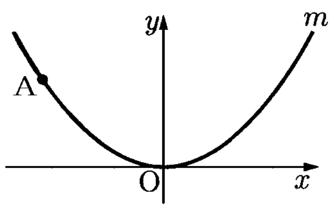
【】式の決定・変化の割合・変域など
【】式の決定
[問題]
関数 $y=ax^2$ について， $x=3$ のとき， $y=18$ である。このとき， a の値を求めよ。
(岡山県)(*)
[解答欄]

[ヒント]
$y=ax^2$ に $x=3$， $y=18$ を代入する。
[解答] $a=2$
[解説]
$y=ax^2$ に $x=3$， $y=18$ を代入すると，
$18=a\times3^2$， $9a=18$， $a=2$

[問題]
y は x の 2 乗に比例し， $x=3$ のとき， $y=-36$ である。このとき， y を x の式で表せ。
(秋田県)(*)
[解答欄]

[ヒント]
$y=ax^2$ とおいて， $y=ax^2$ に $x=3$， $y=-36$ を代入する。
[解答] $y=-4x^2$
[解説]
$y=ax^2$ とおく。 $y=ax^2$ に $x=3$， $y=-36$ を代入すると，
$-36=a\times3^2$， $9a=-36$， $a=-4$
よって，求める式は， $y=-4x^2$

[問題]
右図において，m は関数 $y=ax^2$ (a は定数)のグラフを表す。A は m 上の点であり，その座標は(−4，3)である。a の値を求めよ。



(大阪府)(*)
[解答欄]

[解答] $a=\frac{3}{16}$

[解説]

$y=ax^2$ に $x=-4,\ y=3$ を代入すると，

$3=16a$， $a=\frac{3}{16}$

[問題]

y は x の 2 乗に比例し， $x=1$ のとき $y=2$ である。 $x=3$ のときの y の値を求めよ。

(沖縄県)(*)

[解答欄]

[解答] $y=18$

[解説]

$y=ax^2$ とおく。 $y=ax^2$ に $x=1$， $y=2$ を代入すると，

$2=a\times 1$， $a=2$， よって， $y=2x^2$

$y=2x^2$ に $x=3$ を代入すると， $y=2\times 3^2=18$

[問題]

右の表は，関数 $y=ax^2$ について，x と y の関係を表したものである。このとき a の値および表の b の値を求めよ。

x	$\cdots$	-6	$\cdots$	4	$\cdots$
y	$\cdots$	b	$\cdots$	6	$\cdots$

(滋賀県)(*)

[解答欄]

$a=$	$b=$

[解答] $a=\frac{3}{8}$ $b=\frac{27}{2}$

[解説]

表より， $x=4$ のとき $y=6$ なので，これを $y=ax^2$ に代入すると，

$6=16a$， $a=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$ よって，関数の式は $y=\frac{3}{8}x^2$

$y=\frac{3}{8}x^2$ に $x=-6$， $y=b$ を代入すると， $b=\frac{3}{8}\times 36=\frac{27}{2}$

【】変域

[問題]

関数 $y=3x^2$ について，x の変域が $-3\leqq x\leqq2$ のときの y の変域を求めよ。

(福島県)(*)

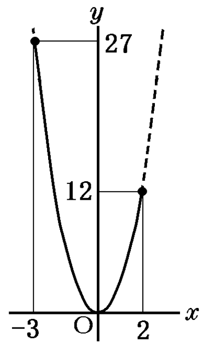
[解答欄]

[ヒント]

x の変域が $-3\leqq x\leqq2$ で $x=0$ が変域内にあるので，$x=-3$，$x=0$，$x=2$ のときの y の値を比較する。

[解答] $0\leqq y\leqq27$

[解説]



$x=0$ が x の変域内にあるときは 3 点を比較する。

$x=-3$ のとき，$y=3\times(-3)^2=27$

$x=0$ のとき，$y=0$

$x=2$ のとき，$y=3\times2^2=12$

よって，y の変域は，$0\leqq y\leqq27$

[問題]

関数 $y=\frac{2}{3}x^2$ について，x の変域が $-1\leqq x\leqq3$ のときの y の変域を求めよ。

(福岡県)(*)

[解答欄]

[解答] $0\leqq y\leqq6$

[解説]

$x=0$ が x の変域内にあるときは 3 点を比較する。

$x=-1$ のとき，$y=\frac{2}{3}\times(-1)^2=\frac{2}{3}$

$x=0$ のとき，$y=0$

$x=3$ のとき，$y=\frac{2}{3}\times3^2=6$

よって，$0\leqq y\leqq6$

[問題]

関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ について， x の変域が， $2 \leqq x \leqq 6$ のときの y の変域を求めよ。

(補充問題)(**)

[解答欄]

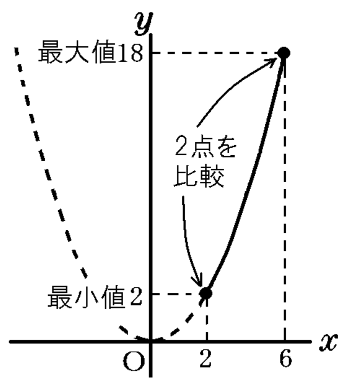
[ヒント]

x の変域が $2 \leqq x \leqq 6$ で $x=0$ が変域内にないので，$x=2$，$x=6$ のときの y の値を比較する。

[解答] $2 \leqq y \leqq 18$

[解説]

$x=0$ が x の変域内にないときは 2 点を比較する。



$x=2$ のとき $y=\frac{1}{2}\times 2^2=2$

$x=6$ のとき $y=\frac{1}{2}\times 6^2=18$

よって， $2 \leqq y \leqq 18$

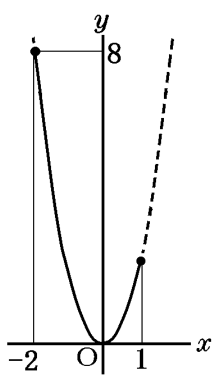
[問題]

関数 $y=ax^2$ について， x の変域が $-2 \leqq x \leqq 1$ のとき， y の変域が $0 \leqq y \leqq 8$ である。このとき，定数 a の値を求めよ。

(岡山県)(**)

[解答欄]

[ヒント]



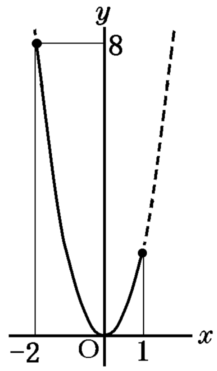
[解答] $a=2$

[解説]

「y の変域が $0 \leqq y \leqq 8$ である」より $y \geqq 0$ であるので，$a > 0$ である。

したがって，放物線のグラフは上に開いている。

「x の変域が $-2 \leqq x \leqq 1$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 8$ である」とあるので，グラフは右図のようになる。



右図より，$x = -2$ のとき $y = 8$ になる，

$y = ax^2$ に $x = -2$，$y = 8$ を代入すると，

$8 = a \times (-2)^2$

$4a = 8$，$a = 2$

[問題]

関数 $y = x^2$ について，x の変域が $a \leqq x \leqq 2$ のとき，y の変域は $0 \leqq y \leqq 9$ である。このときの a の値を求めよ。

(高知県)

[解答欄]

[ヒント]

y の変域が $0 \leqq y \leqq 9$ なので，$a < 0$ である。

[解答] $a = -3$

[解説]

$a > 0$ のときは，$0 < a \leqq x \leqq 2$ なので，$y = x^2$ の最小値は a^2，最大値は $2^2 = 4$ なので，

$a^2 \leqq y \leqq 4$ となり，条件を満たさない。

$a < 0$ のときは，$x = 0$ が x の変域内にあるので，3 点を比較する。

・ $x = a$ のとき $y = a^2$

・ $x = 0$ のとき $y = 0$

・ $x = 2$ のとき $y = 2^2 = 4$

y の変域は $0 \leqq y \leqq 9$ なので，$a^2 = 9$

$a < 0$ なので，$a = -3$

[問題]

関数 $y = x^2$ について，x の変域を $a \leqq x \leqq a + 2$ とするとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 4$ となるような a の値を，次の[　　]の中からすべて選べ。

[−2　−1　　0　　1　　2]

(埼玉県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

$a>0$ のとき，x の変域($a\leqq x\leqq a+2$)は正の数の範囲にあるので，$y>0$ となり不適。

[解答]-2，0

[解説]

$a>0$ のとき，x の変域($a\leqq x\leqq a+2$)は正の数の範囲にあるので，$y>0$ となり不適。

$a=0$ のとき，$0\leqq x\leqq 2$ なので，$0\leqq y\leqq 4$ となり，適する。

$a=-1$ のとき，$-1\leqq x\leqq 1$ なので，$0\leqq y\leqq 1$ となり，不適。

$a=-2$ のとき，$-2\leqq x\leqq 0$ なので，$0\leqq y\leqq 4$ となり，適する。

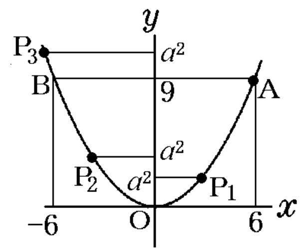
[問題]

関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ で，x の変域が $a\leqq x\leqq 6$ のとき，y の変域は $0\leqq y\leqq 9$ である。a がとることのできる値の範囲を求めよ。

(徳島県)(**)

[解答欄]

[ヒント]



点 $P\left(a,\ \frac{1}{4}a^2\right)$ を考える。

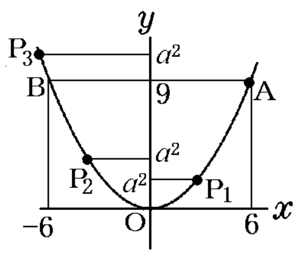
P が P_1 の位置にあるときは，$0\leqq y\leqq 9$ にならない。

P が P_2 の位置にあるときは，$0\leqq y\leqq 9$ になる。

P が P_3 の位置にあるときは，$0\leqq y\leqq 9$ にならない。

[解答]$-6\leqq a\leqq 0$

[解説]



$x=6$ のとき，$y=\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}\times 6^2=\frac{36}{4}=9$

右図のように，点 A の座標を(6，9)とする。

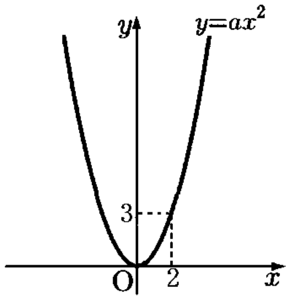
また，図のように，点 B(−6，9)をとる。

$x=a$ のとき，$y=\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}a^2$

点 $P\left(a,\ \frac{1}{4}a^2\right)$ を考える。

$0 < a \leqq 6$ のとき，点 P は，図の P_1 のように OA 間にある。x の変域が $a \leqq x \leqq 6$ であるので，y の変域は $a^2 \leqq y \leqq 9$ になり，$0 \leqq y \leqq 9$ にならない。
$-6 \leqq a \leqq 0$ のとき，点 P は，図の P_2 のように BO 間にある。x の変域が $a \leqq x \leqq 6$ であるので，y の変域は，図より，$0 \leqq y \leqq 9$ になる。これは条件を満たす。
$a < -6$ のとき，点 P は，図の P_3 のような位置にある。x の変域が $a \leqq x \leqq 6$ であるので，y の変域は，図より，$0 \leqq y \leqq a^2$ になり，$0 \leqq y \leqq 9$ にならない。
したがって，条件を満たす a の値の範囲は，$-6 \leqq a \leqq 0$ である。

[問題]



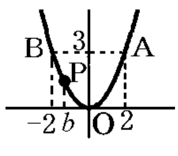
右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点(2，3)がある。次の各問いに答えよ。
(1) a の値を求めよ。
(2) 次のアとイにあてはまる数をそれぞれ求めよ。
関数 $y=ax^2$ において，x の変域が $b \leqq x \leqq 2$ のときの y の変域は $0 \leqq y \leqq 3$ である。このとき，b の値の範囲は，
(　ア　)$\leqq b \leqq$(　イ　)である。
(3) 関数 $y=ax^2$ において，x の変域が $-4 \leqq x \leqq 3$ のときの y の変域と，関数 $y=cx^2$ において，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 3$ のときの y の変域とが等しいとき，c の値を求めよ。
(兵庫県)(**)
[解答欄]

(1)	(2)ア	イ
(3)		

[解答](1) $a=\dfrac{3}{4}$　(2)ア　-2　イ　0　(3) $c=\dfrac{4}{3}$

[解説]

(1) $y=ax^2$ に $x=2,\ y=3$ を代入すると，$3=a\times 4$，$a=\dfrac{3}{4}$



(2) x 座標が b である放物線上の点を P とする。P が右図の OB 間にあるとき，y の変域は $0 \leqq y \leqq 3$ になる。
よって，$-2 \leqq b \leqq 0$

(3) (1)より，$a=\dfrac{3}{4}$ なので，この関数の式は $y=\dfrac{3}{4}x^2$

$x=-4$ のとき $y=\dfrac{3}{4}x^2=\dfrac{3}{4}\times(-4)^2=12$

$x=0$ のとき $y=\dfrac{3}{4}x^2=0$

$x=3$ のとき $y=\dfrac{3}{4}x^2=\dfrac{3}{4}\times 3^2=\dfrac{27}{4}$

よって，$y=\dfrac{3}{4}x^2$ で，x の変域が $-4\leqq x\leqq 3$ のときの y の変域は，$0\leqq y\leqq 12$

$y=cx^2$ において，
$x=-2$ のとき $y=cx^2=4c$，
$x=0$ のとき $y=0$
$x=3$ のとき $y=cx^2=9c$
よって，y の変域は，$0\leqq y\leqq 9c$

したがって，$9c=12$，$c=\dfrac{12}{9}=\dfrac{4}{3}$

【】変化の割合

[問題]

関数 $y=-3x^2$ について， x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めよ。

(愛知県)(*)

[解答欄]

[ヒント]

(x の増加量)＝3－1，(y の増加量)＝－27－(－3)

(変化の割合)＝$\dfrac{(\text{yの増加量})}{(x\text{の増加量})}$

[解答]－12

[解説]

x＝1 のとき， $y=-3x^2$＝－3

x＝3 のとき， $y=-3x^2$＝－27

よって，(x の増加量)＝3－1＝2，(y の増加量)＝－27－(－3)＝－24

(変化の割合)＝$\dfrac{(\text{yの増加量})}{(x\text{の増加量})}=\dfrac{-24}{2}=-12$

[問題]

関数 $y=\dfrac{6}{x}$ で， x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めよ。

(秋田県)

[解答欄]

[解答]－2

[解説]

$x=1$ のとき， $y=\dfrac{6}{1}=6$

$x=3$ のとき， $y=\dfrac{6}{3}=2$

よって，(x の増加量)＝3－1＝2，(y の増加量)＝2－6＝－4

(変化の割合)＝$\dfrac{(\text{yの増加量})}{(x\text{の増加量})}=\dfrac{-4}{2}=-2$

[問題]

関数 $y=ax^2$ において，x の値が 1 から 4 まで増加するときの変化の割合が－5 であるとき，a の値を求めよ。

(広島県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

(x の増加量)＝4－1＝3，(y の増加量)＝$16a-a$＝$15a$

[解答] a ＝－1

[解説]

x ＝1 のとき $y=ax^2=a\times1^2=a$

x ＝4 のとき $y=ax^2=a\times4^2=16a$

よって，(x の増加量)＝4－1＝3，(y の増加量)＝$16a-a$＝$15a$

(変化の割合)＝$\dfrac{(\text{yの増加量})}{(x\text{の増加量})}=\dfrac{15a}{3}=5a$

「変化の割合が－5 である」とあるので，$5a=-5$，$a=-1$

[問題]

関数 $y=x^2$ について，x が a から $a+5$ まで増加するとき，変化の割合は 7 である。このとき，a の値を答えなさい。(3 点)

(新潟県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

(x の増加量)＝$a+5-a$，(y の増加量)＝$(a+5)^2-a^2$

[解答] $a=1$

[解説]

$x=a$ のとき $y=x^2=a^2$

$x=a+5$ のとき $y=x^2=(a+5)^2$

よって，(x の増加量)＝$a+5-a$＝5，

(y の増加量)＝$(a+5)^2-a^2=a^2+10a+25-a^2=10a+25$

(変化の割合)＝$\dfrac{(\text{yの増加量})}{(x\text{の増加量})}=\dfrac{10a+25}{5}=2a+5$

変化の割合は 7 であるので，$2a+5=7$，$2a=2$，$a=1$

[問題]

関数 $y=ax^2$（a は定数)と関数 $y=-8x+7$ について，x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合が等しいとき，a の値を求めよ。

(愛知県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

一次関数 $y=bx+c$ の変化の割合は常に b になる。

[解答] $a=-2$

[解説]

$x=1$ のとき $y=ax^2=a\times1^2=a$，$x=3$ のとき $y=ax^2=a\times3^2=9a$

よって，(x の増加量)＝3－1＝2，(y の増加量)＝$9a-a=8a$

(変化の割合)＝$\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}=\dfrac{8a}{2}=4a$

一次関数 $y=bx+c$ の変化の割合は常に b になるので，x の値が 1 から 3 まで増加するときの $y=-8x+7$ の変化の割合は－8

2 つの関数で変化の割合が同じなので，$4a=-8$，$a=-2$

[問題]

ある自動車が動き始めてから x 秒間に進んだ距離を y m とすると，0≦ x ≦8 の範囲では $y=\dfrac{3}{4}x^2$ の関係があった。この自動車が動き始めて 1 秒後から 3 秒後までの平均の速さは毎秒何 m か。

(山口県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

(平均の速さ)＝$\dfrac{(\text{進んだ道のり})}{(\text{時間})}$

[解答]毎秒 3m

[解説]

$x=1$(秒)のとき，$y=\dfrac{3}{4}\times1^2=\dfrac{3}{4}$(m)

$x=3$(秒)のとき，$y=\dfrac{3}{4}\times3^2=\dfrac{27}{4}$(m)

よって，

(時間)＝3－1＝2(秒)

(進んだ道のり)＝$\frac{27}{4}-\frac{3}{4}=\frac{24}{4}$＝6(m)

(平均の速さ)＝$\frac{(進んだ道のり)}{(時間)}=\frac{6}{2}$＝3(m／s)

[問題]

関数$y=\frac{1}{2}x^2$で，xの値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合をm，xの値が 52 から 54 まで増加するときの変化の割合をnとする。mとnの大きさを比べるとき，どのようなことがいえるか，次の①～④の中から正しいものを 1 つ選べ。

ア　mとnは等しい。

イ　mの方が大きい。

ウ　nの方が大きい。

エ　mとnのどちらが大きいかは，判断ができない。

(佐賀県)(**)

[解答欄]

[解答]ウ

[解説]

$y=ax^2$でxがx_1からx_2へ増加するとき，

(変化の割合)＝$\frac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}=\frac{a{x_2}^2-a{x_1}^2}{x_2-x_1}=\frac{a({x_2}^2-{x_1}^2)}{x_2-x_1}=\frac{a(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=a(x_2+x_1)$

したがって，$y=\frac{1}{2}x^2$で，

xの値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合mは，$m=\frac{1}{2}(2+4)=3$

xの値が 52 から 54 まで増加するときの変化の割合nは，$n=\frac{1}{2}(52+54)=53$

よって，$m<n$となる。

【】グラフの特徴

[問題]

関数 $y=ax^2$ のグラフの特徴として適切なものを，次のア～オからすべて選び，その記号を書け。

ア　原点を通る。

イ　x 軸について対称な曲線である。

ウ　$a>0$ のときは上に開き，x 軸より下側にはない。

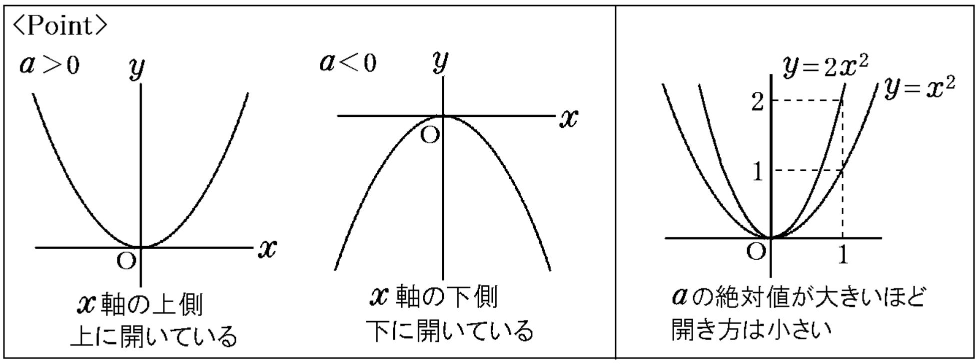
エ　$a<0$ のとき，x の値が増加すると $x>0$ の範囲では，y の値は減少する。

オ　a の値の絶対値が大きいほど，グラフの開き方は大きい。

(奈良県)(*)

[解答欄]

[ヒント]

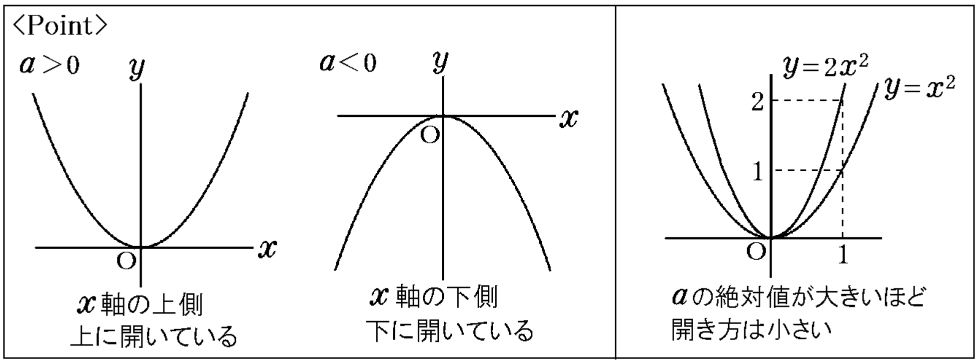


[解答]ア，ウ，エ

[解説]

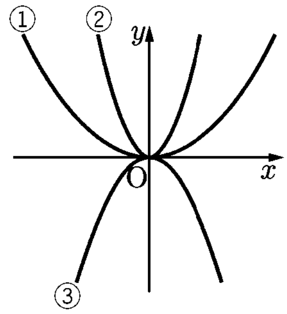
イは誤り。$y=ax^2$ は y 軸について対称である。

オは誤り。a の値の絶対値が大きいほど，グラフの開き方は小さい。



[問題]

右の図の①～③の放物線は, 下のア～ウの関数のグラフである。①～③は，それぞれどの関数のグラフか。ア～ウの中から選び, その記号をそれぞれ書け。



ア　$y=2x^2$

イ　$y=\frac{1}{3}x^2$

ウ　$y=-x^2$

(広島県)

[解答欄]

①	②	③

[ヒント]

$y=mx^2$ で $m>0$ のとき，グラフは x 軸の上側にあり，$m<0$ のときは x 軸の下側にある。

$y=mx^2$ で m の絶対値が大きいほど開き方が小さい。

[解答]① イ　② ア　③ ウ

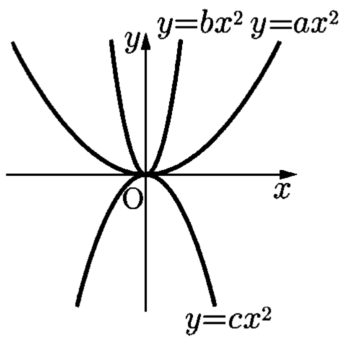
[解説]

$y=mx^2$ で $m>0$ のとき, グラフは x 軸の上側にあり, $m<0$ のときは x 軸の下側にあるので, ①と②は $m>0$，③は $m<0$ である。したがって，③のグラフはウである。

また，$y=mx^2$ で m の絶対値が大きいほど開き方が小さいので，①と②では②の絶対値が①より大きい。したがって，②はア，イのうちのアであることがわかる。

[問題]

右図は，3 つの関数 $y=ax^2$，$y=bx^2$，$y=cx^2$ のグラフを，同じ座標軸を使ってかいたものである。図の 3 つの関数について，比例定数 a, b, c を小さい順に左から並べて書け。



(長野県)(*)

[解答欄]

[解答] c, a, b

[解説]

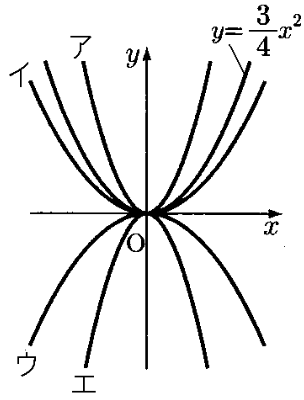
$y=mx^2$ で $m>0$ のとき, グラフは x 軸の上側にあり, $m<0$ のときは x 軸の下側にあるので, $a>0$，$b>0$，$c<0$ である。

また，$y=mx^2$ で m の絶対値が大きいほど開き方が小さいので，$b>a$ であることがわかる。

したがって，a, b, c を小さい順に並べると，c, a, b となる。

[問題]

右の図のア～エは，$y=ax^2$ の形で表される 4 つのグラフを，関数 $y=\frac{3}{4}x^2$ のグラフと同じ座標軸を使ってかいたものであり，そのうちの 1 つが関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフである。関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフを，ア～エから選び，記号で答えよ。



(山口県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

$y=ax^2$ で $a>0$ のときは放物線のグラフは上に開く。

a の絶対値が小さいほど開き方は大きくなる。

[解答]イ

[解説]

$y=ax^2$ で $a>0$ のときは放物線のグラフは上に開いているので，$y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフはアかイである。また，a の絶対値が大きいほど開き方は小さくなり，a の絶対値が小さいほど開き方は大きくなる。$y=\frac{1}{2}x^2$ の $\frac{1}{2}$ は，$y=\frac{3}{4}x^2$ の $\frac{3}{4}$ より小さいので $y=\frac{1}{2}x^2$ の開き方は $y=\frac{3}{4}x^2$ より大きい。よって，$y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフはイである。

[問題]

関数 $y=2x^2$ のグラフと x 軸について対称であるグラフの式が $y=ax^2$ である。このとき，a の値を求めよ。

(沖縄県)(*)

[解答欄]

[解答]－2

[解説]

$y=2x^2$ と x 軸に対称なグラフの式は $y=-2x^2$ である。

[問題]

　y の値が正の値をとらない関数を，次のア～エから 1 つ選べ。

ア　$y=-\frac{x}{2}$　　イ　$y=-\frac{2}{x}$　　ウ　$y=-2x+3$　　エ　$y=-2x^2$

(岐阜県)(*)

[解答欄]

[解答]エ

[解説]

エの $y=-2x^2$ は下に開いており，$y\leqq 0$ となる。

[問題]

　関数 $y=-x^2$ の値の増減について説明した次の文が正しくなるように，文章中の①，②の(　　)内からそれぞれ適語を選べ。

　$x<0$ の範囲では，x の値が増加するとき，y の値は①(増加／減少)する。また，$x>0$ の範囲では，x の値が増加するとき，y の値は②(増加／減少)する。

(秋田県)(*)

[解答欄]

①	②

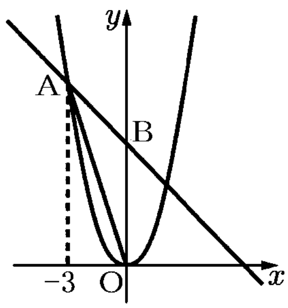
[解答]①　増加　②　減少

【】座標・長さなど

【】放物線と直線の式

[問題]

右の図のように，関数 $y=x^2$ のグラフ上に，x 座標が－3 となる点 A をとる。点 A を通り，傾きが－1 となる直線と y 軸との交点を B とする。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) 2 点 A，B を通る直線の式を答えよ。

(2) △OAB の面積を求めよ。

(新潟県)(**)

[解答欄]

(1)	(2)

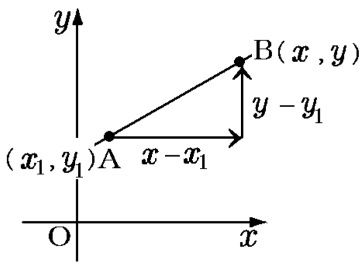
[ヒント]

傾きが m で点 $(x_1,\ y_1)$ を通る直線の式は $y=m(x-x_1)+y_1$ である。

[解答](1) $y=-x+6$ (2) 9

[解説]

傾きが m で点 $(x_1,\ y_1)$ を通る直線の式は $y=m(x-x_1)+y_1$ である。参考までに右図を使ってこの公式を導いておく。



直線 AB の傾き m は，図から，$m=\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$

$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=m$，$y-y_1=m(x-x_1)$，

よって，$y=m(x-x_1)+y_1$

[直線の式の求め方]
傾きが m で $(x_1,\ y_1)$ を通る直線
$y=m(x-x_1)+y_1$

(1) $x=-3$ を $y=x^2$ に代入すると，$y=9$ なので，点 A の座標は(－3，9)である。

2 点 A，B を通る直線の傾きは－1 なので，

$y=m(x-x_1)+y_1$ の公式を使うと，

$y=-(x+3)+9$，$y=-x+6$

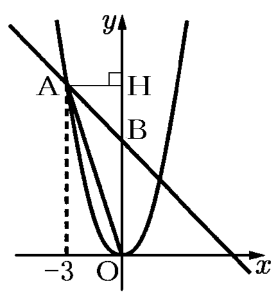
＊ $y=-x+b$ とおいて，(－3，9)を代入することで b を求めることもできるが，慣れると $y=m(x-x_1)+y_1$ の公式を使う方が簡単である。

(2) 右図で，△OAB の底辺を OB とすると高さは AH である。

B は $y=-x+6$ の y 切片なので，OB＝6

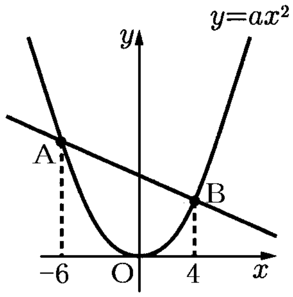
点 A の x 座標は－3 なので，AH＝3

よって，(△OAB の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×OB×AH＝$\dfrac{1}{2}\times 6\times 3$＝9



[問題]

右の図のように，関数 $y=ax^2$ ($a>0$)のグラフ上に 2 点 A，B があり，x 座標はそれぞれ-6，4 である。直線 AB の傾きが $-\dfrac{1}{2}$ であるとき，a の値を求めよ。



(栃木県)

[解答欄]

[ヒント]

2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の傾き m は，$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

[解答] $a=\dfrac{1}{4}$

[解説]

2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の傾き m は，$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ で表される。

そこで，まず，A，B の座標を a を使って表す。

点 A： $x=-6$ を $y=ax^2$ に代入すると，$y=36a$ なので，A の座標は $(-6,\ 36a)$

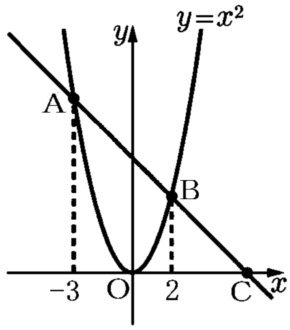
点 B： $x=4$ を $y=ax^2$ に代入すると，$y=16a$ なので，B の座標は $(4,\ 16a)$

よって，(直線 AB の傾き)$=\dfrac{16a-36a}{4-(-6)}=\dfrac{-20a}{10}=-2a$

直線 AB の傾きは $-\dfrac{1}{2}$ なので，$-2a=-\dfrac{1}{2}$，$a=\dfrac{1}{4}$

[問題]

右の図で，2 点 A，B は関数 $y=x^2$ のグラフ上の点であり，点 A の x 座標は-3，点 B の x 座標は 2 である。直線 AB と x 軸との交点を C とする。このとき，点 C の座標を求めよ。



(茨城県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

A，B の座標→直線 AB の式→点 C の座標

2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の式は，$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$

[解答](6，0)

[解説]

まず，直線 AB の式を求める。

点 A の x 座標は－3 なので， $y=x^2=9$　よって，A(－3，9)

点 B の x 座標は 2 なので， $y=x^2=4$　よって，B(2，4)

2 点の座標から直線の式を求めるためには，連立方程式で解くこともできるが，計算が煩雑になる。

傾きが m で点(x_1, y_1)を通る直線は，

$y=m(x-x_1)+y_1$ と表される。

2 点(x_1, y_1)，(x_2, y_2)が与えられているときは，

$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ なので，m を $y=m(x-x_1)+y_1$ に代入すると，

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ となる。

[直線の式の求め方]

傾きが m で(x_1, y_1)を通る直線

$y=m(x-x_1)+y_1$

2点(x_1, y_1),(x_2, y_2)を通る直線

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$

この公式を使って 2 点 A(－3，9)，B(2，4)を通る直線の式を求めると，

$y=\dfrac{4-9}{2-(-3)}(x-2)+4$， $y=\dfrac{-5}{5}(x-2)+4$， $y=-x+6$

点 C の y 座標は 0 なので， $y=-x+6$ に $y=0$ を代入して， $0=-x+6$， $x=6$

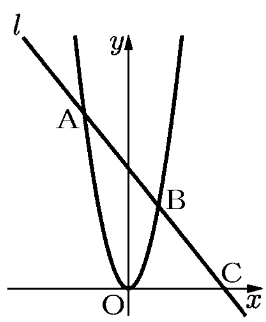
よって，点 C の座標は(6，0)となることがわかる。

※この公式の傾きを求めるとき，ここでは(B の座標)－(A の座標)で計算したが，反対にして $\dfrac{9-4}{-3-2}$ としてもかまわない。また，ここでは， x_1，y_1 は点 B の座標を使ったが，点 A の座標を使ってもかまわない。

[問題]

　右の図で，曲線は関数 $y=2x^2$ のグラフである。曲線上に x 座標が－3，2 である 2 点 A，B をとり，この 2 点を通る直線 l をひく。直線 l と x 軸との交点を C とするとき，△AOC の面積を求めよ。ただし，座標軸の単位の長さを 1cm とする。

(埼玉県)(**)



[解答欄]

[ヒント]

点 A，B の座標→直線 l の式→点 C の x 座標

[解答]54cm²

[解説]

点 A の座標： $x=-3$ を $y=2x^2$ に代入して $y=2\times9=18$ なので，A(－3，18)

点 B の座標： $x=2$ を $y=2x^2$ に代入して $y=2\times4=8$ なので，B(2，8)

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って 2 点 A(－3，18)，B(2，8)を通る直線 l の式を求めると， $y=\dfrac{8-18}{2-(-3)}(x-2)+8$， $y=-2(x-2)+8$， $y=-2x+12$

点 C の x 座標： $y=-2x+12$ に $y=0$ を代入して， $0=-2x+12$， $2x=12$， $x=6$

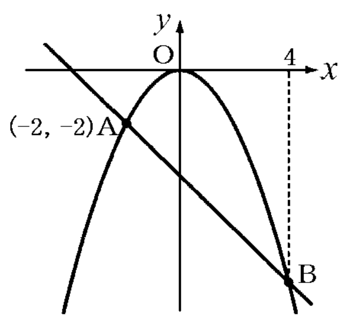
よって，OC＝6

△AOC の底辺を OC とすると，高さは，点 A の y 座標の 18 と等しくなるので，

(△AOC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×6×18＝54(cm²)

[問題]

右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点 A(－2，－2)と点 B があり，点 B の x 座標は 4 である。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 点 B の y 座標を求めよ。

(3) 直線 AB の式を求めよ。

(佐賀県)(**)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[解答](1) $-\dfrac{1}{2}$ (2) －8 (3) $y=-x-4$

[解説]

(1) 関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点 A(－2，－2)があるので， $y=ax^2$ に $x=-2$, $y=-2$ を代入すると， $-2=a\times(-2)^2$ が成り立つ。よって， $-2=4a$， $a=-\dfrac{2}{4}$， $a=-\dfrac{1}{2}$

(2) (1)より， $a=-\dfrac{1}{2}$ なので，この放物線の式は， $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ になる。

$y=-\dfrac{1}{2}x^2$ に $x=4$ を代入すると， $y=-\dfrac{1}{2}\times4^2=-8$

(3) $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って直線 AB の式を求める。

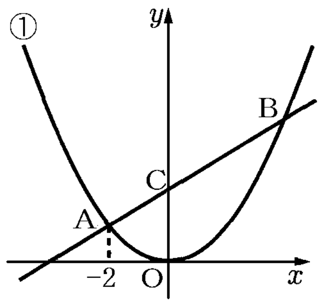
仮定より A(−2，−2)，(2)より B(4，−8)なので，

$y=\dfrac{-8-(-2)}{4-(-2)}(x-4)-8$， $y=\dfrac{-6}{6}(x-4)-8$

$y=-(x-4)-8$， $y=-x-4$

[問題]

右の図のように，関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ …①のグラフ上に 2 点 A，B がある。A の x 座標は−2，B の x 座標は正で，B の y 座標は A の y 座標より 3 だけ大きい。また，点 C は直線 AB と y 軸との交点である。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) 点 A の y 座標を求めよ。

(2) 点 B の座標を求めよ。

(3) 直線 AB の式を求めよ。

(4) 線分 BC 上に 2 点 B，C とは異なる点 P をとる。また，関数①のグラフ上に点 Q を，線分 PQ が y 軸と平行になるようにとり，PQ の延長と x 軸との交点を R とする。
PQ : QR＝5 : 1 となるときの P の座標を求めよ。

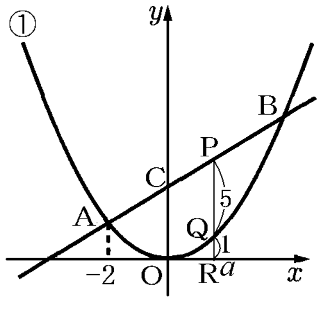
(熊本県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
(4)		

[ヒント]

(4) P，Q，R の位置関係は次の図のようになる。



[解答](1) 1 (2) (4，4) (3) $y=\dfrac{1}{2}x+2$ (4) $\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{8}{3}\right)$

[解説]

(1) $x=-2$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入すると，$y=\frac{1}{4}\times 4=1$ なので，点Aの y 座標は1である。

(2) (1)より点Aの y 座標は1で，「Bの y 座標はAの y 座標より3だけ大きい」ので，

Bの y 座標は，1＋3＝4である。$y=4$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入すると，$4=\frac{1}{4}x^2$，$x^2=16$，

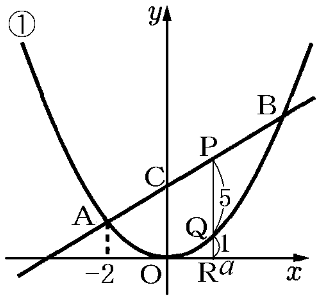
$x>0$ なので，$x=4$　よって，点Bの座標は(4，4)である。

(3) $y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って直線ABの式を求める。

点A(−2，1)，点B(4，4)なので，

$y=\frac{4-1}{4-(-2)}(x-4)+4$，$y=\frac{3}{6}(x-4)+4$，$y=\frac{1}{2}x+2$

(4) P，Q，Rの位置関係は右図のようになる。



点P，Q，Rの x 座標を $x=a$ とすると，

点Pの y 座標は，$x=a$ を $y=\frac{1}{2}x+2$ に代入して，$y=\frac{1}{2}a+2$

点Qの y 座標は，$x=a$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入して，$y=\frac{1}{4}a^2$

よって，PR＝$\frac{1}{2}a+2$，QR＝$\frac{1}{4}a^2$

PQ：QR＝5：1より，PR：QR＝(5＋1)：1，PR：QR＝6：1

比の外項の積は内項の積に等しいので，PR×1＝QR×6

したがって，$\frac{1}{2}a+2=\frac{1}{4}a^2\times 6$，$a+4=3a^2$，$3a^2-a-4=0$

解の公式を使うと，$a=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{6}=\frac{1\pm 7}{6}$，$a=\frac{4}{3}$, -1

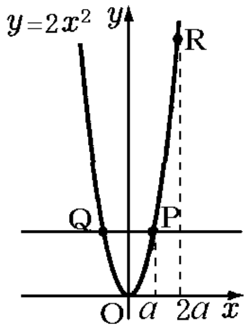
$a>0$ なので，$a=\frac{4}{3}$　よって，点Pの x 座標は $\frac{4}{3}$ である。

点Pの y 座標は，$x=\frac{4}{3}$ を $y=\frac{1}{2}x+2$ に代入して，$y=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}+2=\frac{8}{3}$

したがって，点Pの座標は $\left(\frac{4}{3},\ \frac{8}{3}\right)$ である。

[問題]

右の図のように，関数 $y=2x^2$ のグラフ上に 2 点 P，Q があり，直線 PQ は x 軸に平行である。点 P の x 座標を a とする。このとき，次の各問いに答えよ。ただし，$a>0$ とする。



(1) 点 Q の座標を a を用いて表せ。

(2) 関数 $y=2x^2$ のグラフ上で x 座標が $2a$ である点を R とする。2 点 Q，R を通る直線の傾きが 7 のとき，a の値を求めよ。

(京都府)(**)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(2) 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の傾きは $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ である。

[解答](1) $(-a,\ 2a^2)$　(2) $a=\dfrac{7}{2}$

[解説]

(1) 点 P の x 座標は a であるので，$y=2x^2$ に $x=a$ を代入すると，$y=2a^2$

よって，点 P の座標は $(a,\ 2a^2)$ である。「直線 PQ は x 軸に平行である」ので，点 Q は y 軸について点 P と線対称の位置にある。したがって，点 Q の座標は $(-a,\ 2a^2)$ である。

(2) まず，点 R の座標を求める。

点 R の x 座標は $2a$ なので，$y=2x^2$ に $x=2a$ を代入すると，$y=2\times(2a)^2=8a^2$

よって，点 R の座標は $(2a,\ 8a^2)$ となる。

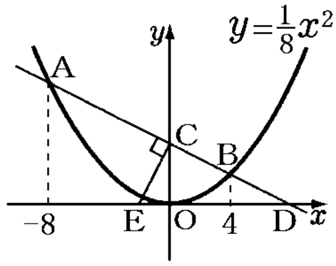
Q$(-a,\ 2a^2)$，R$(2a,\ 8a^2)$ なので，

(直線 QR の傾き)$=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{8a^2-2a^2}{2a-(-a)}=7$

$\dfrac{6a^2}{3a}=7$，$2a=7$，$a=\dfrac{7}{2}$

[問題]

右の図のように，関数$y=\frac{1}{8}x^2$のグラフ上に 2 点 A，B があり，2 点 A，B のx座標はそれぞれ－8，4 である。2 点 A，B を通る直線とy軸との交点を C，x軸との交点を D とする。また，x軸上に∠ACE＝90° となるように点 E をとる。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) 2 点 A，B を通る直線の式を求めよ。

(2) 点 D の座標を求めよ。

(3) 線分 DE の長さを求めよ。

(京都府)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(3)「∠ACE＝90° 」なので，直線 CE は直線 AB と垂直である。

傾きmの直線と傾きnの直線が垂直であるとき，$mn=-1$が成り立つ。

したがって，(直線 CE の傾き)×(直線 AB の傾き)＝－1

[解答](1) $y=-\frac{1}{2}x+4$ (2) (8，0) (3) 10

[解説]

(1) まず，点 A，B の座標を求める。

点 A のx座標は－8 なので，$y=\frac{1}{8}x^2$に$x=-8$を代入して，$y=\frac{1}{8}\times(-8)^2=8$

点 B のx座標は 4 なので，$y=\frac{1}{8}x^2$に$x=4$を代入して，$y=\frac{1}{8}\times4^2=2$

よって，A(－8，8)，B(4，2)

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$の公式を使うと，

$y=\frac{2-8}{4-(-8)}(x-4)+2$，$y=-\frac{1}{2}(x-4)+2$，$y=-\frac{1}{2}x+4$

(2) 点 D は$y=-\frac{1}{2}x+4$上にあり，y座標が 0 なので，$y=-\frac{1}{2}x+4$に$y=0$を代入して，

$0=-\frac{1}{2}x+4$，$0=-x+8$，$x=8$

よって，点 D の座標は(8，0)となる。

(3) まず，直線 CE の式を求める。

「∠ACE＝90°」なので，直線 CE は直線 AB と垂直である。

傾き m の直線と傾き n の直線が垂直であるとき， $mn=-1$ が成り立つ。

したがって，(直線 CE の傾き)×(直線 AB の傾き)＝－1

(直線 CE の傾き)×$\left(-\dfrac{1}{2}\right)$＝－1，(直線 CE の傾き)＝－1÷$\left(-\dfrac{1}{2}\right)$＝－1×(－2)＝2

点 C の y 座標が直線 CE の y 切片になる。

点 C は直線 AB($y=-\dfrac{1}{2}x+4$)の y 切片でもあるので， y 切片は 4 である。

したがって，直線 CE の式は， $y=2x+4$

$y=2x+4$ に $y=0$ を代入すると， $0=2x+4$， $2x=-4$， $x=-2$

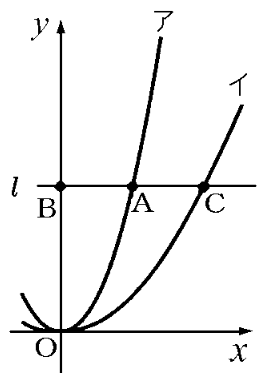
よって，点 E の座標は(－2，0)である。

(DE の長さ)＝(点 D の x 座標)－(点 E の x 座標)＝8－(－2)＝10

【】座標・長さなど

[問題]

右の図において，アは関数 $y=x^2$，イは関数 $y=ax^2$ $(a>0)$のグラフである。点 A はア上の点であり，x 座標は 2 である。点 A を通り x 軸に平行な直線を l とする。直線 l と y 軸の交点を B とし，直線 l とイの交点のうち，x 座標が正である点を C とする。点 A が線分 BC の中点であるとき，a の値を求めよ。



(秋田県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

点 A の x 座標は 2→点 A の y 座標→点 C の y 座標

点 A の x 座標は 2，A は線分 BC の中点→点 C の x 座標

点 C の x, y 座標→ $y=ax^2$ に代入

[解答] $a=\dfrac{1}{4}$

[解説]

点 A の x 座標は 2 であるので，

$y=x^2$ に $x=2$ を代入すると，$y=2^2=4$

よって，点 A の y 座標は 4 である。

したがって，点 C の y 座標も 4 である。

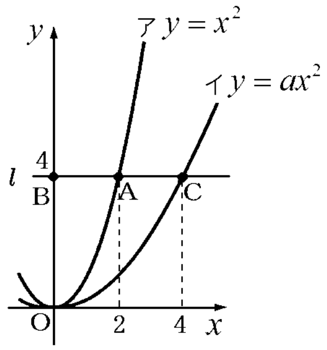
また，点 A は線分 BC の中点であるので，

点 C の x 座標は 4 である。

よって，点 C の座標は(4，4)である。

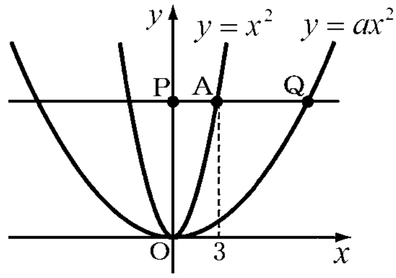
$y=ax^2$ は，点 C(4，4)を通るので，$y=ax^2$ に $x=4$, $y=4$ を代入すると，

$4=a\times4^2$，$16a=4$，$a=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$ が成り立つ。



[問題]

右の図は，2 つの関数 $y=x^2$，$y=ax^2$ ($a>0$)のグラフである。関数 $y=x^2$ のグラフ上で，x 座標が 3 である点を A とする。また，A を通り x 軸に平行な直線が，y 軸と交わる点を P, 関数 $y=ax^2$ のグラフと交わる点のうち，x 座標が正の数である点を Q とする。このとき，OP＝PQ となるような a の値を求めよ。



(栃木県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

点 A の x 座標は 3→点 A の y 座標→点 Q の y 座標

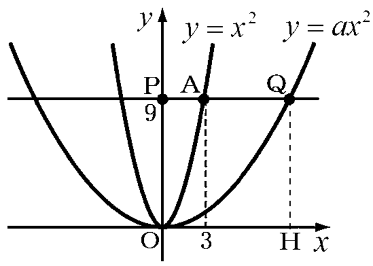
点 A の y 座標→OP→PQ→点 Q の x 座標

点 Q の x, y 座標→ $y=ax^2$ に代入

[解答] $a=\dfrac{1}{9}$

[解説]

点 A の x 座標は 3 であるので，$y=x^2$ に $x=3$ を代入すると，$y=3^2=9$ である。



よって，点 A の y 座標は 9 で，点 Q の y 座標も 9 になる。

したがって，OP＝9 になる。

仮定より OP＝PQ なので，PQ＝ 9

よって，OH＝PQ＝9 なので，点 Q の x 座標は 9 になる。

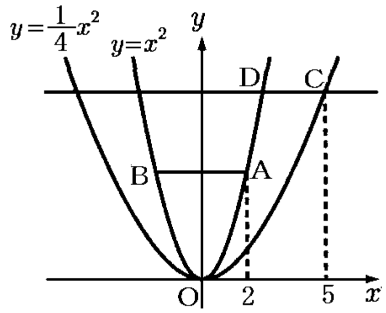
以上より，点 Q の座標は(9，9)であることがわかる。

点 Q は，$y=ax^2$ 上にあるので，$y=ax^2$ に $x=9$, $y=9$ を代入すると，

$9=a\times 9^2$，$81a=9$，$a=\dfrac{9}{81}=\dfrac{1}{9}$ になる。

[問題]

右の図のように，関数$y=x^2$のグラフ上に，x座標が 2 である点 A と，点 A とy座標が等しくx座標が異なる点 B をとり，点 A と点 B を結ぶ。また，関数$y=\frac{1}{4}x^2$のグラフ上に，x座標が 5 である点 C をとり，点 C を通りx軸に平行な直線と関数$y=x^2$のグラフとの交点のうち，x座標が正である点を D とする。線分 AB と線分 CD の長さの比を求めよ。



(宮城県)(**)

[解答欄]

AB：CD＝

[ヒント]

C のx座標は 5→C のy座標＝D のy座標→D のx座標→CD の長さ

[解答]AB：CD＝8：5

[解説]

まず，線分 AB の長さを求める。「点 A とy座標が等しくx座標が異なる点 B」より，点 B のx座標は－2 である。よって，AB＝2－(－2)＝4･･･①

次に，線分 CD の長さを求める。点 C のx座標が 5 なので，点 D のx座標がわかれば CD の長さを求めることができる。

点 C のx座標が 5 なので，$y=\frac{1}{4}x^2$に$x=5$を代入すると，$y=\frac{1}{4}\times5^2=\frac{25}{4}$

したがって，点 C のy座標は$\frac{25}{4}$になる。

点 D のy座標は，点 C のy座標と等しいので，$\frac{25}{4}$である。

$y=x^2$に$y=\frac{25}{4}$を代入すると，$\frac{25}{4}=x^2$，よって，$x=\pm\frac{5}{2}$

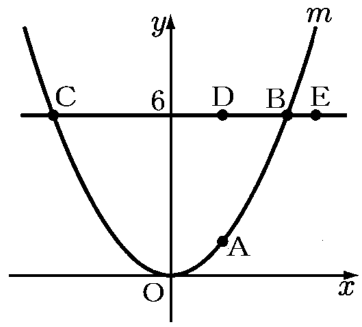
点 D のx座標は正であるので，$x=\frac{5}{2}$

点 C のx座標が 5，点 D のx座標が$\frac{5}{2}$なので，CD＝$5-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$･･･②

①，②より，AB：CD＝$4:\frac{5}{2}$＝$8:5$

[問題]

右図において，m は $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフを表す。A，B，C は m 上の点であって，A の x 座標は 2 である。B の x 座標は，C の x 座標より大きい。D，E は，B と C とを結んでできる直線上の点であり，B，C，D，E の y 座標はいずれも 6 である。D の x 座標は A の x 座標に等しく，E の x 座標は B の x 座標より大きい。



(1) B の x 座標と C の x 座標をそれぞれ求めよ。

(2) E の x 座標を t とする。DE²＝CE×BE となるときの t の値を求めよ。

(大阪府)(**)

[解答欄]

(1)B：	C：	(2)

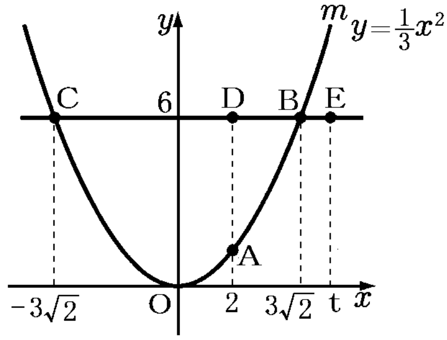
[ヒント]

(1) 点 B，C の y 座標は 6→ $y=\frac{1}{3}x^2$ に代入

(2) 右図より，DE＝$t-2$

CE＝$t-\left(-3\sqrt{2}\right)$＝$t+3\sqrt{2}$

BE＝$t-3\sqrt{2}$



[解答](1)B：$3\sqrt{2}$　C：$-3\sqrt{2}$　(2) $t=\frac{11}{2}$

[解説]

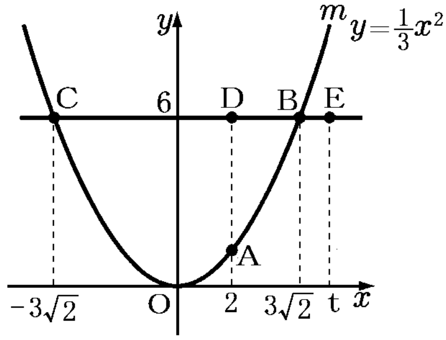
(1) $y=\frac{1}{3}x^2$ 上の点 B，C の y 座標は 6 であるので，

$y=\frac{1}{3}x^2$ に $y=6$ を代入して，$6=\frac{1}{3}x^2$

$x^2=18$，$x=\pm\sqrt{18}=\pm3\sqrt{2}$

点 B の x 座標は正なので，$x=3\sqrt{2}$

点 C の x 座標は $-3\sqrt{2}$



(2) 右図より，DE＝$t-2$

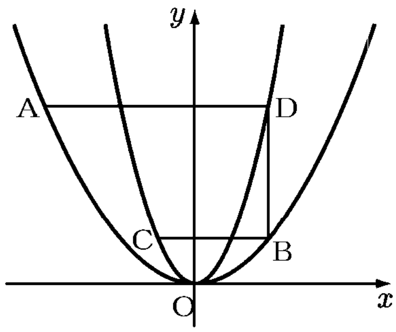
CE＝$t-\left(-3\sqrt{2}\right)$＝$t+3\sqrt{2}$，BE＝$t-3\sqrt{2}$

DE²＝CE×BE が成り立つので，$(t-2)^2=\left(t+3\sqrt{2}\right)\left(t-3\sqrt{2}\right)$

$t^2-4t+4=t^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2$，$-4t=-18-4$，$-4t=-22$　よって，$t=\frac{22}{4}=\frac{11}{2}$

[問題]

右の図のように，関数 $y=x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B, 関数 $y=4x^2$ のグラフ上に 2 点 C，D がある。点 A，C の x 座標は負の数，点 B，D の x 座標は正の数で，線分 AD，BC は x 軸に平行，線分 BD は y 軸に平行である。このとき，AD : BC を求めよ。



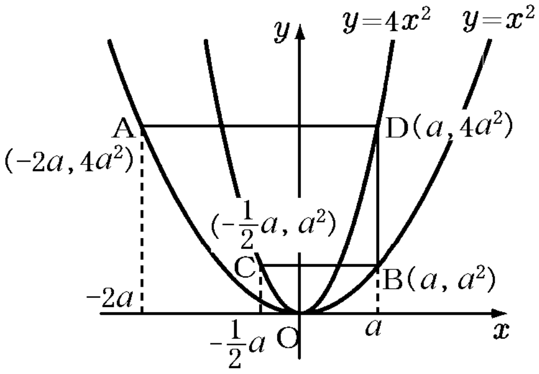
(広島県改)(**)

[解答欄]

AD : BC＝

[ヒント]

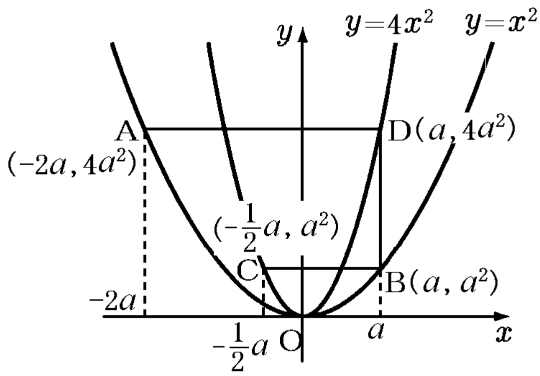
まず，点 B の x 座標を $a\,(a>0)$ として，B，C，D，A の座標を a を使って表す。



[解答]AD : BC＝2 : 1

[解説]

まず，点 B の x 座標を $a\,(a>0)$ として，B，C，D，A の座標を a を使って表す。



点 B は $y=x^2$ 上にあるので，$y=x^2$ に $x=a$ を代入すると，$y=a^2$

よって，点 B の座標は $\left(a,\ a^2\right)$ になる。

点 C の y 座標は点 B の y 座標 (a^2) と同じである。

点 C は $y=4x^2$ 上にあるので，$y=4x^2$ に $y=a^2$ を代入して，

$a^2=4x^2$，$x^2=\dfrac{1}{4}a^2$，$x=\pm\dfrac{1}{2}a$

点 C の x 座標は負であるので，$x=-\dfrac{1}{2}a$

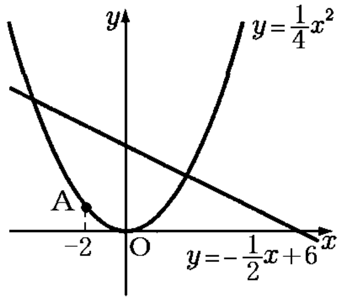
よって，点 C の座標は $\left(-\dfrac{1}{2}a,\ a^2\right)$

点 D は $y=4x^2$ 上にあるので，$y=4x^2$ に $x=a$ を代入すると，$y=4a^2$

よって，点 D の座標は$\left(a,\ 4a^2\right)$になる。
点 A の y 座標は点 D の y 座標($4a^2$)と同じである。
点 A は $y=x^2$ 上にあるので， $y=x^2$ に $y=4a^2$ を代入すると，
$4a^2=x^2$， $x^2=4a^2$， $x=\pm2a$
点 A の x 座標は負であるので， $x=-2a$
よって，点 A の座標は$\left(-2a,\ 4a^2\right)$
B，C，D，A の座標を記入すると，上図のようになる。図より，
AD＝(点 D の x 座標)－(点 A の x 座標)＝ $a-\left(-2a\right)$＝ $a+2a$ ＝ $3a$
BC＝(点 B の x 座標)－(点 C の x 座標)＝ $a-\left(-\dfrac{1}{2}a\right)$ ＝ $a+\dfrac{1}{2}a$ ＝ $\dfrac{3}{2}a$
よって，AD：BC＝ $3a:\dfrac{3}{2}a=6a:3a=2:1$

[問題]

右の図のように，関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ のグラフと直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+6$ がある。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) 関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ のグラフ上に，x 座標が－2 となる点 A をとるとき，A の y 座標を求めよ。
(2) 関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ のグラフ上を動く点 P と，直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+6$ 上を動く点 Q がある。P，Q の x 座標が等しく，PQ＝6 であるとき，P の x 座標をすべて求めよ。
(岩手県)(**)
[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]
(2) 放物線が直線より上側にあるとき， $\dfrac{1}{4}x^2-\left(-\dfrac{1}{2}x+6\right)=6$
放物線が直線より下側にあるとき， $-\dfrac{1}{2}x+6-\dfrac{1}{4}x^2=6$
[解答](1) 1　(2) －8，－2，0，6

[解説]

(1)　$x=-2$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入すると，　$y=\frac{1}{4}\times 4=1$

(2) 放物線が直線より上側にあるとき，

$$\frac{1}{4}x^2-\left(-\frac{1}{2}x+6\right)=6$$

$x^2+2x-24=24$，　$x^2+2x-48=0$，　$(x+8)(x-6)=0$，　$x=-8,\ 6$

放物線が直線より下側にあるとき，

$$-\frac{1}{2}x+6-\frac{1}{4}x^2=6$$

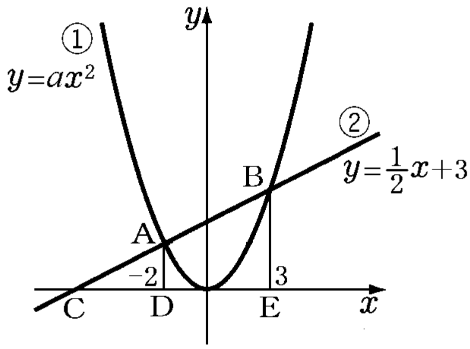
$-2x-x^2=0$，　$x^2+2x=0$，　$x(x+2)=0$，　$x=0,\ -2$

よって，PQ＝6 であるとき，P の x 座標は，－8，－2，0，6

【】線分比など

[問題]

右の図において，①は関数 $y=ax^2$，②は関数 $y=\frac{1}{2}x+3$ のグラフである。点 A，B は①と②の交点で，x 座標はそれぞれ－2，3 である。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 図のように，②と x 軸との交点を C とし，点 A，B から x 軸に垂線をひき，その交点をそれぞれ D，E とする。BA : AC を最も簡単な整数の比で表せ。

(山梨県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(2) △CAD と△CBE で，AD，BE は x 軸と垂直なので AD // BE となる。

平行線の性質より，BA : AC＝ED : DC が成り立つ。

[解答](1) $a=\frac{1}{2}$　(2) 5 : 4

[解説]

(1) まず，点 A の座標を求める。点 A の x 座標は $x=-2$ なので，$x=-2$ を $y=\frac{1}{2}x+3$ に代入すると，$y=\frac{1}{2}\times(-2)+3=-1+3=2$　よって，点 A の座標は(－2，2)である。

点 A は $y=ax^2$ 上の点であるので，$y=ax^2$ に $x=-2$，$y=2$ を代入すると，

$2=a\times(-2)^2$，$4a=2$，$a=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

(2) △CAD と△CBE で，AD，BE は x 軸と垂直なので AD // BE となる。

平行線の性質より，BA : AC＝ED : DC が成り立つ。･･･①

点 E の x 座標は 3，点 D の x 座標は－2 なので，

ED＝(点 E の x 座標)－(点 D の x 座標)＝3－(－2)＝3＋2＝5･･･②

DC の長さを求めるためには，点 C の x 座標を求める必要がある。

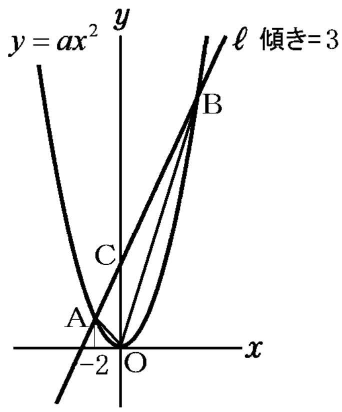
点 C は $y=\frac{1}{2}x+3$ 上にあり，y 座標は 0 であるので，$y=\frac{1}{2}x+3$ に $y=0$ を代入すると，

$0=\frac{1}{2}x+3$， $x+6=0$， $x=-6$

したがって，DC＝(点 D の x 座標)－(点 C の x 座標)＝(－2)－(－6)＝－2＋6＝4･･･③

①，②，③より，BA：AC＝ED：DC＝5：4

[問題]



右の図の放物線は関数 $y=ax^2$ のグラフであり，直線 l と 2 点 A，B で交わっている。また，点 C は直線 l と y 軸との交点である。点 A の x 座標が－2，直線 l の傾きが 3 であり，△AOC と△BOC の面積比が 1：3 であるとき，a の値を求めよ。

(三重県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

△AOC の底辺を AC，△BOC の底辺を BC とすると，

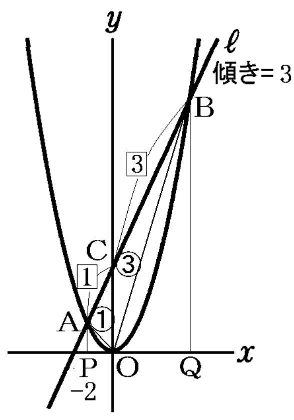
高さは共通になるので，

AC：CB＝(△AOC の面積)：(△BOC の面積)＝1：3 となる。

[解答] $a=\frac{3}{4}$

[解説]

<Point> 面積比→底辺の比→x 座標の比



△AOC の底辺を AC，△BOC の底辺を BC とすると，

高さは共通になるので，

AC：CB＝(△AOC の面積)：(△BOC の面積)＝1：3 となる。

図のように，x 軸に垂線 AP，BQ をひくと，AP//CO//BQ なので，

PO：OQ＝AC：CB＝1：3 となる。

点 A の x 座標は－2 なので P の x 座標も－2 で，点 Q の x 座標は 2×3＝6 になる。したがって，点 B の x 座標も 6 になる。

点 A，B は $y=ax^2$ 上にあるので，

点 A の y 座標は， $x=-2$ を $y=ax^2$ に代入して， $y=a\times(-2)^2=4a$

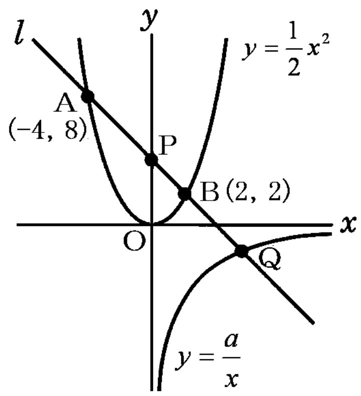
点 B の y 座標は， $x=6$ を $y=ax^2$ に代入して， $y=a\times6^2=36a$

したがって，(直線 AB の傾き)＝$\frac{36a-4a}{6-(-2)}=\frac{32a}{8}=4a=3$　よって， $a=3\div4=\frac{3}{4}$

[問題]

右の図のように，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上の点 A(－4, 8), B(2, 2)を通る直線 l がある。また，この直線が y 軸および関数 $y=\frac{a}{x}$ (a は負の定数， $x>0$)のグラフと交わる点を，それぞれ P，Q とする。△OAP：△OQP＝2：3 になるとき，a の値を求めよ。

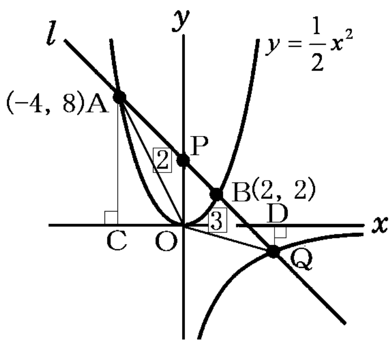
(沖縄県)(***)



[解答欄]

[ヒント]

△OAP の底辺を AP，△OQP の底辺を PQ とすると，高さは O から l におろした垂線の長さで共通になる。
したがって，底辺の比は面積比と等しくなり，
AP：PQ＝△OAP：△OQP＝2：3 になる。
右図のように, 点 A, Q から x 軸に垂線 AC, QD をひくと，
AC // PO // QD なので,
CO：OD＝AP：PQ＝2：3 になる。

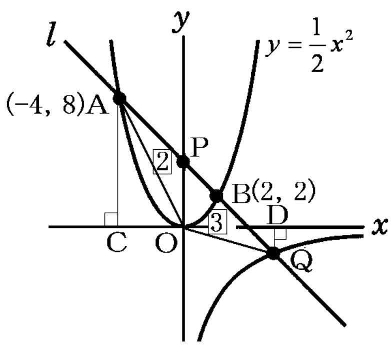


[解答] $a=-12$

[解説]

<Point> 面積比→底辺の比→ x 座標の比

△OAP の底辺を AP，△OQP の底辺を PQ とすると，高さは O から l におろした垂線の長さで共通になる。
したがって，底辺の比は面積比と等しくなり，
AP：PQ＝△OAP：△OQP＝2：3 になる。
右図のように, 点 A, Q から x 軸に垂線 AC, QD をひくと，
AC // PO // QD なので,
CO：OD＝AP：PQ＝2：3 なになる。
CO＝4 なので，4：OD＝2：3 となる。
したがって，2OD＝12，OD＝6
よって，点 Q の x 座標は 6 になる。



点 Q の y 座標がわかれば， $y=\frac{a}{x}$ に代入して a の値を求めることができる。

そこで，直線 l の式を求める。

2 点 A(－4，8)，B(2，2)を通る直線の式は， $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式より，

$y=\dfrac{2-8}{2-(-4)}(x-2)+2$， $y=-(x-2)+2$， $y=-x+4$

x 座標が 6 である点 Q は直線 l 上にあるので， $y=-x+4$ に $x=6$ を代入して，

$y=-6+4=-2$

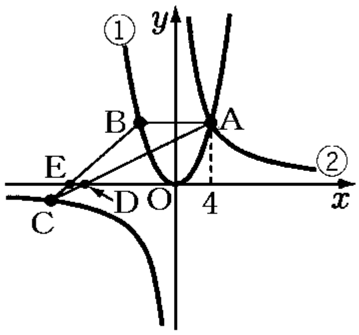
よって，点 Q の座標は(6，－2)

点 Q は $y=\dfrac{a}{x}$ 上にもあるので， $x=6$, $y=-2$ を $y=\dfrac{a}{x}$ に代入して，

$-2=\dfrac{a}{6}$, $a=(-2)\times 6$　よって， $a=-12$

[問題]

　右の図で，点 O は原点であり，放物線①は関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフである。双曲線②は反比例 $y=\dfrac{a}{x}$ のグラフで, a ＞0 である。点 A は，放物線①と双曲線②との交点で，その x 座標は 4 である。点 B は, 放物線①上の点で, 線分 AB は x 軸に平行である。点 C は，双曲線②上の点で，その x 座標は負の数である。線分 AC，線分 BC と x 軸との交点をそれぞれ D，E とする。
AB : DE＝5 : 1 であるとき，点 C の座標を求めよ。

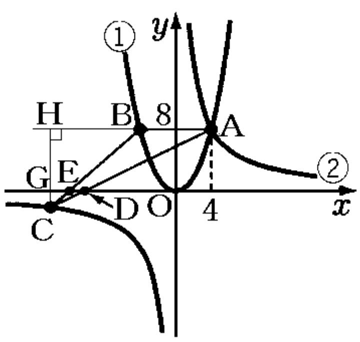


(香川県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

右図のように，点 G，H をとると，CH : CG＝AB : DE,
AB : DE＝5 : 1 なので，CH : CG＝5 : 1
よって，CG : GH＝1 : (5－1)＝1 : 4



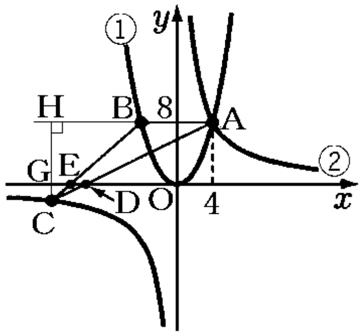
[解答](－16，－2)

[解説]

点 A の x 座標は 4 なので，$x=4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると，$y=\frac{1}{2}\times 16=8$

点 A は $y=\frac{a}{x}$ 上にもあるので，$x=4$，$y=8$ を $y=\frac{a}{x}$ に代入すると，$8=\frac{a}{4}$，$a=32$

右図のように，点 G，H をとると，CH：CG＝AB：DE，
AB：DE＝5：1 なので，CH：CG＝5：1
よって，CG：GH＝1：(5－1)＝1：4
点 H の y 座標は点 A の y 座標と等しいので 8 である。
したがって，点 C の y 座標は－2 である。

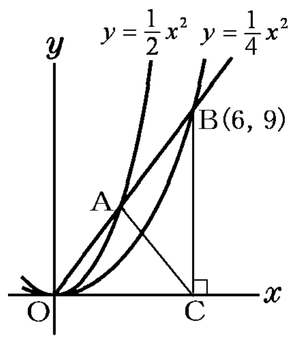


双曲線の式は $y=\frac{32}{x}$ なので，$y=-2$ を代入すると，

$-2=\frac{32}{x}$，$-2x=32$，$x=-16$　よって点 C の座標は(－16，－2)である。

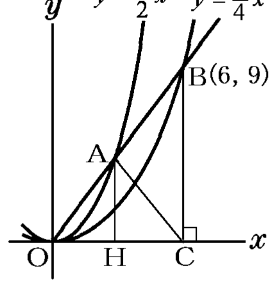
[問題]

右の図のように，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフと，原点を通る直線との交点をそれぞれ A，B とする。点 B から x 軸に垂線 BC をひく。点 B の座標が(6，9)のとき，△BOC と△BAC の面積の比を求めなさい。
(埼玉県)(***)



[解答欄]

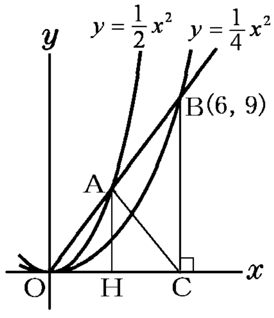
[ヒント]
<Point>　x 座標の比→底辺の比→面積比
△BOC の底辺を OB，△BAC の底辺を AB とすると，高さは共通になる。したがって，△BOC と△BAC の面積の比は底辺の比 OB：AB と等しくなる。点 A の座標がわかれば，この比がわかる。



[解答]2：1

[解説]
<Point>　x 座標の比→底辺の比→面積比

△BOC の底辺を OB，△BAC の底辺を AB とすると，高さは共通になる。したがって，
△BOC と△BAC の面積の比は底辺の比 OB：AB と等しくなる。



点 A の座標がわかれば，この比がわかる。･･･①
まず，直線 OB の式を求める。OB は原点を通る直線なので，その
式は $y=ax$ とおくことができる。点 B の座標は(6，9)なので，
$x=6,\ y=9$ を $y=ax$ に代入して，

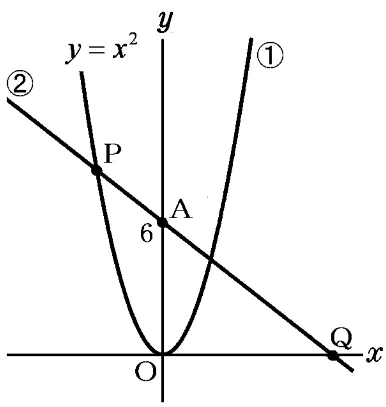
$9=a\times 6,\ a=9\div 6=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$　よって OB の式は $y=\frac{3}{2}x$ となる。

次に，$y=\frac{3}{2}x$ と $y=\frac{1}{2}x^2$ の交点 A を求める。

$y=\frac{1}{2}x^2$ を $y=\frac{3}{2}x$ に代入して，$\frac{1}{2}x^2=\frac{3}{2}x$

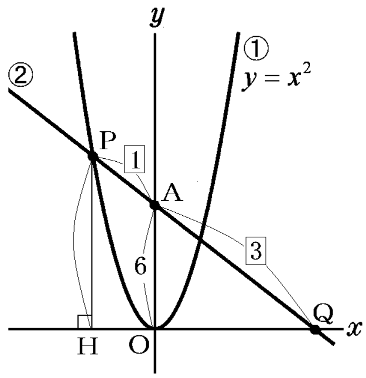
両辺を 2 倍して，$x^2=3x$，$x^2-3x=0,\ x(x-3)=0$　よって，$x=0,\ 3$
したがって，点 A の x 座標は $x=3$ で，右上図の OH＝3 となる。
したがって，OA：OB＝OH：OC＝3：6＝1：2
よって，OB：AB＝2：(2－1)＝2：1
①より，△BOC と△BAC の面積の比は 2：1 となる。

[問題]
　右の図において，曲線①は関数 $y=x^2$ のグラフである。
点 A(0，6)を通る右下がりの直線②が曲線①と交わる 2 点の
うち x 座標が負の点を P とし，また，直線②と x 軸との交点
を Q とする。PA：AQ＝1：3 となるとき，点 P の座標を求
めよ。
(茨城県)(***)

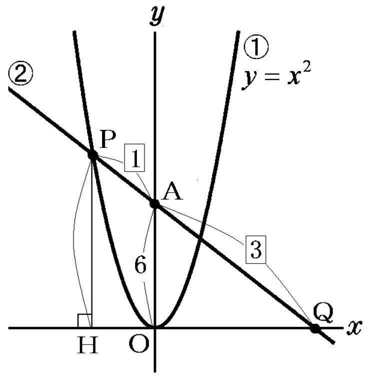


[解答欄]

[ヒント]
P から x 軸に垂線 PH をひく。
AO // PH なので，平行線の性質より，
AO : PH＝QA : QP＝3 : (3＋1)＝3 : 4
AO＝6 より PH を求める。
→点 P の座標

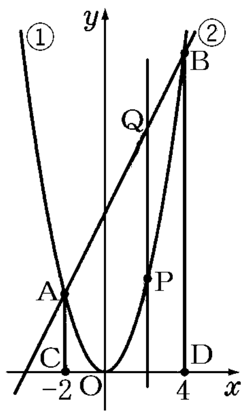


[解答] $\left(-2\sqrt{2},\ 8\right)$
[解説]
P から x 軸に垂線 PH をひく。
AO // PH なので，平行線の性質より，
AO : PH＝QA : QP
PA : AQ＝1 : 3 なので，QA : QP＝3 : (3＋1)＝3 : 4
また，A の y 座標が 6 なので，AO＝6
よって，6 : PH＝3 : 4
比の内項の積は外項の積に等しいので，
PH×3＝6×4，PH＝6×4÷3＝8
よって，点 P の y 座標は 8 である。



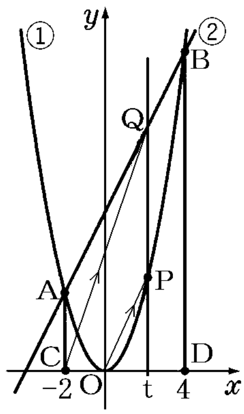
点 P は $y=x^2$ 上の点なので，$y=8$ を $y=x^2$ に代入して，$8=x^2$ となる。
$x<0$ なので，$x=-\sqrt{8}=-\sqrt{4\times2}=-2\sqrt{2}$　よって，点 P の座標は $\left(-2\sqrt{2},\ 8\right)$ となる。

[問題]
　右の図において，①は関数 $y=x^2$，②は関数 $y=2x+8$ のグラフである。2 点 A，B は①と②の交点で，x 座標はそれぞれ−2 と 4 である。点 A，B から x 軸に垂線をひき，x 軸との交点をそれぞれ C，D とする。また，点 P は①のグラフ上を A から B まで動く。点 P の x 座標が正のとき，点 P を通り，y 軸に平行な直線をひき，②のグラフとの交点を Q とする。直線 CQ と直線 OP が平行となるような点 P の座標を求めよ。
(石川県)(***)

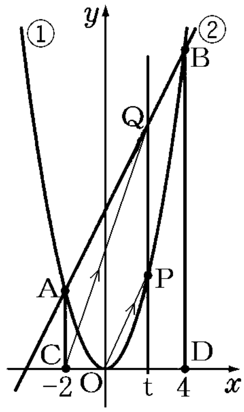


[解答欄]

[ヒント]
点P，Qのx座標を$t\,(t>0)$とする→点P，Qのy座標
点Pの座標→直線OPの傾き
点C，Qの座標→直線CQの傾き
(直線OPの傾き)＝(直線CQの傾き)で式を立てる。



[解答]$(2\sqrt{2}，8)$
[解説]
点Pのx座標を$t\,(t>0)$とすると，点Qのx座標もtになる。
点Pは$y=x^2$上にあるので，$x=t$のとき$y=t^2$になる。
よって，点Pの座標は$\left(t,\ t^2\right)$である。
点Qは$y=2x+8$上にあるので，$x=t$のとき$y=2t+8$になる。
よって，点Qの座標は$\left(t,\ 2t+8\right)$である。
「直線CQと直線OPが平行」とあるので，この2つの直線の傾きは等しくなる。



C$(-2,\ 0)$，Q$\left(t,\ 2t+8\right)$より，
(直線CQの傾き)＝$\dfrac{2t+8-0}{t-(-2)}=\dfrac{2t+8}{t+2}$
O$(0,\ 0)$，P$\left(t,\ t^2\right)$より，
(直線OPの傾き)＝$\dfrac{t^2-0}{t-0}=t$
よって，$\dfrac{2t+8}{t+2}=t$
両辺に$t+2$をかけると，$2t+8=t^2+2t$，$t^2=8$，$t=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$
$t>0$なので，$t=2\sqrt{2}$
よって，点Pのx座標は$x=2\sqrt{2}$
$x=2\sqrt{2}$を$y=x^2$に代入すると，$y=\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$
したがって，点Pの座標は$(2\sqrt{2}，8)$である。

【】面積

【】面積を求める：2 つの三角形の和

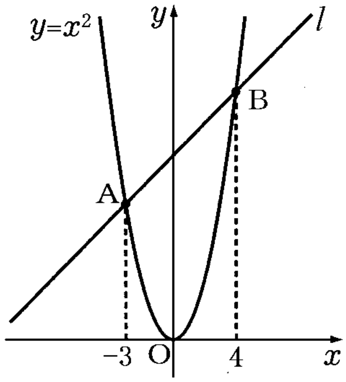
[問題]

右の図のように，関数 $y=x^2$ のグラフと直線 l が 2 点 A，B で交わっている。点 A の x 座標は－3，点 B の x 座標は 4 である。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 直線 l の式を求めよ。

(2) △OAB の面積を求めよ。

(富山県)(***)



[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(1) まず，点 A，B の座標を求める。

2 点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) を通る直線の式は，

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って求めることができる。

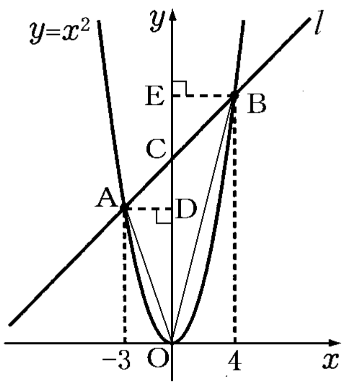
(2) △OAB を△OAC と△OBC に分けて考える。

OC を共通の底辺とすると，

△OAC の高さは AD，

△OBC の高さは BE

になる。



[解答](1) $y=x+12$ (2) 42

[解説]

(1) まず，点 A，B の座標を求める。

点 A の x 座標は－3 で，点 A は $y=x^2$ 上にあるので，

$y=x^2$ に $x=-3$ を代入して， $y=(-3)^2=9$

よって，点 A の座標は(－3，9)

点 B の x 座標は 4 で，点 B は $y=x^2$ 上にあるので，

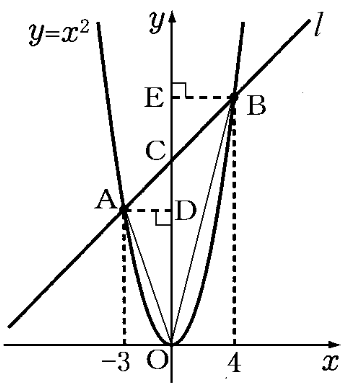
$y=x^2$ に $x=4$ を代入して， $y=4^2=16$

よって，点 B の座標は(4，16)

直線 l は，A(－3，9)，B(4，16)を通るので，

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使うと，

$y=\dfrac{16-9}{4-(-3)}(x+3)+9$， $y=\dfrac{7}{7}(x+3)+9$， $y=x+12$



(2) △OABを△OACと△OBCに分けて考える。
点Cは直線$y=x+12$の切片(y切片)なので，点Cのy座標は12である。よって，OC＝12

(△OACの面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺OC)×(高さAD)＝$\frac{1}{2}\times12\times3$＝18

(△OBCの面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺OC)×(高さBE)＝$\frac{1}{2}\times12\times4$＝24

よって，(△OABの面積)＝(△OACの面積)＋(△OBCの面積)＝18＋24＝42

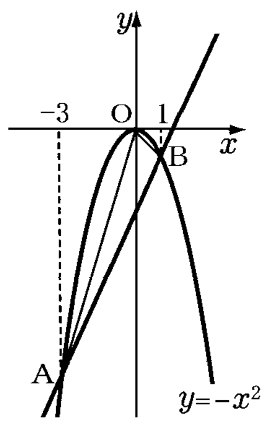
[問題]

右の図のように，関数$y=-x^2$のグラフ上に，x座標がそれぞれ－3，1となる点A，Bをとるとき，次の各問いに答えよ。

(1) 2点A，Bを通る直線の式を求めよ。

(2) △OABの面積を求めよ。

(新潟県)(***)



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $y=2x-3$　(2) 6

[解説]

(1) まず，点A，Bの座標を求める。

点Aのx座標は－3で，点Aは$y=-x^2$上にあるので，

$y=-x^2$に$x=-3$を代入して，$y=-(-3)^2=-9$

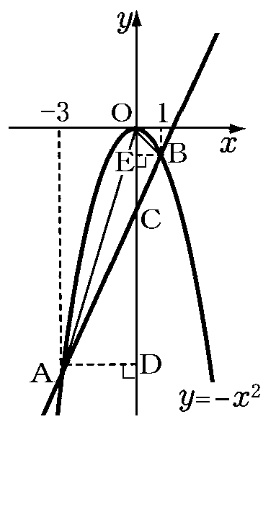
よって，点Aの座標は(－3，－9)

点Bのx座標は1で，点Bは$y=-x^2$上にあるので，

$y=-x^2$に$x=1$を代入して，$y=-1^2=-1$

よって，点Bの座標は(1，－1)

直線ABは，A(－3，－9)，B(1，－1)を通るので，



$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$の公式を使うと，

$y=\frac{-1-(-9)}{1-(-3)}(x-(-3))-9$，$y=2(x+3)-9$，$y=2x-3$

(2) △OABを△OACと△OBCに分けて考える。

点Cは直線$y=2x-3$のy切片なので，点Cのy座標は－3である。よって，OC＝3

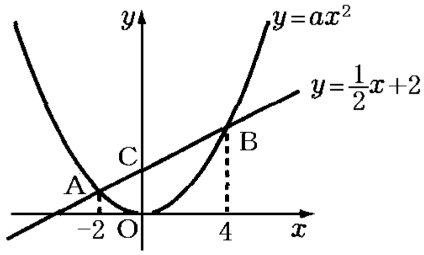
(△OACの面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺OC)×(高さAD)＝$\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$

(△OBC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ BE)＝$\frac{1}{2}\times 3\times 1=\frac{3}{2}$

よって，(△OAB の面積)＝(△OAC の面積)＋(△OBC の面積)＝$\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=\frac{12}{2}=6$

[問題]

右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフと直線 $y=\frac{1}{2}x+2$ が，2 点 A，B で交わっている。2 点 A，B の x 座標が，それぞれ－2，4 であるとき，次の各問いに答えよ。ただし，$a>0$ とする。また，原点 O から点(1，0)までの距離及び原点 O から点(0，1)までの距離をそれぞれ 1cm とする。



(1) a の値を求めよ。

(2) △OAB の面積を求めよ。

(千葉県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(1) $x=-2$ を $y=\frac{1}{2}x+2$ に代入して点 A の座標を求める。点 A は $y=ax^2$ 上にもあるので，点 A の座標を $y=ax^2$ に代入すれば a の値を求めることができる。

[解答](1) $a=\frac{1}{4}$ (2) 6cm²

[解説]

(1) 点 A の x 座標は－2 である。$x=-2$ を $y=\frac{1}{2}x+2$ に代入すると，$y=\frac{1}{2}\times(-2)+2=1$

点 A は $y=ax^2$ 上にもあるので，$x=-2$，$y=1$ を $y=ax^2$ に代入すると，$1=4a$，$a=\frac{1}{4}$

(2) △OAB を△ACO と△BCO に分けて考える。

点 C の y 座標は $y=\frac{1}{2}x+2$ の切片(y 切片)なので 2 である。よって，CO＝2(cm)である。

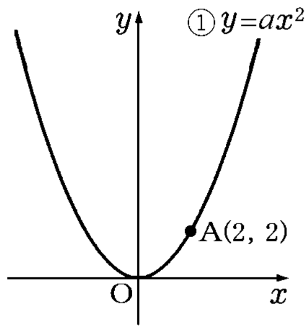
△ACO の底辺を CO とすると，高さは 2(cm)なので，(△ACO の面積)＝$\frac{1}{2}$×2×2＝2(cm²)

△BCO の底辺を CO とすると，高さは 4(cm)なので，(△BCO の面積)＝$\frac{1}{2}$×2×4＝4(cm^2)

よって，(△OAB の面積)＝(△ACO の面積)＋(△BCO の面積)＝2＋4＝6(cm^2)

[問題]

右の図のように関数 $y=ax^2$・・・①のグラフが，点 A(2，2)を通っている。このとき，次の各問いに答えよ。ただし，原点は O とする。



(1) a の値を求めよ。

(2) 点 A を通り，傾きが－1 の直線の式を求めよ。

(3) (2)で求めた直線と①のグラフとの交点のうち，点 A とは異なる点を B とするとき，△OAB の面積を求めよ。

(鳥取県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(1) 点 A(2，2)は $y=ax^2$ 上にあるので，点 A の座標を $y=ax^2$ に代入して a の値を求める。

(2) 傾きが m で点 $(x_1,\ y_1)$ を通る直線の式は，$y=m(x-x_1)+y_1$ の公式を使って求めることができる。

(3) $y=ax^2$ と $y=m(x-x_1)+y_1$ の交点は，$ax^2=m(x-x_1)+y_1$ とおいて求める。

[解答](1) $a=\frac{1}{2}$　(2) $y=-x+4$　(3) 12

[解説]

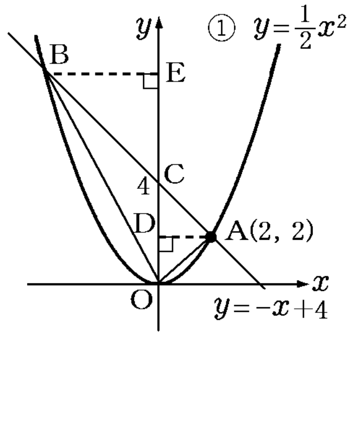
(1) $y=ax^2$ のグラフが，点 A(2，2)を通っているので，

$x=2,\ y=2$ を $y=ax^2$ に代入して，$2=a\times4$，$a=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

(2) $y=m(x-x_1)+y_1$ の公式を使うと，点 A(2，2)を通り傾きが－1 の直線の式は，

$y=-(x-2)+2$，$y=-x+4$

(3) 右図のように, △OAB を△OAC と△OBC に分けて考える。点 C は直線 $y=-x+4$ の y 切片なので，点 C の y 座標は 4 である。よって，OC＝4



(△OAC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ AD)＝$\frac{1}{2}\times4\times2=4$

△OBC の面積を求めるためには, 高さ BE を求める必要がある。

そこで，点 B の x 座標を求める。

点 B は $y=\dfrac{1}{2}x^2\cdots$①と， $y=-x+4\cdots$②の交点である。

②を①に代入すると， $-x+4=\dfrac{1}{2}x^2$

$-2x+8=x^2$， $x^2+2x-8=0$， $(x+4)(x-2)=0$， よって， $x=-4,\ 2$

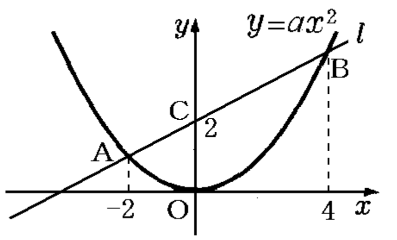
したがって，点 B の x 座標は－4 となり，BE＝4 となる。

(△OBC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ BE)＝$\dfrac{1}{2}\times4\times4=8$

よって，(△OAB の面積)＝(△OAC の面積)＋(△OBC の面積)＝4＋8＝12

[問題]

右の図で，曲線は関数 $y=ax^2$ のグラフである。曲線上に x 座標が－2，4 である 2 点 A，B をとり，この 2 点を通る直線 l をひく。直線 l が y 軸と点 C(0，2)で交わるとき，次の各問いに答えよ。ただし，座標軸の単位の長さを 1cm とする。



(1) △OBC の面積を求めよ。

(2) a の値を求めよ。

(埼玉県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

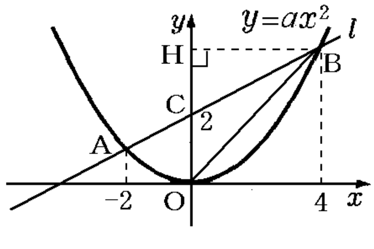
[ヒント]

(2) まず， $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って 2 点 A$(-2,\ 4a)$，B$(4,\ 16a)$を通る直線の式を求める。次に，直線 AB は点 C(0，2)を通ることに注目して a の値を求める。

[解答](1) 4cm² (2) $a=\dfrac{1}{4}$

[解説]

(1) △OBC の底辺を OC とすると，高さは右図の BH である。OC＝2cm，BH＝4cm なので，



(△OBC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×OC×BH＝$\dfrac{1}{2}\times2\times4$＝4(cm²)

(2) まず，直線 AB の式を a を使って表す。

点 A の x 座標は－2 なので， $x=-2$ を $y=ax^2$ に代入して， $y=a\times(-2)^2=4a$

よって，点 A$\left(-2,\ 4a\right)$

点 B の x 座標は 4 なので， $x=4$ を $y=ax^2$ に代入して， $y=a\times 4^2=16a$

よって，点 B$\left(4,\ 16a\right)$

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)+y_1$ の公式を使って 2 点 A$\left(-2,\ 4a\right)$, B$\left(4,\ 16a\right)$を通る直線の式を求める。

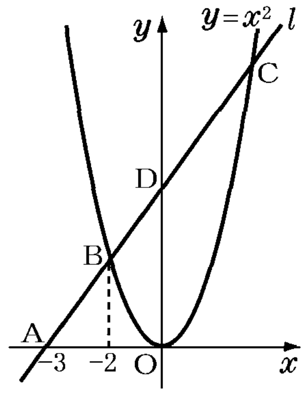
$y=\dfrac{16a-4a}{4-(-2)}\left(x-(-2)\right)+4a$， $y=2a\left(x+2\right)+4a$， $y=2ax+8a$

直線 AB は点 C(0，2)を通るので， $x=0,\ y=2$ を $y=2ax+8a$ に代入すると，

$2=8a$　よって， $a=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

[問題]

　右の図で，曲線は関数 $y=x^2$ のグラフである。 x 軸上に x 座標が－3 である点 A をとり，点 A を通り傾きが正の直線 l をひく。直線 l と曲線との交点のうち x 座標が負のものを B, 正のものを C とし，直線 l と y 軸との交点を D とする。点 B の x 座標が－2 のとき，△BOD の面積を求めよ。ただし，座標軸の単位の長さを 1cm とする。



(埼玉県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

△BOD の底辺を OD とすると，高さは 2 である。点 D は直線 l の切片(y 切片)なので，直線 l の式を求めれば，D の座標がわかる。 $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)+y_1$ の公式を使って，2 点 A，B を通る直線 l の式を求めることができる。

[解答]12cm²

[解説]

右図で，△BOD の底辺を OD とすると，高さは BH になる。

点 B の x 座標は－2 なので，BH＝2 である。

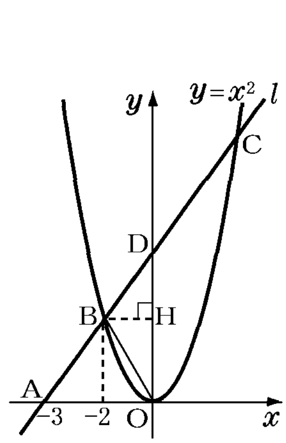
点 D の座標がわかれば，OD の長さを求めることができる。

そこで，直線 l の式を求める。

点 A の座標は(－3，0)である。

点 B の x 座標は－2 で，点 B は $y=x^2$ 上にあるので，

$y=x^2$ に $x=-2$ を代入して， $y=\left(-2\right)^2=4$



よって，点 B の座標は(－2，4)

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って 2 点 A(－3，0)，B(－2，4)を通る直線の式を求める。

$y=\dfrac{4-0}{-2-(-3)}(x-(-3))+0$， $y=4(x+3)$， $y=4x+12$

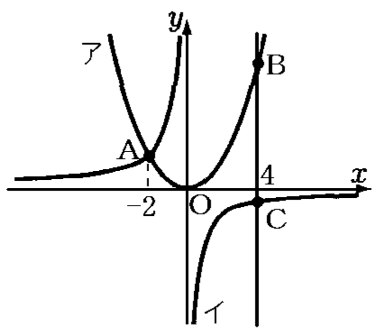
$y=4x+12$ に $x=0$ を代入すると， $y=12$

よって，点 D の y 座標は 12 で，OD＝12

(△BOD の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×OD×BH＝$\dfrac{1}{2}$×12×2＝12(cm²)

[問題]

右の図において，放物線アは関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフで，放物線ア上にある 2 点 A，B は，x 座標がそれぞれ－2，4 である。また，双曲線イは点 A を通る反比例のグラフで，点 C は, 点 B を通り y 軸に平行な直線と双曲線イとの交点である。次の各問いに答えよ。



(1) A の y 座標を求めよ。

(2) 双曲線イのグラフについて，y を x の式で表せ。

(3) △ABC の面積を求めよ。

(群馬県)(***)

[解答欄]

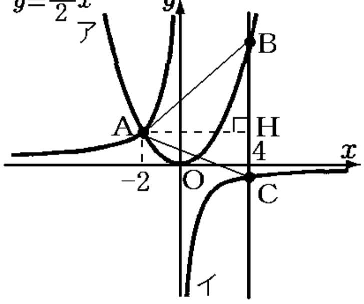
(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(1) 点 A は $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上にあるので，$y=\dfrac{1}{2}x^2$ に $x=-2$ を代入すれば点 A の y 座標を求めることができる。

(2) 双曲線イのグラフの式を $y=\dfrac{a}{x}$ とおく。点 A は $y=\dfrac{a}{x}$ 上にあるので，点 A の座標を代入すれば a の値を求めることができる。

(3) 右図のように△ABC の底辺を BC とすると，高さは AH になる。BC の長さを求めるために，点 B と点 C の y 座標を求める。



[解答](1) 2　(2)　$y=-\dfrac{4}{x}$　(3) 27

[解説]

(1) 点 A の x 座標は－2 で，点 A は $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上にあるので，

$y=\dfrac{1}{2}x^2$ に $x=-2$ を代入して，

$y=\dfrac{1}{2}\times(-2)^2=2$

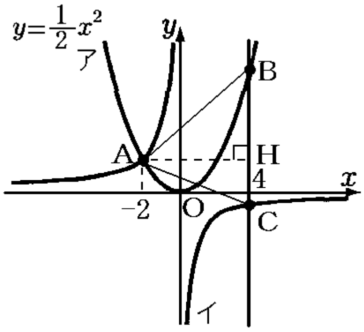
(2) 双曲線イのグラフの式を $y=\dfrac{a}{x}$ とおく。

点 A(－2，2)は $y=\dfrac{a}{x}$ 上にあるので， $y=\dfrac{a}{x}$ に $x=-2,\ y=2$ を代入して，

$2=\dfrac{a}{-2}$， $a=2\times(-2)=-4$

よって，双曲線イのグラフの式は， $y=\dfrac{-4}{x}$， $y=-\dfrac{4}{x}$

(3) 図のように△ABC の底辺を BC とすると，高さは AH になる。BC の長さを求めるために，点 B と点 C の y 座標を求める。



点 B は $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上にあり， x 座標は 4 なので， $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に $x=4$ を代入して， $y=\dfrac{1}{2}\times4^2=8$

点 C は $y=-\dfrac{4}{x}$ 上にあり， x 座標は 4 なので， $y=-\dfrac{4}{x}$ に $x=4$ を代入して， $y=-\dfrac{4}{4}=-1$

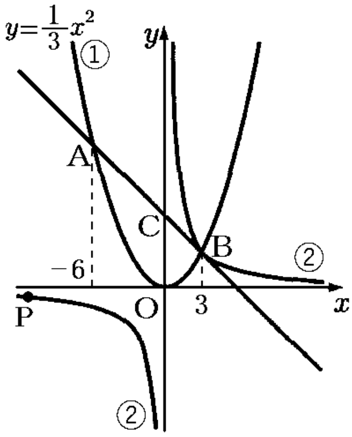
よって，BC＝(点 B の y 座標)－(点 C の y 座標)＝8－(－1)＝9

また，図より，AH＝4－(－2)＝6

よって，(△ABC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 BC)×(高さ AH)＝$\dfrac{1}{2}\times9\times6$＝27

[問題]

右の図において，①は関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフ，②は反比例のグラフである。①と②は点 B で交わっていて，点 B の x 座標は 3 である。また，①のグラフ上に x 座標が－6 である点 A をとり，直線 AB と y 軸との交点を C とする。②のグラフ上に x 座標が負である点 P をとる。△OAB と△OCP の面積が等しくなるとき，点 P の座標を求めよ。



(山形県)(***)

[解答欄]

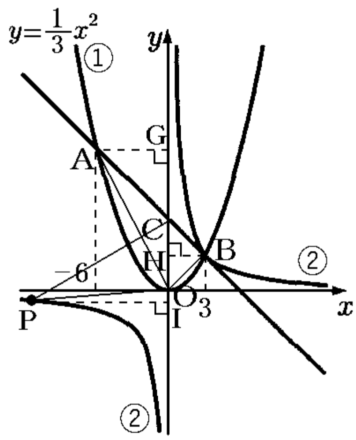
[ヒント]

点 A，B の座標を求める

→直線 AB の式を求める，反比例のグラフ②の式を求める。

→△OAB の面積を△AOC と△BOC に分けて求める。

図のように，△OCP の底辺を OC とすると，高さは PI である。



[解答](－9，－1)

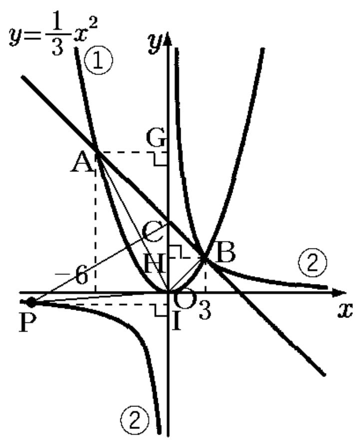
[解説]

まず，△OAB の面積を求める。

右図のように，△OAB を△AOC と△BOC に分けて考える。

右図のように，OC を共通の底辺と考えると，△AOC の高さは AG＝6 で，△BOC の高さは BH＝3 である。・・・(1)

そこで，点 C の座標を求めるために直線 AB の式を求める。



点 A の y 座標は，$y=\frac{1}{3}x^2$ に $x=-6$ を代入すると，

$y=\frac{1}{3}\times(-6)^2=\frac{36}{3}=12$ なので，点 A の座標は(－6，12)

点 B の y 座標は，$y=\frac{1}{3}x^2$ に $x=3$ を代入すると，

$y=\frac{1}{3}\times 3^2=3$ なので，点 B の座標は(3，3)

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って 2 点 A(－6，12)，B(3，3)を通る直線の式を求める。

$y=\dfrac{3-12}{3-(-6)}(x-3)+3$、$y=-(x-3)+3$，$y=-x+6$

点 C は $y=-x+6$ の切片(y 切片)なので，点 C の y 座標は 6 になる。

よって，OC＝6･･･(2)

(1)，(2)より，

(△AOC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ AG)＝$\dfrac{1}{2}\times6\times6$＝18

(△BOC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ BH)＝$\dfrac{1}{2}\times6\times3$＝9

よって，(△OAB の面積)＝(△AOC の面積)＋(△BOC の面積)＝18＋9＝27

次に，点 P の座標を求める。

「△OAB と△OCP の面積が等しくなる」とあるので，

(△OCP の面積)＝27 である。

図のように，△OCP の底辺を OC とすると，高さは PI である。

よって，(△OCP の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ PI)＝27

$\dfrac{1}{2}$×6×(高さ PI)＝27，3×(高さ PI)＝27，(高さ PI)＝27÷3＝9

したがって，点 P の x 座標は－9 になる。

点 P の y 座標を求めるために反比例のグラフ②の式を求める。

反比例なので，②の式は $y=\dfrac{k}{x}$ とおくことができる。

②のグラフは，点 B(3，3)を通るので，$y=\dfrac{k}{x}$ に $x=3$, $y=3$ を代入して，$3=\dfrac{k}{3}$，$k=3\times3=9$

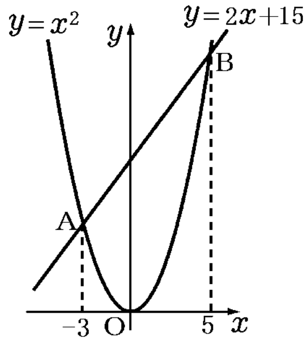
よって，②の式は $y=\dfrac{9}{x}$ となる。点 P の x 座標は－9 なので，$y=\dfrac{9}{-9}=-1$

よって，点 P の座標は(－9，－1)である。

[問題]

右の図のように，関数 $y=x^2$ と関数 $y=2x+15$ のグラフがある。2 つのグラフは 2 点 A，B で交わり，点 A，B の x 座標は，それぞれ－3，5 である。関数 $y=x^2$ のグラフ上に点 P を，△APB の面積が 48 になるようにとりたい。ただし，点 P の x 座標は $0<x<5$ とする。点 P の座標を求めよ。

(長野県)(***)



[解答欄]

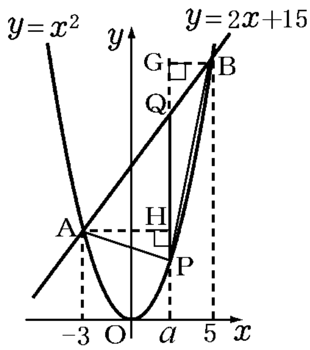
[ヒント]

右図のように， y 軸に平行な線分 PQ をひき，点 P，Q の x 座標を $x=a$ とする。

△APB を△APQ と△BPQ に分けて考え，

△APQ と△BPQ の共通の底辺を PQ とする。

△APQ と△BPQ の面積を a を使って表す。



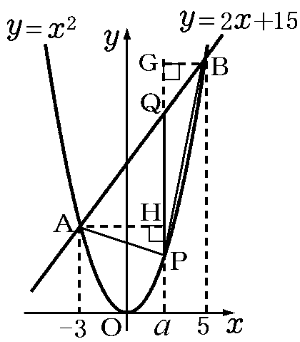
[解答](3，9)

[解説]

右図のように， y 軸に平行な線分 PQ をひき，点 P，Q の x 座標を $x=a$ とする。

△APB を△APQ と△BPQ に分けて考え，

△APQ と△BPQ の共通の底辺を PQ とする。



点 P の x 座標は a で，点 P は $y=x^2$ 上にあるので，

$x=a$ を $y=x^2$ に代入して $y=a^2$

点 Q の x 座標は a で，点 Q は $y=2x+15$ 上にあるので，

$x=a$ を $y=2x+15$ に代入して $y=2a+15$

したがって，(底辺 PQ)＝(点 Q の y 座標)－(点 P の y 座標)＝ $2a+15-a^2$

(△APQ の高さ AH)＝ $a-(-3)=a+3$，(△BPQ の高さ BG)＝ $5-a$

したがって，

(△APQ の面積)＝ $\frac{1}{2}$ ×(底辺 PQ)×(高さ AH)＝ $\frac{1}{2}\times(2a+15-a^2)\times(a+3)$

＝ $\frac{1}{2}(2a^2+6a+15a+45-a^3-3a^2)$ ＝ $\frac{1}{2}(-a^3-a^2+21a+45)$

(△BPQ の面積)$=\frac{1}{2}\times$(底辺 PQ)$\times$(高さ BG)$=\frac{1}{2}\times\left(2a+15-a^2\right)\times\left(5-a\right)$

$=\frac{1}{2}\left(10a-2a^2+75-15a-5a^2+a^3\right)=\frac{1}{2}\left(a^3-7a^2-5a+75\right)$

(△APB の面積)=(△APQ の面積)+(△BPQ の面積)

$=\frac{1}{2}\left(-a^3-a^2+21a+45\right)+\frac{1}{2}\left(a^3-7a^2-5a+75\right)=\frac{1}{2}\left(-8a^2+16a+120\right)=-4a^2+8a+60$

「△APB の面積が 48 になる」ので，$-4a^2+8a+60=48$

$-4a^2+8a+12=0$，$a^2-2a-3=0$，$(a+1)(a-3)=0$，$a=-1,\ a=3$

「点 P の x 座標は 0＜x＜5 とする」とあるので，$a=-1$ は不適，$a=3$ は適する。

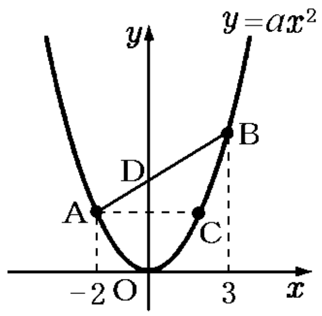
点 P は $y=x^2$ 上にあるので，$y=x^2$ に $x=3$ を代入して，$y=3^2=9$

よって，点 P の座標は(3，9)

[問題]

　右の図のように，関数 $y=ax^2$ (a は正の定数)のグラフ上に，2 点 A，B がある。点 A の x 座標を－2，点 B の x 座標を 3 とする。点 A と y 軸について対称な点を C とし，線分 AB と y 軸との交点を D とする。△BCD の面積が 10 のとき，a の値を求めよ。

(北海道)(****)



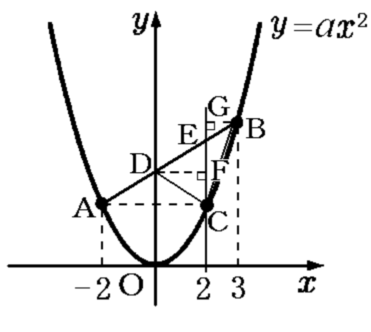
[解答欄]

[ヒント]

右図のように，y 軸と平行な直線 CE をひき，点 F，G をとる。△BCD を△BCE と△DCE に分けて考える。

△BCE と△DCE の共通の底辺を CE とする。

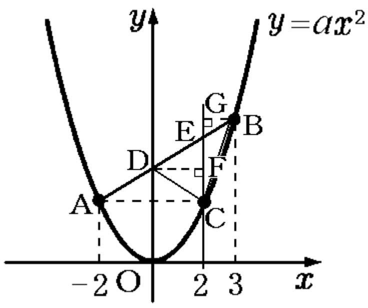
CE の長さを求めるために，点 C と E の y 座標を求める。



[解答] $a=\frac{5}{3}$

[解説]

x 座標が－2 である点 A と y 軸について対称な点 C の x 座標は 2 である。右図のように，y 軸と平行な直線 CE をひき，点 F, G をとる。△BCD を△BCE と△DCE に分けて考える。



△BCE と△DCE の共通の底辺を CE とする。

CE の長さを求めるために，点 C と E の y 座標を求める。

点 C は $y=ax^2$ 上にあり，点 C の x 座標は 2 なので，

$y=ax^2$ に $x=2$ を代入すると， $y=a\times 2^2=4a$

よって，点 C の y 座標は $4a$ である。･･･①

次に，点 E の y 座標を求めるために，直線 AB の式を求めておく。

点 A の x 座標は－2 なので， $x=-2$ を $y=ax^2$ に代入して， $y=a\times(-2)^2=4a$

よって，点 A の座標は $(-2,\ 4a)$

点 B の x 座標は 3 なので， $x=3$ を $y=ax^2$ に代入して， $y=a\times 3^2=9a$

よって，点 B の座標は $(3,\ 9a)$

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 4a)$，$\mathrm{B}(3,\ 9a)$ を通る直線の式を求める。

$y=\dfrac{9a-4a}{3-(-2)}(x-(-2))+4a$， $y=a(x+2)+4a$， $y=ax+6a$

点 E は直線 AB 上にあり，点 E の x 座標は 2 なので， $y=ax+6a$ に $x=2$ を代入して，

$y=a\times 2+6a=2a+6a=8a$　よって，点 E の y 座標は $8a$ である。･･･②

①，②より，CE＝$8a-4a=4a$

また，図より，DF＝2，BG＝3－2＝1

(△BCE の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 CE)×(高さ BG)＝$\dfrac{1}{2}\times 4a\times 1=2a$

(△DCE の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 CE)×(高さ DF)＝$\dfrac{1}{2}\times 4a\times 2=4a$

よって，(△BCD の面積)＝(△BCE の面積)＋(△DCE の面積)＝ $2a+4a$ ＝ $6a$

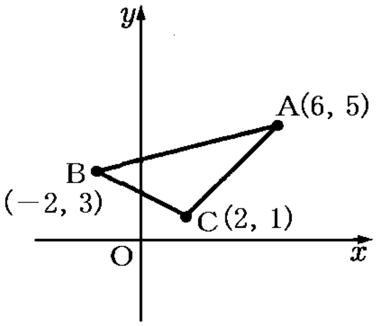
「△BCD の面積が 10」とあるので， $6a=10$， $a=\dfrac{10}{6}=\dfrac{5}{3}$

【】面積を求める：外側長方形から複数の三角形を引く

[問題]

右の図のように，3 点 A(6，5)，B(−2，3)，C(2，1)を頂点とする△ABC がある。△ABC の面積を求めよ。

(佐賀県)(**)

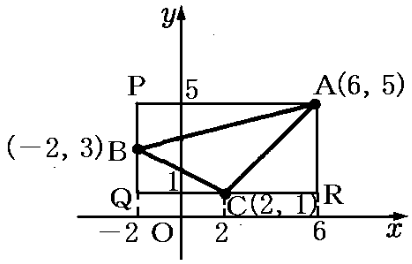


[解答欄]

[ヒント]

右図のように，辺が x 軸，y 軸に平行な長方形 APQR をとる。

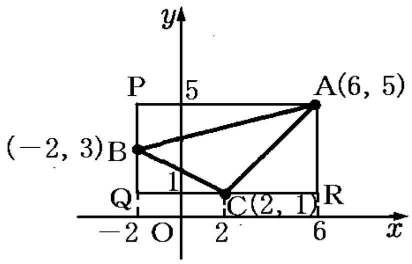
外側の長方形 APQR の面積から△APB，△BQC，△ACR の面積を引いて△ABC の面積を求める。



[解答]12

[解説]

右図のように，辺が x 軸，y 軸に平行な長方形 APQR をとる。



(長方形 APQR の面積)＝AR×QR＝(5−1)×(6−(−2))

＝4×8＝32

(△APB の面積)＝$\frac{1}{2}$×AP×BP＝$\frac{1}{2}$×(6−(−2))×(5−3)

＝$\frac{1}{2}$×8×2＝8

(△BQC の面積)＝$\frac{1}{2}$×CQ×BQ＝$\frac{1}{2}$×(2−(−2))×(3−1)＝$\frac{1}{2}$×4×2＝4

(△ACR の面積)＝$\frac{1}{2}$×CR×AR＝$\frac{1}{2}$×(6−2)×(5−1)＝$\frac{1}{2}$×4×4＝8

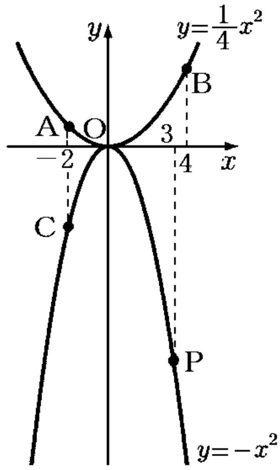
よって，

(△ABC の面積)＝(長方形 APQR の面積)−(△APB の面積)−(△BQC の面積)−(△ACR の面積)＝32−8−4−8＝12

[問題]

右の図のように，関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があり，その x 座標はそれぞれ－2，4 である。また，関数 $y=-x^2$ のグラフ上に 2 点 C，P があり，点 C の x 座標は－2，点 P はグラフ上を動く点で，その x 座標は正の数である。点 P の x 座標が 3 のとき，四角形 ACPB の面積を求めよ。

(奈良県)(**)

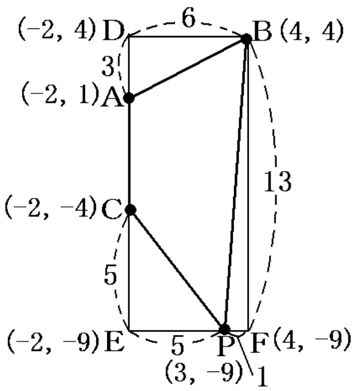


[解答欄]

[ヒント]

右図のように，四角形 ACPB を囲む長方形 BDEF を，長方形の辺が x 軸または y 軸に平行になるようにとる。

外側の長方形 BDEF の面積から，△ABD，△CPE，△BPF の面積を引いて四角形 ACPB の面積を求める。

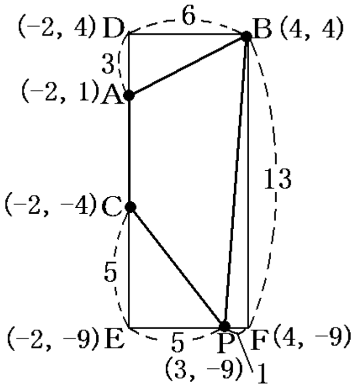


[解答]50

[解説]

右図のように，四角形 ACPB を囲む長方形 BDEF を，長方形の辺が x 軸または y 軸に平行になるようにとる。

外側の長方形 BDEF の面積から，△ABD，△CPE，△BPF の面積を引いて四角形 ACPB の面積を求める。



まず，A，C，P，B の座標を求める。

A： $x=-2$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入して $y=\frac{1}{4}\times(-2)^2=1$，A(－2，1)

C： $x=-2$ を $y=-x^2$ に代入して $y=-(-2)^2=-4$，C(－2，－4)

P： $x=3$ を $y=-x^2$ に代入して $y=-3^2=-9$，P(3，－9)

B： $x=4$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入して $y=\frac{1}{4}\times4^2=4$，B(4，4)

A，C，P，B の座標をもとに D，E，F の座標を求めると図のようになる。

これをもとに，各線分の長さを求めると図のようになる。

(長方形 BDEF の面積)＝13×6＝78

(△ABD の面積)＝$\frac{1}{2}$×6×3＝9

(△CPE の面積)＝$\frac{1}{2}$×5×5＝$\frac{25}{2}$

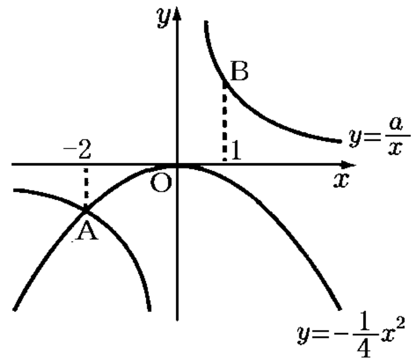
(△BPF の面積)＝$\frac{1}{2}$×1×13＝$\frac{13}{2}$

(四角形 ACPB)＝(長方形 BDEF)－(△ABD)－(△CPE)－(△BPF)

＝$78-9-\frac{25}{2}-\frac{13}{2}$＝50

[問題]

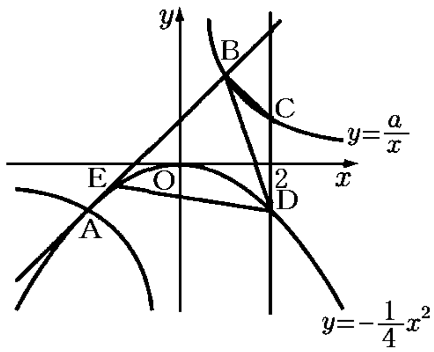
右の図のように，関数 $y=\frac{a}{x}$ ($a>0$)のグラフ上に 2 点 A，B があり，それぞれの x 座標は－2，1 である。関数 $y=\frac{a}{x}$ と関数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ のグラフは，点 A で交わっている。次の各問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 直線 AB の式を求めよ。

(3) 右の図のように，関数 $y=\frac{a}{x}$ のグラフ上に x 座標が 2 である点 C をとる。点 C を通り y 軸に平行な直線と関数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ のグラフとの交点を D とする。線分 AB 上に点 E をとり，△BED の面積が△BDC の面積の5倍となるようにする。点 E の x 座標を求めよ。



(大分県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

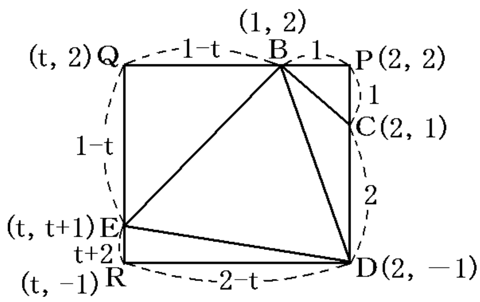
[ヒント]

(1) 点 A は $y=-\frac{1}{4}x^2$ 上→点 A の座標→ $y=\frac{a}{x}$ に代入

(2) 点 A，B の座標→直線 AB の式

(3) 四角形 BCDE を囲む長方形 PQRD をとる。

点 E の x 座標を t とおいて，各点の座標を t などを使って表す。



長方形 PQRD から各三角形を引いて，△BED の面積を計算(t で表す)。
(△BED の面積)＝(△BDC の面積)×5 より t の式を立てる。

[解答](1) $a=2$　(2) $y=x+1$　(3) $-\frac{3}{2}$

[解説]

(1) 点 A は $y=-\frac{1}{4}x^2$ 上にあるので，$x=-2$ を $y=-\frac{1}{4}x^2$ に代入して，$y=-\frac{1}{4}\times(-2)^2=-1$

よって，点 A の座標は(－2，－1)

点 A は $y=\frac{a}{x}$ 上にもあるので，$x=-2,\ y=-1$ を $y=\frac{a}{x}$ に代入して，

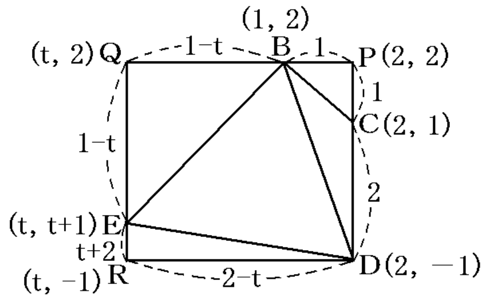
$-1=\frac{a}{-2}$，$a=(-1)\times(-2)=2$

(2) 点 B は $y=\frac{2}{x}$ 上にあるので，$x=1$ を $y=\frac{2}{x}$ に代入して，$y=\frac{2}{1}=2$

よって，点 B の座標は(1，2)である。(1)より点 A の座標は(－2，－1)なので，

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式より，$y=\frac{2-(-1)}{1-(-2)}(x-1)+2$，$y=x-1+2$，$y=x+1$

(3) 右図のように，四角形 BCDE を囲む長方形 PQRD を，長方形の辺が x 軸または y 軸に平行になるようにとる。



まず，B，C，D の座標を求める。
(2)より，点 B の座標は(1，2)である。

点 C は $y=\frac{2}{x}$ 上にあり，x 座標は 2 なので，$x=2$ を $y=\frac{2}{x}$ に代入して，$y=\frac{2}{2}=1$　よって，点 C の座標は(2，1)

点 D は $y=-\frac{1}{4}x^2$ 上にあり，x 座標は 2 なので，$x=2$ を $y=-\frac{1}{4}x^2$ に代入して，

$y=-\frac{1}{4}\times2^2=-1$　よって，点 D の座標は(2，－1)

ここで，点 E の x 座標を t とおく。点 E は $y=x+1$ 上にあるので，
$x=t$ を $y=x+1$ に代入して，$y=t+1$
よって，点 E の座標は(t，$t+1$)と表すことができる。
B，C，D，E の座標をもとに，P，Q，R の座標を求めると図のようになる。
これらの座標から，図のように各辺の長さを求めることができる。図より，
(四角形 PQRD の面積)＝PD×RD＝$(1+2)\times(2-t)=6-3t$

(△BDC の面積)＝$\frac{1}{2}$×CD×BP＝$\frac{1}{2}\times 2\times 1$＝1

「△BED の面積が△BDC の面積の 5 倍となるようにする」とあるので,

(△BED の面積)＝(△BDC の面積)×5＝1×5＝5

(△BCP の面積)＝$\frac{1}{2}$×BP×CP＝$\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$

(△BEQ の面積)＝$\frac{1}{2}$×BQ×EQ＝$\frac{1}{2}\times(1-t)\times(1-t)=\frac{1}{2}(1-t)^2$

(△DER の面積)＝$\frac{1}{2}$×DR×ER＝$\frac{1}{2}(2-t)\times(2+t)=\frac{1}{2}(4-t^2)$

(△BDC)＋(△BED)＋(△BCP)＋(△BEQ)＋(△DER)＝(四角形 PQRD)なので,

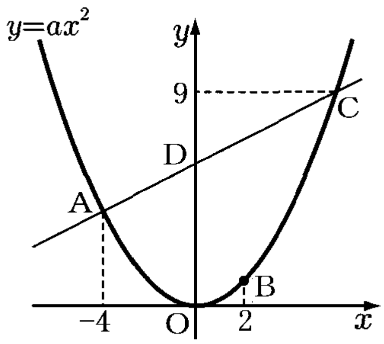
$1+5+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-t)^2+\frac{1}{2}(4-t^2)=6-3t$

$13+(1-t)^2+4-t^2=12-6t$， $13+1-2t+t^2+4-t^2=12-6t$， $6t-2t=12-18$

$4t=-6$， $t=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

[問題]

右の図のように，関数 $y=ax^2$ (a は定数)のグラフ上に 3 点 A，B，C がある。A の x 座標は－4，B の x 座標は 2，C の y 座標は 9 であり，C の x 座標は正である。点 D は直線 AC と y 軸との交点であり，点 O は原点である。また，関数 $y=ax^2$ について，x の変域が－4≦x≦2 のとき，y の変域は 0≦y≦4 である。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 直線 AC の式を求めよ。

(3) 線分 CD 上に 2 点 C，D とは異なる点 P をとる。四角形 POBC の面積が 20 となるときの P の座標を求めよ。

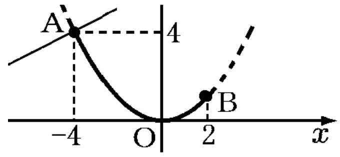
(熊本県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

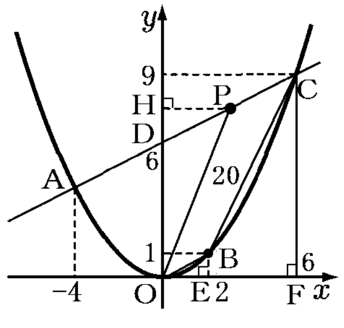
[ヒント]

(1) 「x の変域が$-4 \leqq x \leqq 2$ のとき，y の変域は $0 \leqq y \leqq 4$ である」とあるので，右図のように，点 A の y 座標は 4 になる。



(3) 右図のように点 P，E，F，H をとり，△POD の面積を求めて PH の長さを求めることで, 点 P の x 座標を計算する。

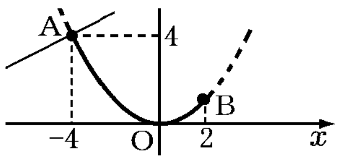
(△POD の面積)＝(台形 ODCF の面積)－{(四角形 POBC の面積)＋(△BOE の面積)＋(台形 EBCF の面積)}



[解答](1) $a=\dfrac{1}{4}$　(2) $y=\dfrac{1}{2}x+6$　(3) $\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{20}{3}\right)$

[解説]

(1) 「x の変域が$-4 \leqq x \leqq 2$ のとき，y の変域は $0 \leqq y \leqq 4$ である」とあるので，右図のように，点 A の y 座標は 4 になる。点 A(-4，4)は $y=ax^2$ 上にあるので，$x=-4,\ y=4$ を $y=ax^2$ に代入して，$4=a\times(-4)^2$，$16a=4$，$a=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$



(2) まず, 点 C の座標を求める。点 C は $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 上にあるので，$y=9$ を $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に代入して，

$9=\dfrac{1}{4}x^2$，$x^2=36$，$x>0$ なので，$x=6$　よって，点 C の座標は(6，9)

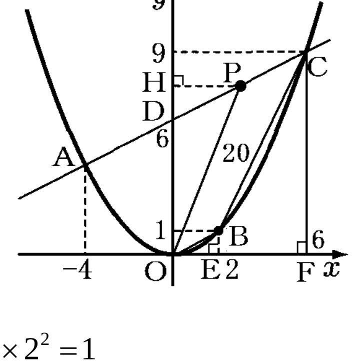
点 A(-4，4)なので，$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って直線 AC の式を求める。

$y=\dfrac{9-4}{6-(-4)}(x-6)+9$，$y=\dfrac{1}{2}(x-6)+9$，$y=\dfrac{1}{2}x+6$

(3) 右図のように点 P，E，F，H をとり，△POD の面積を求めて PH の長さを求めることで, 点 P の x 座標を計算する。

(台形 ODCF の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(上底 DO＋下底 CF)×(高さ OF)

＝$\dfrac{1}{2}\times(6+9)\times6=45$



点 B の x 座標は 2 なので，$x=2$ を $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に代入して，$y=\dfrac{1}{4}\times2^2=1$

よって，点 B の座標は(2，1)

(台形 EBCF の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(上底 BE＋下底 CF)×(高さ EF)＝$\dfrac{1}{2}\times(1+9)\times(6-2)=20$

(△BOE の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 BE)×(高さ OE)＝$\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$

また，仮定より，(四角形 POBC の面積)＝20

よって，

(△POD の面積)＋(四角形 POBC の面積)＋(△BOE の面積)＋(台形 EBCF の面積)＝(台形 ODCF の面積)

(△POD の面積)＋20＋1＋20＝45

よって，(△POD の面積)＝45－41＝4

(△POD の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 DO)×(高さ PH)＝4

$\frac{1}{2}$×6×(高さ PH)＝4，3×(高さ PH)＝4

(高さ PH)＝4÷3＝$\frac{4}{3}$

したがって，点 P の x 座標は $\frac{4}{3}$ である。点 P は $y=\frac{1}{2}x+6$ 上にあるので，

$x=\frac{4}{3}$ を $y=\frac{1}{2}x+6$ に代入して，$y=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}+6=\frac{2}{3}+6=\frac{20}{3}$

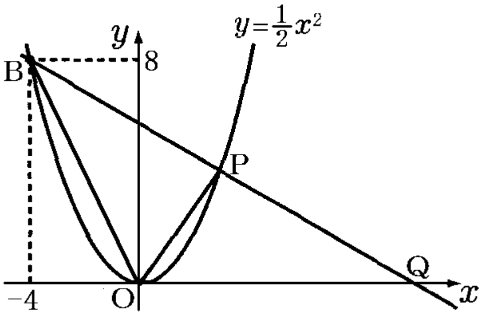
よって，点 P の座標は $\left(\frac{4}{3},\ \frac{20}{3}\right)$ になる。

【】面積を 2 等分，面積比

[中点]

[問題]

右の図のように関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上を動く点 P がある。この点 P と点 B(−4，8)とを結んでできる直線 BP と x 軸との交点を Q とする。このとき，△OPB の面積と△OPQ の面積が等しくなるような点 P の x 座標を求めよ。ただし，点 P は x ＞0 を満たす範囲を動くものとする。



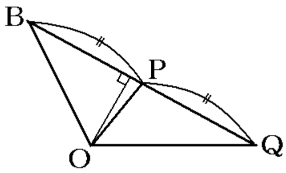
(鳥取県改)(**)

[解答欄]

[ヒント]

・「△OPB の面積と△OPQ の面積が等しくなる」ので，点 P は線分 BQ の中点になる。

・点 B の y 座標が 8，点 Q の y 座標が 0→点 P の y 座標がわかる。



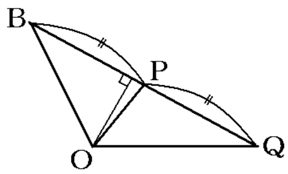
[解答] $2\sqrt{2}$

[解説]

「△OPB の面積と△OPQ の面積が等しくなる」ので，点 P は線分 BQ の中点になる。(それぞれの底辺を BP，QP とすると高さは共通なので，BP＝QP だから 2 つの三角形の面積は等しい)

点 B の y 座標が 8，点 Q の y 座標が 0 なので，点 P の y 座標は 4 になる。点 P は $y=\frac{1}{2}x^2$ 上にあるので，　$y=\frac{1}{2}x^2$ に $y=4$ を代入して，$4=\frac{1}{2}x^2$，$x^2=8$

$x>0$ なので，$x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

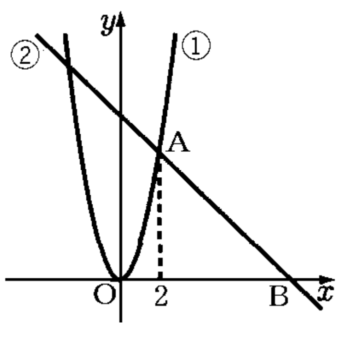


[問題]

右の図において，①は関数 $y=2x^2$ のグラフで，②は傾きが−1 の直線である。点 A は①と②の交点で，その x 座標は 2 であり，点 B は②と x 軸の交点である。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 直線②の式を求めよ。

(2) 線分 AB 上に点 C をとり，点 O と点 C を通る直線を l とする。この直線 l が三角形 OAB の面積を二等分するとき，直線 l の式を求めよ。



(高知県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

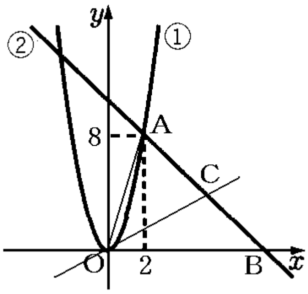
[ヒント]

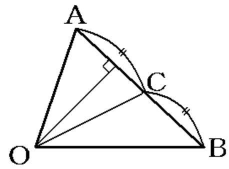
(1) A の座標，B の座標→直線②の式

(2) 直線 OC が三角形 OAB の面積を二等分

→点 C は線分 AB の中点→C の座標

→直線 OC(直線 l の式)





[解答](1) $y=-x+10$ (2) $y=\frac{2}{3}x$

[解説]

(1) まず，点 A の座標を求める。x 座標が 2 である点 A は $y=2x^2$ 上にあるので，$x=2$ を $y=2x^2$ に代入すると，$y=2\times2^2=8$ よって，点 A の座標は(2，8)

②は傾きが－1 で，点 A を通るので，$y=m(x-x_1)+y_1$ を使って直線の式を求める。

$y=-(x-2)+8$，$y=-x+10$

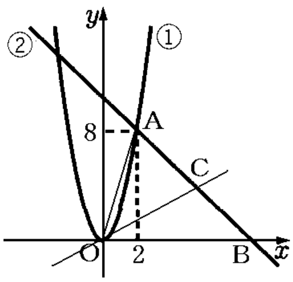
(2) 「直線 l (直線 OC)が三角形 OAB の面積を二等分する」とあるので，点 C は線分 AB の中点になる。

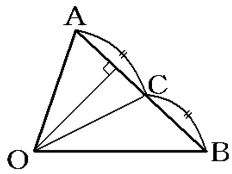
点 A の y 座標は 8，点 B の y 座標は 0 なので，点 C の y 座標は，(8＋0)÷2＝4 になる。

点 C は $y=-x+10$ 上にあるので，$y=4$ を $y=-x+10$ に代入すると，$4=-x+10$，$x=10-4$，$x=6$

よって，点 C の座標は(6，4)になる。

直線 OC(直線 l)は原点 O(0，0)と C(6，4)を通る直線である。



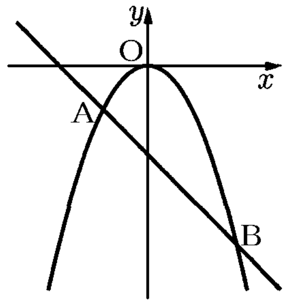


$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，この直線の式を求める。

$y=\frac{4-0}{6-0}(x-0)+0$，$y=\frac{2}{3}x$

[問題]

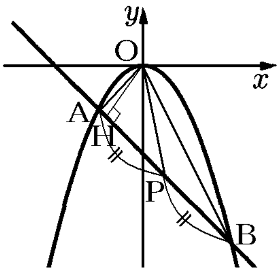
右の図のように，関数$y=-\frac{1}{2}x^2$のグラフ上に 2 点 A，B があり，A，B のx座標はそれぞれ－2，4 である。直線 AB 上に点 P があり，直線 OP が△OAB の面積を 2 等分しているとき，点 P の座標を求めよ。



(鹿児島県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

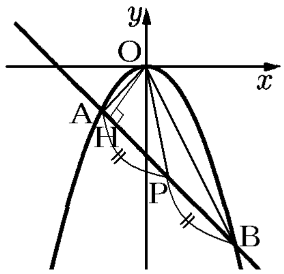


2 点(x_1, y_1)，(x_2, y_2)の中点の座標は$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$($x$，$y$それぞれの座標の平均)

[解答](1，－5)

[解説]

線分ABの中点をPとすると,OPは△OABの面積を2等分する。
それは次のように説明できる。
△OAP と△OBP で，それぞれの底辺を AP，BP とすると，
AP＝BP である。また, 2 つの三角形の高さは OH で共通である。
底辺と高さが同じなので，△OAP と△OBP の面積は等しい。



2 点(x_1, y_1)，(x_2, y_2)の中点の座標は$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$
で求めることができる(x，yそれぞれの座標の平均)。

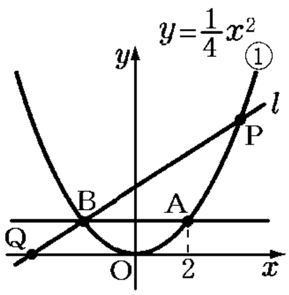
点 A の座標：$x=-2$を$y=-\frac{1}{2}x^2$に代入すると，$y=-\frac{1}{2}\times 4$＝－2 なので点 A は(－2，－2)

点 B の座標：$x=4$を$y=-\frac{1}{2}x^2$に代入すると，$y=-\frac{1}{2}\times 16$＝－8 なので，点 B は(4，－8)

A(－2，－2)，B(4，－8)の中点 P の座標は，$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-2-8}{2}\right)$＝(1，－5)

[底辺が共通(高さが共通)]

[問題]



右の図の①は，関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフである。このグラフ上に点 A があり，その x 座標は 2 である。点 A を通り x 軸に平行な直線とグラフ①との交点のうち,点Aと異なる点をBとする。点 P は①のグラフ上を動く点であり，その x 座標は 2 より大きいものとする。図のように，2 点 B，P を通る直線を l とし，直線 l と x 軸との交点を Q とする。△ABQ の面積と△ABP の面積が等しくなるとき，点 P の x 座標を求めよ。

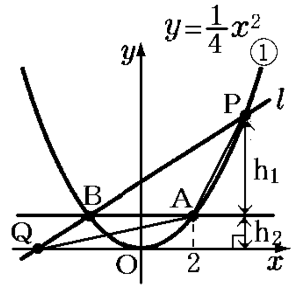
(島根県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

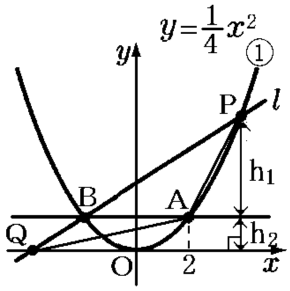
・△ABQ と△ABP の共通の底辺を AB とすると，
　△ABQ の面積と△ABP の面積が等しい
　→高さ h_1，h_2 が等しい

・点 A の y 座標→点 P の y 座標→点 P の x 座標



[解答] $2\sqrt{2}$

[解説]



△ABQ と△ABP の共通の底辺を AB とすると，
右図の h_1，h_2 がそれぞれの三角形の高さになる。
「△ABQ の面積と△ABP の面積が等しくなる」とあり，
底辺が共通で等しいので高さが等しくなる。
よって，$h_1=h_2$ になる。

点 A は $y=\frac{1}{4}x^2$ 上にあり， x 座標が 2 なので， $y=\frac{1}{4}\times 2^2=1$

となり，$h_2=1$ で，$h_1=h_2=1$ となる。
よって，点 P の y 座標は $h_1+h_2=1+1=2$

点 P は $y=\frac{1}{4}x^2$ 上にあり， y 座標が 2 なので， $2=\frac{1}{4}x^2$

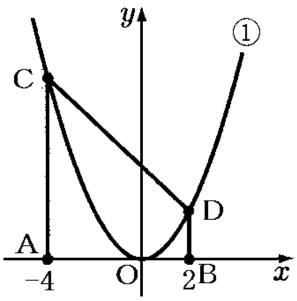
$x^2=8$， $x=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$，

$x>0$ なので， $x=2\sqrt{2}$

[台形の面積の 2 等分など]

[問題]

右の図で，点 O は原点であり，2 点 A，B の座標はそれぞれ $(-4, 0)$, $(2, 0)$である。放物線①は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフである。点 A を通り，y 軸に平行な直線をひき，放物線①との交点を C とする。また，点 B を通り，y 軸に平行な直線をひき，放物線①との交点を D とし, 点 C と点 D を結ぶ。線分 CD 上に点 E をとる。



直線 AE が台形 ABDC の面積を 2 等分するとき，点 E の x 座標はいくらか。点 E の x 座標を a として，a の値を求めよ。

(香川県)(***)

[解答欄]

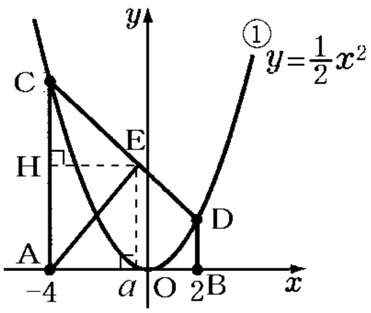
[ヒント]

・点 C と点 D の y 座標を計算→台形 ABDC の面積

・点 E の x 座標を a とする

・△EAC の面積(底辺を AC とすると，高さは EH)

　は台形 ABDC の面積の $\frac{1}{2}$ から a を求める。



[解答] $a=-\frac{1}{4}$

[解説]

まず，台形 ABDC の面積を求めるために，点 C と点 D の y 座標を計算する。

点 C の x 座標は－4 なので，$x=-4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると，$y=\frac{1}{2}\times(-4)^2=8$

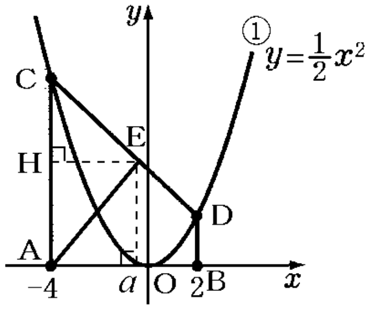
点 D の x 座標は 2 なので，$x=2$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると，$y=\frac{1}{2}\times2^2=2$

したがって，AC＝8，BD＝2

また，BA＝2－(－4)＝2＋4＝6

(台形 ABDC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(上底 BD＋下底 AC)×(高さ BA)

＝$\frac{1}{2}\times(2+8)\times6$＝30



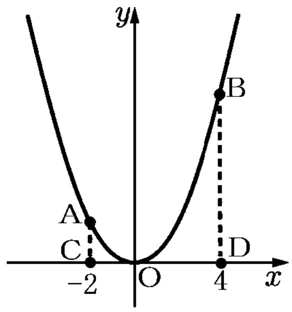
右図のように点 E の x 座標を a とする(図では a が負の値である場合を描いているが，正の値でも，以下の計算は成り立つ)。

「直線 AE が台形 ABDC の面積を 2 等分する」とあるので,
△EAC の面積は，30÷2＝15 である。
△EAC の底辺を AC(＝8)とすると，高さは EH である。
EH＝$a-(-4)$＝$a+4$

(△EAC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 AC)×(高さ EH)＝15

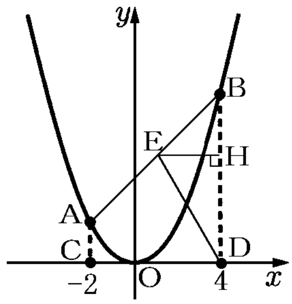
$\frac{1}{2}\times8\times(a+4)=15$，$4(a+4)=15$，$4a+16=15$，$4a=-1$　よって，$a=-\frac{1}{4}$

[問題]



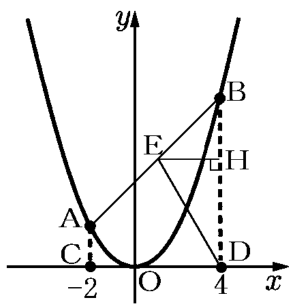
右の図のように，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に 2 点 A，B があり，x 軸に 2 点 C，D がある。2 点 A，C の x 座標はともに－2 であり，2 点 B，D の x 座標はともに 4 である。線分 AB 上に点 E をとり，四角形 ACDE と△BDE をつくる。四角形 ACDE の面積と△BDE の面積の比が 2：1 となるとき，点 E の x 座標を求めよ。
(三重県)(***)
[解答欄]

[ヒント]



右図のような位置関係になる。
(四角形 ACDE の面積)：(△BDE の面積)＝2：1 なので,
(台形 ACDB の面積)：(△BDE の面積)＝3：1 である。

[解答]$\frac{3}{2}$
[解説]



(四角形 ACDE の面積)：(△BDE の面積)＝2：1 なので,
(台形 ACDB の面積)：(△BDE の面積)＝3：1 である。･･･①
まず台形 ACDB の面積を求める。
$x=-2$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると，$y=2$ なので点 A の座標は(−2，2)で，AC＝2
$x=4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると，$y=8$ なので点 B の座標は(4，8)で，BD＝8

CD＝4－(－2)＝6

(台形 ACDB の面積)＝$\frac{1}{2}$×(AC＋BD)×CD＝$\frac{1}{2}\times(2+8)\times 6$＝30

①より，(△BDE の面積)＝(台形 ACDB の面積)×$\frac{1}{3}$＝$30\times\frac{1}{3}$＝10

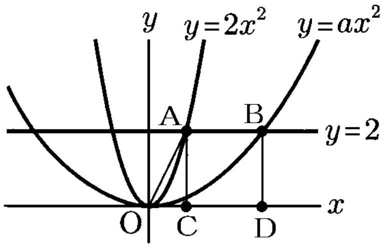
(△BDE の面積)＝$\frac{1}{2}$×BD×EH＝10

$\frac{1}{2}$×8×EH＝10，4EH＝10，EH＝$\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

よって，点 E の x 座標は，$4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$

[問題]

右の図で，O は原点，A，B はそれぞれ，直線 $y=2$ と 2 つの関数 $y=2x^2$，$y=ax^2$（a は定数，$a>0$)のグラフとの交点のうち，x 座標が正である点である。また，C，D は x 軸上の点で，四角形 ACDB は正方形である。このとき，次の問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 点 C を通り，台形 AODB の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

(愛知県)(***)

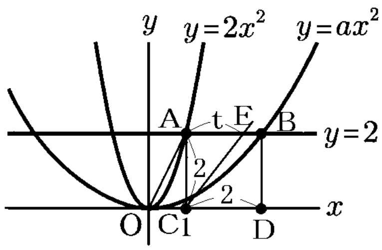
[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

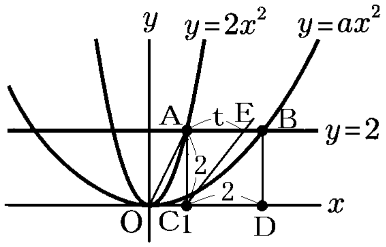
(1) 点 B の y 座標は 2，x 座標は，AC＝AB(正方形なので)を使って求める。

(2) AODB の面積を 2 等分する直線を CE とし，AE＝t とおき，(台形 AOCE の面積)＝(台形 AODB の面積)÷2 から t を求める



[解答](1) $a=\frac{2}{9}$　(2) $y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$

[解説]



(1) 点Aのy座標は2なので，$y=2x^2$に$y=2$を代入して，

$2=2x^2$，$x^2=1$，$x>0$なので，$x=1$

よって，点Cのx座標も1である。

次に，四角形ACDBは正方形で，AC＝2なので，CD＝2

よって，点Dのx座標は1＋2＝3とわかる。

したがって，点Bの座標は(3，2)である。

点Bは$y=ax^2$上の点なので，$y=ax^2$に$x=3$，$y=2$を代入して，

$2=a\times3^2$，$9a=2$

よって，$a=\dfrac{2}{9}$

(2) (台形AODBの面積)＝(上底AB＋下底OD)×(高さAC)÷2＝(2＋3)×2÷2＝5

点Cを通り，台形AODBの面積を2等分する直線を右上図のCEとし，AE＝tとおく。

(台形AOCEの面積)＝(上底AE＋下底OC)×(高さAC)÷2＝(t＋1)×2÷2＝t＋1

与えられた条件より，(台形AOCEの面積)＝(台形AODBの面積)÷2

よって，$t+1=\dfrac{5}{2}$，$t=\dfrac{5}{2}-1=\dfrac{3}{2}$

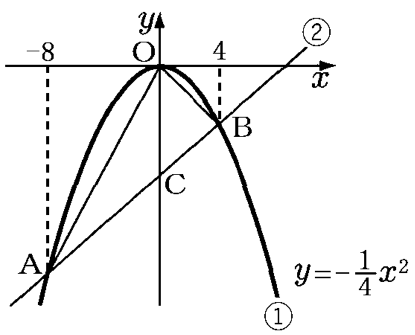
(直線CEの傾き)＝$\dfrac{AC}{AE}=AC\div AE=2\div\dfrac{3}{2}=2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$

直線CEは傾きが$\dfrac{4}{3}$で，点C(1，0)を通るので，$y=m(x-x_1)+y_1$の公式を使って，

$y=\dfrac{4}{3}(x-1)$，$y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{3}$と求めることができる。

[三角形の面積を一定の比に分ける]

[問題]



右の図で，①は関数$y=-\dfrac{1}{4}x^2$のグラフである。点A，Bは①上にあり，点Aのx座標は−8，点Bのx座標は4である。②は点A，Bを通る直線であり，y軸との交点をCとする。次の各問いに答えよ。ただし，座標軸の単位の長さを1cmとする。

(1) 直線②の式を求めよ。

(2) △OABの面積を求めよ。

(3) 点Qを△OABの辺OA上にとり，線分CQが△OABの面積を2等分するとき，点Qの座標を求めよ。

(青森県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[ヒント]

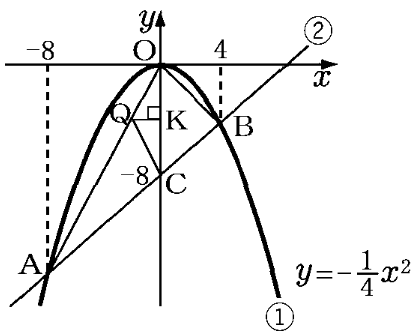
(1) A，B の座標計算→直線 AB(直線②)の式

(2) △OAB を△OAC と△OBC に分けて考える。

(3) (四角形 OBCQ の面積)＝(△OAB の面積)÷2

(△OCQ の面積)＝(OBCQ の面積)－(△OBC の面積)

△OCQ の面積と底辺 OC→高さ QK→Q の x 座標



[解答](1) $y=x-8$　(2) 48cm²　(3) Q(－2，－4)

[解説]

(1) まず，点 A，B の座標を求める。

点 A の x 座標は－8 なので，$y=-\dfrac{1}{4}x^2$ に $x=-8$ を代入すると，$y=-\dfrac{1}{4}\times(-8)^2=-16$

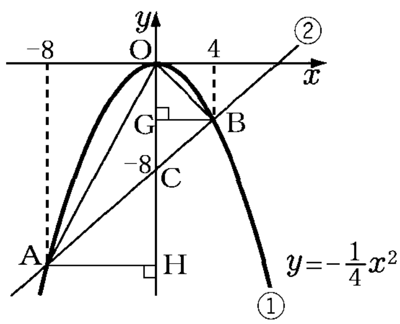
よって，点 A の座標は(－8，－16)

点 B の x 座標は 4 なので，$y=-\dfrac{1}{4}x^2$ に $x=4$ を代入すると，$y=-\dfrac{1}{4}\times 4^2=-4$

よって，点 B の座標は(4，－4)

直線②は 2 点 A(－8，－16)，B(4，－4)を通るので，$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式より，

$y=\dfrac{-4-(-16)}{4-(-8)}(x-4)-4$，$y=(x-4)-4$，$y=x-8$



(2) △OAB を△OAC と△OBC に分けて考える。

△OAC の底辺を OC とすると，高さは，右図の AH になる。

$y=x-8$ の y 切片は－8 なので，点 C の y 座標は－8 で，

OC＝8(cm)

点 A の x 座標は－8 なので，AH＝8(cm)

(△OAC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ AH)＝$\dfrac{1}{2}\times 8\times 8$＝32(cm²)

次に，△OBC の底辺を OC とすると，高さは BG である。

点 B の x 座標は 4 なので，BG＝4(cm)

(△OBC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ BG)＝$\dfrac{1}{2}\times 8\times 4$＝16(cm²)

よって，(△OAB の面積)＝(△OAC の面積)＋(△OBC の面積)＝32＋16＝48(cm²)

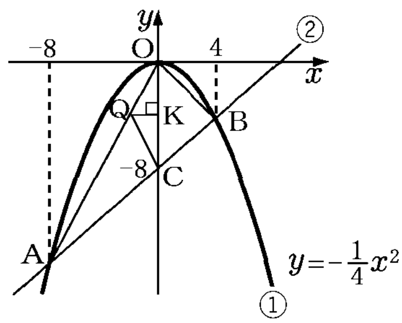
(3) (2)より，△OAB の面積は 48cm² なので，

右図の四角形 OBCQ の面積は，48÷2＝24(cm²)

(△OCQ の面積)＝24－(△OBC の面積)＝24－16＝8(cm²)

△OCQ の底辺を OC とすると，高さは QK なので，

(△OCQ の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ QK)＝8(cm²)



$\frac{1}{2}$×8×(高さ QK)＝8，4×(高さ QK)＝8

(高さ QK)＝8÷4＝2(cm)

よって，点 Q の x 座標は－2 になる。

点 Q の y 座標を求めるために, 直線 OA の式を計算する。

点 A の座標は(－8，－16)，点 O の座標は(0，0)なので

(直線 OA の傾き)＝$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{0-(-16)}{0-(-8)}=\dfrac{16}{8}=2$

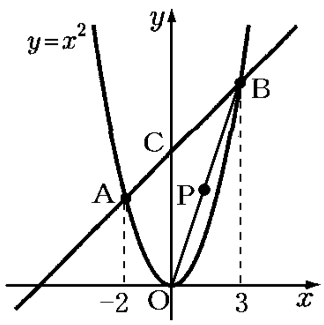
よって，直線 OA の式は $y=2x$ である。

$y=2x$ に $x=-2$ を代入すると， $y=2\times(-2)=-4$

したがって，点 Q の座標は(－2，－4)

[問題]

　右の図のように，関数 $y=x^2$ のグラフ上に 2 点 A，B があり，2 点 A，B の x 座標はそれぞれ－2，3 である。直線 AB と y 軸との交点を C とする。次の各問いに答えよ。



(1) 直線 AB の式を求めよ。

(2) △OAB の面積を求めよ。

(3) 図のように，線分 OB 上に点 P を，四角形 OACP と △BCP の面積の比が 2 : 1 になるようにとる。このとき，点 P の x 座標を求めよ。

(長崎県)(***)

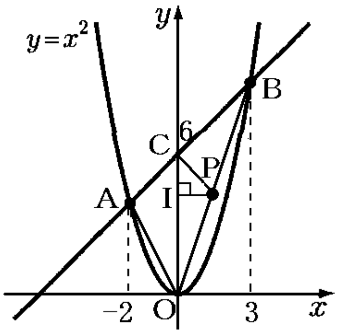
[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(1) A，B の座標計算→直線 AB の式

(2) △OAB を△OAC と△OBC に分けて考える。



(3) (四角形 OACP の面積)＝(△OAB の面積)× $\dfrac{2}{2+1}$

(△POC の面積)＝(四角形 OACP の面積)－(△AOC の面積)

△POC の面積と底辺 OC→高さ PI→P の x 座標

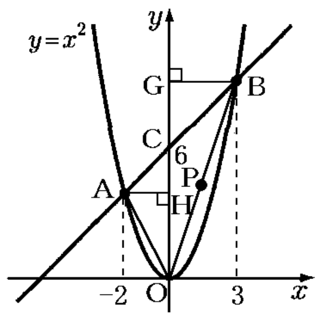
[解答](1) $y=x+6$ (2) 15 (3) $\dfrac{4}{3}$

[解説]

(1) $y=x^2$ 上にある点 A の x 座標は－2 なので， $x=-2$ を $y=x^2$ に代入して， $y=(-2)^2=4$ よって，点 A の座標は(－2，4) $y=x^2$ 上にある点 B の x 座標は 3 なので，$x=3$ を $y=x^2$ に代入して， $y=3^2=9$ よって，点 B の座標は(3，9)

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，2 点 A(－2，4)，B(3，9)を通る直線の式を求める。

$y=\dfrac{9-4}{3-(-2)}(x-3)+9$， $y=(x-3)+9$， $y=x+6$



(2) △OAB を△AOC と△BOC に分けて考える。

△AOC の底辺を OC とすると，右図の AH が高さになる。

点 C は直線 $y=x+6$ の y 切片なので，点 C の y 座標は 6 で，

OC＝6 となる。また, 点 A の x 座標は－2 なので AH=2 である。

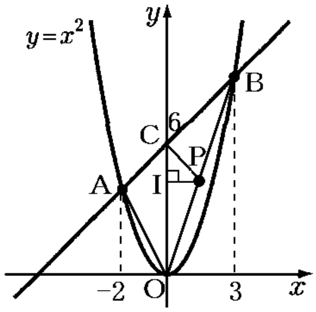
(△AOC の面積)＝ $\dfrac{1}{2}$ ×(底辺 OC)×(高さ AH)＝ $\dfrac{1}{2}\times6\times2$ ＝6

次に，△BOC で，点 B の x 座標は 3 なので，BG＝3 である。

(△BOC の面積)＝ $\dfrac{1}{2}$ ×(底辺 OC)×(高さ BG)＝ $\dfrac{1}{2}\times6\times3$ ＝9

よって，(△OAB の面積)＝(△AOC の面積)＋(△BOC の面積)＝6＋9＝15

(3) (2)より，△OAB の面積は 15 である。



「四角形 OACP と△BCP の面積の比が 2：1 になる」より,

(四角形 OACP の面積)＝(△OAB の面積)× $\dfrac{2}{2+1}$ ＝15× $\dfrac{2}{3}$ ＝10

になる。(2)より，(△AOC の面積)＝6 なので,

(△POC の面積)＝(四角形 OACP の面積)－(△AOC の面積)

＝10－6＝4

△POC の底辺を OC とすると，高さは右図の PI なので,

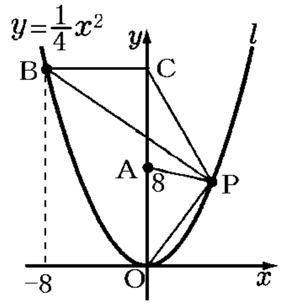
(△POC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ PI)＝4

$\dfrac{1}{2}$×6×(高さ PI)＝4，3×(高さ PI)＝4，(高さ PI)＝4÷3＝$\dfrac{4}{3}$

したがって，点 P の x 座標は $\dfrac{4}{3}$ になる。

[問題]

右の図で，点 O は原点，点 A の座標は(0，8)であり，曲線 l は関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ のグラフを表している。点 B は曲線 l 上にあり，x 座標は－8 である。点 P の x 座標が 8 より小さい正の数であるとき，点 B を通り x 軸に平行な直線を引き，y 軸との交点を C とし，点 O と点 P，点 A と点 P，点 B と点 P，点 C と点 P をそれぞれ結んだ場合を表している。△CBP の面積が△AOP の面積の 3 倍になるとき，点 P の x 座標を求めよ。



(東京都)(***)

[解答欄]

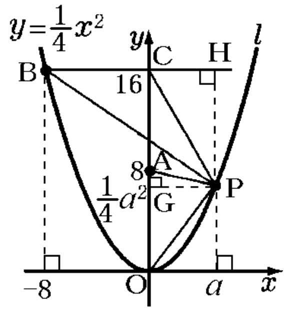
[ヒント]

点 P の x 座標を a とする→y 座標を a を使って表す

△CBP の底辺 BC，高さ PH→面積を a を使って表す

△AOP の底辺 AO，高さ PG→面積を a を使って表す

(△CBP の面積)＝(△AOP の面積)×3

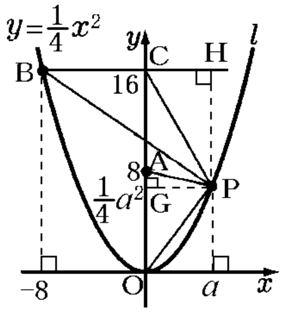


[解答]4

[解説]

点 P の x 座標を a とすると，点 P の y 座標は，

$y=\dfrac{1}{4}x^2$ に $x=a$ を代入して， $y=\dfrac{1}{4}a^2$



△CBP の底辺を BC とすると，高さは右図の PH になる。

点 B の x 座標が－8 なので，BC＝8

点Bの y 座標は，$y=\dfrac{1}{4}x^2$ に $x=-8$ を代入して，$y=\dfrac{1}{4}\times(-8)^2=16$

よって，点 H の y 座標も 16 になる。

したがって，PH＝(点Hのy座標)－(点Pのy座標)＝$16-\frac{1}{4}a^2$

(△CBPの面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺BC)×(高さPH)＝$\frac{1}{2}\times 8\times\left(16-\frac{1}{4}a^2\right)=64-a^2$ ･･･①

次に，△AOPの底辺をAOとすると，高さは右上図のPGになる。

「点Aの座標は(0，8)」なので，AO＝8

点Pのx座標はaなので，PG＝a

よって，(△AOPの面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺AO)×(高さPG)＝$\frac{1}{2}\times 8\times a=4a$ ･･･②

「△CBPの面積が△AOPの面積の3倍になる」ので，

(△CBPの面積)＝(△AOPの面積)×3

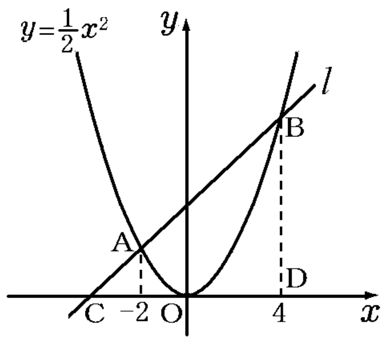
①，②より，$64-a^2=4a\times 3$，$a^2+12a-64=0$，$(a-4)(a+16)=0$，

$a=4,\ -16$　$a>0$なので，$a=4$

よって，点Pのx座標は4である。

[問題]

右の図のように，関数$y=\frac{1}{2}x^2$のグラフと直線lの交点をA，Bとし，直線lとx軸の交点をCとする。また，点Bからx軸に垂線BDをひく。点Aのx座標が－2，点Bのx座標が4であるとき，次の各問いに答えよ。ただし，原点Oから点(1，0)までの距離及び原点Oから点(0，1)までの距離をそれぞれ1cmとする。



(1) 直線lの式を求めよ。

(2) 関数$y=\frac{1}{2}x^2$のグラフ上に点Pがある。ただし，点Pのx座標は0より大きく4より小さい。△PCDと△PBDの面積の比が1：6であるとき，点Pのx座標を求めよ。

(千葉県)(***)

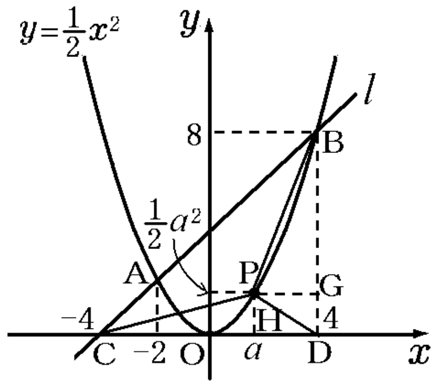
[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(1) A，B の座標計算→直線 AB(直線 l)の式

(2) 点 P の x 座標を $x=a$ とおく



(△PCD の面積)＝$\frac{1}{2}$(底辺 CD)×(高さ PH)

(△PBD の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 BD)×(高さ PG)

(△PBD の面積)＝(△PCD の面積)×6

[解答](1)　$y=x+4$　(2) 1

[解説]

(1) まず，点 A，B の座標を求める。

点 A の x 座標は－2 なので，$x=-2$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると，$y=\frac{1}{2}\times(-2)^2$＝2

よって点 A の座標は(－2，2)

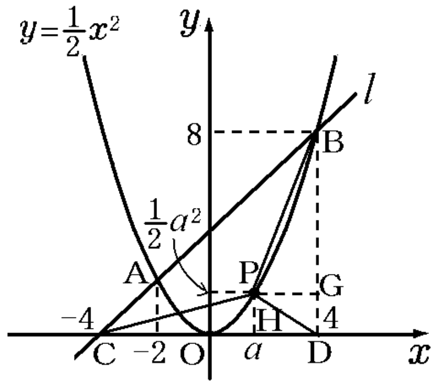
点 B の x 座標は 4 なので，$x=4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると，$y=\frac{1}{2}\times4^2$＝8

よって点 B の座標は(4，8)

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，2 点 A(－2，2)，B(4，8)を通る直線の式を求める。

$y=\frac{8-2}{4-(-2)}(x-4)+8$，$y=(x-4)+8$，$y=x+4$

(2) 点 P の x 座標を $x=a$ とおくと，



y 座標は，$x=a$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して $y=\frac{1}{2}a^2$

△PCD の底辺を CD とすると，高さは PH＝$\frac{1}{2}a^2$

l の式 $y=x+4$ に $y=0$ を代入すると，$0=x+4$，$x=-4$

なので，点 C の x 座標は－4 になる。

よって，CD＝4－(－4)＝8

したがって，(△PCD の面積)＝$\frac{1}{2}$×CD×PH＝$\frac{1}{2}\times8\times\frac{1}{2}a^2=2a^2$

次に，△PBD の底辺を BD とすると，高さは PG である。

BD＝8，PG＝$4-a$ なので，

(△PBD の面積)＝$\frac{1}{2}$×BD×PG＝$\frac{1}{2}\times8\times(4-a)=16-4a$

△PCD と△PBD の面積の比が 1：6 なので，

(△PBD の面積)＝(△PCD の面積)×6

$16-4a=2a^2\times 6$，$12a^2+4a-16=0$，$3a^2+a-4=0$

解の公式を使う。

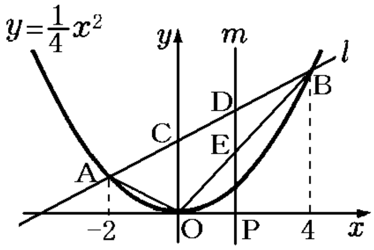
$a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4\times 3\times(-4)}}{6}=\dfrac{-1\pm\sqrt{49}}{6}=\dfrac{-1\pm 7}{6}=-\dfrac{4}{3}$，1

$0<a<4$ なので，$a=1$

したがって，点 P の x 座標は 1 である。

[問題]

右の図で，曲線は関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ のグラフである。曲線上に x 座標が－2，4 である 2 点 A，B をとり，この 2 点を通る直線 l をひく。図のように，x 軸上の $0\leqq x\leqq 4$ の範囲に点 P をとり，点 P を通って y 軸に平行な直線 m をひく。直線 m と直線 l の交点を D, 直線 m と線分 OB との交点を E とする。△OAB と△BDE の面積の比が 4：1 のとき，点 P の x 座標を求めよ。



(埼玉県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

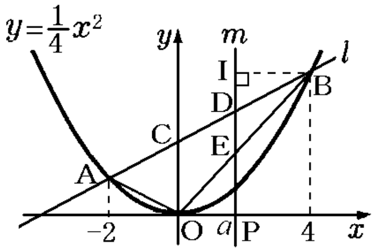
A，B の座標計算→直線 AB の式

△OAB を△OAC と△OBC に分けて，面積を計算

点 P の x 座標を a として，

△BDE(底辺 DE，高さ BI)の面積を a を使って表す

(△OAB の面積)：(△BDE の面積)＝4：1 で式をたてる



[解答] $4-\sqrt{6}$

[解説]

まず，直線 l の式を求めるために点 A，B の座標を計算する。

$y=\dfrac{1}{4}x^2$ 上にある点 A の x 座標は－2 なので，$x=-2$ を $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に代入すると，

$y=\dfrac{1}{4}\times(-2)^2=1$　よって，点 A の座標は(－2，1)

$y=\dfrac{1}{4}x^2$ 上にある点 B の x 座標は 4 なので，$x=4$ を $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に代入すると，

$y=\dfrac{1}{4}\times 4^2=4$　よって，点 B の座標は(4，4)

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，2 点 A(−2，1)，B(4，4)を通る直線の式を求める。

$y=\dfrac{4-1}{4-(-2)}(x-4)+4$，$y=\dfrac{1}{2}(x-4)+4$，$y=\dfrac{1}{2}x+2$・・・①

$y=\dfrac{1}{2}x+2$ の切片(y 切片)は 2 なので，点 C の y 座標は 2 で，OC＝2 になる。

次に，△OAB を△OCA と△OCB に分割してその面積を求める。

(△OCA の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ)＝$\dfrac{1}{2}\times 2\times 2=2$

(△OCB の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ)＝$\dfrac{1}{2}\times 2\times 4=4$

よって，(△OAB の面積)＝(△OCA の面積)＋(△OCB の面積)＝2＋4＝6・・・②

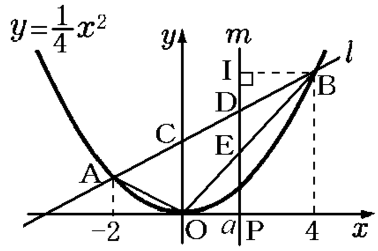
次に，点 P の x 座標を a として，△BDE の面積を a を使って表すことにする。

右図で，△BDE の底辺を DE とすると高さは BI になる。

点 B の x 座標は 4 で，点 I の x 座標は a なので,

BI＝$4-a$ である。・・・③

DE の長さを求めるために,点 D と E の y 座標を計算する。



x 座標が a である点 D は直線 l (①より $y=\dfrac{1}{2}x+2$)上にあるので，$x=a$ を $y=\dfrac{1}{2}x+2$ に代入して，$y=\dfrac{1}{2}a+2$・・・④

点 B の座標は(4，4)なので，(直線 OB の傾き)＝$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{4-0}{4-0}=\dfrac{4}{4}=1$

よって，直線 OB の式は $y=x$ である。

x 座標が a である点 E は $y=x$ 上にあるので，$x=a$ を $y=x$ に代入して，$y=a$・・・⑤

④，⑤より，点 D の y 座標は $y=\dfrac{1}{2}a+2$，点 E の y 座標は $y=a$ なので,

DE＝$\dfrac{1}{2}a+2-a=-\dfrac{1}{2}a+2$・・・⑥

③，⑥より,

(△BDE の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 DE)×(高さ BI)

$=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}a+2\right)\times(4-a)=\left(-\dfrac{1}{4}a+1\right)(4-a)=\dfrac{1}{4}(-a+4)(4-a)=\dfrac{1}{4}(4-a)^2=\dfrac{1}{4}(a-4)^2$

「△OAB と△BDE の面積の比が 4：1」で，②より(△OAB の面積)＝6 なので，

(△OAB の面積)：(△BDE の面積)＝4：1，6：$\dfrac{1}{4}(a-4)^2$=4：1

比の内項の積は外項の積に等しいので，$\dfrac{1}{4}(a-4)^2\times4=6\times1$

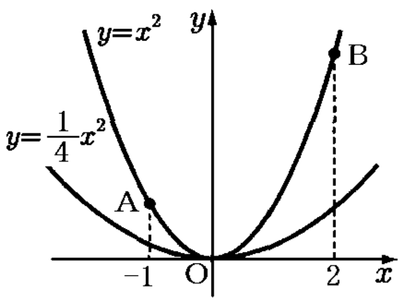
$(a-4)^2=6$，$a-4=\pm\sqrt{6}$，$a=4\pm\sqrt{6}$

「x 軸上の 0≦ x ≦4 の範囲に点 P をとる」とあるので，0≦ a ≦4

よって，$a=4-\sqrt{6}$

[問題]

右の図のように，関数 $y=x^2$ のグラフと関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ のグラフがある。2 点 A，B は関数 $y=x^2$ のグラフ上の点であり，A，B の x 座標はそれぞれ－1，2 である。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) 2 点 A，B を通る直線の傾きを求めよ。

(2) 関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ のグラフ上に点 P をとり，P の x 座標を t とする。ただし，0＜t＜2 とする。また，P を通り y 軸に平行な直線と関数 $y=x^2$ のグラフ，直線 AB との交点をそれぞれ Q，R とする。

① t＝1 のとき，線分 PQ と線分 QR の長さの比を求めよ。

② 線分 AP，PB，BQ，QA で囲まれた図形の面積が△AQB の面積と等しくなる t の値を求めよ。

(福島県)(***)

[解答欄]

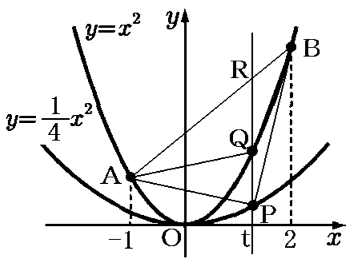
(1)	(2)②PQ：QR＝	②

[ヒント]

(1) A，B の座標計算→直線 AB の式

(2)① $x=1$ のときの P，Q，R の y 座標を計算

② PQ＝QR であれば，△APQ＝△AQR，△BPQ＝△BQR となり(それぞれ底辺が等しく高さが共通なので)，線分 AP，PB，BQ，QA で囲まれた図形の面積は△AQB の面積と等しくなる。



[解答](1) 1　(2)①PQ：QR＝3：8　② $\dfrac{2+2\sqrt{15}}{7}$

[解説]

(1) $y=x^2$ に $x=-1$ を代入すると $y=1$ なので，点 A の座標は(－1，1)

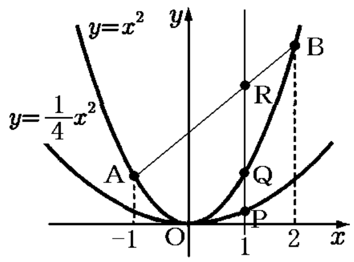
$y=x^2$ に $x=2$ を代入すると $y=4$ なので，点 B の座標は(2，4)

よって，直線 AB の傾きは，$\dfrac{4-1}{2-(-1)}=\dfrac{3}{3}=1$

(2)① まず，直線 AB の式を求めておく。

(1)より, 傾きが 1 で B(2, 4)を通るので，$y=a(x-x_1)+y_1$ の公式より，$y=(x-2)+4$，$y=x+2$

$x=1$ を $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に代入すると $y=\dfrac{1}{4}$ なので，P の y 座標は $\dfrac{1}{4}$



$x=1$ を $y=x^2$ に代入すると $y=1$ なので，Q の y 座標は 1

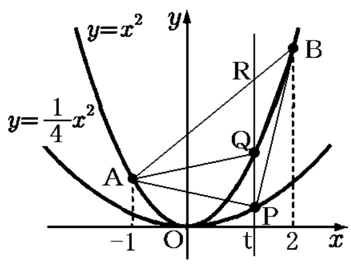
$x=1$ を $y=x+2$ に代入すると $y=3$ なので，Q の y 座標は 3

よって，PQ＝$1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$，QR＝3－1＝2

PQ：QR＝$\dfrac{3}{4}$：2＝3：8

② PQ＝QR であれば，△APQ＝△AQR，△BPQ＝△BQR となり(それぞれ底辺が等しく高さが共通なので)，

線分 AP，PB，BQ，QA で囲まれた図形の面積は△AQB の面積と等しくなる。



$x=t$ を $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に代入すると $y=\dfrac{1}{4}t^2$ なので, P の y 座標は $\dfrac{1}{4}t^2$

$x=t$ を $y=x^2$ に代入すると $y=t^2$ なので，Q の y 座標は t^2

$x=t$ を $y=x+2$ に代入すると $y=t+2$ なので，R の y 座標は $t+2$

よって，QR＝$(t+2)-t^2$，PQ＝$t^2-\dfrac{1}{4}t^2=\dfrac{3}{4}t^2$

PQ＝QR なので，$\dfrac{3}{4}t^2=(t+2)-t^2$，$3t^2=4t+8-4t^2$

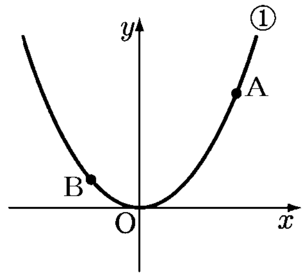
$7t^2-4t-8=0$

解の公式より，$t=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4\times7\times(-8)}}{14}=\dfrac{4\pm\sqrt{240}}{14}=\dfrac{4\pm4\sqrt{15}}{14}=\dfrac{2\pm2\sqrt{15}}{7}$

$t>0$，$2-2\sqrt{15}<0$ なので，$t=\dfrac{2-2\sqrt{15}}{7}$ は不適。よって，$t=\dfrac{2+2\sqrt{15}}{7}$

[問題]

右の図のように，関数 $y=x^2$ のグラフ上に，2 点 A，B がある。点 A の x 座標を 2，点 B の x 座標を－1 とする。点 A と x 座標が等しい x 軸上の点を C とする。△ABC と△OAB において，線分 AB を底辺としたときのそれぞれの高さの比を，もっとも簡単な整数の比で求めよ。

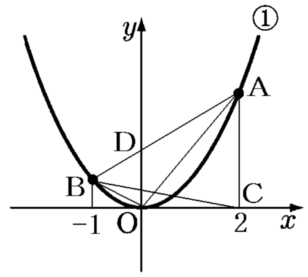


(北海道)(***)

[解答欄]

[ヒント]

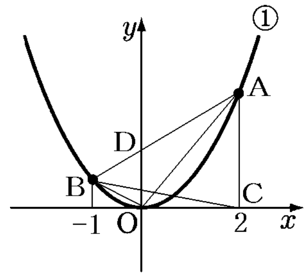
右図のように，△ABC と△OAB の共通の底辺を AB とすると，それぞれの高さの比は面積の比と等しくなる。そこで，△ABC と△OAB の面積をそれぞれ求める。



[解答]2：1

[解説]

右図のように，△ABC と△OAB の共通の底辺を AB とすると，それぞれの高さの比は面積の比と等しくなる。そこで，△ABC と△OAB の面積をそれぞれ求める。



△ABC について，

点 A は $y=x^2$ 上にあるので，$x=2$ を $y=x^2$ に代入すると，$y=4$

よって，AC＝4

△ABC の底辺を AC＝4 とすると，高さは 2－(－1)＝3 である。

したがって，(△ABC の面積)＝$\frac{1}{2}$×4×3＝6･･･①

次に，△OAB について，

まず，点 D の座標を求めるために，直線 AB の式を求める。

点 A(2，4)，点 B(－1，1)なので，$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式より，

$y=\frac{4-1}{2-(-1)}(x-2)+4$，$y=x-2+4$，$y=x+2$

点 D は $y=x+2$ の切片(y 切片)なので，点 D の y 座標は 2 で，OD＝2 である。

△AOD，△BOD の共通の底辺を OD＝2 とすると，△AOD の高さは 2，△BOD の高さは 1 なので，

(△AOD の面積)＝$\frac{1}{2}$×2×2＝2

(△BOD の面積)＝$\frac{1}{2}$×2×1＝1

よって，(△OAB の面積)＝(△AOD の面積)＋(△BOD の面積)＝2＋1＝3･･･②

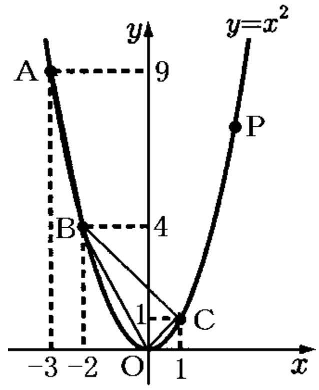
①，②より，(△ABC の面積)：(△OAB の面積)＝6：3＝2：1 になる。

よって，△ABC と△OAB において，線分 AB を底辺としたときのそれぞれの高さの比は，面積比と同じ 2：1 となる。

[問題]

右の図のように，関数 $y=x^2$ のグラフ上に 3 点 A(−3，9)，B(−2，4)，C(1，1)がある。点 P を関数 $y=x^2$ のグラフ上にとる。△OBC の面積と△OAP の面積の比が 1：5 になるときの点 P の座標を求めよ。ただし，点 P の x 座標は正とする。

(徳島県)(***)



[解答欄]

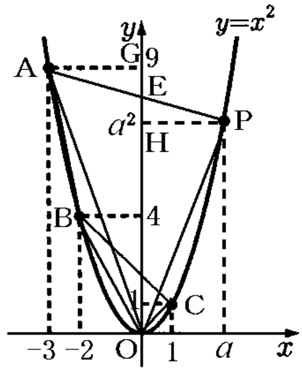
[ヒント]

まず，B，C の座標→直線 BC の式→△OBC の面積を求める。

次に，点 P の x 座標を $x=a$ とする。

A，P の座標→直線 AP の式→△OAP の面積を a を使って表す。

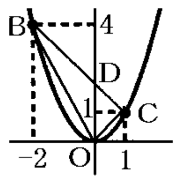
(△OBC の面積)：(△OAP の面積)＝1：5 で a についての式をたてる。



[解答](2，4)

[解説]

まず，△OBC の面積を求めるために，直線 BC の式を計算する。



B(−2，4)，C(1，1)なので，$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式より，

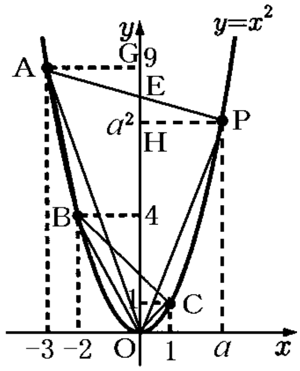
$y=\frac{1-4}{1-(-2)}(x-1)+1$，$y=-(x-1)+1$，$y=-x+2$

$y=-x+2$ の y 切片 D の y 座標は 2 になる。よって，OD＝2

(△OCD の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OD)×(高さ)＝$\frac{1}{2}\times2\times1$＝1

(△OBD の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OD)×(高さ)＝$\frac{1}{2}\times2\times2$＝2

(△OBC の面積)＝(△OCD の面積)＋(△OBD の面積)＝1＋2＝3･･･①



次に，点 P の x 座標を $x=a$ として，△OAP の面積を a を使って表すこととする。
そこで，まず直線 AP の式を求める。
点 P の x 座標は a なので，$x=a$ を $y=x^2$ に代入して $y=a^2$
よって，P の座標は$(a，a^2)$である。点 A の座標は$(-3，9)$である。
$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)+y_1$ の公式を使って，2 点 A，P を通る直線の式を求める。

$y=\dfrac{a^2-9}{a-(-3)}\left(x-(-3)\right)+9$，$y=\dfrac{(a+3)(a-3)}{a+3}(x+3)+9$，$y=(a-3)(x+3)+9$

$y=(a-3)x+3a-9+9$，$y=(a-3)x+3a$
点 E は $y=(a-3)x+3a$ の y 切片なので，点 E の y 座標は $3a$ となり，OE＝$3a$ となる。

(△OPE の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OE)×(高さ PH)＝$\dfrac{1}{2}\times 3a\times a=\dfrac{3}{2}a^2$

(△OAE の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OE)×(高さ AG)＝$\dfrac{1}{2}\times 3a\times 3=\dfrac{9}{2}a$

よって，(△OAP の面積)＝(△OPE の面積)＋(△OAE の面積)＝$\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{9}{2}a$ ･･･②

「△OBC の面積と△OAP の面積の比が 1：5 になる」ので，
(△OBC の面積)：(△OAP の面積)＝1：5
①，②より，$3:\left(\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{9}{2}a\right)=1:5$

比の内項の積は外項の積に等しいので，

$\left(\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{9}{2}a\right)\times 1=3\times 5$，$\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{9}{2}a=15$，$3a^2+9a=30$，$a^2+3a-10=0$，$(a+5)(a-2)=0$

よって，$a=-5,\ 2$
「点 P の x 座標は正とする」とあるので，$a>0$　したがって，$a=2$
点 P は $y=x^2$ 上にあるので，$x=2$ を $y=x^2$ に代入して，$y=2^2=4$
よって，点 P の座標は(2，4)になる。

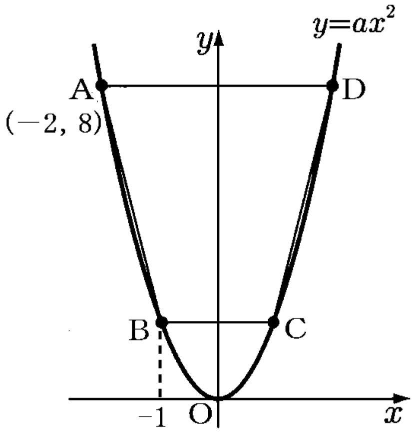
[問題]

右の図で，O は原点，A，B，C，D は関数 $y=ax^2$（a は定数，$a>0$)のグラフ上の点で，線分 AD，BC はともに x 軸に平行である。点 A の座標が(－2，8)，点 B の x 座標が－1 であるとき，次の各問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 点 B を通り，四角形 ABCD の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

(愛知県)(***)



[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

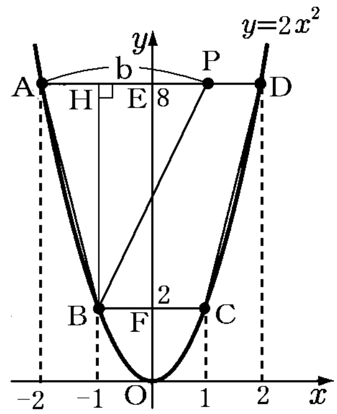
(1) 点 A(－2，8)→ $y=ax^2$ に代入

(2) A，B，C，D の座標→四角形 ABCD の面積

(△BAP の面積)＝$\frac{1}{2}$×(四角形 ABCD の面積)

△BAP の面積，高さ BH→底辺 AP→点 P の座標

点 P，B の座標→直線 BP の式



[解答](1) $a=2$　(2) $y=3x+5$

[解説]

(1) 点 A(－2，8)は $y=ax^2$ 上にあるので，

$x=-2$，$y=8$ を $y=ax^2$ に代入して，

$8=a\times(-2)^2$，$8=4a$

$a=8\div4=2$

(2) まず，四角形 ABCD の面積を求めるために，B，C，D の座標を計算する。

$y=2x^2$ 上にある点 B の x 座標は－1 なので，

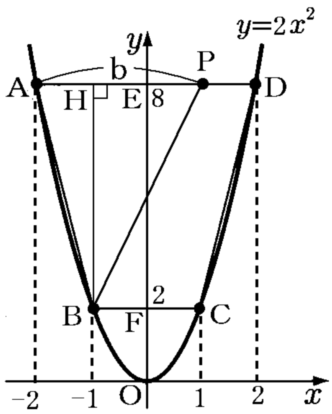
$x=-1$ を $y=2x^2$ に代入して $y=2\times(-1)^2=2$

よって，点 B の座標は(－1，2)

点 C は y 軸について点 B と対称なので，点 C の座標は(1，2)

点 D は y 軸について点 A と対称なので，点 D の座標は(2，8)

図より，AD＝2－(－2)＝4，BC＝1－(－1)＝2。EF＝8－2＝6



よって，(四角形 ABCD の面積)＝$\frac{1}{2}$×(上底 BC＋下底 AD)×(高さ EF)＝$\frac{1}{2}\times(2+4)\times6=18$

次に，右上図のように AD 上に，AP＝b である点 P をとる。
BP が四角形 ABCD の面積を二等分するとき，△BAP の面積は 18÷2＝9 になる。

よって，(△BAP の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 AP)×(高さ BH)＝9

BH＝EF＝6 なので，$\frac{1}{2}\times b\times 6=9$，$3b=9$，$b=9\div 3=3$

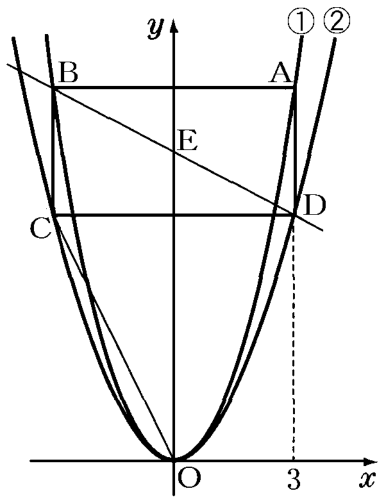
(点 P の x 座標)＝(点 A の x 座標)＋b ＝−2＋3＝1 なので，点 P の座標は(1，8)
点 B の座標は(−1，2)である。

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，2 点 P，B を通る直線の式を求める。

$y=\frac{8-2}{1-(-1)}(x-1)+8$，$y=3(x-1)+8$，$y=3x+5$

[問題]

右の図のように，2 つの関数 $y=x^2$・・・①，$y=ax^2$（a は定数)・・・②のグラフと長方形 ABCD がある。2 点 A，B は関数①のグラフ上にあり，A の x 座標は 3 であって，辺 AB は x 軸に平行である。2 点 C，D は関数②のグラフ上にあり，C の x 座標は負で，C の y 座標は B の y 座標よりも小さい。点 E は直線 BD と y 軸との交点であり，点 O は原点である。また，長方形 ABCD において，AB : AD＝2 : 1 である。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。
(2) 直線 BD の式を求めよ。
(3) 線分 OC 上に 2 点 O，C とは異なる点 P をとる。線分 EP が四角形 ODBC の面積を 2 等分するときの P の x 座標を求めよ。

(熊本県改)(****)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(1) 点A，Bの x 座標→ABの長さ→AD＝AB÷2

→点Dの座標→ $y=ax^2$ に代入

(2) 点B，Dの座標→直線BDの式

(3) まず,(四角形ODBCの面積)＝(△BCD)＋(△OCD)

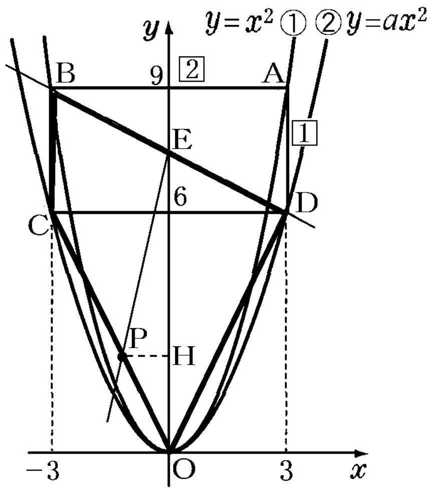
で，四角形ODBCの面積の面積を計算する。

次に，△OEDの面積を計算する。

→(△OED)＋(△OEP)＝(四角形ODBC)× $\frac{1}{2}$

より，△OEPの面積を求める。

→△OEPの面積，底辺OE→高さPH→点Pの x 座標



[解答](1) $\frac{2}{3}$　(2) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$　(3) $-\frac{3}{5}$

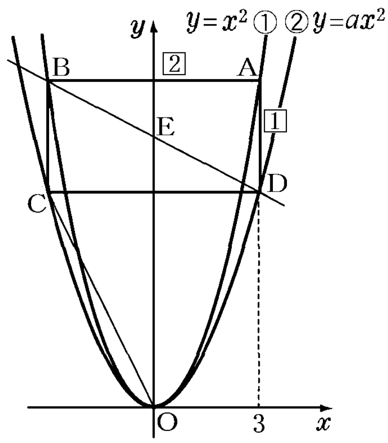
[解説]

(1) 点Bは y 軸について点Aと対称なので，点Bの x 座標は−3である。よって，AB＝3−(−3)＝6

AB：AD＝2：1なので，AD＝6÷2＝3

$x=3$ を $y=x^2$ に代入すると $y=9$ なので，点Aの y 座標は9である。したがって，点Dの y 座標は9−3＝6になる。

点D(3，6)は $y=ax^2$ 上にあるので， $x=3,\ y=6$ を $y=ax^2$ に代入して， $6=9a$ ， $a=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$



(2) (1)より点Bの座標は(−3，9)，点Dの座標は(3，6)である。 $y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)+y_1$ の公式を使って，2点B，Dを通る直線の式を求める。

$y=\frac{6-9}{3-(-3)}(x-3)+6$， $y=-\frac{1}{2}(x-3)+6$， $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+6$， $y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$

(3) まず，四角形ODBCの面積を計算する。

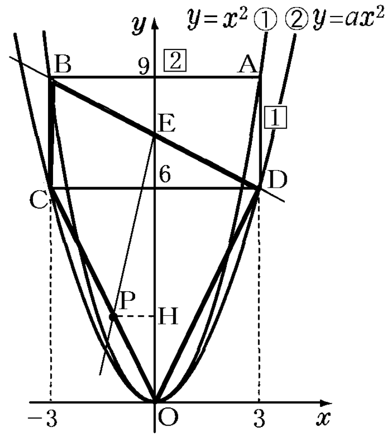
△BCDの底辺CDは3−(−3)＝6,高さは9−6＝3なので,

(△BCDの面積)＝ $\frac{1}{2}$ ×6×3＝9

△OCDの底辺CDは6，高さは6なので,

(△OCDの面積)＝ $\frac{1}{2}$ ×6×6＝18

よって，(四角形ODBCの面積)＝9＋18＝27



次に，△OED の面積を計算する。

点 E は 2 点 B，D の中点なので，y 座標は$\dfrac{9+6}{2}=\dfrac{15}{2}$

よって，OE＝$\dfrac{15}{2}$　△OED の底辺を OE とすると高さは 3 なので,

(△OED の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{15}{2}\times 3=\dfrac{45}{4}$

線分 EP が四角形 ODBC の面積を 2 等分するので,

(△OED の面積)＋(△OEP の面積)＝(四角形 ODBC の面積)×$\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{45}{4}$＋(△OEP の面積)＝$27\times\dfrac{1}{2}$

(△OEP の面積)＝$27\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{45}{4}=\dfrac{54}{4}-\dfrac{45}{4}=\dfrac{9}{4}$

△OEP の底辺を OE＝$\dfrac{15}{2}$とすると，高さは図の PH なので,

(△OEP の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{15}{2}\times$PH＝$\dfrac{9}{4}$

$\dfrac{15}{4}$PH＝$\dfrac{9}{4}$，PH＝$\dfrac{9}{4}\div\dfrac{15}{4}=\dfrac{9}{4}\times\dfrac{4}{15}=\dfrac{3}{5}$

点 P の x 座標は負なので，$-\dfrac{3}{5}$である。

【】等積変形の利用

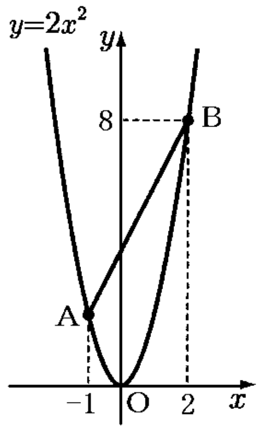
[問題]

関数 $y=2x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B がある。点 A の x 座標は－1，点 B の座標は(2，8)である。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 点 A の y 座標を求めよ。

(2) 直線 AB の式を求めよ。

(3) 関数 $y=2x^2$ のグラフ上の点で，2 点 O，B の間にある点 P をとると，△PAB の面積は△OAB の面積に等しくなった。このとき，点 P の座標を求めよ。ただし，点 P は，点 O とは異なるものとする。



(沖縄県)(***)

[解答欄]

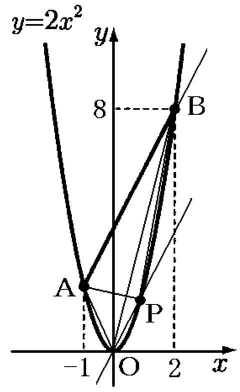
(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(1) 点 A の x 座標は－1→ $y=2x^2$ に代入

(2) 点 A，B の座標→直線 AB の式

(3) 右図のように，補助線 OP を，OP // AB となるように引く。
△PAB と△OAB の共通の底辺を AB とすると，OP // AB なので，
2 つの三角形の高さは等しくなり, 2 つの三角形の面積が等しくなる。
→(直線 OP の傾き)＝(直線 AB の傾き)→直線 OP の式
→直線 OP と $y=2x^2$ の交点を求める。



[解答](1) 2　(2) $y=2x+4$　(3) (1，2)

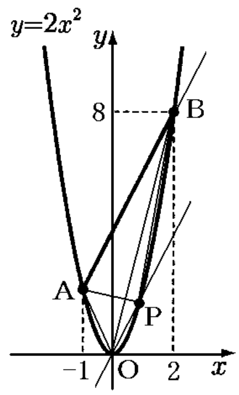
[解説]

(1) $x=-1$ を $y=2x^2$ に代入すると $y=2$ である。したがって，点 A の座標は(－1，2)になる。

(2) $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って 2 点 A(－1, 2), B(2, 8)を通る直線の式を求める。

$y=\dfrac{8-2}{2-(-1)}(x-2)+8$，　$y=2(x-2)+8$，　$y=2x+4$

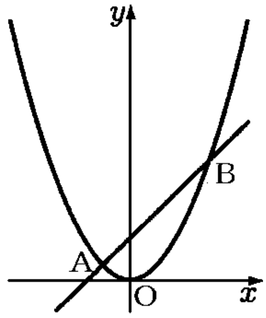
(3) 右図のように，補助線 OP を，OP // AB となるように引く。
△PAB と△OAB の共通の底辺を AB とすると，OP // AB なので，
2 つの三角形の高さは等しくなり, 2 つの三角形の面積が等しくなる。
(2)より，直線 AB($y=2x+4$)の傾きは 2 なので，直線 OP の傾きも 2 になる。OP は原点を通るので， $y=2x$ の式で表すことができる。
交点 P の座標を求めるには， $y=2x^2$ と $y=2x$ を連立方程式として解く。 $y=2x^2$ を $y=2x$ に代入すると， $2x^2=2x$



$2x^2-2x=0$， $x(x-1)=0$　よって， $x=0, 1$
点 P は原点以外の点なので， $x=1$
$x=1$ を $y=2x$ に代入すると， $y=2$
したがって，点 P の座標は(1，2)であることがわかる。

[問題]

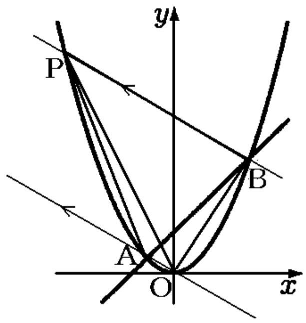
右の図で，曲線は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフである。曲線上に x 座標が－1, 3 である 2 点 A, B をとる。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) 直線 AB の式を求めよ。
(2) 曲線上を，x 座標が x ＜－1 の範囲で動く点 P を考える。△PAB と△POB の面積が等しくなるとき，点 P の座標を求めよ。
(埼玉県)(***)
[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]
(1) 点 A，B の座標を計算→直線 AB の式を求める。
(2) 右図のように B 点を通って，直線 OA と平行な補助線 BP を引く。△PAB と△POB で，PB を共通な底辺とすると，OA // BP で，2 つの三角形の高さが等しくなるので，△PAB と△POB の面積が等しくなる。



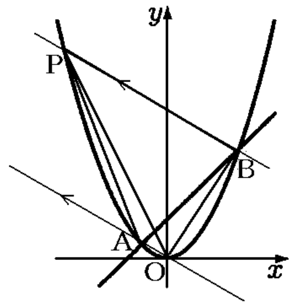
(BP の傾き)＝(OA の傾き)，点 B の座標→BP の式
BP の式と $y=\frac{1}{2}x^2$ を連立させて，交点 P の座標を求める。

[解答](1) $y=x+\frac{3}{2}$　(2) (－4，8)

[解説]
(1) $x=-1$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると $y=\frac{1}{2}$ なので，点 A の座標は $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
$x=3$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると $y=\frac{9}{2}$ なので，点 B の座標は $\left(3, \frac{9}{2}\right)$
$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，2 点 A，B を通る直線の式を求める。

$$y=\frac{\frac{9}{2}-\frac{1}{2}}{3-(-1)}(x-(-1))+\frac{1}{2},\quad y=\frac{4}{4}(x+1)+\frac{1}{2},\quad y=x+\frac{3}{2}$$

(2) 右図のように B 点を通って，直線 OA と平行な補助線を引き $y=\frac{1}{2}x^2$ との交点を P とする。



△PAB と△POB で，PB を共通な底辺とすると，
OA // BP で，2 つの三角形の高さが等しくなるので，△PAB と△POB の面積が等しくなる。

$$(\text{直線 OA の傾き})=\frac{\frac{1}{2}}{-1}=-\frac{1}{2}$$

直線 BP の傾きは直線 OA と同じ $-\frac{1}{2}$ で，点 B の座標は $\left(3,\ \frac{9}{2}\right)$ なので，直線 BP の式は，
$y=a(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，

$y=-\frac{1}{2}(x-3)+\frac{9}{2}$，$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+\frac{9}{2}$，$y=-\frac{1}{2}x+6$ と求めることができる。

交点 P の座標は，$y=\frac{1}{2}x^2$ と $y=-\frac{1}{2}x+6$ の連立方程式を解いて求めることができる。

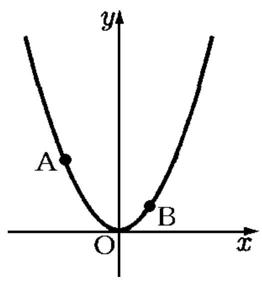
$y=\frac{1}{2}x^2$ を $y=-\frac{1}{2}x+6$ に代入すると，$\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}x+6$，$x^2=-x+12$，$x^2+x-12=0$，
$(x+4)(x-3)=0$，$x=-4,\ 3$
$x<-1$ なので $x=-4$

$x=-4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると，$y=\frac{1}{2}\times16=8$

よって，点 P の座標は(−4，8)であることがわかる。

[問題]

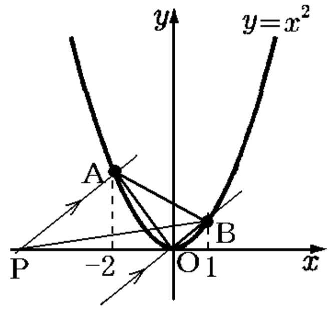
右の図のように，関数 $y=x^2$ のグラフ上に，2 点 A，B がある。点 A の x 座標を−2，点 B の x 座標を 1 とする。x 軸上に点 P をとり，△OAB と△OBP の面積が等しくなるようにするとき，点 P の座標を求めよ。ただし，点 P の x 座標は負であるものとする。
(北海道)(***)



[解答欄]

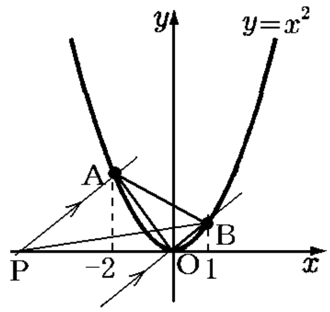
[ヒント]

右図のように，補助線 PA を OB // PA となるように引く。
△OAB と△OBP で，OB を共通の底辺と考えると，OB // PA なので，2 つの三角形の高さは等しくなり，2 つの三角形の面積が等しくなる。
点 A，B の座標を求める→OB の傾き＝AP の傾き
→直線 AP の式→点 P の座標



[解答](−6，0)

[解説]



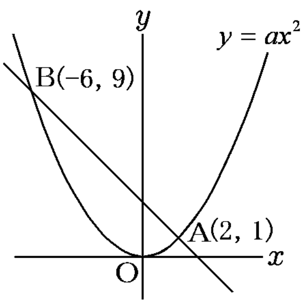
右図のように，補助線 PA を OB // PA となるように引く。
△OAB と△OBP で，OB を共通の底辺と考えると，OB // PA なので，2 つの三角形の高さは等しくなり，2 つの三角形の面積が等しくなる。そこで，まず，A，B の座標を求めておく。
$x=-2$ を $y=x^2$ に代入すると $y=4$ なので，点 A の座標は(−2，4)
$x=1$ を $y=x^2$ に代入すると $y=1$ なので，点 B の座標は(1，1)
(OB の傾き)＝$\dfrac{1}{1}$＝1 なので，AP の傾きも 1 になる。
直線 AP の式は，傾きが 1 で(−2，4)を通るので，$y=a(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，
$y=(x-(-2))+4$，$y=x+6$ と求めることができる。
点 P の y 座標は 0 なので，$y=0$ を $y=x+6$ に代入して，$0=x+6$，$x=-6$
よって，点 P の座標は(−6，0)となる。

[問題]

右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に 2 点 A(2，1)，B(−6，9)がある。原点を O として，次の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。
(2) 直線 AB の式を求めよ。
(3) 関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点 P をとり，直線 AB と直線 OP が平行になるようにする。このとき，三角形 ABP の面積を求めよ。

(長崎県)(***)



[解答欄]

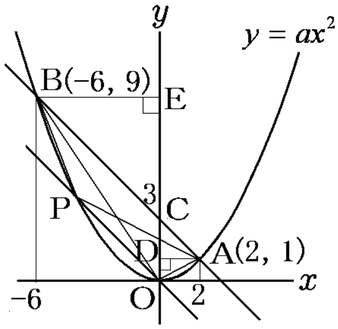
(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(1) 点 A(または点 B)の座標を $y=ax^2$ に代入。

(2) A，B の座標→直線 AB の式

(3) △ABP と△ABO で，AB を共通の底辺とすると，
AB // OP なので，2 つの三角形の高さは等しくなり，
(△ABP の面積)＝(△ABO の面積) となる。
△ABO の面積を，右図の△ACO と△BCO に分割して求める。



[解答](1) $\frac{1}{4}$　(2) $y=-x+3$　(3) 12

[解説]

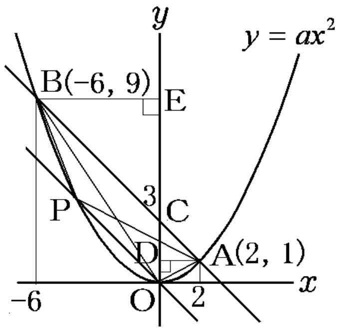
(1) 点 A(2，1)は $y=ax^2$ 上にあるので，$y=ax^2$ に x＝2，y＝1 を代入して，

$1=a\times4$，よって，$a=\frac{1}{4}$

(2) $y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って 2 点 A(2, 1), B(−6, 9)を通る直線の式を求める。

$y=\frac{1-9}{2-(-6)}(x-2)+1$，$y=\frac{-8}{8}(x-2)+1$，$y=-x+2+1$，$y=-x+3$

(3) △ABP と△ABO で，AB を共通の底辺とすると，
AB // OP なので，2 つの三角形の高さは等しくなり，
(△ABP の面積)＝(△ABO の面積) となる。
そこで，△ABO の面積を，右図の△ACO と△BCO に分割して求める。
直線 AB の式は $y=-x+3$ なので，y 切片は 3 で，OC＝3
点 A の x 座標は 2 なので，△ACO の底辺を OC＝3 とすると，
高さは AD＝2



よって，(△ACO の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ AD)＝$\frac{1}{2}$×3×2＝3

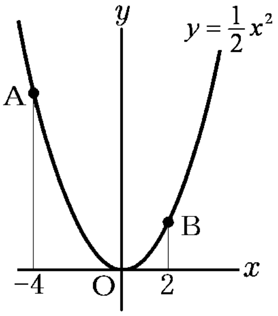
同様にして，(△BCO の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ BE)＝$\frac{1}{2}$×3×6＝9

よって，(△ABO の面積)＝(△ACO の面積)＋(△BCO の面積)＝3＋9＝12

ゆえに，(△ABP の面積)＝(△ABO の面積)＝12

[問題]

右の図は, 関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフである。このグラフ上に 2 点 A, B があり，x 座標はそれぞれ－4, 2 である。△AOC の面積が△AOB の面積の 2 倍となるように，y 軸上に点 C(0，c)をとる。このときの c の値を求めよ。ただし，c＞0 とする。

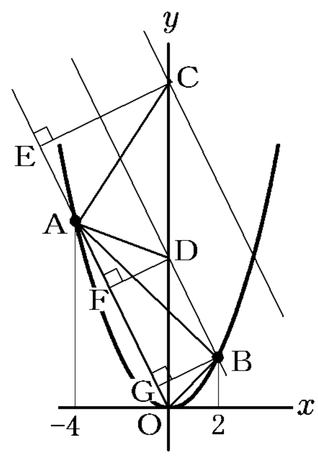


(富山県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

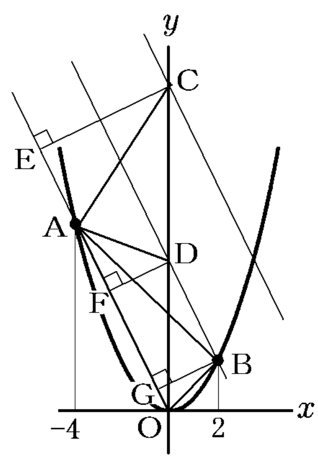
まず，右図のように，点 B を通って直線 AO に平行な直線 BD をひく。△AOB と△AOD で，AO を共通の底辺とすると，
AO // BD なので, それぞれの三角形の高さ(BG と DF)は等しくなる。よって，(△AOB の面積)＝(△AOD の面積)となる。
次に，y 軸上の正の部分に CO＝2DO となる点 C をとる。
△AOC と△AOB で，AO を共通の底辺とすると，
△AOC の高さ CE は，△AOB の高さ BG の 2 倍になる。
したがって，(△AOC の面積)＝(△AOB の面積)×2 になる。
点 C の y 座標は，点 D の y 座標の 2 倍になる。
直線 BD の式を求める(AO と平行で，点 B を通る)
→点 D の y 座標→点 C の y 座標



[解答]12

[解説]

まず，右図のように，点 B を通って直線 AO に平行な直線 BD をひく。△AOB と△AOD で，AO を共通の底辺とすると，
AO // BD なので, それぞれの三角形の高さ(BG と DF)は等しくなる。よって，(△AOB の面積)＝(△AOD の面積)となる。
次に，y 軸上の正の部分に CO＝2DO となる点 C をとる。
△AOC と△AOB で，AO を共通の底辺とすると，
△AOC の高さ CE は，△AOB の高さ BG の 2 倍になる。
したがって，(△AOC の面積)＝(△AOB の面積)×2 になる。
点 C の y 座標は，点 D の y 座標の 2 倍になる。
そこで，直線 BD の式を求める。



点 A の x 座標は－4 なので，$y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入して，$y=\dfrac{1}{2}\times(-4)^2=8$

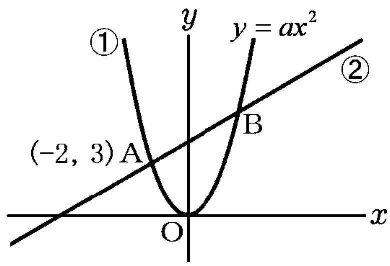
点 B の x 座標は 2 なので， $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して， $y=\frac{1}{2}\times 2^2=2$

よって，(直線 BD の傾き)＝(直線 AO の傾き)＝ $\frac{8-0}{-4-0}=-2$

直線 BD は傾きが－2 で，点 B(2，2)を通るので， $y=m(x-x_1)+y_1$ の公式より，
$y=-2(x-2)+2$， $y=-2x+6$ となることがわかる。
点 D は $y=-2x+6$ の切片(y 切片)なので，点 D の y 座標は 6 になる。
点 C の y 座標は点 D の y 座標の 2 倍なので，c＝6×2＝12 となる。

[問題]

右の図において，①は関数 $y=ax^2$ のグラフで，②は傾きが $\frac{1}{2}$ の直線であり,①と②は 2 点 A, B で交わっている。
点 A の座標が(－2, 3)であるとき,次の問いに答えなさい。



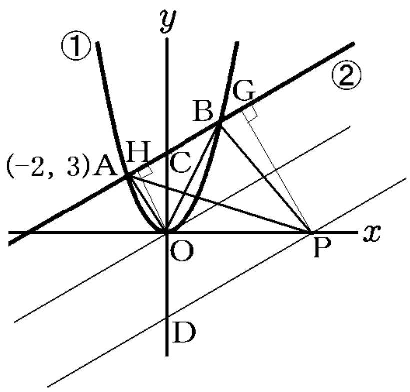
(1) 定数 a の値を求めよ。
(2) x 軸上に x 座標が正である点Pをとり，△PABの面積が△OABの面積の2倍となるようにしたい。このときの点Pの x 座標を求めよ。
(高知県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(1) 点 A の座標を $y=ax^2$ に代入。
(2) 直線②の式を求める→点 C の座標
CO＝DO となる点 D をとる。点 D を通り②に平行な直線 DP をひく。
△OAB と△PAB で，AB を共通の底辺とすると，
△OAB の高さは OH，△PAB の高さは PG となる。
CO＝DO なので，PG＝OH×2 となる。
したがって, (△PAB の面積)＝(△OAB の面積)×2 になる。
点 P の座標を求めるために直線 DP の式を求める。



[解答](1) $a=\frac{3}{4}$ (2) 8

[解説]

(1) 点 A(−2，3)は $y = ax^2$ 上にあるので，

$x = -2,\ y = 3$ を $y = ax^2$ に代入して，

$3 = a \times (-2)^2$，$4a = 3$　よって，$a = \dfrac{3}{4}$

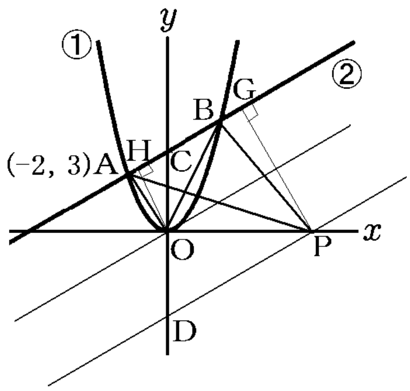
(2) まず，直線②の式を求めておく。

直線②の傾きは $\dfrac{1}{2}$ で，点 A(−2，3)を通るので，$y = a(x - x_1) + y_1$ の公式より，

$y = \dfrac{1}{2}(x - (-2)) + 3$，$y = \dfrac{1}{2}x + 4$ と計算できる。

よって，②と y 軸との交点を C とすると，点 C の座標は(0，4)となる。

ここで，右図のように，CO＝DO となる点 D(0，−4)をとる。点 D を通り②に平行な直線 DP をひく。



△OAB と△PAB で，AB を共通の底辺とすると，

△OAB の高さは OH，△PAB の高さは PG となる。

CO＝DO なので，PG＝OH×2 となる。

したがって，(△PAB の面積)＝(△OAB の面積)×2 になる。

点 P の座標を求めるために直線 DP の式を求める。

直線 DP は②と平行なので傾きは $\dfrac{1}{2}$ である。また点 D の座標は(0，−4)なので，y 切片は−4 である。したがって，直線 DP の式は，$y = \dfrac{1}{2}x - 4$ である。

点 P の y 座標は 0 なので，$y = \dfrac{1}{2}x - 4$ に $y = 0$ を代入して，$0 = \dfrac{1}{2}x - 4$

両辺を 2 倍すると，$x - 8 = 0$　よって $x = 8$

よって，点 P の x 座標は 8 になる。