE=2\div\frac{3}{2}=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

直線 CE は傾きが $\frac{4}{3}$ で，点 C(1，0)を通るので， $y=m(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，

$y=\frac{4}{3}(x-1)$， $y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$ と求めることができる。

[問題]

右の図で，①は関数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ のグラフである。点 A，B は①上にあり，点 A の x 座標は−8，点 B の x 座標は 4 である。②は点 A，B を通る直線であり， y 軸との交点を C とする。次の各問いに答えよ。ただし，座標軸の単位の長さを 1cm とする。



(1) 直線②の式を求めよ。
(2) △OAB の面積を求めよ。
(3) 点 Q を△OAB の辺 OA 上にとり，線分 CQ が△OAB の面積を 2 等分するとき，点 Q の座標を求めよ。

(青森県)(***)
[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[ヒント]

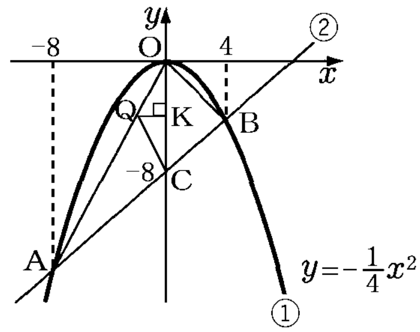
(1) A，B の座標計算→直線 AB(直線②)の式

(2) △OAB を△OAC と△OBC に分けて考える。

(3) (四角形 OBCQ の面積)＝(△OAB の面積)÷2

(△OCQ の面積)＝(OBCQ の面積)－(△OBC の面積)

△OCQ の面積と底辺 OC→高さ QK→Q の x 座標



[解答](1) $y=x-8$　(2) 48cm²　(3) Q(－2，－4)

[解説]

(1) まず，点 A，B の座標を求める。

点 A の x 座標は－8 なので，$y=-\frac{1}{4}x^2$ に $x=-8$ を代入すると，$y=-\frac{1}{4}\times(-8)^2=-16$

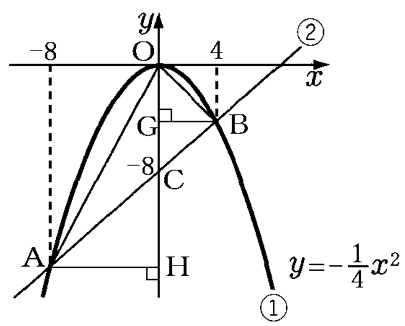
よって，点 A の座標は(－8，－16)

点 B の x 座標は 4 なので，$y=-\frac{1}{4}x^2$ に $x=4$ を代入すると，$y=-\frac{1}{4}\times 4^2=-4$

よって，点 B の座標は(4，－4)

直線②は 2 点 A(－8，－16)，B(4，－4)を通るので，$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式より，

$y=\frac{-4-(-16)}{4-(-8)}(x-4)-4$，$y=(x-4)-4$，$y=x-8$



(2) △OAB を△OAC と△OBC に分けて考える。

△OAC の底辺を OC とすると，高さは，右図の AH になる。

$y=x-8$ の y 切片は－8 なので，点 C の y 座標は－8 で，

OC＝8(cm)

点 A の x 座標は－8 なので，AH＝8(cm)

(△OAC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ AH)＝$\frac{1}{2}\times8\times8$＝32(cm²)

次に，△OBC の底辺を OC とすると，高さは BG である。

点 B の x 座標は 4 なので，BG＝4(cm)

(△OBC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ BG)＝$\frac{1}{2}\times8\times4$＝16(cm²)

よって，(△OAB の面積)＝(△OAC の面積)＋(△OBC の面積)＝32＋16＝48(cm²)

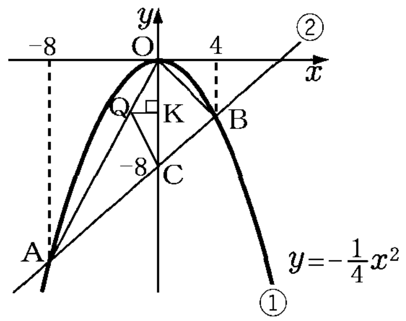
(3) (2)より，△OAB の面積は 48cm² なので，

右図の四角形 OBCQ の面積は，48÷2＝24(cm²)

(△OCQ の面積)＝24－(△OBC の面積)＝24－16＝8(cm²)

△OCQ の底辺を OC とすると，高さは QK なので，

(△OCQ の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ QK)＝8(cm²)



$\dfrac{1}{2}$×8×(高さ QK)＝8，4×(高さ QK)＝8

(高さ QK)＝8÷4＝2(cm)

よって，点 Q の x 座標は－2 になる。

点 Q の y 座標を求めるために, 直線 OA の式を計算する。

点 A の座標は(－8，－16)，点 O の座標は(0，0)なので

(直線 OA の傾き)＝$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{0-(-16)}{0-(-8)}=\dfrac{16}{8}=2$

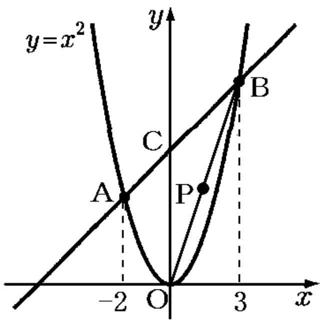
よって，直線 OA の式は $y=2x$ である。

$y=2x$ に $x=-2$ を代入すると，$y=2\times(-2)=-4$

したがって，点 Q の座標は(－2，－4)

[問題]

右の図のように，関数 $y=x^2$ のグラフ上に 2 点 A，B があり，2 点 A，B の x 座標はそれぞれ－2，3 である。直線 AB と y 軸との交点を C とする。次の各問いに答えよ。



(1) 直線 AB の式を求めよ。

(2) △OAB の面積を求めよ。

(3) 図のように，線分 OB 上に点 P を，四角形 OACP と△BCP の面積の比が 2 : 1 になるようにとる。このとき，点 P の x 座標を求めよ。

(長崎県)(***)

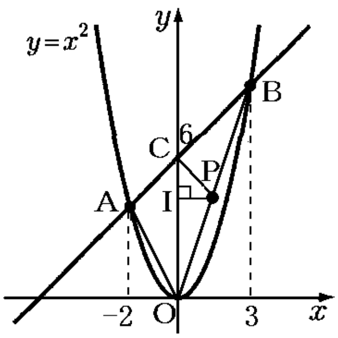
[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(1) A，B の座標計算→直線 AB の式

(2) △OAB を△OAC と△OBC に分けて考える。



(3) (四角形 OACP の面積)＝(△OAB の面積)×$\dfrac{2}{2+1}$

(△POC の面積)＝(四角形 OACP の面積)－(△AOC の面積)

△POC の面積と底辺 OC→高さ PI→P の x 座標

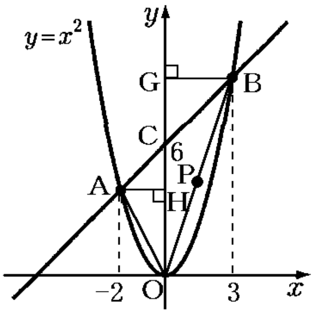
[解答](1) $y=x+6$ (2) 15 (3) $\frac{4}{3}$

[解説]

(1) $y=x^2$ 上にある点 A の x 座標は−2 なので，$x=-2$ を $y=x^2$ に代入して，$y=(-2)^2=4$ よって，点 A の座標は(−2，4) $y=x^2$ 上にある点 B の x 座標は 3 なので，$x=3$ を $y=x^2$ に代入して，$y=3^2=9$ よって，点 B の座標は(3，9)

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，2 点 A(−2，4)，B(3，9)を通る直線の式を求める。

$y=\frac{9-4}{3-(-2)}(x-3)+9$，$y=(x-3)+9$，$y=x+6$



(2) △OAB を△AOC と△BOC に分けて考える。

△AOC の底辺を OC とすると，右図の AH が高さになる。

点 C は直線 $y=x+6$ の y 切片なので，点 C の y 座標は 6 で，OC＝6 となる。また, 点 A の x 座標は−2 なので AH=2 である。

(△AOC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ AH)＝$\frac{1}{2}\times6\times2$＝6

次に，△BOC で，点 B の x 座標は 3 なので，BG＝3 である。

(△BOC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ BG)＝$\frac{1}{2}\times6\times3$＝9

よって，(△OAB の面積)＝(△AOC の面積)＋(△BOC の面積)＝6＋9＝15

(3) (2)より，△OAB の面積は 15 である。

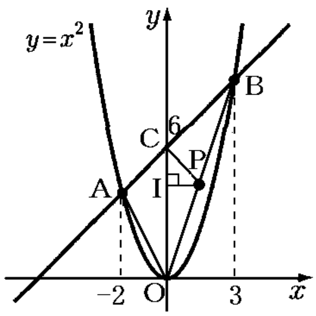
「四角形 OACP と△BCP の面積の比が 2：1 になる」より，

(四角形 OACP の面積)＝(△OAB の面積)×$\frac{2}{2+1}$＝$15\times\frac{2}{3}$＝10

になる。(2)より，(△AOC の面積)＝6 なので，

(△POC の面積)＝(四角形 OACP の面積)−(△AOC の面積)

＝10−6＝4



△POC の底辺を OC とすると，高さは右図の PI なので，

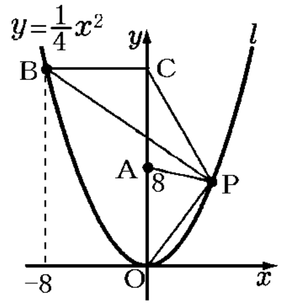
(△POC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ PI)＝4

$\frac{1}{2}$×6×(高さ PI)＝4，3×(高さ PI)＝4，(高さ PI)＝4÷3＝$\frac{4}{3}$

したがって，点 P の x 座標は $\frac{4}{3}$ になる。

[問題]

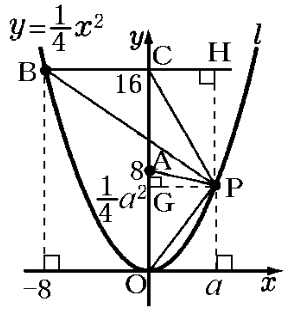
右の図で，点 O は原点，点 A の座標は(0, 8)であり，曲線 l は関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフを表している。点 B は曲線 l 上にあり，x 座標は−8 である。点 P の x 座標が 8 より小さい正の数であるとき，点 B を通り x 軸に平行な直線を引き，y 軸との交点を C とし，点 O と点 P，点 A と点 P，点 B と点 P，点 C と点 P をそれぞれ結んだ場合を表している。△CBP の面積が△AOP の面積の 3 倍になるとき，点 P の x 座標を求めよ。



(東京都)(***)

[解答欄]

[ヒント]



点 P の x 座標を a とする→y 座標を a を使って表す

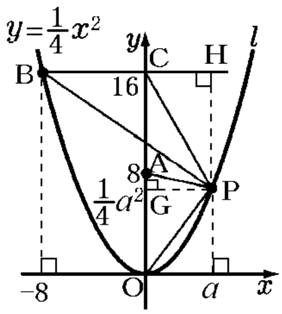
△CBP の底辺 BC，高さ PH→面積を a を使って表す

△AOP の底辺 AO，高さ PG→面積を a を使って表す

(△CBP の面積)＝(△AOP の面積)×3

[解答]4

[解説]



点 P の x 座標を a とすると，点 P の y 座標は，

$y=\frac{1}{4}x^2$ に $x=a$ を代入して，$y=\frac{1}{4}a^2$

△CBP の底辺を BC とすると，高さは右図の PH になる。

点 B の x 座標が−8 なので，BC＝8

点Bの y 座標は，$y=\frac{1}{4}x^2$ に $x=-8$ を代入して，$y=\frac{1}{4}\times(-8)^2=16$

よって，点 H の y 座標も 16 になる。

したがって，PH＝(点 H の y 座標)−(点 P の y 座標)＝$16-\frac{1}{4}a^2$

(△CBP の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 BC)×(高さ PH)＝$\frac{1}{2}\times 8\times\left(16-\frac{1}{4}a^2\right)=64-a^2$ ･･･①

次に，△AOP の底辺を AO とすると，高さは右上図の PG になる。

「点 A の座標は(0, 8)」なので，AO＝8

点 P の x 座標は a なので，PG＝a

よって，(△AOP の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 AO)×(高さ PG)＝$\frac{1}{2}\times 8\times a = 4a$・・・②

「△CBP の面積が△AOP の面積の 3 倍になる」ので，

(△CBP の面積)＝(△AOP の面積)×3

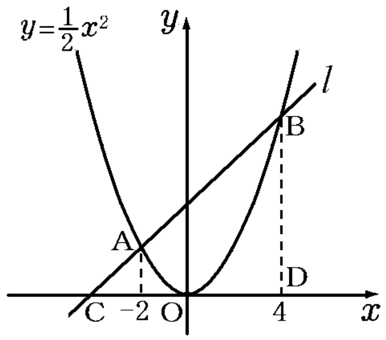
①，②より，$64-a^2=4a\times 3$，$a^2+12a-64=0$，$(a-4)(a+16)=0$，

$a=4,\ -16$　$a>0$ なので，$a=4$

よって，点 P の x 座標は 4 である。

[問題]

右の図のように，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフと直線 l の交点を A，B とし，直線 l と x 軸の交点を C とする。また，点 B から x 軸に垂線 BD をひく。点 A の x 座標が－2，点 B の x 座標が 4 であるとき，次の各問いに答えよ。ただし，原点 O から点(1，0)までの距離及び原点 O から点(0，1)までの距離をそれぞれ 1cm とする。



(1) 直線 l の式を求めよ。

(2) 関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に点 P がある。ただし，点 P の x 座標は 0 より大きく 4 より小さい。△PCD と△PBD の面積の比が 1：6 であるとき，点 P の x 座標を求めよ。

(千葉県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

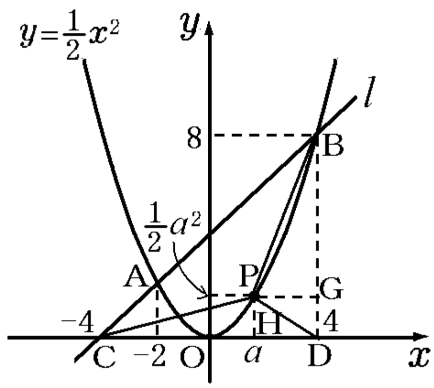
(1) A，B の座標計算→直線 AB(直線 l)の式

(2) 点 P の x 座標を $x=a$ とおく

(△PCD の面積)＝$\frac{1}{2}$(底辺 CD)×(高さ PH)

(△PBD の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 BD)×(高さ PG)

(△PBD の面積)＝(△PCD の面積)×6



[解答](1) $y=x+4$　(2) 1

[解説]

(1) まず，点 A，B の座標を求める。

点 A の x 座標は－2 なので， $x=-2$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると， $y=\frac{1}{2}\times(-2)^2=2$

よって点 A の座標は(－2，2)

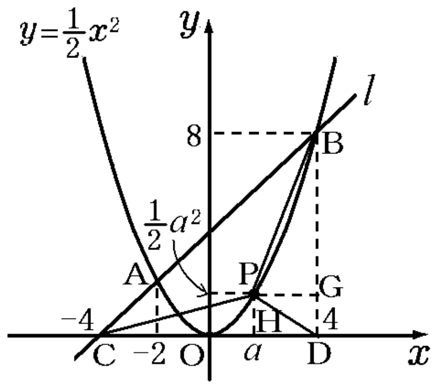
点 B の x 座標は 4 なので， $x=4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると， $y=\frac{1}{2}\times4^2=8$

よって点 B の座標は(4，8)

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，2 点 A(－2，2)，B(4，8)を通る直線の式を求める。

$y=\frac{8-2}{4-(-2)}(x-4)+8$， $y=(x-4)+8$， $y=x+4$

(2) 点 P の x 座標を $x=a$ とおくと，



y 座標は， $x=a$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して $y=\frac{1}{2}a^2$

△PCD の底辺を CD とすると，高さは PH＝$\frac{1}{2}a^2$

l の式 $y=x+4$ に $y=0$ を代入すると，$0=x+4$，$x=-4$

なので，点 C の x 座標は－4 になる。

よって，CD＝4－(－4)＝8

したがって，(△PCD の面積)＝$\frac{1}{2}$×CD×PH＝$\frac{1}{2}\times8\times\frac{1}{2}a^2=2a^2$

次に，△PBD の底辺を BD とすると，高さは PG である。

BD＝8，PG＝$4-a$ なので，

(△PBD の面積)＝$\frac{1}{2}$×BD×PG＝$\frac{1}{2}\times8\times(4-a)=16-4a$

△PCD と△PBD の面積の比が 1：6 なので，

(△PBD の面積)＝(△PCD の面積)×6

$16-4a=2a^2\times6$，$12a^2+4a-16=0$，$3a^2+a-4=0$

解の公式を使う。

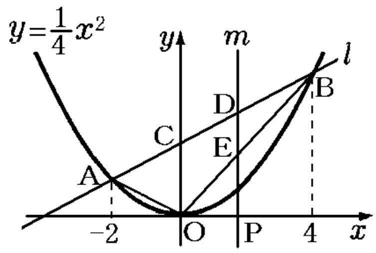
$a=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\times3\times(-4)}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{-1\pm7}{6}=-\frac{4}{3}$，1

$0<a<4$ なので， $a=1$

したがって，点 P の x 座標は 1 である。

[問題]

右の図で，曲線は関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフである。曲線上に x 座標が−2，4 である 2 点 A，B をとり，この 2 点を通る直線 l をひく。図のように，x 軸上の $0 \leqq x \leqq 4$ の範囲に点 P をとり，点 P を通って y 軸に平行な直線 m をひく。直線 m と直線 l の交点を D, 直線 m と線分 OB との交点を E とする。△OAB と△BDE の面積の比が 4：1 のとき，点 P の x 座標を求めよ。



(埼玉県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

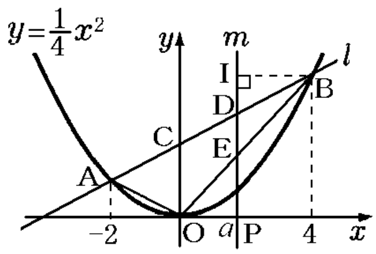
A，B の座標計算→直線 AB の式

△OAB を△OAC と△OBC に分けて，面積を計算

点 P の x 座標を a として，

△BDE(底辺 DE，高さ BI)の面積を a を使って表す

(△OAB の面積)：(△BDE の面積)＝4：1 で式をたてる



[解答] $4-\sqrt{6}$

[解説]

まず，直線 l の式を求めるために点 A，B の座標を計算する。

$y=\frac{1}{4}x^2$ 上にある点 A の x 座標は−2 なので，$x=-2$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入すると，

$y=\frac{1}{4}\times(-2)^2=1$　よって，点 A の座標は(−2，1)

$y=\frac{1}{4}x^2$ 上にある点 B の x 座標は 4 なので，$x=4$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入すると，

$y=\frac{1}{4}\times 4^2=4$　よって，点 B の座標は(4，4)

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，2 点 A(−2，1)，B(4，4)を通る直線の式を求める。

$y=\frac{4-1}{4-(-2)}(x-4)+4$，$y=\frac{1}{2}(x-4)+4$，$y=\frac{1}{2}x+2$ ･･･①

$y=\frac{1}{2}x+2$ の切片(y 切片)は 2 なので，点 C の y 座標は 2 で，OC＝2 になる。

次に，△OAB を△OCA と△OCB に分割してその面積を求める。

(△OCA の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ)＝$\frac{1}{2}\times2\times2$＝2

(△OCB の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ)＝$\frac{1}{2}\times2\times4$＝4

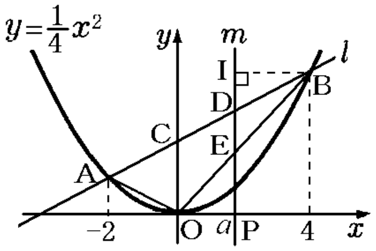
よって，(△OAB の面積)＝(△OCA の面積)＋(△OCB の面積)＝2＋4＝6･･･②

次に，点 P の x 座標を a として，△BDE の面積を a を使って表すことにする。

右図で，△BDE の底辺を DE とすると高さは BI になる。

点 B の x 座標は 4 で，点 I の x 座標は a なので，

BI＝$4-a$ である。･･･③



DE の長さを求めるために，点 D と E の y 座標を計算する。

x 座標が a である点 D は直線 l (①より $y=\frac{1}{2}x+2$) 上にあるので， $x=a$ を $y=\frac{1}{2}x+2$ に代入して， $y=\frac{1}{2}a+2$･･･④

点 B の座標は(4，4)なので，(直線 OB の傾き)＝$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-0}{4-0}=\frac{4}{4}$＝1

よって，直線 OB の式は $y=x$ である。

x 座標が a である点 E は $y=x$ 上にあるので， $x=a$ を $y=x$ に代入して， $y=a$･･･⑤

④，⑤より，点 D の y 座標は $y=\frac{1}{2}a+2$，点 E の y 座標は $y=a$ なので，

DE＝$\frac{1}{2}a+2-a=-\frac{1}{2}a+2$･･･⑥

③，⑥より，

(△BDE の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 DE)×(高さ BI)

$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}a+2\right)\times(4-a)=\left(-\frac{1}{4}a+1\right)(4-a)=\frac{1}{4}(-a+4)(4-a)=\frac{1}{4}(4-a)^2=\frac{1}{4}(a-4)^2$

「△OAB と△BDE の面積の比が 4：1」で，②より(△OAB の面積)＝6 なので，

(△OAB の面積)：(△BDE の面積)＝4：1，6：$\frac{1}{4}(a-4)^2$=4：1

比の内項の積は外項の積に等しいので， $\frac{1}{4}(a-4)^2\times4=6\times1$

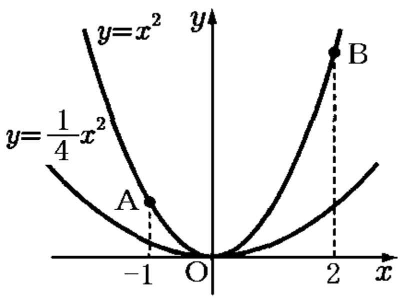
$(a-4)^2=6$， $a-4=\pm\sqrt{6}$， $a=4\pm\sqrt{6}$

「x 軸上の 0≦x≦4 の範囲に点 P をとる」とあるので，0≦a≦4

よって， $a=4-\sqrt{6}$

[問題]

右の図のように，関数 $y=x^2$ のグラフと関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフがある。2 点 A，B は関数 $y=x^2$ のグラフ上の点であり，A，B の x 座標はそれぞれ－1，2 である。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) 2 点 A，B を通る直線の傾きを求めよ。

(2) 関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に点 P をとり，P の x 座標を t とする。ただし，0＜t＜2 とする。また，P を通り y 軸に平行な直線と関数 $y=x^2$ のグラフ，直線 AB との交点をそれぞれ Q，R とする。

① t＝1 のとき，線分 PQ と線分 QR の長さの比を求めよ。

② 線分 AP，PB，BQ，QA で囲まれた図形の面積が△AQB の面積と等しくなる t の値を求めよ。

(福島県)(***)

[解答欄]

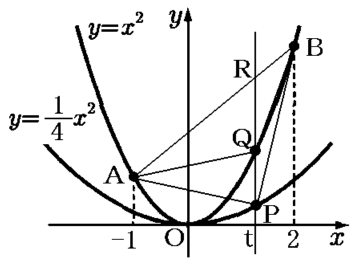
(1)	(2)②PQ：QR＝	②

[ヒント]

(1) A，B の座標計算→直線 AB の式

(2)① $x=1$ のときの P，Q，R の y 座標を計算

② PQ＝QR であれば，△APQ＝△AQR，△BPQ＝△BQR となり(それぞれ底辺が等しく高さが共通なので)，線分 AP，PB，BQ，QA で囲まれた図形の面積は△AQB の面積と等しくなる。



[解答](1) 1　(2)①PQ：QR＝3：8　② $\frac{2+2\sqrt{15}}{7}$

[解説]

(1) $y=x^2$ に $x=-1$ を代入すると $y=1$ なので，点 A の座標は(－1，1)

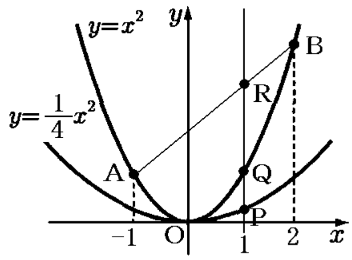
$y=x^2$ に $x=2$ を代入すると $y=4$ なので，点 B の座標は(2，4)

よって，直線 AB の傾きは，$\frac{4-1}{2-(-1)}=\frac{3}{3}=1$

(2)① まず，直線 AB の式を求めておく。

(1)より，傾きが 1 で B(2, 4)を通るので，$y=a(x-x_1)+y_1$ の公式より，$y=(x-2)+4$，$y=x+2$

$x=1$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入すると $y=\frac{1}{4}$ なので，P の y 座標は $\frac{1}{4}$



$x=1$ を $y=x^2$ に代入すると $y=1$ なので，Q の y 座標は 1

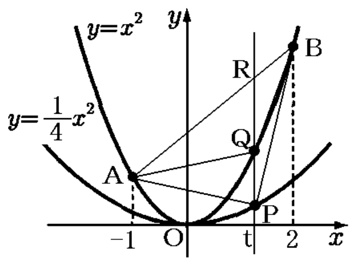
$x=1$ を $y=x+2$ に代入すると $y=3$ なので，Q の y 座標は 3

よって，PQ＝$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，QR＝3－1＝2

PQ：QR＝$\frac{3}{4}$ ：2＝3：8

② PQ＝QR であれば，△APQ＝△AQR，△BPQ＝△BQR となり(それぞれ底辺が等しく高さが共通なので)，

線分 AP，PB，BQ，QA で囲まれた図形の面積は△AQB の面積と等しくなる。



$x=t$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入すると $y=\frac{1}{4}t^2$ なので, P の y 座標は $\frac{1}{4}t^2$

$x=t$ を $y=x^2$ に代入すると $y=t^2$ なので，Q の y 座標は t^2

$x=t$ を $y=x+2$ に代入すると $y=t+2$ なので，R の y 座標は $t+2$

よって，QR＝$(t+2)-t^2$，PQ＝$t^2-\frac{1}{4}t^2=\frac{3}{4}t^2$

PQ＝QR なので，$\frac{3}{4}t^2=(t+2)-t^2$，$3t^2=4t+8-4t^2$

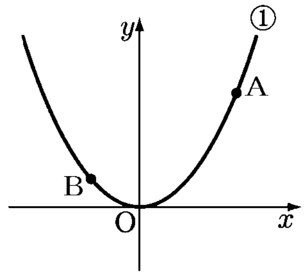
$7t^2-4t-8=0$

解の公式より，$t=\frac{4\pm\sqrt{16-4\times7\times(-8)}}{14}=\frac{4\pm\sqrt{240}}{14}=\frac{4\pm4\sqrt{15}}{14}=\frac{2\pm2\sqrt{15}}{7}$

$t>0$，$2-2\sqrt{15}<0$ なので，$t=\frac{2-2\sqrt{15}}{7}$ は不適。よって，$t=\frac{2+2\sqrt{15}}{7}$

[問題]

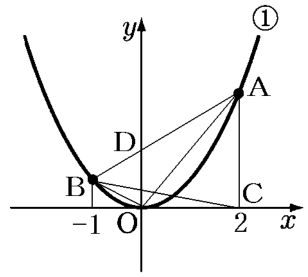
右の図のように，関数 $y=x^2$ のグラフ上に，2 点 A，B がある。点 A の x 座標を 2，点 B の x 座標を－1 とする。点 A と x 座標が等しい x 軸上の点を C とする。△ABC と△OAB において，線分 AB を底辺としたときのそれぞれの高さの比を，もっとも簡単な整数の比で求めよ。



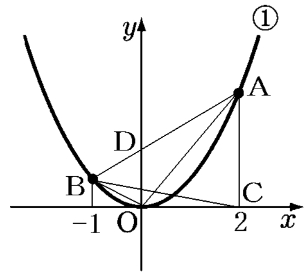
(北海道)(***)

[解答欄]

[ヒント]
右図のように，△ABC と△OAB の共通の底辺を AB とすると，それぞれの高さの比は面積の比と等しくなる。そこで，△ABC と△OAB の面積をそれぞれ求める。



[解答]2：1
[解説]
右図のように，△ABC と△OAB の共通の底辺を AB とすると，それぞれの高さの比は面積の比と等しくなる。そこで，△ABC と△OAB の面積をそれぞれ求める。



△ABC について，
点 A は $y=x^2$ 上にあるので，$x=2$ を $y=x^2$ に代入すると，$y=4$
よって，AC＝4
△ABC の底辺を AC＝4 とすると，高さは 2−(−1)＝3 である。
したがって，(△ABC の面積)＝$\frac{1}{2}$×4×3＝6･･･①
次に，△OAB について，
まず，点 D の座標を求めるために，直線 AB の式を求める。
点 A(2，4)，点 B(−1，1)なので，$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式より，

$y=\frac{4-1}{2-(-1)}(x-2)+4$，$y=x-2+4$，$y=x+2$

点 D は $y=x+2$ の切片(y 切片)なので，点 D の y 座標は 2 で，OD＝2 である。
△AOD，△BOD の共通の底辺を OD＝2 とすると，△AOD の高さは 2，△BOD の高さは 1 なので，

(△AOD の面積)＝$\frac{1}{2}$×2×2＝2

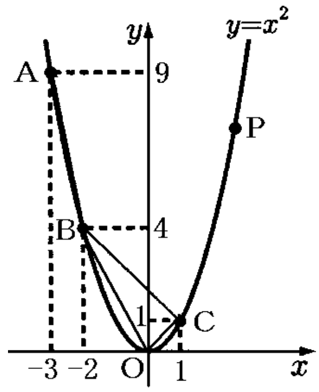
(△BOD の面積)＝$\frac{1}{2}$×2×1＝1

よって，(△OAB の面積)＝(△AOD の面積)＋(△BOD の面積)＝2＋1＝3･･･②
①，②より，(△ABC の面積)：(△OAB の面積)＝6：3＝2：1 になる。
よって，△ABC と△OAB において，線分 AB を底辺としたときのそれぞれの高さの比は，面積比と同じ 2：1 となる。

[問題]

右の図のように，関数 $y=x^2$ のグラフ上に 3 点 A(−3，9)，B(−2，4)，C(1，1)がある。点 P を関数 $y=x^2$ のグラフ上にとる。△OBC の面積と△OAP の面積の比が 1：5 になるときの点 P の座標を求めよ。ただし，点 P の x 座標は正とする。

(徳島県)(***)



[解答欄]

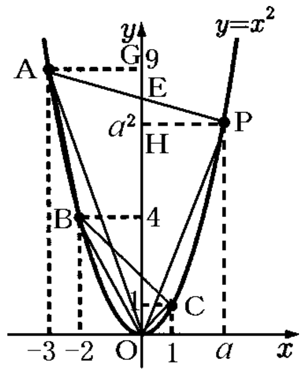
[ヒント]

まず，B，C の座標→直線 BC の式→△OBC の面積を求める。

次に，点 P の x 座標を $x=a$ とする。

A，P の座標→直線 AP の式→△OAP の面積を a を使って表す。

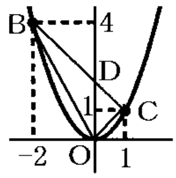
(△OBC の面積)：(△OAP の面積)＝1：5 で a についての式をたてる。



[解答](2，4)

[解説]

まず，△OBC の面積を求めるために，直線 BC の式を計算する。



B(−2，4)，C(1，1)なので，$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式より，

$y=\frac{1-4}{1-(-2)}(x-1)+1$，　$y=-(x-1)+1$，　$y=-x+2$

$y=-x+2$ の y 切片 D の y 座標は 2 になる。よって，OD＝2

(△OCD の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OD)×(高さ)＝$\frac{1}{2}\times2\times1$＝1

(△OBD の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OD)×(高さ)＝$\frac{1}{2}\times2\times2$＝2

(△OBC の面積)＝(△OCD の面積)＋(△OBD の面積)＝1＋2＝3・・・①

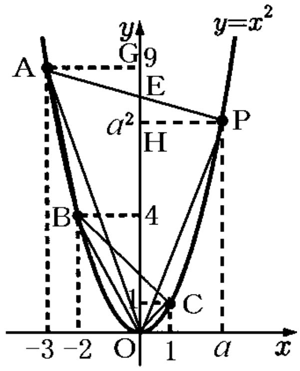
次に，点 P の x 座標を $x=a$ として，△OAP の面積を a を使って表すこととする。

そこで，まず直線 AP の式を求める。

点 P の x 座標は a なので， $x=a$ を $y=x^2$ に代入して $y=a^2$

よって，P の座標は(a，a^2)である。点 A の座標は(−3，9)である。

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，2 点 A，P を通る直線の式を求める。



$y=\dfrac{a^2-9}{a-(-3)}(x-(-3))+9$，　$y=\dfrac{(a+3)(a-3)}{a+3}(x+3)+9$，　$y=(a-3)(x+3)+9$

$y=(a-3)x+3a-9+9$，　$y=(a-3)x+3a$

点 E は $y=(a-3)x+3a$ の y 切片なので，点 E の y 座標は $3a$ となり，OE＝$3a$ となる。

(△OPE の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OE)×(高さ PH)＝$\dfrac{1}{2}\times 3a\times a=\dfrac{3}{2}a^2$

(△OAE の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OE)×(高さ AG)＝$\dfrac{1}{2}\times 3a\times 3=\dfrac{9}{2}a$

よって，(△OAP の面積)＝(△OPE の面積)＋(△OAE の面積)＝$\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{9}{2}a$ ･･･②

「△OBC の面積と△OAP の面積の比が 1：5 になる」ので，

(△OBC の面積)：(△OAP の面積)＝1：5

①，②より，$3:\left(\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{9}{2}a\right)=1:5$

比の内項の積は外項の積に等しいので，

$\left(\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{9}{2}a\right)\times 1=3\times 5$，　$\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{9}{2}a=15$，　$3a^2+9a=30$，　$a^2+3a-10=0$，　$(a+5)(a-2)=0$

よって，$a=-5,\ 2$

「点 P の x 座標は正とする」とあるので，$a>0$　したがって，$a=2$

点 P は $y=x^2$ 上にあるので，$x=2$ を $y=x^2$ に代入して，$y=2^2=4$

よって，点 P の座標は(2，4)になる。

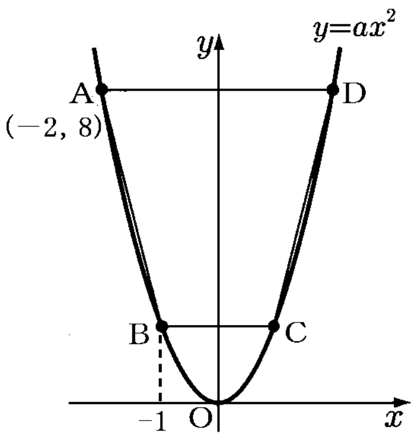
[問題]

右の図で，O は原点，A，B，C，D は関数 $y=ax^2$ (a は定数，a >0)のグラフ上の点で，線分 AD，BC はともに x 軸に平行である。点 A の座標が(－2，8)，点 B の x 座標が－1 であるとき，次の各問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 点 B を通り，四角形 ABCD の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

(愛知県)(***)

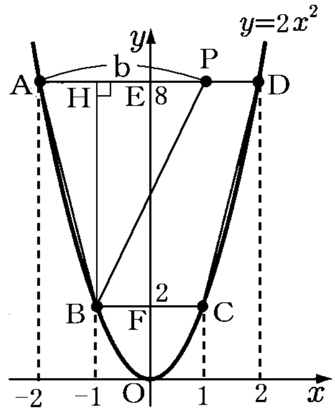


[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(1) 点 A(−2，8)→ $y=ax^2$ に代入



(2) A，B，C，D の座標→四角形 ABCD の面積

(△BAP の面積)＝$\frac{1}{2}$×(四角形 ABCD の面積)

△BAP の面積，高さ BH→底辺 AP→点 P の座標

点 P，B の座標→直線 BP の式

[解答](1) $a=2$ (2) $y=3x+5$

[解説]

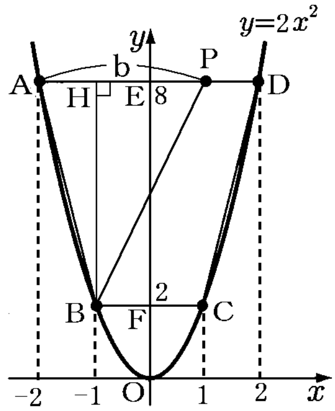
(1) 点 A(−2，8)は $y=ax^2$ 上にあるので，

$x=-2$，$y=8$ を $y=ax^2$ に代入して，

$8=a\times(-2)^2$，$8=4a$

$a=8\div4=2$

(2) まず，四角形 ABCD の面積を求めるために，B，C，D の座標を計算する。



$y=2x^2$ 上にある点 B の x 座標は−1 なので，

$x=-1$を $y=2x^2$ に代入して $y=2\times(-1)^2=2$

よって，点 B の座標は(−1，2)

点 C は y 軸について点 B と対称なので，点 C の座標は(1，2)

点 D は y 軸について点 A と対称なので，点 D の座標は(2，8)

図より，AD＝2−(−2)＝4，BC＝1−(−1)＝2。EF＝8−2＝6

よって，(四角形 ABCD の面積)＝$\frac{1}{2}$×(上底 BC＋下底 AD)×(高さ EF)＝$\frac{1}{2}\times(2+4)\times6=18$

次に，右上図のように AD 上に，AP＝b である点 P をとる。

BP が四角形 ABCD の面積を二等分するとき，△BAP の面積は 18÷2＝9 になる。

よって，(△BAP の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 AP)×(高さ BH)＝9

BH＝EF＝6 なので，$\frac{1}{2}\times b\times6=9$，$3b=9$，$b=9\div3=3$

(点 P の x 座標)＝(点 A の x 座標)＋b ＝−2＋3＝1 なので，点 P の座標は(1，8)

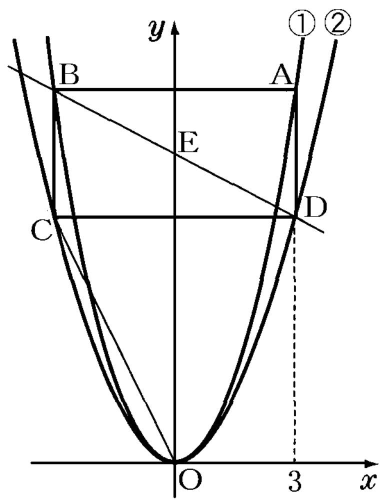
点 B の座標は(−1，2)である。

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，2 点 P，B を通る直線の式を求める。

$y=\frac{8-2}{1-(-1)}(x-1)+8$，$y=3(x-1)+8$，$y=3x+5$

[問題]

右の図のように，2 つの関数 $y=x^2$・・・①，$y=ax^2$（aは定数)・・・②のグラフと長方形 ABCD がある。2 点 A，B は関数①のグラフ上にあり，A の x 座標は 3 であって，辺 AB は x 軸に平行である。2 点 C，D は関数②のグラフ上にあり，C の x 座標は負で，C の y 座標は B の y 座標よりも小さい。点 E は直線 BD と y 軸との交点であり，点 O は原点である。また，長方形 ABCD において，AB : AD＝2 : 1 である。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 直線 BD の式を求めよ。

(3) 線分 OC 上に 2 点 O，C とは異なる点 P をとる。線分 EP が四角形 ODBC の面積を 2 等分するときの P の x 座標を求めよ。

(熊本県改)(****)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(1) 点 A，B の x 座標→AB の長さ→AD＝AB÷2
→点 D の座標→ $y=ax^2$ に代入

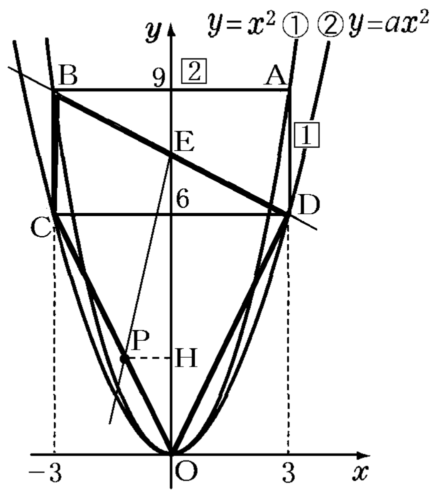
(2) 点 B，D の座標→直線 BD の式

(3) まず，(四角形 ODBC の面積)＝(△BCD)＋(△OCD)で，四角形 ODBC の面積の面積を計算する。
次に，△OED の面積を計算する。

→(△OED)＋(△OEP)＝(四角形 ODBC)× $\frac{1}{2}$

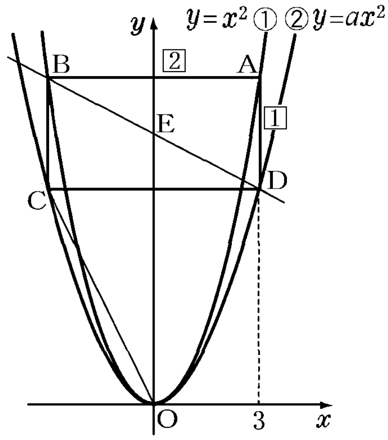
より，△OEP の面積を求める。

→△OEP の面積，底辺 OE→高さ PH→点 P の x 座標



[解答](1) $\frac{2}{3}$　(2) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$　(3) $-\frac{3}{5}$

[解説]



(1) 点Bはy軸について点Aと対称なので，点Bのx座標は−3である。よって，AB＝3−(−3)＝6

AB：AD＝2：1なので，AD＝6÷2＝3

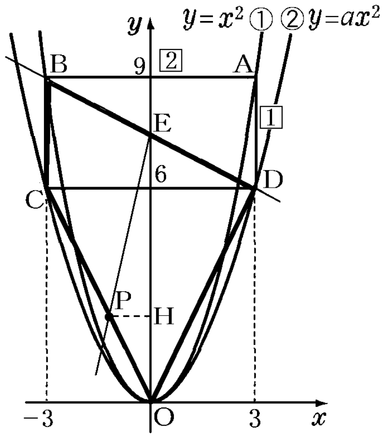
$x=3$を$y=x^2$に代入すると$y=9$なので，点Aのy座標は9である。したがって，点Dのy座標は9−3＝6になる。

点D(3，6)は$y=ax^2$上にあるので，$x=3$, $y=6$を$y=ax^2$に代入して，$6=9a$，$a=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

(2) (1)より点Bの座標は(−3，9)，点Dの座標は(3，6)である。$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$の公式を使って，2点B，Dを通る直線の式を求める。

$y=\frac{6-9}{3-(-3)}(x-3)+6$，$y=-\frac{1}{2}(x-3)+6$，$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+6$，$y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$

(3) まず，四角形ODBCの面積を計算する。



△BCDの底辺CDは3−(−3)＝6, 高さは9−6＝3なので，

(△BCDの面積)＝$\frac{1}{2}$×6×3＝9

△OCDの底辺CDは6，高さは6なので，

(△OCDの面積)＝$\frac{1}{2}$×6×6＝18

よって，(四角形ODBCの面積)＝9＋18＝27

次に，△OEDの面積を計算する。

点Eは2点B，Dの中点なので，y座標は$\frac{9+6}{2}=\frac{15}{2}$

よって，OE＝$\frac{15}{2}$　△OEDの底辺をOEとすると高さは3なので，

(△OEDの面積)＝$\frac{1}{2}\times\frac{15}{2}\times3=\frac{45}{4}$

線分EPが四角形ODBCの面積を2等分するので，

(△OEDの面積)＋(△OEPの面積)＝(四角形ODBCの面積)×$\frac{1}{2}$

$\frac{45}{4}$＋(△OEPの面積)＝$27\times\frac{1}{2}$

(△OEPの面積)＝$27\times\frac{1}{2}-\frac{45}{4}=\frac{54}{4}-\frac{45}{4}=\frac{9}{4}$

△OEP の底辺を OE$=\dfrac{15}{2}$とすると，高さは図の PH なので，

$(\triangle\text{OEP の面積})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{15}{2}\times\text{PH}=\dfrac{9}{4}$

$\dfrac{15}{4}\text{PH}=\dfrac{9}{4}$，$\text{PH}=\dfrac{9}{4}\div\dfrac{15}{4}=\dfrac{9}{4}\times\dfrac{4}{15}=\dfrac{3}{5}$

点 P の x 座標は負なので，$-\dfrac{3}{5}$である。

【】等積変形の利用

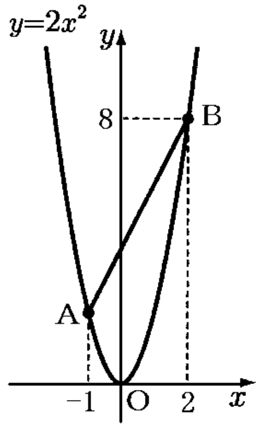
[問題]

関数 $y=2x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B がある。点 A の x 座標は－1，点 B の座標は(2，8)である。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 点 A の y 座標を求めよ。

(2) 直線 AB の式を求めよ。

(3) 関数 $y=2x^2$ のグラフ上の点で，2 点 O，B の間にある点 P をとると，△PAB の面積は△OAB の面積に等しくなった。このとき，点 P の座標を求めよ。ただし，点 P は，点 O とは異なるものとする。



(沖縄県)(***)

[解答欄]

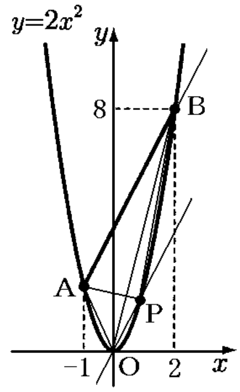
(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(1) 点 A の x 座標は－1→ $y=2x^2$ に代入

(2) 点 A，B の座標→直線 AB の式

(3) 右図のように，補助線 OP を，OP // AB となるように引く。
△PAB と△OAB の共通の底辺を AB とすると，OP // AB なので，
2 つの三角形の高さは等しくなり, 2 つの三角形の面積が等しくなる。
→(直線 OP の傾き)＝(直線 AB の傾き)→直線 OP の式
→直線 OP と $y=2x^2$ の交点を求める。



[解答](1) 2　(2) $y=2x+4$　(3) (1，2)

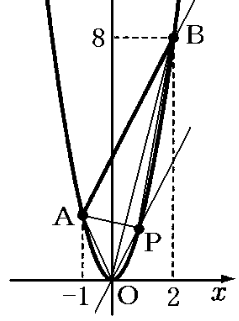
[解説]

(1) $x=-1$ を $y=2x^2$ に代入すると $y=2$ である。したがって，点 A の座標は(－1，2)になる。

(2) $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って 2 点 A(－1, 2), B(2, 8)を通る直線の式を求める。

$y=\dfrac{8-2}{2-(-1)}(x-2)+8$，$y=2(x-2)+8$，$y=2x+4$

(3) 右図のように，補助線 OP を，OP // AB となるように引く。
△PAB と△OAB の共通の底辺を AB とすると，OP // AB なので，
2 つの三角形の高さは等しくなり, 2 つの三角形の面積が等しくなる。
(2)より，直線 AB($y=2x+4$)の傾きは 2 なので，直線 OP の傾きも 2 になる。OP は原点を通るので，$y=2x$ の式で表すことができる。
交点 P の座標を求めるには，$y=2x^2$ と $y=2x$ を連立方程式として解く。$y=2x^2$ を $y=2x$ に代入すると，$2x^2=2x$



$2x^2-2x=0$，$x(x-1)=0$　よって，$x=0, 1$

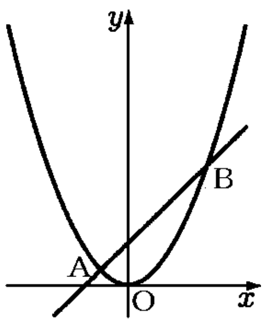
点Pは原点以外の点なので，$x=1$

$x=1$を$y=2x$に代入すると，$y=2$

したがって，点Pの座標は(1，2)であることがわかる。

[問題]

右の図で，曲線は関数$y=\frac{1}{2}x^2$のグラフである。曲線上にx座標が－1, 3である2点A, Bをとる。このとき, 次の各問いに答えよ。



(1) 直線ABの式を求めよ。

(2) 曲線上を，x座標がx＜－1の範囲で動く点Pを考える。△PABと△POBの面積が等しくなるとき，点Pの座標を求めよ。

(埼玉県)(***)

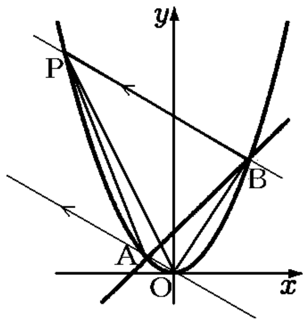
[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(1) 点A，Bの座標を計算→直線ABの式を求める。

(2) 右図のようにB点を通って，直線OAと平行な補助線BPを引く。△PABと△POBで，PBを共通な底辺とすると，OA // BPで，2つの三角形の高さが等しくなるので，△PABと△POBの面積が等しくなる。



(BPの傾き)＝(OAの傾き)，点Bの座標→BPの式

BPの式と$y=\frac{1}{2}x^2$を連立させて，交点Pの座標を求める。

[解答](1) $y=x+\frac{3}{2}$　(2) (－4，8)

[解説]

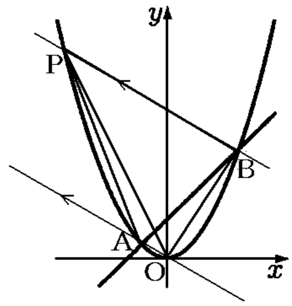
(1) $x=-1$を$y=\frac{1}{2}x^2$に代入すると$y=\frac{1}{2}$なので，点Aの座標は$\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$

$x=3$を$y=\frac{1}{2}x^2$に代入すると$y=\frac{9}{2}$なので，点Bの座標は$\left(3,\ \frac{9}{2}\right)$

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$の公式を使って，2点A，Bを通る直線の式を求める。

$$y=\frac{\frac{9}{2}-\frac{1}{2}}{3-(-1)}\left(x-(-1)\right)+\frac{1}{2},\quad y=\frac{4}{4}(x+1)+\frac{1}{2},\quad y=x+\frac{3}{2}$$

(2) 右図のようにB点を通って，直線OAと平行な補助線を引き $y=\frac{1}{2}x^2$ との交点をPとする。



△PABと△POBで，PBを共通な底辺とすると，
OA//BPで，2つの三角形の高さが等しくなるので，△PABと△POBの面積が等しくなる。

(直線OAの傾き)＝ $\frac{\frac{1}{2}}{-1}=-\frac{1}{2}$

直線BPの傾きは直線OAと同じ $-\frac{1}{2}$ で，点Bの座標は $\left(3,\ \frac{9}{2}\right)$ なので，直線BPの式は，

$y=a(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，

$y=-\frac{1}{2}(x-3)+\frac{9}{2}$， $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+\frac{9}{2}$， $y=-\frac{1}{2}x+6$ と求めることができる。

交点Pの座標は， $y=\frac{1}{2}x^2$ と $y=-\frac{1}{2}x+6$ の連立方程式を解いて求めることができる。

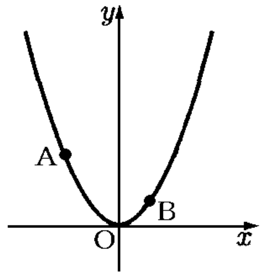
$y=\frac{1}{2}x^2$ を $y=-\frac{1}{2}x+6$ に代入すると， $\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}x+6$， $x^2=-x+12$， $x^2+x-12=0$，
$(x+4)(x-3)=0$， $x=-4,\ 3$
$x<-1$ なので $x=-4$

$x=-4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると， $y=\frac{1}{2}\times 16=8$

よって，点Pの座標は(−4，8)であることがわかる。

[問題]

右の図のように，関数 $y=x^2$ のグラフ上に，2点A，Bがある。点Aの x 座標を−2，点Bの x 座標を1とする。 x 軸上に点Pをとり，△OABと△OBPの面積が等しくなるようにするとき，点Pの座標を求めよ。ただし，点Pの x 座標は負であるものとする。



(北海道)(***)

[解答欄]

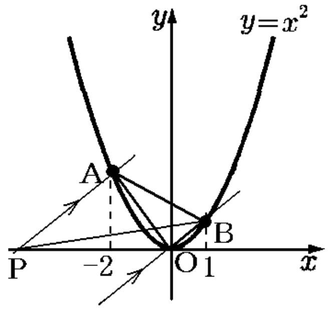
[ヒント]

右図のように，補助線 PA を OB // PA となるように引く。

△OAB と△OBP で，OB を共通の底辺と考えると，OB // PA なので，2 つの三角形の高さは等しくなり，2 つの三角形の面積が等しくなる。

点 A，B の座標を求める→OB の傾き＝AP の傾き

→直線 AP の式→点 P の座標

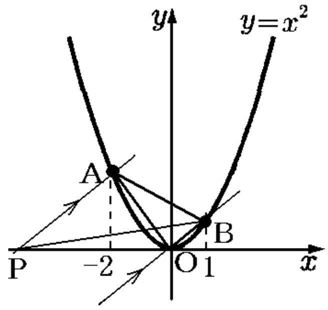


[解答](−6，0)

[解説]

右図のように，補助線 PA を OB // PA となるように引く。

△OAB と△OBP で，OB を共通の底辺と考えると，OB // PA なので，2 つの三角形の高さは等しくなり，2 つの三角形の面積が等しくなる。そこで，まず，A，B の座標を求めておく。



$x=-2$ を $y=x^2$ に代入すると $y=4$ なので，点 A の座標は(−2，4)

$x=1$ を $y=x^2$ に代入すると $y=1$ なので，点 B の座標は(1，1)

(OB の傾き)＝$\dfrac{1}{1}$＝1 なので，AP の傾きも 1 になる。

直線 AP の式は，傾きが 1 で(−2，4)を通るので， $y=a(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，

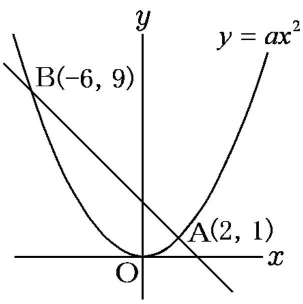
$y=(x-(-2))+4$， $y=x+6$ と求めることができる。

点 P の y 座標は 0 なので， $y=0$ を $y=x+6$ に代入して， $0=x+6$， $x=-6$

よって，点 P の座標は(−6，0)となる。

[問題]

右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に 2 点 A(2，1)，B(−6，9)がある。原点を O として，次の問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 直線 AB の式を求めよ。

(3) 関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点 P をとり，直線 AB と直線 OP が平行になるようにする。このとき，三角形 ABP の面積を求めよ。

(長崎県)(***)

[解答欄]

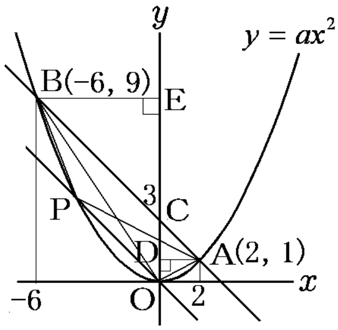
(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(1) 点 A(または点 B)の座標を $y = ax^2$ に代入。

(2) A，B の座標→直線 AB の式

(3) △ABP と△ABO で，AB を共通の底辺とすると，
AB // OP なので，2 つの三角形の高さは等しくなり，
(△ABP の面積)＝(△ABO の面積) となる。
△ABO の面積を，右図の△ACO と△BCO に分割して求める。



[解答](1) $\frac{1}{4}$　(2) $y = -x + 3$　(3) 12

[解説]

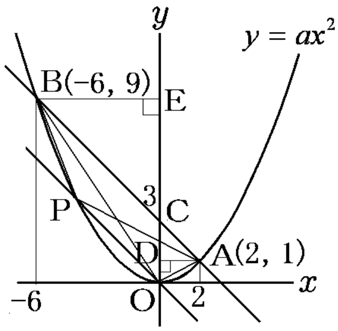
(1) 点 A(2，1)は $y = ax^2$ 上にあるので，$y = ax^2$ に x ＝2，y ＝1 を代入して，

$1 = a \times 4$，よって，$a = \frac{1}{4}$

(2) $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って 2 点 A(2, 1), B(−6, 9)を通る直線の式を求める。

$y = \frac{1-9}{2-(-6)}(x-2)+1$，$y = \frac{-8}{8}(x-2)+1$，$y = -x+2+1$，$y = -x+3$

(3) △ABP と△ABO で，AB を共通の底辺とすると，
AB // OP なので，2 つの三角形の高さは等しくなり，
(△ABP の面積)＝(△ABO の面積) となる。
そこで，△ABO の面積を，右図の△ACO と△BCO に分割して求める。



直線 AB の式は $y = -x + 3$ なので，y 切片は 3 で，OC＝3
点 A の x 座標は 2 なので，△ACO の底辺を OC＝3 とすると，
高さは AD＝2

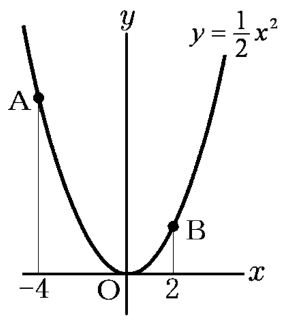
よって，(△ACO の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ AD)＝$\frac{1}{2}$×3×2＝3

同様にして，(△BCO の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ BE)＝$\frac{1}{2}$×3×6＝9

よって，(△ABO の面積)＝(△ACO の面積)＋(△BCO の面積)＝3＋9＝12
ゆえに，(△ABP の面積)＝(△ABO の面積)＝12

[問題]

右の図は, 関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフである。このグラフ上に 2 点 A, B があり，x 座標はそれぞれ－4, 2 である。△AOC の面積が△AOB の面積の 2 倍となるように，y 軸上に点 C(0，c)をとる。このときの c の値を求めよ。ただし，c＞0 とする。

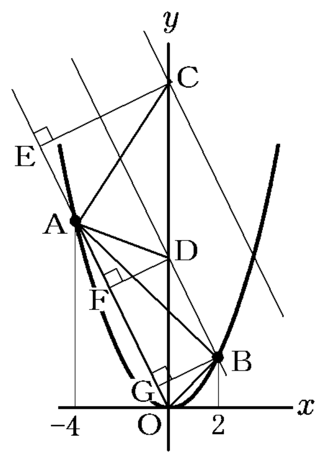


(富山県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

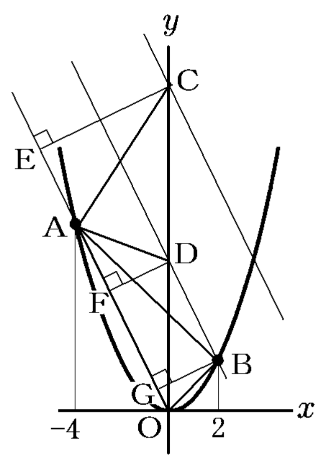
まず，右図のように，点 B を通って直線 AO に平行な直線 BD をひく。△AOB と△AOD で，AO を共通の底辺とすると，
AO // BD なので, それぞれの三角形の高さ(BG と DF)は等しくなる。よって，(△AOB の面積)＝(△AOD の面積)となる。
次に，y 軸上の正の部分に CO＝2DO となる点 C をとる。
△AOC と△AOB で，AO を共通の底辺とすると，
△AOC の高さ CE は，△AOB の高さ BG の 2 倍になる。
したがって，(△AOC の面積)＝(△AOB の面積)×2 になる。
点 C の y 座標は，点 D の y 座標の 2 倍になる。
直線 BD の式を求める(AO と平行で，点 B を通る)
→点 D の y 座標→点 C の y 座標



[解答]12

[解説]

まず，右図のように，点 B を通って直線 AO に平行な直線 BD をひく。△AOB と△AOD で，AO を共通の底辺とすると，
AO // BD なので, それぞれの三角形の高さ(BG と DF)は等しくなる。よって，(△AOB の面積)＝(△AOD の面積)となる。
次に，y 軸上の正の部分に CO＝2DO となる点 C をとる。
△AOC と△AOB で，AO を共通の底辺とすると，
△AOC の高さ CE は，△AOB の高さ BG の 2 倍になる。
したがって，(△AOC の面積)＝(△AOB の面積)×2 になる。
点 C の y 座標は，点 D の y 座標の 2 倍になる。
そこで，直線 BD の式を求める。



点 A の x 座標は－4 なので，$y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入して，$y=\dfrac{1}{2}\times(-4)^2=8$

点 B の x 座標は 2 なので，$y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して，$y=\frac{1}{2}\times 2^2=2$

よって，(直線 BD の傾き)＝(直線 AO の傾き)＝$\frac{8-0}{-4-0}=-2$

直線 BD は傾きが－2 で，点 B(2，2)を通るので，$y=m(x-x_1)+y_1$ の公式より，

$y=-2(x-2)+2$，$y=-2x+6$ となることがわかる。

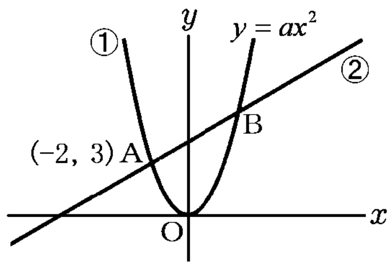
点 D は $y=-2x+6$ の切片(y 切片)なので，点 D の y 座標は 6 になる。

点 C の y 座標は点 D の y 座標の 2 倍なので，c＝6×2＝12 となる。

[問題]

右の図において，①は関数 $y=ax^2$ のグラフで，②は傾きが $\frac{1}{2}$ の直線であり, ①と②は 2 点 A, B で交わっている。

点 A の座標が(−2, 3)であるとき, 次の問いに答えなさい。



(1) 定数 a の値を求めよ。

(2) x 軸上に x 座標が正である点Pをとり，△PABの面積が△OABの面積の2倍となるようにしたい。このときの点Pの x 座標を求めよ。

(高知県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(1) 点 A の座標を $y=ax^2$ に代入。

(2) 直線②の式を求める→点 C の座標

CO＝DO となる点 D をとる。点 D を通り②に平行な直線 DP をひく。

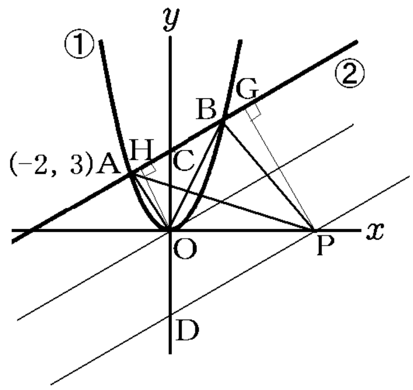
△OAB と△PAB で，AB を共通の底辺とすると，

△OAB の高さは OH，△PAB の高さは PG となる。

CO＝DO なので，PG＝OH×2 となる。

したがって, (△PAB の面積)＝(△OAB の面積)×2 になる。

点 P の座標を求めるために直線 DP の式を求める。



[解答](1) $a=\frac{3}{4}$ (2) 8

[解説]

(1) 点 A(−2, 3)は $y = ax^2$ 上にあるので,

$x = -2,\ y = 3$ を $y = ax^2$ に代入して,

$3 = a \times (-2)^2,\ 4a = 3$　よって, $a = \frac{3}{4}$

(2) まず, 直線②の式を求めておく。

直線②の傾きは $\frac{1}{2}$ で, 点 A(−2, 3)を通るので, $y = a(x - x_1) + y_1$ の公式より,

$y = \frac{1}{2}(x - (-2)) + 3,\ y = \frac{1}{2}x + 4$ と計算できる。

よって, ②と y 軸との交点を C とすると, 点 C の座標は(0, 4)となる。

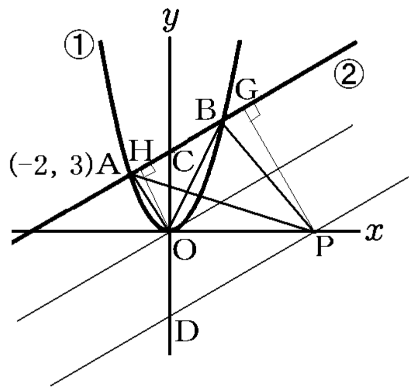
ここで, 右図のように, CO＝DO となる点 D(0, −4)をとる。点 D を通り②に平行な直線 DP をひく。

△OAB と△PAB で, AB を共通の底辺とすると,

△OAB の高さは OH, △PAB の高さは PG となる。

CO＝DO なので, PG＝OH×2 となる。

したがって, (△PAB の面積)＝(△OAB の面積)×2 になる。



点 P の座標を求めるために直線 DP の式を求める。

直線 DP は②と平行なので傾きは $\frac{1}{2}$ である。また点 D の座標は(0, −4)なので, y 切片は−4 である。したがって, 直線 DP の式は, $y = \frac{1}{2}x - 4$ である。

点 P の y 座標は 0 なので, $y = \frac{1}{2}x - 4$ に $y = 0$ を代入して, $0 = \frac{1}{2}x - 4$

両辺を 2 倍すると, $x - 8 = 0$　よって $x = 8$

よって, 点 P の x 座標は 8 になる。

【FdData 入試製品版のご案内】
詳細は，[FdData 入試ホームページ]に掲載（[Shift]＋左クリック→新規ウィンドウ）
姉妹品：[FdData 中間期末ホームページ] ([Shift]＋左クリック→新規ウィンドウ)

◆印刷・編集
この PDF ファイルは，FdData 入試を PDF 形式に変換したサンプルで，印刷はできないように設定しております。製品版の FdData 入試は Windows パソコン用のマイクロソフト Word(Office)の文書ファイルで，印刷・編集を自由に行うことができます。

◆FdData 入試の特徴
FdData 入試は，公立高校入試問題の全傾向を網羅することを基本方針に編集したワープロデータ(Word 文書)です。 入試理科・社会・数学ともに，過去に出題された公立高校入試の問題をいったんばらばらに分解して，細かい単元ごとに再編集して作成しております。

◆サンプル版と製品版の違い
ホームページ上に掲載しておりますサンプルは，製品の Word 文書を PDF ファイルに変換したもので印刷や編集はできませんが，製品の全内容を掲載しており，どなたでも自由に閲覧できます。問題を「目で解く」だけでもある程度の効果をあげることができます。
しかし，FdData 入試がその本来の力を発揮するのは印刷や編集ができる製品版においてです。また，製品版は，すぐ印刷して使える「問題解答分離形式」，編集に適した「問題解答一体形式」，などの形式を含んでいますので，目的に応じて活用することができます。
※FdData 入試の特徴(QandA 方式) ([Shift]＋左クリック→新規ウィンドウ)

◆FdData 入試製品版(Word 版)の価格(消費税込み)
※以下のリンクは[Shift]キーをおしながら左クリックすると，新規ウィンドウが開きます
数学 1 年(4400 円)，数学 2 年(6400 円)，数学 3 年(9600 円)：(統合版は 16,200 円)
理科 1 年(6800 円)，理科 2 年(6800 円)，理科 3 年(6800 円)：(統合版は 16,200 円)
社会地理(6800 円)，社会歴史(6800 円)，社会公民(6800 円)：(統合版は 16,200 円)
※Windows パソコンにマイクロソフト Word がインストールされていることが必要です。
(Mac の場合はお電話でお問い合わせください)。

◆ご注文は，メール(info2@fdtext.com)，または電話(092-811-0960)で承っております。
※注文→インストール→編集･印刷の流れ ([Shift]＋左クリック)
※注文メール記入例 ([Shift]＋左クリック)

【Fd 教材開発】 Mail： info2@fdtext.com Tel ：092-811-0960