【】基本問題

【】対角線などの長さ

[対角線]

[解答 1] $4\sqrt{3}$ cm

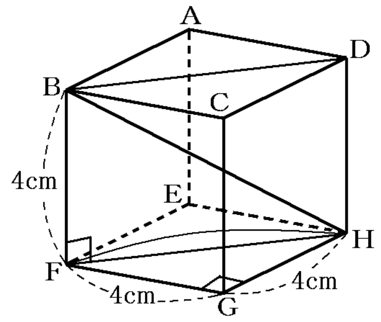
[解説]

<Point> 線分 BH を含む平面 BFHD の切断面で考える

まず，底面の直角三角形 FGH について，三平方の定理より，FH＝$\sqrt{FG^2+HG^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$ (cm)

次に，直角三角形 BHF について，三平方の定理より，

BH＝$\sqrt{BF^2+FH^2}=\sqrt{16+32}=\sqrt{48}=\sqrt{16\times 3}=4\sqrt{3}$ (cm)



[解答 2] $2\sqrt{6}$ cm

[解説]

AB の長さを x cm とする。

線分 AG を含む，AEGC の切断面で考える。

直角三角形 AGE で，三平方の定理より，

AE²＋EG²＝AG²，3²＋EG²＝7²，

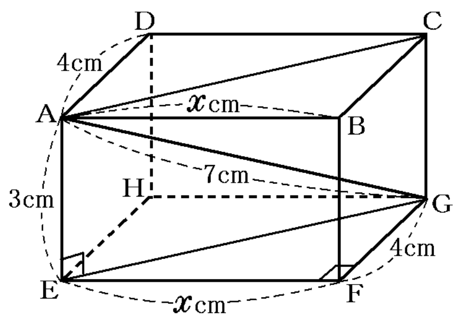
EG²＝49－9＝40 ・・・①

直角三角形 EGF で，EF＝AB＝x (cm)なので，

EG²＝EF²＋GF²，EG²＝x^2＋4²・・・②

①，②より，$40=x^2+16$，$x^2=40-16$，$x^2=24$

$x>0$ なので，$x=\sqrt{24}=\sqrt{4\times 6}=2\sqrt{6}$ (cm)



[解答 3](1) $\sqrt{13}$ cm　(2) $3\sqrt{13}$ cm²

[解説]

(1) 直角三角形 ACD で，三平方の定理より，

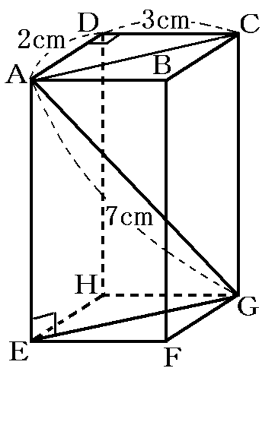
AC＝$\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$ (cm)

(2) EG＝AC＝$\sqrt{13}$ (cm)

直角三角形 AGE で，三平方の定理より，

AE＝$\sqrt{AG^2-EG^2}=\sqrt{49-13}=\sqrt{36}=6$ (cm)

よって，(△AEG の面積)＝$\frac{1}{2}$×EG×AE＝$\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times 6$＝$3\sqrt{13}$ (cm²)

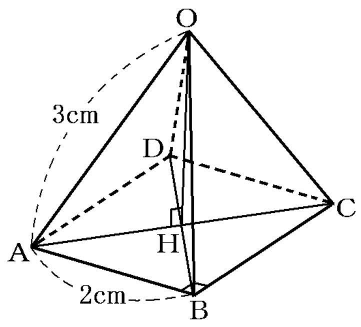


[高さ]

[解答 4] $\sqrt{7}$ cm

[解説]

右図の直角三角形 ACB で，三平方の定理より，



AC＝$\sqrt{AB^2+CB^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{4\times 2}=2\sqrt{2}$ (cm)

AH＝$\frac{1}{2}$AC＝$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$ (cm)

直角三角形 OAH で，三平方の定理より，

OH＝$\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{9-2}=\sqrt{7}$ (cm)

[解答 5](1) 1cm　(2) $\frac{8}{3}\pi$ cm^3

[解説]

△ABC は直角二等辺三角形なので，三平方の定理より，

AC＝$\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=\sqrt{16\times 2}=4\sqrt{2}$ (cm)

よって，AH＝$\frac{1}{2}$AC＝$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ (cm)

△OAH は直角三角形なので，三平方の定理より，

OH＝$\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{9-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{9-8}=1$(cm)

(2) OH を軸として，正四角錐を 1 回転させたときにできる立体は円錐になる。

底面の円の半径は AH＝$2\sqrt{2}$ (cm)で，高さは OH＝1(cm)であるので，

(体積)＝$\frac{1}{3}\times\pi\times$AH$^2\times$OH＝$\frac{1}{3}\times\pi\times\left(2\sqrt{2}\right)^2\times 1=\frac{8}{3}\pi$ (cm^3)

【】錐や柱の体積など

[円錐の体積]

[解答 6] $\dfrac{10}{3}\pi$ cm^3

[解説]

図の直角三角形 ABO で，三平方の定理より，

OB＝$\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ (cm)

(すいの体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\dfrac{1}{3}\times\pi\times OB^2\times AO=\dfrac{1}{3}\pi\times\left(\sqrt{5}\right)^2\times 2=\dfrac{10}{3}\pi$ (cm^3)

[解答 7] 16 π cm^3

[解説]

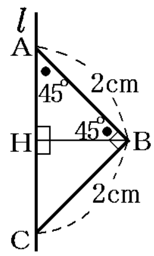
直角三角形 ABO で，三平方の定理より，

BO＝$\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$ (cm)

(体積)＝$\dfrac{1}{3}\times\pi\times OA^2\times BO=\dfrac{1}{3}\times\pi\times 16\times 3=16\pi$ (cm^3)

[解答 8] $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\pi$ cm^3

[解説]



まず，△ABH を 1 回転させたときにできる円錐の体積を求める。

△ABH は 45° 45° 90° の直角三角形なので，3 辺の比は $1:1:\sqrt{2}$ になる。

したがって，AH＝BH＝AB×$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ (cm)

(体積)＝$\dfrac{1}{3}\times\pi\times BH^2\times AH=\dfrac{1}{3}\pi\times\left(\sqrt{2}\right)^2\times\sqrt{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ (cm^3)

同様にして，△CBH を 1 回転させたときにできる円錐の体積も $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ (cm^3)である。

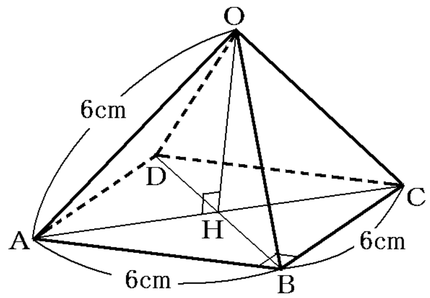
よって，(求める体積)＝$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\pi$ (cm^3)

[角錐の体積]

[解答 9] $36\sqrt{2}$ cm³

[解説]

右図の高さ OH がわかれば，体積を計算できる。



直角三角形 ACB で，三平方の定理より，

$$\mathrm{AC}=\sqrt{AB^2+CB^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{36\times2}=6\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

H は AC の中点なので，$\mathrm{AH}=\mathrm{AC}\div2=3\sqrt{2}$ (cm)

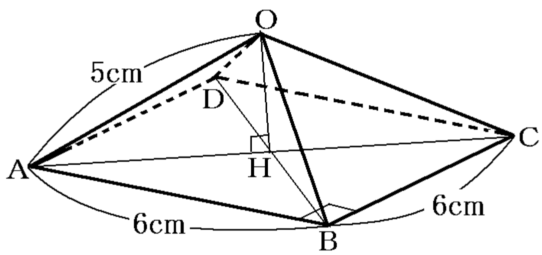
直角三角形 OAH で，三平方の定理より，

$$\mathrm{OH}=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{36-18}=\sqrt{18}=\sqrt{9\times2}=3\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

$$(\text{正四角錐の体積})=\frac{1}{3}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{CB}\times\mathrm{OH}=\frac{1}{3}\times6\times6\times3\sqrt{2}=36\sqrt{2}\ (\mathrm{cm}^3)$$

[解答 10] $12\sqrt{7}$ cm³

[解説]



直角三角形 ACB で，三平方の定理より，

$$\mathrm{AC}=\sqrt{AB^2+CB^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{36\times2}$$

$$=6\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

H は AC の中点なので, $\mathrm{AH}=\mathrm{AC}\div2=3\sqrt{2}$ (cm)

直角三角形 OAH で，三平方の定理より，

$$\mathrm{OH}=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{5^2-(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{25-18}=\sqrt{7}\ (\mathrm{cm})$$

$$(\text{正四角錐の体積})=\frac{1}{3}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{CB}\times\mathrm{OH}=\frac{1}{3}\times6\times6\times\sqrt{7}=12\sqrt{7}\ (\mathrm{cm}^3)$$

[解答 11] 8cm³

[解説]

底面の正方形 ABCD の 1 辺を a cm とする。

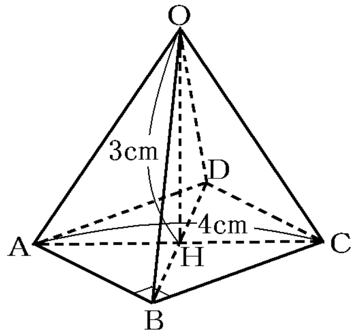
直角三角形 ABC で，三平方の定理より，

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{AC}^2$,

$a^2+a^2=16$，$2a^2=16$，$a^2=8$

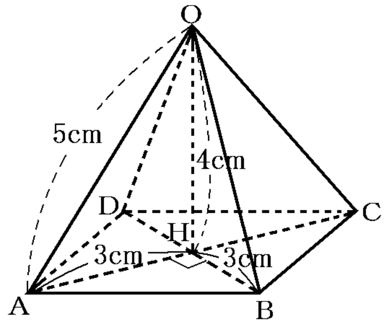
$$(\text{正四角錐の体積})=\frac{1}{3}\times a^2\times\mathrm{OH}=\frac{1}{3}\times a^2\times3$$

$=a^2=8(\mathrm{cm}^3)$



[解答 12]24cm³

[解説]



直角三角形 OAH で，三平方の定理より，

AH$=\sqrt{OA^2-OH^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$(cm)

△ABH は直角二等辺三角形なので，

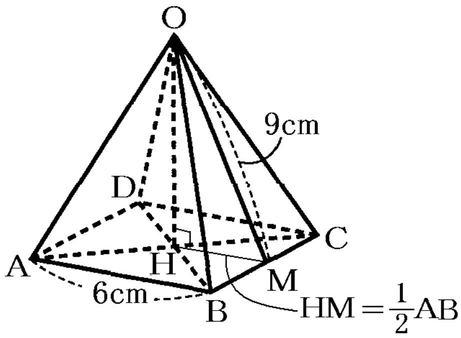
(△ABH の面積)$=\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{9}{2}$(cm²)

(正方形 ABCD の面積)=(△ABH の面積)×4$=\dfrac{9}{2}\times4=18$(cm²)

(正四角錐の体積)$=\dfrac{1}{3}\times18\times4=24$(cm³)

[解答 13]$6\sqrt{2}$ cm

[解説]



H は AC の中点，M は BC の中点なので，中点連結定理より，HM$=\dfrac{1}{2}$AB$=\dfrac{1}{2}\times6=3$(cm)

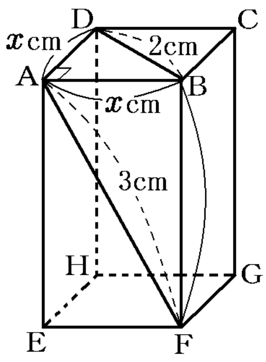
右図の直角三角形 OMH で，三平方の定理より，

OH$=\sqrt{OM^2-MH^2}=\sqrt{9^2-3^2}=\sqrt{81-9}=\sqrt{72}$

$=\sqrt{36\times2}=6\sqrt{2}$(cm)

[解答 14]$2\sqrt{7}$ cm³

[解説]



AB$=x$(cm)とすると，AB=AD なので AD$=x$(cm)

直角三角形 DBA で，三平方の定理より，

AB²+AD²=BD²，$x^2+x^2=2^2$，$2x^2=4$，$x^2=2$

$x>0$ なので，$x=\sqrt{2}$(cm)

直角三角形 AFB で，三平方の定理より，

BF$=\sqrt{AF^2-AB^2}=\sqrt{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{9-2}=\sqrt{7}$(cm)

(直方体の体積)=AB×AD×BF$=x^2\times$BF$=2\times\sqrt{7}=2\sqrt{7}$(cm³)

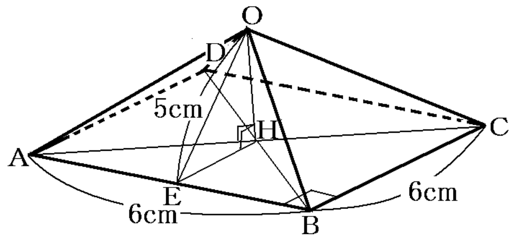
[展開図と体積]

[解答 15]48cm³

[解説]

図の展開図を組み立てると右図のようになる。

OH がわかれば，体積を計算できる。



EH＝$\dfrac{1}{2}$BC＝$\dfrac{1}{2}\times 6$＝3(cm)

直角三角形 OEH で，三平方の定理より，

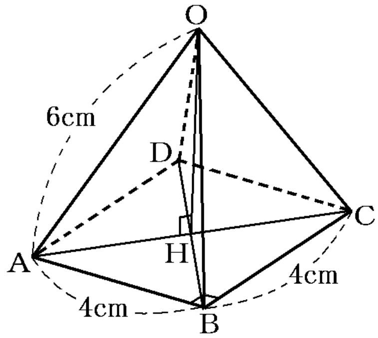
OH＝$\sqrt{OE^2-EH^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$ (cm)

(正四角錐の体積)＝$\dfrac{1}{3}$×AB×BC×OH＝$\dfrac{1}{3}\times 6\times 6\times 4$＝48(cm³)

[解答 16] $\dfrac{32\sqrt{7}}{3}$ cm³

[解説]

右図の直角三角形 ACB で，三平方の定理より，



AC＝$\sqrt{AB^2+CB^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{16\times 2}=4\sqrt{2}$ (cm)

AH＝$\dfrac{1}{2}$AC＝$\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ (cm)

直角三角形 OAH で，三平方の定理より，

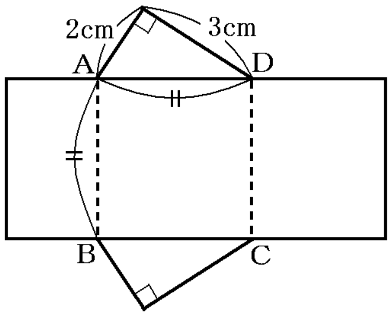
OH＝$\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{6^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{36-8}=\sqrt{28}$

＝$\sqrt{4\times 7}=2\sqrt{7}$ (cm)

(正四角錐の体積)＝$\dfrac{1}{3}$×AB×BC×OH＝$\dfrac{1}{3}\times 4\times 4\times 2\sqrt{7}=\dfrac{32\sqrt{7}}{3}$ (cm³)

[解答 17] $3\sqrt{13}$ cm³

[解説]



三平方の定理より，AD＝$\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$ (cm)

四角形 ABCD は正方形なので，AB＝AD＝$\sqrt{13}$ (cm)

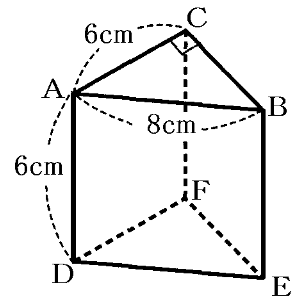
(三角柱の体積)＝$\dfrac{1}{2}\times 2\times 3\times\sqrt{13}=3\sqrt{13}$ (cm³)

[解答 18] $36\sqrt{7}$ cm³

[解説]

右図のような三角柱になる。

直角三角形 ABC で，三平方の定理より，



$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{64-36} = \sqrt{28} = \sqrt{4\times7} = 2\sqrt{7}\ (\mathrm{cm})$$

$$(\triangle ABC\text{ の面積}) = \frac{1}{2}\times AC\times BC = \frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{7} = 6\sqrt{7}\ (\mathrm{cm}^2)$$

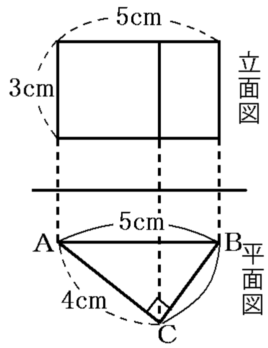
$$(\text{三角柱の体積}) = (\triangle ABC\text{ の面積})\times AD = 6\sqrt{7}\times6 = 36\sqrt{7}\ (\mathrm{cm}^3)$$

[解答 19] 18cm³

[解説]

右図の平面図で，AB＝5cm である。

直角三角形 ABC で，三平方の定理より，



$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3(\mathrm{cm})$$

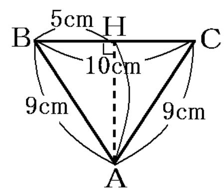
よって，$(\text{底面積}) = \frac{1}{2}\times4\times3 = 6(\mathrm{cm}^2)$

$(\text{三角柱の体積}) = (\text{底面積})\times(\text{高さ}) = 6\times3 = 18(\mathrm{cm}^3)$

[解答 20] $80\sqrt{14}$ cm³

[解説]

右図の直角三角形 ABH で，三平方の定理より，



$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{81-25} = \sqrt{56} = \sqrt{4\times14} = 2\sqrt{14}\ (\mathrm{cm})$$

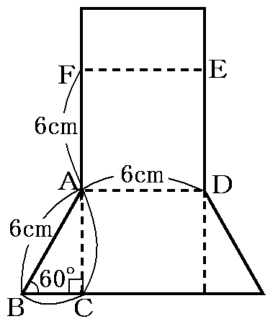
$$(\triangle ABC\text{ の面積}) = \frac{1}{2}\times BC\times AH = \frac{1}{2}\times10\times2\sqrt{14} = 10\sqrt{14}\ (\mathrm{cm}^2)$$

$$(\text{三角柱の体積}) = (\triangle ABC\text{ の面積})\times8 = 10\sqrt{14}\times8 = 80\sqrt{14}\ (\mathrm{cm}^3)$$

[解答 21] $27\sqrt{3}$ cm³

[解説]

この三角柱の底面は△ABC で，高さは AD である。AB と AF が重なるので AF＝6cm である。また，四角形 ADEF は正方形なので，AD＝6cm である。



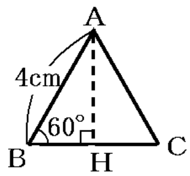
△ABC は 30°90°60°の直角三角形で 3 辺の比は 1：2：$\sqrt{3}$ になるので，BC＝$6\times\frac{1}{2}=3$(cm)，AC＝$6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$(cm)

(三角柱の体積)＝$\frac{1}{2}$ ×BC×AC×AD＝$\frac{1}{2}\times3\times3\sqrt{3}\times6=27\sqrt{3}$(cm³)

[解答 22] $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ cm³

[解説]

右図の AH がこの正四角錐の高さになる。



△ABH は 30°90°60°の直角三角形で 3 辺の比は 1：2：$\sqrt{3}$ なので，

AH＝AB×$\frac{\sqrt{3}}{2}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$(cm)

(正四角錐の体積)＝$\frac{1}{3}\times4\times4\times2\sqrt{3}=\frac{32\sqrt{3}}{3}$(cm³)

【】立体上の 2 点の距離

【】2 点の距離

[立体上の 2 点]

[解答 23]7cm

[解説]

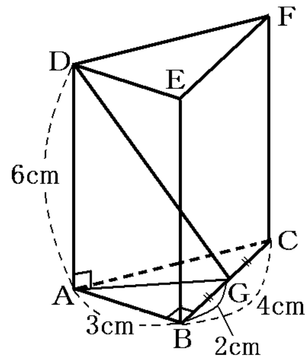
線分 DG を含む，△DGA で考える。

線分 DA は底面の△ABC に垂直であるので∠DAG＝90°である。

したがって，AG の長さがわかれば DG を求めることができる。

直角三角形 ABG で，G は BC の中点なので，BG＝4÷2＝2(cm)

三平方の定理より，



AG＝$\sqrt{AB^2+BG^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$(cm)

直角三角形 DGA で，三平方の定理より，

DG＝$\sqrt{AD^2+AG^2}=\sqrt{36+13}=\sqrt{49}=7$(cm)

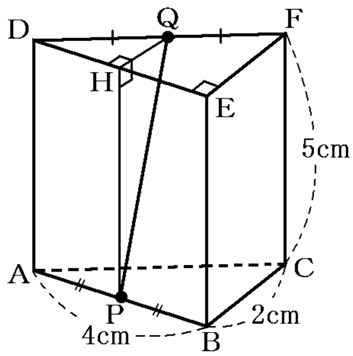
[解答 24] $\sqrt{26}$ cm

[解説]

右図のように，Q から DE へ垂線 QH を引くと，
∠QHD＝∠FED＝90° で，同位角が等しいので，QH // FE
平行線の性質より，HQ : EF＝DQ : DF＝1 : 2 なので，

$\text{QH}=\dfrac{1}{2}\text{FE}=\dfrac{1}{2}\text{CB}=\dfrac{1}{2}\times 2=1(\text{cm})$

また，H は DE の中点になるので，四角形 HPBE は長方形になり, PH // BE になる。BE⊥面 DEF なので, PH⊥面 DEF になる。よって，∠PHQ＝90°



直角三角形 PQH で，三平方の定理より，$\text{PQ}=\sqrt{PH^2+QH^2}=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$ (cm)

[解答 25] $2\sqrt{30}$ cm

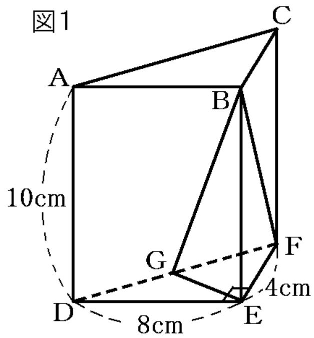
[解説]

右の図 1 で，BE は底面 DEF に垂直なので，
∠BEG＝90° である。図 2 で，△BGE は，
BE＝10cm の直角三角形なので，GE の長さがわかれば，三平方の定理で BG の長さを計算できる。
そこで，図 3 で，G は DF の中点で，
GI // FE なので，平行線の性質より，

$\text{GI}=\dfrac{1}{2}\text{FE}=\dfrac{1}{2}\times 4=2(\text{cm})$,

$\text{IE}=\text{ID}=\dfrac{1}{2}\text{DE}=\dfrac{1}{2}\times 8=4(\text{cm})$である。

図1



△GEI で，三平方の定理より，$\text{GE}=\sqrt{GI^2+IE^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$ (cm)

図２

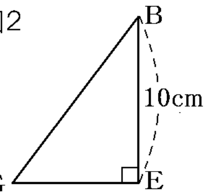
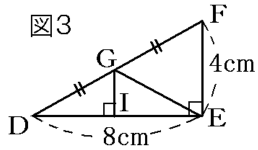


図 2 の△BGE で，三平方の定理より，

$\text{BG}=\sqrt{BE^2+GE^2}=\sqrt{100+20}=\sqrt{120}=\sqrt{4\times 30}=2\sqrt{30}$ (cm)

図3



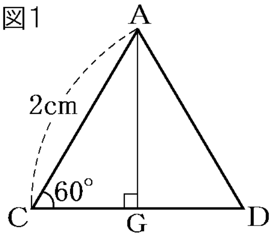
[解答 26](1)AG：$\sqrt{3}$ cm　EG：$\sqrt{2}$ cm　(2) 45°

[解説]

(1) △ACD は 1 辺が 2cm の正三角形なので，右の図 1 のように，△ACG は，CG：AC：AG＝1：2：$\sqrt{3}$ の直角三角形になる。

よって，AG＝$\sqrt{3}$ (cm)･･･①

図1



次に，図 2 のように，A と G，B と G を結ぶ。

BG＝AG，①より AG＝$\sqrt{3}$ (cm)なので，

BG＝AG＝$\sqrt{3}$ (cm)である。

また，AE＝BE＝1(cm)である。

図 3 で，三平方の定理より，

図2

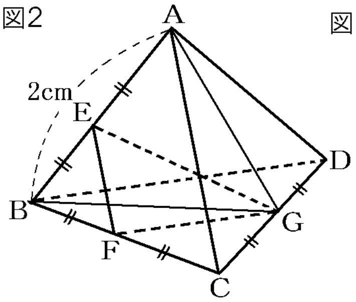
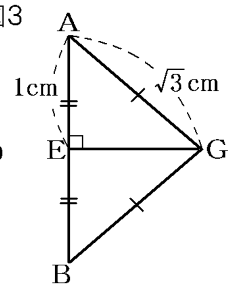


図3



EG＝$\sqrt{AG^2-AE^2}=\sqrt{3-1}$

＝$\sqrt{2}$ (cm)･･･②

(2) △ABC において，E は AB の中点，F は BC の中点なので，中点連結定理より，

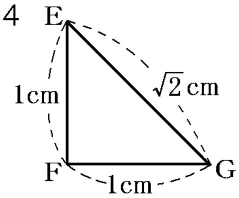
EF＝$\dfrac{1}{2}$AC＝$\dfrac{1}{2}\times 2$＝1(cm)

同様にして，FG＝$\dfrac{1}{2}$BD＝$\dfrac{1}{2}\times 2$＝1(cm)

また，②より EG＝$\sqrt{2}$ (cm)なので，△EGF は，図 4 のように，3 辺の比が 1：1：$\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形になる。

したがって，∠FEG＝45° である。

図4



[解答 27] $\sqrt{34}$ cm

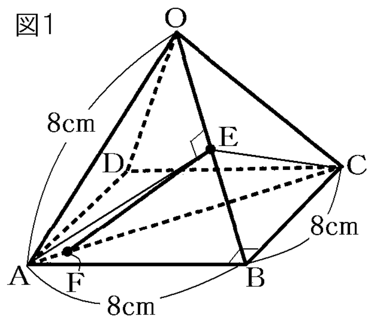
[解説]

EF を含む断面 EAC を使って考える。

まず，△EAC の 3 つの辺の長さを計算する。

図 1 の直角三角形 OAE で，三平方の定理より，

図1



AE＝$\sqrt{OA^2-OE^2}=\sqrt{8^2-4^2}=\sqrt{64-16}=\sqrt{48}$

　＝$\sqrt{16\times 3}=4\sqrt{3}$ (cm)

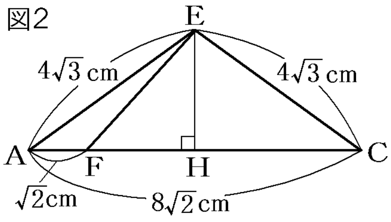
同様にして，EC＝$4\sqrt{3}$ (cm)

図 1 の直角三角形 ACB で，三平方の定理より，

AC＝$\sqrt{AB^2+CB^2}=\sqrt{8^2+8^2}=\sqrt{8^2\times 2}=8\sqrt{2}$ (cm)

図 2 で H は AC の中点なので，AH＝$4\sqrt{2}$ (cm)である。

図2



直角三角形 AEH で，三平方の定理より，

EH＝$\sqrt{AE^2-AH^2}=\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{48-32}=\sqrt{16}=4$ (cm)

直角三角形 EFH で，三平方の定理より，

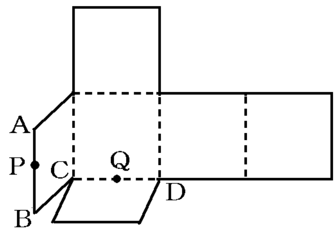
EF＝$\sqrt{EH^2+FH^2}=\sqrt{EH^2+\left(AH-AF\right)^2}=\sqrt{4^2+\left(4\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{16+18}=\sqrt{34}$ (cm)

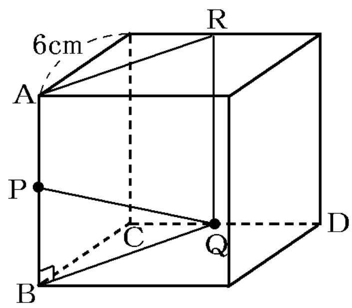
[展開図上の 2 点]

[解答 28] $3\sqrt{6}$ cm

[解説]

展開図を組み立てた立方体は右下の図のようになる。
線分 PQ を含む切断面 ABQR に注目する。
この切断面上の直角三角形 PQB で，三平方の定理より，
PQ²＝PB²＋BQ²・・・①が成り立つ。
P は AB の中点で AB＝6cm なので, PB＝6÷2＝3(cm)である。
あと，BQ の長さがわかれば，①より PQ を求めることができる。底面上の直角三角形 BQC で，BC＝(6cm)，
CQ＝6÷2＝3(cm)なので，三平方の定理より，
BQ²＝BC²＋CQ²＝6²＋3²＝36＋9＝45
PB＝3cm なので，①式に代入すると，
PQ²＝PB²＋BQ²＝3²＋45＝9＋45＝54
よって，PQ＝$\sqrt{54}=\sqrt{9\times 6}=3\sqrt{6}$ (cm)





[解答 29] $4\sqrt{7}$ cm

[解説]

図1

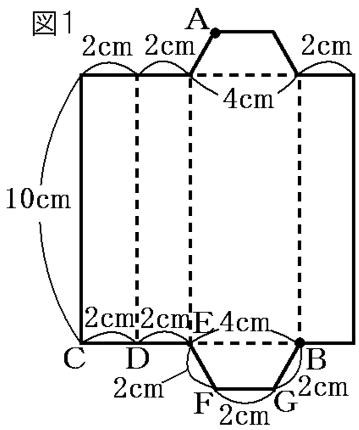


図2

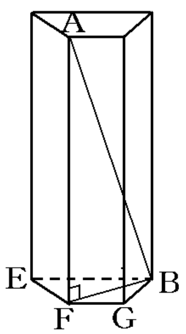


図3

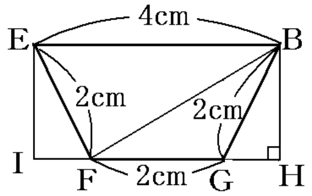


図 2 の直角三角形 ABF で，AF＝10cm なので，BF がわかれば AB の長さを計算できる。
図 1 で，D は F に，C は G に重なるので，EF＝2cm，FG＝2cm になる。

図 3 で，FI＝GH なので，GH＝(EB－FG)÷2＝(4－2)÷2＝1(cm)
直角三角形 BGH で，三平方の定理より，

BH＝$\sqrt{BG^2-GH^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ (cm)

直角三角形 BFH で，三平方の定理より，

BF＝$\sqrt{FH^2+BH^2}=\sqrt{(2+1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}$ (cm)

図 2 の直角三角形 ABF で，三平方の定理より，

AB＝$\sqrt{AF^2+BF^2}=\sqrt{10^2+(\sqrt{12})^2}=\sqrt{100+12}=\sqrt{112}=\sqrt{16\times7}=4\sqrt{7}$ (cm)

[解答 30] $3\sqrt{5}$ cm
[解説]

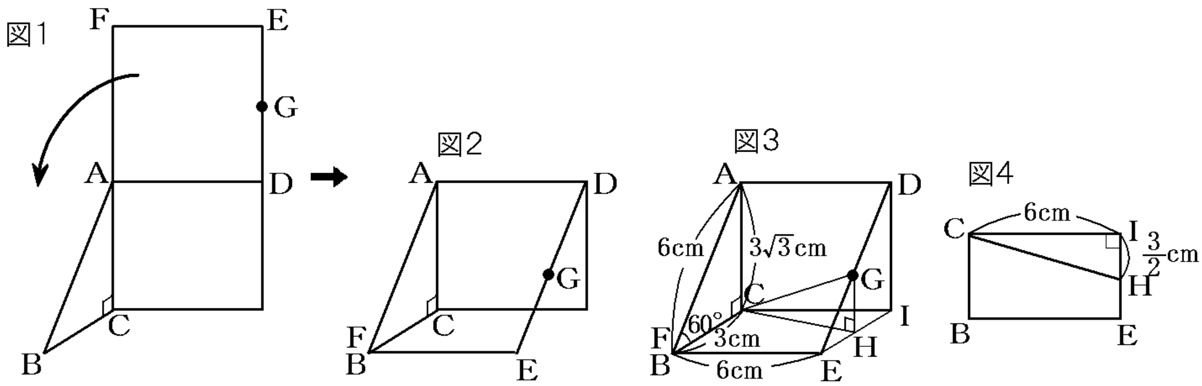


図 1 は展開図の一部のみを表している。ADEF の面を F が B に重なるように折り曲げたのが図 2 である。図 3 で，直角三角形 ABC は 30°　90°　60°　の直角三角形なので，3 辺の比は 1 : 2 : $\sqrt{3}$ になる。AB＝6cm なので，BC＝$6\times\frac{1}{2}$＝3(cm)，AC＝$6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ (cm)である。

直角三角形 CGH で，CH と GH の長さがわかれば，三平方の定理で CG を計算できる。

G は DE の中点で GH // DI なので，GH＝$\frac{1}{2}$DI＝$\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (cm)になる。

図 4 の直角三角形 CHI で，三平方の定理より，

CH＝$\sqrt{CI^2+IH^2}=\sqrt{36+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{144+9}{4}}=\sqrt{\frac{153}{4}}$ (cm)

図 3 の直角三角形 CGH で，三平方の定理より，

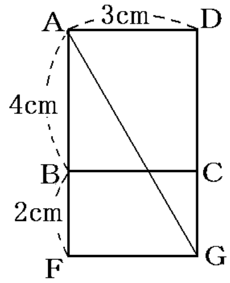
CG＝$\sqrt{CH^2+GH^2}=\sqrt{\frac{153}{4}+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{153}{4}+\frac{27}{4}}=\sqrt{\frac{180}{4}}=\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=3\sqrt{5}$ (cm)

【】角柱・角錐の最短距離

[解答 31] $3\sqrt{5}$ cm

[解説]

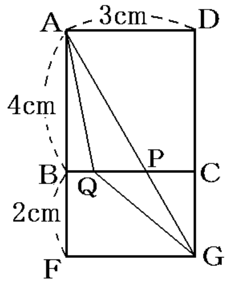
<Point> 最短距離の線が通る部分の展開図をかく



右図のように，A と G を直線で結んだときの AG の長さが最短距離になる。

直角三角形 AGF で，三平方の定理より，

$$AG = \sqrt{AF^2 + GF^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}\ (\mathrm{cm})$$



＊直線で結んだときの AG の長さが最短距離になる理由を右図で説明しておこう。

例えば，糸が右図の Q 点を通る場合，糸の長さは AQ＋QG になる。

三角形の 2 辺の長さの和は他の 1 辺より長くなるので，

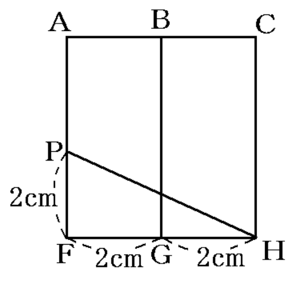
AQ＋QG＞AG，AQ＋QG＞AP＋PG

これは Q が BC 間の P 以外のどの位置にある場合も成り立つ。

したがって，糸が P を通る場合が最短距離になる。

[解答 32] $2\sqrt{5}$ cm

[解説]



最短距離の線が通る部分の展開図は右図のようになる。

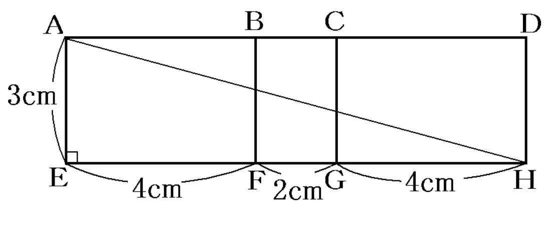
最短距離は右図の PH になる。

直角三角形 PHF で，三平方の定理より，

$$PH = \sqrt{PF^2 + FH^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}\ (\mathrm{cm})$$

[解答 33] $\sqrt{109}$ cm

[解説]



最短距離の線が通る部分の展開図は右図のようになる。

最短距離は右図の AH になる。

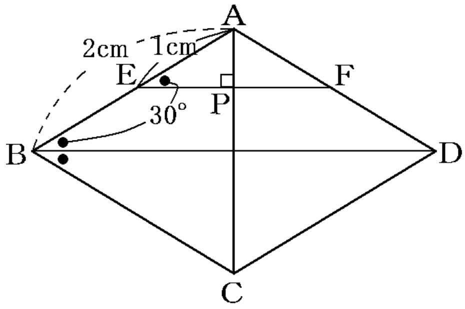
直角三角形 AHE で，三平方の定理より，

$$AH = \sqrt{AE^2 + HE^2} = \sqrt{3^2 + 10^2} = \sqrt{9 + 100}$$

$$= \sqrt{109}\ (\mathrm{cm})$$

[解答 34] $\sqrt{3}$ cm

[解説]



EP，PF が通る△ABC，△ACD の部分の展開図は右図の通りである。

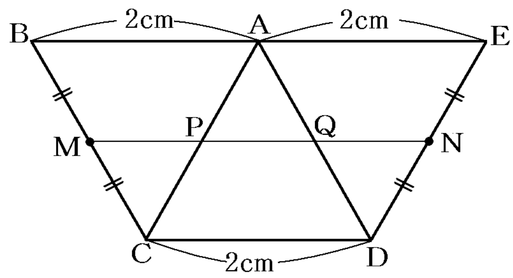
直角三角形 AEP は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は 1：2：$\sqrt{3}$ になるので，

$$\mathrm{EP}=\mathrm{AE}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,(\mathrm{cm})$$

$$\mathrm{EF}=\mathrm{EP}\times2=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$$

[解答 35]3cm

[解説]



右図は，線分 MP，PQ，QN が通る部分の展開図である。3 つの線分 MP，PQ，QN の長さの和が最小となるのは M，P，Q，N が一直線上にあるときである。このとき，右図より，

MP＝PQ＝QN＝1cm なので，

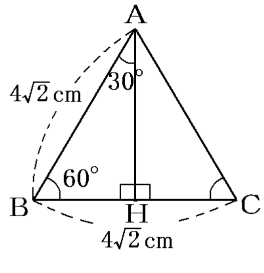
MP＋PQ＋QN＝3(cm)

[解答 36](1) $4\sqrt{2}$ cm (2) $8\sqrt{3}$ cm² (3) $2\sqrt{10}$ cm

[解説]

(1) 直角三角形 ABD で，三平方の定理より，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{16\times2}=4\sqrt{2}\,(\mathrm{cm})$$



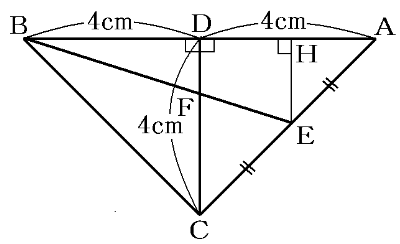
(2) (1)と同様にして，AC＝BC＝ $4\sqrt{2}$ (cm)なので，

△ABC は，1 辺が $4\sqrt{2}$ cm の正三角形になる。

右図で，△ABH は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は 1：2：$\sqrt{3}$ になるので，

$$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{6}\,(\mathrm{cm})$$

$$(\triangle\mathrm{ABH}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times2\sqrt{6}=4\sqrt{12}=4\sqrt{4\times3}=8\sqrt{3}\,(\mathrm{cm}^2)$$



(3) EF＋FB の長さが最も短くなるのは，右図のように，B，F，E が一直線上になる場合である。

E が AC の中点なので，AH＝DH＝EH＝4÷2＝2(cm)で，

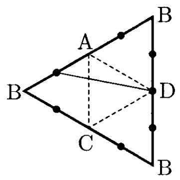
BH＝BD＋DH＝4＋2＝6(cm)

直角三角形 BEH で，三平方の定理より，

$$BE = \sqrt{BH^2 + EH^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = \sqrt{4\times 10} = 2\sqrt{10}\ (\text{cm})$$

よって，EF＋FB の最短の長さは $2\sqrt{10}$ cm である。

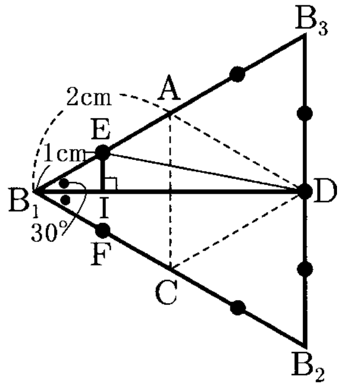
[解答 37](1)



(2) $\sqrt{7}$ cm

[解説]

(2) 右図で，直角三角形 B_1B_3D は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は 1：2：$\sqrt{3}$ になるので，



$$B_1D = B_1B_3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ (\text{cm}) \quad \cdots ①$$

直角三角形 B_1EI は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は 1：2：$\sqrt{3}$ になるので，

$$B_1I = B_1E \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ (\text{cm}) \quad \cdots ②$$

$$EI = B_1E \times \frac{1}{2} = 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ (\text{cm})$$

①，②より，$ID = B_1D - B_1I = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ (\text{cm})$

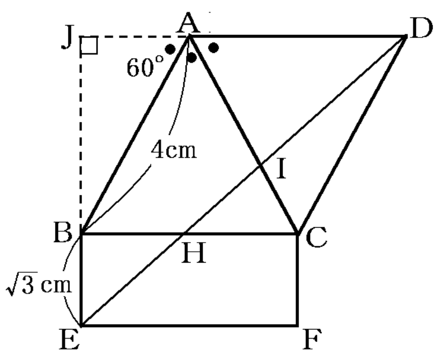
直角三角形 EDI で，三平方の定理より，

$$DE = \sqrt{EI^2 + ID^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{28}{4}} = \sqrt{7}\ (\text{cm})$$

[解答 38] $3\sqrt{7}$ cm

[解説]

右は，EH，HI，ID が通る面の展開図である。



EH＋HI＋ID の長さが最も短くなるのは，E，H，I，D が一直線上にある場合で，その場合の最短距離は ED の長さである。

△ABJ は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は 1：2：$\sqrt{3}$ になるので，

$AJ = 4\times\frac{1}{2} = 2(\text{cm})$，$BJ = 4\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ (\text{cm})$である。

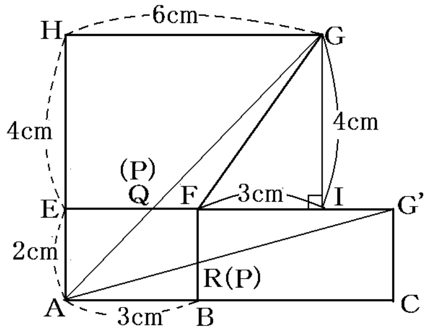
直角三角形 DEJ で，DJ＝AJ＋AD＝2＋4＝6(cm)，EJ＝BJ＋BE＝ $2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$ (cm)

三平方の定理より，ED＝ $\sqrt{DJ^2+EJ^2}=\sqrt{6^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{36+27}=\sqrt{63}=\sqrt{9\times 7}=3\sqrt{7}$ (cm)

[解答 39] $2\sqrt{17}$ cm

[解説]

点 P は「点 E から点 F を通って点 B まで動く」ので，EF 上にある場合と，FB 上にある場合を分けて考える。まず，EF 上にあるときは，点 P が右図の Q にあるときが AP＋PG の最短距離になる。



直角三角形 AGH で，三平方の定理より，

AG＝ $\sqrt{AH^2+GH^2}=\sqrt{36+36}$

＝ $\sqrt{36\times 2}=6\sqrt{2}$ (cm)･･･①

次に，点 P が FB 上にあるときは，点 P が図の R にあるときが AP＋PG’の最短距離 AG’になる。図のように G から FG’に垂線 GI を引く。

直角三角形 FGI で，三平方の定理より，

FG＝ $\sqrt{FI^2+GI^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ (cm)

BC＝FG’＝FG＝5cm

直角三角形 AG’C で，三平方の定理より，

AG’＝ $\sqrt{AC^2+G'C^2}=\sqrt{(3+5)^2+2^2}=\sqrt{64+4}=\sqrt{68}=\sqrt{4\times 17}=2\sqrt{17}$ (cm)･･･②

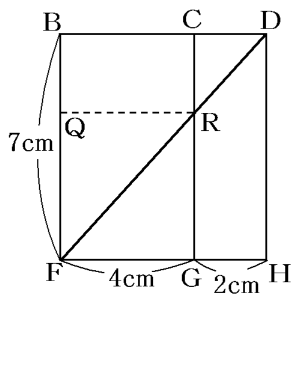
①と②を比べて短い方が最短距離になる。

①より, AG^2＝72, ②より AG'^2＝68 なので AG＞AG’になるので, 最短距離は AG’＝ $2\sqrt{17}$ cm

[解答 40](1) $\sqrt{85}$ cm　(2) $\dfrac{1}{6}$ 倍

[解説]

(1) 右図のような展開図で，F と D を結んだ線分と線分 CG の交点に R が来るとき，DR＋RF は最小になる。



直角三角形 DFB で，三平方の定理より，

DF＝ $\sqrt{DB^2+FB^2}=\sqrt{6^2+7^2}=\sqrt{36+49}=\sqrt{85}$ (cm)

よって，DR＋RF＝ $\sqrt{85}$ (cm)

(2) まず，高さ BQ を求める。

QR // BD // FH なので，平行線の性質より，

BQ：QF＝DR：RF＝GH：FG＝2：4＝1：2

よって，$BQ=BF\times\dfrac{1}{1+2}=7\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$(cm)

(三角柱の体積)＝$\dfrac{1}{2}\times QR\times PQ\times BQ=\dfrac{1}{2}\times4\times2\times\dfrac{7}{3}=\dfrac{28}{3}$(cm^3)

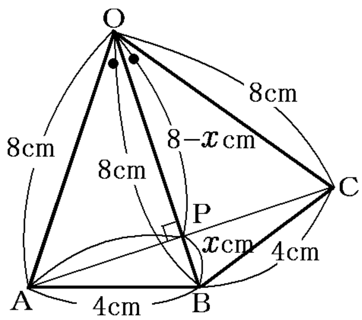
(X の体積)＝4×2×7＝56(cm^3)

(三角柱の体積)÷(X の体積)＝$\dfrac{28}{3}\div56=\dfrac{28}{3}\times\dfrac{1}{56}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$(倍)

[解答 41]1cm

[解説]

右は，AP，PC が通る面の展開図である。AP＋PC の長さを最も短くなるのは，A，P，C が一直線上にある場合である。



右図で, OP は二等辺三角形 OAC の頂角の二等分線になるので，OP は辺 AC を垂直に二等分する。

BP＝x(cm)とおくと，OP＝$8-x$(cm)

直角三角形 OAP で，三平方の定理より，

$AP^2=OA^2-OP^2=64-(8-x)^2$・・・①

直角三角形 ABP で，三平方の定理より，

$AP^2=AB^2-BP^2=16-x^2$・・・②

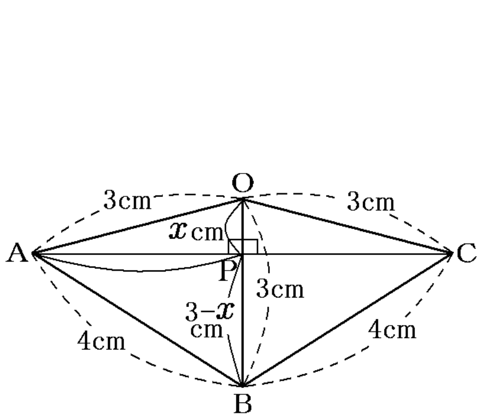
①，②より，

$64-(8-x)^2=16-x^2$，　$64-x^2+16x-64=16-x^2$，　$16x=16$，　$x=1$

[解答 42]$\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$cm

[解説]

糸が通る△OAB と△OCB の部分の展開図をかくと，右図のようになる。



△OAB と△OCB は辺 OB について線対称の位置にあるので, AC は OB によって垂直に 2 等分される。

OP＝$x$cm とおくと，BP＝$3-x$(cm)になる。

直角三角形 OAP で，三平方の定理より，

$AP^2=OA^2-OP^2=9-x^2$・・・①

直角三角形 BAP で，三平方の定理より，

AP²＝BA²－BP²＝$16-(3-x)^2$・・・②

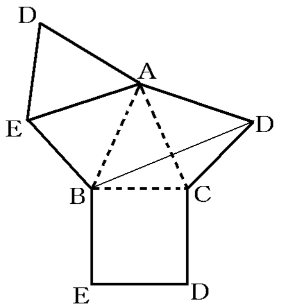
①，②より， $9-x^2=16-(3-x)^2$， $9-x^2=16-9+6x-x^2$， $6x=2$， $x=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

①より，AP²＝$9-x^2=9-\frac{1}{9}=\frac{80}{9}$

AP＝$\sqrt{\frac{80}{9}}=\frac{\sqrt{80}}{3}=\frac{\sqrt{16\times5}}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$(cm)

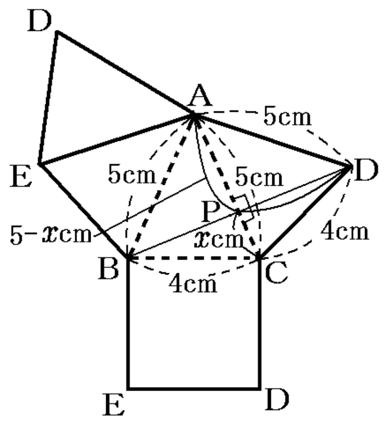
AP＝PC なので，AC＝AP×2＝$\frac{4\sqrt{5}}{3}\times2=\frac{8\sqrt{5}}{3}$(cm)

[解答 43](1)



(2) $\frac{8\sqrt{21}}{5}$ cm

[解説]



(2) △ABC と△ADC は辺 AC について線対称の位置にあるので，BD は AC によって垂直に 2 等分される。

PC＝x cm とおくと，AP＝$5-x$(cm)

直角三角形 CDP で，三平方の定理より，

PD²＝CD²－CP²＝$16-x^2$・・・①

直角三角形 ADP で，三平方の定理より，

PD²＝AD²－AP²＝$25-(5-x)^2$・・・②

①, ②より, $16-x^2=25-(5-x)^2$, $16-x^2=25-25+10x-x^2$

$10x=16$， $x=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$

①より，PD²＝$16-x^2=16-\frac{64}{25}=\frac{336}{25}$， PD＝$\sqrt{\frac{336}{25}}=\frac{\sqrt{16\times21}}{5}=\frac{4\sqrt{21}}{5}$(cm)

BP＝PD なので，BD＝PD×2＝$\frac{4\sqrt{21}}{5}\times2=\frac{8\sqrt{21}}{5}$(cm)

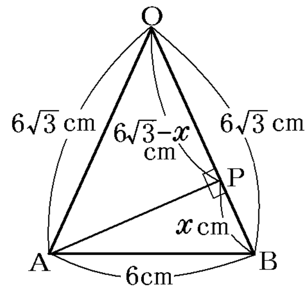
[解答 44](1) 3cm　(2)①　5 : 1　②　$5+2\sqrt{33}$(cm)　(3) 16cm

[解説]

(1) P，Q がそれぞれ辺 OB，OC の中点となるとき，中点連結定理より，

PQ＝$\dfrac{1}{2}$BC＝$\dfrac{1}{2}\times 6=3$(cm)

(2)①　右図のように，BP＝x(cm)とおくと，OP＝$6\sqrt{3}-x$(cm)



直角三角形 ABP で，三平方の定理より，

$AP^2=AB^2-BP^2=36-x^2$・・・ア

直角三角形 OAP で，三平方の定理より，

$AP^2=OA^2-OP^2=\left(6\sqrt{3}\right)^2-\left(6\sqrt{3}-x\right)^2$

$\quad =108-x^2+12\sqrt{3}x-108=-x^2+12\sqrt{3}x$・・・イ

ア，イより，$-x^2+12\sqrt{3}x=36-x^2$，$12\sqrt{3}x=36$，$x=\dfrac{36}{12\sqrt{3}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

PB＝$\sqrt{3}$(cm)，OP＝$6\sqrt{3}-\sqrt{3}=5\sqrt{3}$(cm)

よって，OP : PB＝$5\sqrt{3}$: $\sqrt{3}$＝5 : 1

②　アより，$AP^2=36-x^2=36-\left(\sqrt{3}\right)^2=36-3=33$

よって，AP＝$\sqrt{33}$(cm)，QD＝AP＝$\sqrt{33}$(cm)

△OBC で，①より OP : PB＝5 : 1 なので，OP : OB＝5 : 6

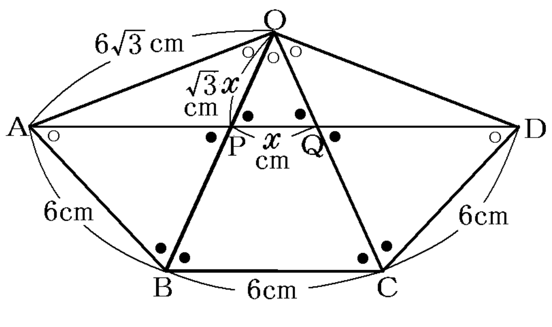
明らかに PQ // BC なので，平行線の性質より，PQ : BC＝OP : OB，PQ : 6＝5 : 6

よって，PQ＝5(cm)

巻きつけた糸の A から D までの長さは，

AP＋PQ＋QD＝$\sqrt{33}+5+\sqrt{33}=5+2\sqrt{33}$(cm)

(3) 右は，糸が通る部分の展開図である。



A から D までの糸の長さが最も短くなるように巻きつけたとき，A，P，Q，D は図のように一直線上にある。したがって，最短の長さは AD になる。

△OBC，△OAB，△OCD は合同な二等辺三角形である。それらの底角を●，頂角を○として，等しい角度を図に記入する。

△ABP は 2 つの底角(●)が等しいので, AP＝AB＝6(cm)である。同様に, QD＝6cm である。

あと，PQ の長さがわかれば，AD の長さを求めることができる。

そこで，PQ＝x(cm)とおく。

△OPQ∽△OAB(2 角が等しい)なので，

OP：PQ＝OA：AB＝$6\sqrt{3}$：6＝$\sqrt{3}$：1
よって，OP＝PQ×$\sqrt{3}=x\times\sqrt{3}=\sqrt{3}x$ (cm)
ところで，△ABP∽△OAB(2 角が等しい)なので，AB：BP＝$\sqrt{3}$：1
6：BP＝$\sqrt{3}$：1，$\sqrt{3}$BP＝6×1，BP＝$\dfrac{6}{\sqrt{3}}=\dfrac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$ (cm)
OP＋BP＝OB なので，$\sqrt{3}x+2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$
$\sqrt{3}x=4\sqrt{3}$，$x=4$
よって，AP＋PQ＋QD＝6＋4＋6＝16(cm)

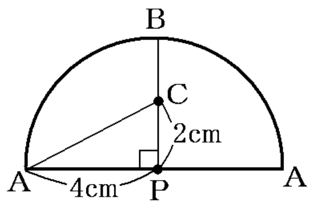
【】円錐・円柱の最短距離
[解答 45] $2\sqrt{5}$ cm
[解説]
まず，この円錐の側面を展開してできるおうぎ形の中心角を求める。中心角を x° とする。
(側面のおうぎ形の円周部分の長さ)＝(底面の円の円周の長さ)なので，

$2\pi\times\text{PA}\times\dfrac{x}{360}=\pi\times\text{AB}$，$2\pi\times4\times\dfrac{x}{360}=\pi\times4$

$2\times\dfrac{x}{360}=1$，$\dfrac{x}{180}=1$，$x=180$

＊(中心角)＝360°×$\dfrac{(\text{底面の半径})}{(\text{母線の長さ})}=360°\times\dfrac{2}{4}$＝180° で簡単に求めることもできる。

中心角が 180° なので，側面の展開図は右図のようになる。
最短距離は，図の AC になる。
直角三角形 ACP で，三平方の定理より，



AC＝$\sqrt{AP^2+CP^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=2\sqrt{5}$ (cm)

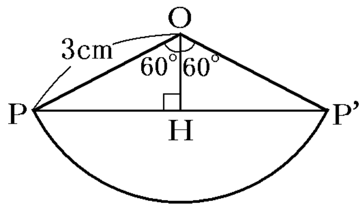
[解答 46] $3\sqrt{3}$ cm
[解説]
まず，この円錐の側面を展開してできるおうぎ形の中心角を求める。中心角を x° とする。
(側面のおうぎ形の円周部分の長さ)＝(底面の円の円周の長さ)なので，

$2\pi\times3\times\dfrac{x}{360}=\pi\times2$

$3\times\dfrac{x}{360}=1$，$\dfrac{x}{120}=1$，$x=120$

＊(中心角)＝360°×$\dfrac{(\text{底面の半径})}{(\text{母線の長さ})}=360°\times\dfrac{1}{3}$＝120° で簡単に求めることもできる。

中心角が 120° なので，側面の展開図は右図のようになる。
ひもの長さが最も短くなるときのひもの長さは図の PP’である。△OPH は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は



1 : 2 : $\sqrt{3}$ になるので，PH＝$3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (cm)

PP’＝PH×2＝$\frac{3\sqrt{3}}{2}\times 2=3\sqrt{3}$ (cm)

[解答 47] $6\pi-\frac{9\sqrt{3}}{2}$ (cm²)

[解説]

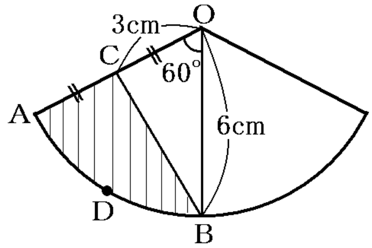
まず，この円錐の側面を展開してできるおうぎ形の中心角を求める。中心角を x° とする。
(側面のおうぎ形の円周部分の長さ)＝(底面の円の円周の長さ)なので，

$2\pi\times OA\times\frac{x}{360}=\pi\times AB$，$2\pi\times 6\times\frac{x}{360}=\pi\times 4$

$3\times\frac{x}{360}=1$，$\frac{x}{120}=1$，$x=120$

＊(中心角)＝360° $\times\frac{(\text{底面の半径})}{(\text{母線の長さ})}=360°\times\frac{2}{6}=120°$ で簡単に求めることもできる。

中心角が 120° なので，側面の展開図は右図のようになり，
BC が最短距離になる。
おうぎ形 OAB の中心角は，120° ÷2＝60° で，
OB : OC＝6 : 3＝2 : 1 なので，△OBC は 30° 90° 60°
の直角三角形になる。



BC＝OC×$\sqrt{3}=3\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$ (cm)
(右図の斜線部分の面積)＝(おうぎ形 OAB の面積)−(△OBC の面積)

(おうぎ形 OAB の面積)＝$\pi\times 6^2\times\frac{60}{360}=6\pi$ (cm²)

(△OBC の面積)＝$\frac{1}{2}\times BC\times OC=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 3=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ (cm²)

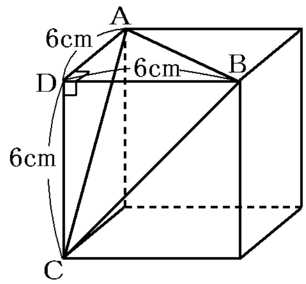
よって，(右図の斜線部分の面積)＝$6\pi-\frac{9\sqrt{3}}{2}$ (cm²)

【】立体→切断面の平面図形

【】断面が二等辺三角形など

[解答 48]$18\sqrt{3}$ cm²

[解説]

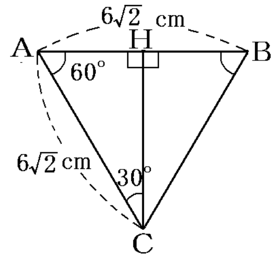


右図の直角三角形 ABD で，三平方の定理より，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{36\times2}=6\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

同様にして，AC＝$6\sqrt{2}$ (cm)，BC＝$6\sqrt{2}$ (cm)

よって，△ABC は 1 辺が $6\sqrt{2}$ cm の正三角形になる。



右下図の△ACH は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は 1：2：$\sqrt{3}$ になるので，CH＝$6\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{6}$ (cm)である。

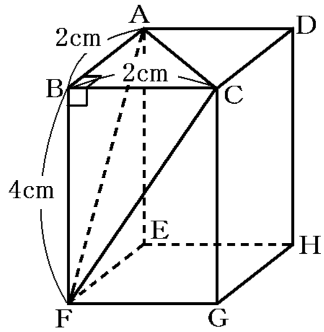
$$(\triangle\mathrm{ABC}\text{の面積})=\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{CH}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times3\sqrt{6}$$

$$=9\sqrt{12}=9\sqrt{4\times3}=18\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)$$

[解答 49]16cm²

[解説]

$$(\triangle\mathrm{ABC}\text{の面積})=\frac{1}{2}\times2\times2=2(\mathrm{cm}^2)$$



$$(\triangle\mathrm{CBF}\text{の面積})=\frac{1}{2}\times2\times4=4(\mathrm{cm}^2)$$

$$(\triangle\mathrm{ABF}\text{の面積})=\frac{1}{2}\times2\times4=4(\mathrm{cm}^2)$$

あと，△ACF の面積を求めれば，表面積が計算できる。

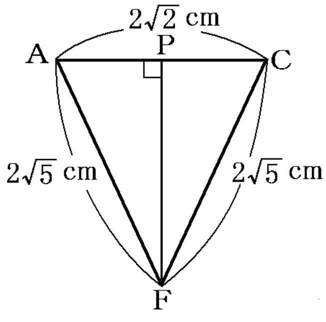
△ACF は AF＝CF の二等辺三角形である。二等辺三角形の面積は，3 辺の長さがわかれば，面積を計算することができる。

直角三角形 ACB で，三平方の定理より，

$$\mathrm{AC}=\sqrt{AB^2+CB^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{4\times2}=2\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

直角三角形 CFB で，三平方の定理より，

$$\mathrm{CF}=\sqrt{CB^2+FB^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=2\sqrt{5}\ (\mathrm{cm})$$



AF＝CF＝$2\sqrt{5}$ (cm)

したがって，△ACF は右図のようになる。

直角三角形 AFP で，三平方の定理より，

$FP = \sqrt{AF^2 - AP^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{20-2} = \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$ (cm)

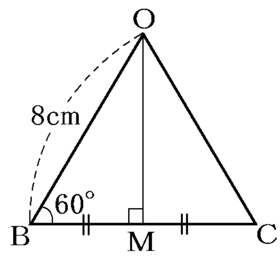
(△ACF の面積)$= \dfrac{1}{2} \times AC \times FP = \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$ (cm^2)

よって，(三角錐 B－AFC の表面積)＝2＋4＋4＋6＝16(cm^2)

[解答 50](1) $4\sqrt{3}$ cm　(2) $16\sqrt{2}$ cm^2

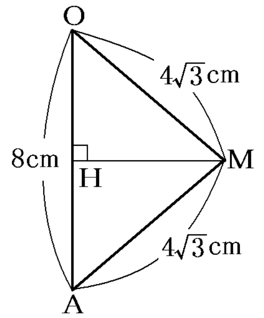
[解説]

(1) 右図の直角三角形 OBM は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は 1 : 2 : $\sqrt{3}$ になるので，



$OM = 8 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (cm)

(2) △OAM は AM＝OM の二等辺三角形になる。



右図で M から OA に垂線 MH を引くと，H は OA の中点になる。

直角三角形 OMH で，三平方の定理より，

$MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 - 4^2} = \sqrt{48-16} = \sqrt{32}$

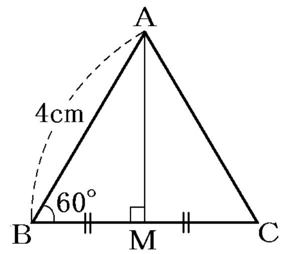
$= \sqrt{16\times 2} = 4\sqrt{2}$ (cm)

(△OAM の面積)$= \dfrac{1}{2} \times OA \times MH = \dfrac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$ (cm^2)

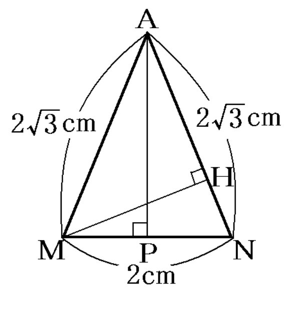
[解答 51](1) 2cm　(2) $2\sqrt{3}$ cm　(3) $\sqrt{11}$ cm^2　(4) $\dfrac{\sqrt{33}}{3}$ cm

[解説]

(1) △CBD で，M，N は辺 BC，CD の中点なので，中点連結定理より，$MN = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{2} \times 4 = 2$(cm)



(2) 右図の正三角形 ABC で，M は BC の中点なので，AM⊥BC。△ABM は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は 1 : 2 : $\sqrt{3}$ になるので，$AM = 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (cm)



(3) △AMN は，AM＝AN＝$2\sqrt{3}$ (cm)，MN＝2(cm)の二等辺三角形になる。右図のように，A から MN に垂線 AP を引くと，P は MN の中点になる。

直角三角形 AMP で，三平方の定理より，

$\mathrm{AP}=\sqrt{AM^2-MP^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\sqrt{12-1}=\sqrt{11}$(cm)

(△AMN の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×MN×AP＝$\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{11}=\sqrt{11}$(cm²)

(4) MH の長さは△AMN の面積と AN の長さから求める。

△AMN の底辺を AN とすると，高さは MH になるので，

$\dfrac{1}{2}$×AN×MH＝(△AMN の面積)

$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}$×MH＝$\sqrt{11}$，$\sqrt{3}$MH＝$\sqrt{11}$，MH＝$\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{11}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{33}}{3}$(cm)

[解答 52](1) 2cm　(2) 8cm²

[解説]

(1) OE : OA＝OF : OB＝3 : 12＝1 : 4，∠EOF＝∠AOB で，2 組の辺の比とその間の角が，それぞれ等しいので，△OEF∽△OAB

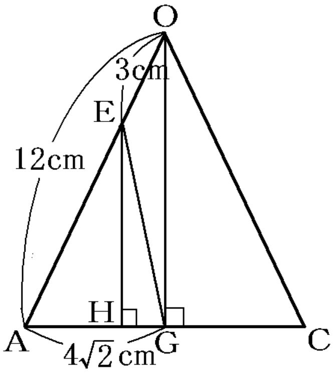
よって，EF : AB＝OE : OA，EF : 8＝1 : 4

比の外項の積は内項の積に等しいので，4EF＝8，EF＝2(cm)

(2) 図の位置関係から，EG＝FG と判断できるので，△EFG は二等辺三角形になる。

二等辺三角形の面積は 3 辺がわかれば計算できる。(1)より, EF＝2(cm)なので, あとは, EG(または FG)の長さがわかればよい。

そこで，点 E をふくむ△OAC に注目する。



正四角錐の底面で，△ABC は AB＝BC＝8(cm)の直角二等辺三角形なので，3 辺の比は 1 : 1 : $\sqrt{2}$ になる。

よって，AC＝AB×$\sqrt{2}=8\times\sqrt{2}=8\sqrt{2}$(cm)

AG＝$8\sqrt{2}\div2=4\sqrt{2}$(cm)

右図のように，E から AC に垂線 EH を引く。

直角三角形 EGH で, EH と GH がわかれば EG を計算できる。

EH // OG なので，平行線の性質より，

HG : AG＝EO : AO，HG : $4\sqrt{2}$＝3 : 12，HG : $4\sqrt{2}$＝1 : 4

比の外項の積は内項の積に等しいので，4HG＝$4\sqrt{2}$，HG＝$\sqrt{2}$(cm)・・・①

ところで，直角三角形 OAG で，三平方の定理より，

$\mathrm{OG}=\sqrt{OA^2-AG^2}=\sqrt{12^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{144-32}=\sqrt{112}=\sqrt{16\times7}=4\sqrt{7}$(cm)

EH // OG なので，平行線の性質より，

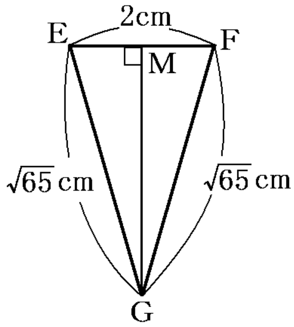
EH : OG＝AE : AO，EH : $4\sqrt{7}$＝9 : 12，EH : $4\sqrt{7}$＝3 : 4

比の外項の積は内項の積に等しいので，

$4EH = 4\sqrt{7}\times 3$，$EH = 3\sqrt{7}$ (cm)･･･②
①より $HG = \sqrt{2}$ (cm)，②より $EH = 3\sqrt{7}$ (cm)
直角三角形 EGH で，三平方の定理より，

$$EG = \sqrt{EH^2 + HG^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{7}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{63+2} = \sqrt{65}\ (\mathrm{cm})$$

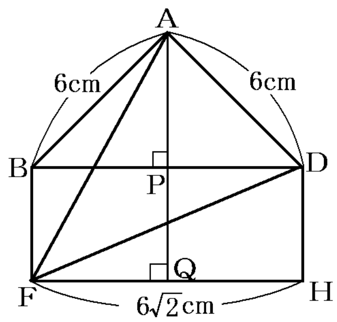
右の図で，G から EF に垂線 GM を引くと，M は EF の中点になる。
直角三角形 GEM で，三平方の定理より，



$$GM = \sqrt{GE^2 - EM^2} = \sqrt{65-1} = \sqrt{64} = 8\ (\mathrm{cm})$$

$$(\triangle EFG\ の面積) = \frac{1}{2}\times EF\times GM = \frac{1}{2}\times 2\times 8 = 8(\mathrm{cm}^2)$$

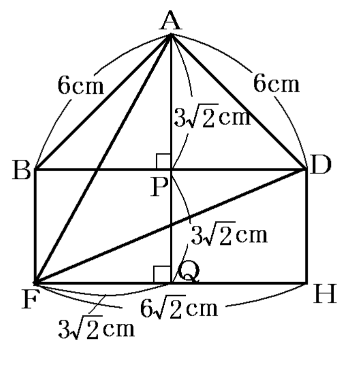
[解答 53]$27\mathrm{cm}^2$
[解説]
長方形 BFHD をふくむ平面でこの立体を切ると，点 A は，この切断した平面上にあるので，切断面は右図のようになる。
まず，FA と FD の長さを求める。
問題の図で，△FGH は 45° 45° 90° の直角三角形で，3 辺の比は 1：1：$\sqrt{2}$ になるので，



$FH = FG\times\sqrt{2} = 6\times\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ (cm)
右図で，Q は FH の中点なので，$FQ = FH\div 2 = 3\sqrt{2}$ (cm)
$BP = FQ = 3\sqrt{2}$ (cm)
直角三角形 ABP で，三平方の定理より，

$$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{6^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{36-18} = \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

仮定より，PQ＝AP なので，$PQ = 3\sqrt{2}$ (cm)
右図の直角三角形 AFQ で，三平方の定理より，



$$AF = \sqrt{AQ^2 + FQ^2} = \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{72+18}$$

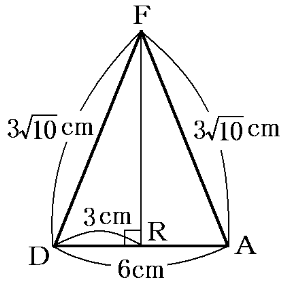
$$= \sqrt{90} = \sqrt{9\times 10} = 3\sqrt{10}\ (\mathrm{cm})$$

直角三角形 DFH で，三平方の定理より，

$$DF = \sqrt{FH^2 + DH^2} = \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2} = 3\sqrt{10}\ (\mathrm{cm})$$

以上より，△AFD は，AF＝DF の二等辺三角形になる。

右図の直角三角形 FDR で，三平方の定理より，



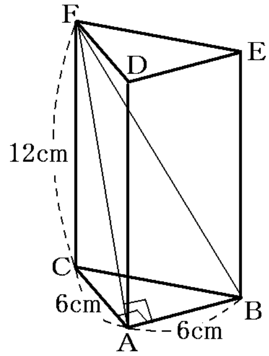
$$\mathrm{FR}=\sqrt{DF^2-DR^2}=\sqrt{90-9}=\sqrt{81}=9\,(\mathrm{cm})$$

$$(\triangle\mathrm{AFD}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\times\mathrm{DA}\times\mathrm{FR}=\frac{1}{2}\times6\times9=27(\mathrm{cm}^2)$$

【】断面がその他の三角形

[解答 54] $18\sqrt{5}$ cm²

[解説]



∠FAB＝90° に気づくかどうかがポイントである。

直線 BA は平面 ACFD と垂直の位置関係にある(BA⊥AC, BA⊥AD なので)。したがって，平面 ACFD 上にある直線 AF と直線 BA は垂直に交わる。

FA の長さがわかれば，△FAB の面積を求めることができる。

直角三角形 FAC で，三平方の定理より，

$$\mathrm{FA}=\sqrt{FC^2+AC^2}=\sqrt{12^2+6^2}=\sqrt{144+36}=\sqrt{180}$$

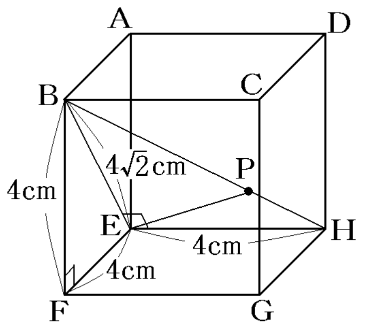
$$=\sqrt{36\times5}=6\sqrt{5}\,(\mathrm{cm})$$

$$(\triangle\mathrm{FAB}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{FA}=\frac{1}{2}\times6\times6\sqrt{5}=18\sqrt{5}\,(\mathrm{cm}^2)$$

[解答 55] $6\sqrt{2}$ (cm²)

[解説]

∠BEH＝90° に気づくかどうかがポイントである。



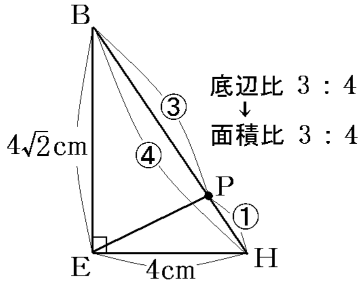
HE⊥面 ABFE なので，面 ABFE 上にある EB と HE は垂直に交わる。

よって，△BHE は直角三角形である。

まず，△BHE の面積を求める。

直角三角形 BEF で，三平方の定理より，

$$\mathrm{BE}=\sqrt{BF^2+EF^2}=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{4^2\times2}=4\sqrt{2}\,(\mathrm{cm})$$



$$(\triangle\mathrm{BEH}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\times\mathrm{EH}\times\mathrm{BE}=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}\,(\mathrm{cm}^2)$$

△PBE の底辺を BP，△BEH の底辺を BH とすると高さは共通なので，

面積は底辺の比 BP：BH＝3：4 になる。

したがって，(△PBE の面積)＝(△BEH の面積)×$\dfrac{3}{4}$

$=8\sqrt{2}\times\dfrac{3}{4}=6\sqrt{2}$ (cm²)

[解答 56] $\sqrt{11}$ cm

[解説]

図1

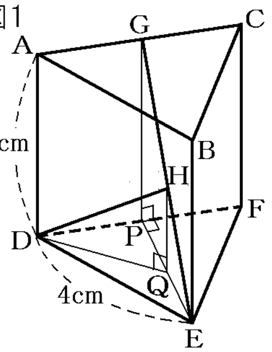


図2

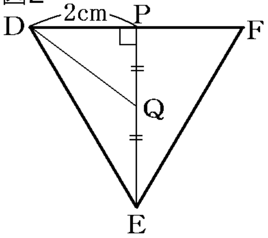


図 1 のように, G から DE に垂線 GP を引き，
H から垂線 HQ を引くと, GP // HQ になる。
仮定より，H は EG の中点なので，中点連結定理より，Q は EP の中点になる。

また，HQ＝$\dfrac{1}{2}$GP＝$\dfrac{1}{2}$×4＝2(cm)になる。

図 2 の△EDP は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は 1：2：$\sqrt{3}$ になるので，

PE＝DP×$\sqrt{3}$＝$2\sqrt{3}$ (cm)

Q は EP の中点なので，PQ＝$\sqrt{3}$ (cm)

直角三角形 DQP で，三平方の定理より，

$$DQ=\sqrt{DP^2+PQ^2}=\sqrt{2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}\ (\text{cm})$$

図 1 の直角三角形 HDQ で，三平方の定理より，

$$DH=\sqrt{DQ^2+HQ^2}=\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2+2^2}=\sqrt{7+4}=\sqrt{11}\ (\text{cm})$$

[解答 57] $6\sqrt{2}+6$ (cm)

[解説]

図1

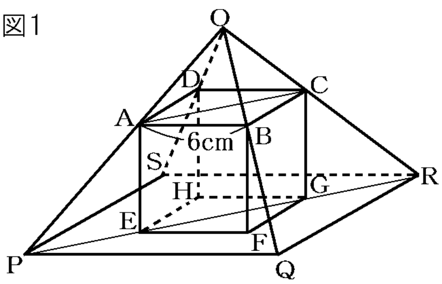


図2

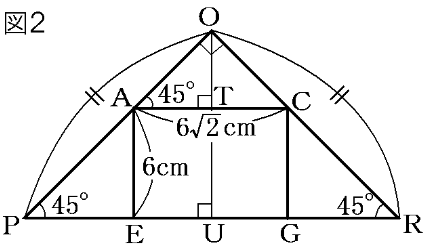


図 1 で，正四角錐 OPQRS の 1 辺を a cm とする。
△PRQ は直角二等辺三角形で，3 辺の比は 1：1：$\sqrt{2}$ になるので，PR＝$\sqrt{2}a$ (cm)

OP＝OR＝a (cm)，PR＝$\sqrt{2}a$ (cm)なので，
△OPR は 45° 45° 90° の直角二等辺三角形になる。
△ABC は 45° 45° 90° の直角二等辺三角形になるので，AC＝AB×$\sqrt{2}$＝6×$\sqrt{2}$＝$6\sqrt{2}$ (cm)である。

図 2 は図 1 の断面△OPR を示している。

O から PR に垂線 OU を引く。

△APE は直角二等辺三角形になるので，

PE＝AE＝6(cm)である。

また，T は AC の中点になるので，AT＝ $6\sqrt{2} \div 2 = 3\sqrt{2}$ (cm)

EU＝AT＝ $3\sqrt{2}$ (cm)なので，PU＝PE＋EU＝ $6+3\sqrt{2}$ (cm)になる。

△OPU は直角二等辺三角形になるので，

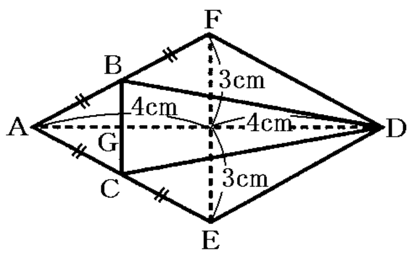
OP＝PU× $\sqrt{2} = \left(6+3\sqrt{2}\right)\times\sqrt{2} = 6\sqrt{2}+6$ (cm)

[解答 58](1) $\dfrac{1}{8}$倍　(2) $\dfrac{\sqrt{39}}{4}$cm

[解説]

(1) 右図で，A と F は重なるので AB＝BF である。

同様に AC＝CE である。2 組の辺の比とその間の角(∠A)がそれぞれ等しいので，△ABC∽△AFE になり，相似比は 1：2 になる。



面積比は相似比の 2 乗に比例するので, △ABC と△AFE の面積比は，$1^2：2^2$＝1：4 になる。四角形 AEDF の面積は△AFE の面積の 2 倍なので，四角形 AEDF の面積は△ABC の 4×2＝8(倍)になる。

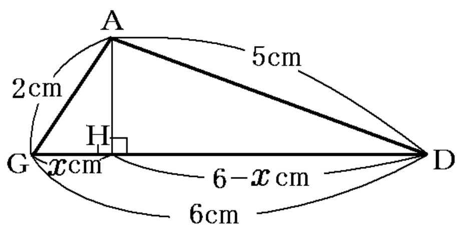
よって，△ABC の面積は，四角形 AEDF の面積の $\dfrac{1}{8}$倍になる。

(2) 図 3 の断面の△AGD に注目する。

(1)より，AG：AD＝1：4 なので，AG＝ $8\times\dfrac{1}{4}$ ＝2(cm)

GD＝AD－AG＝8－2＝6(cm)

図 3 の AD は図 2 の DE と重なるので, 長さが等しい。



AD＝DE＝ $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ (cm)

次に，右図のように，GH＝ x (cm)とおく。

直角三角形 AGH で，三平方の定理より，

AH^2＝AG^2－GH^2＝ $4-x^2$ ・・・①

直角三角形 ADH で，三平方の定理より，

AH^2＝AD^2－DH^2＝ $25-(6-x)^2$ ・・・②

①，②より， $25-(6-x)^2 = 4-x^2$ ， $25-x^2+12x-36 = 4-x^2$

$12x = 15$ ， $x = \dfrac{15}{12} = \dfrac{5}{4}$ (cm)

①より，AH^2＝ $4-x^2 = 4-\dfrac{25}{16} = \dfrac{39}{16}$ ，AH＝ $\sqrt{\dfrac{39}{16}} = \dfrac{\sqrt{39}}{4}$ (cm)

【】断面が四角形

[解答 59] $12\sqrt{11}$ cm²

[解説]

まず，断面の四角形 EBCF の各辺の長さを計算する。

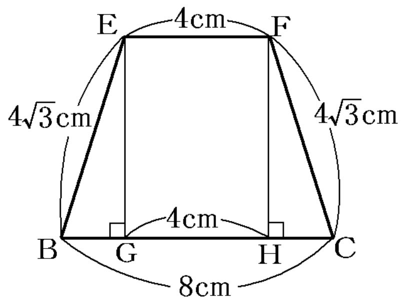
△OAD で，E，F は OA，OD の中点なので，中点連結定理より，

$$\mathrm{EF}=\frac{1}{2}\mathrm{AD}=\frac{1}{2}\times 8=4(\mathrm{cm})$$

正三角形 OAB で，E は OA の中点なので BE⊥OA になる。また，正三角形の内角はすべて 60°なので，∠BAE＝60°になる。よって，△ABE は 30° 90° 60°の直角三角形で 3 辺の比は 1：2：$\sqrt{3}$ になるので，

$$\mathrm{BE}=\mathrm{AB}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}(\mathrm{cm})$$　同様に，$\mathrm{CE}=4\sqrt{3}(\mathrm{cm})$

以上より，四角形 EBCF は右図のような台形になる。



右図で，BG＝(8－4)÷２＝2(cm)

直角三角形 BEG で，三平方の定理より，

$$\mathrm{EG}=\sqrt{BE^2-BG^2}=\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2-2^2}=\sqrt{48-4}$$

$$=\sqrt{44}=\sqrt{4\times 11}=2\sqrt{11}(\mathrm{cm})$$

$$(\text{台形 EBCF の面積})=\frac{1}{2}\times(\mathrm{EF}+\mathrm{BC})\times\mathrm{EG}=\frac{1}{2}\times(4+8)\times 2\sqrt{11}=12\sqrt{11}(\mathrm{cm}^2)$$

[解答 60] $2\sqrt{6}$ cm

[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る

→切断面で考える

2 点 P, F, および線分 AG を含む断面 AFGD で考える。図 2 の△PFQ で，FQ と PQ の長さがわかれば，三平方の定理で PF の長さを計算できる。

図1

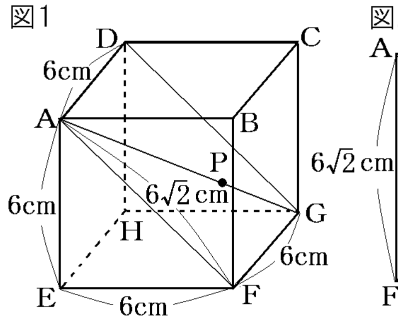
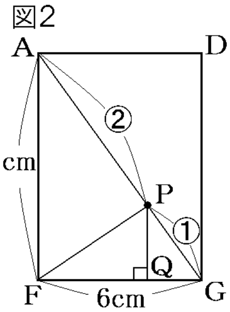


図2



そこで，まず AF の長さを求める。

図 1 の直角三角形 AFE で，三平方の定理より，

$$\mathrm{AF}=\sqrt{AE^2+EF^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{6^2\times 2}=6\sqrt{2}(\mathrm{cm})$$

図 2 で，PQ：AF＝GP：GA＝1：(1＋2)，よって，PQ：$6\sqrt{2}$＝1：3

比の外項の積は内項の積に等しいので，PQ×3＝$6\sqrt{2}$×1

よって，PQ＝$6\sqrt{2}\div 3=2\sqrt{2}$(cm)･･･①

次に，GF＝6(cm)なので，
GQ：GF＝GP：GA＝1：(1＋2)，よって，GQ：6＝1：3
比の外項の積は内項の積に等しいので，GQ×3＝6×1，GQ＝6÷3＝2(cm)
FQ＝FG－GQ＝6－2＝4(cm)･･･②
①，②より，PQ＝$2\sqrt{2}$ cm，FQ＝4cm なので，直角三角形 PFQ で，三平方の定理より，

PF＝$\sqrt{PQ^2+FQ^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+4^2}=\sqrt{8+16}=\sqrt{24}=\sqrt{4\times 6}=2\sqrt{6}$ (cm)

[解答 61] $3\sqrt{11}$ cm
[解説]
BPH，GPQ を含むこの立方体の切断面は，
右の図 1 のように，ABGH になる。
GH⊥面 AEHD なので，GH⊥AH
同様に BA⊥AH
よって，切断面 ABGH は図 2 のような長方形になる。図 2 の△GQH は直角三角形なので，GH と QH がわかれば GQ を求めることができる。GH＝9cm なので，あとは QH である。

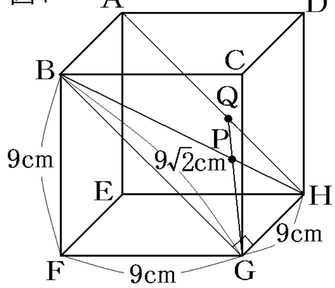
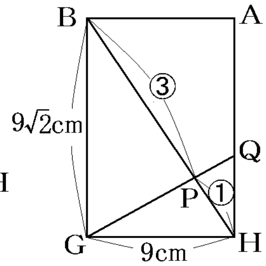
図1


図2


BG // QH なので，平行線の性質より，QH：BG＝PH：BP＝1：3･･･①
図 1 で，三角形 BGF は直角三角形なので，三平方の定理より，

BG＝$\sqrt{BF^2+GF^2}=\sqrt{9^2+9^2}=\sqrt{9^2\times 2}=9\sqrt{2}$ (cm)

①の QH：BG＝1：3 より，QH：$9\sqrt{2}$ ＝1：3
比の外項の積は内項の積に等しいので，QH×3＝$9\sqrt{2}\times 1$
よって，QH＝$9\sqrt{2}\div 3=3\sqrt{2}$ (cm)
図 2 の直角三角形 GQH で，三平方の定理より，

GQ＝$\sqrt{QH^2+GH^2}=\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2+9^2}=\sqrt{18+81}=\sqrt{99}=\sqrt{9\times 11}=3\sqrt{11}$ (cm)

[解答 62](1) $\sqrt{17}$ cm　(2) 6cm　(3) $6\sqrt{2}$ cm²

[解説]

(1) 右の図 1 のように P から EF へ垂線 PS を引く。直角三角形 PQS で，三平方の定理より，

図1

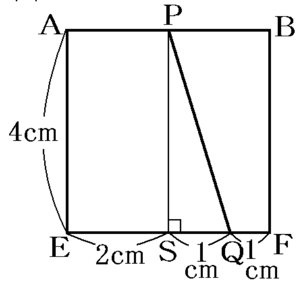
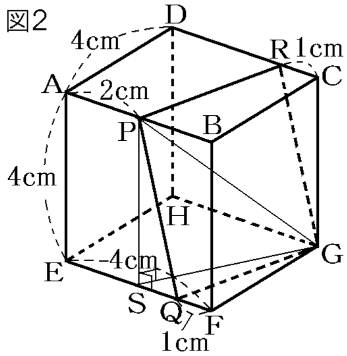


図2



$$\mathrm{PQ}=\sqrt{PS^2+QS^2}=\sqrt{4^2+1^2}$$

$$=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}\ (\mathrm{cm})$$

(2) 図 2 のような△PSG で考える。

PS⊥底面 EFGH なので，底面 EFGH 上にある SG とも垂直で，∠PSG＝90° になる。

直角三角形 PGS で，PS＝4cm なので，あと SG の長さがわかれば PG を計算できる。

直角三角形 SGF で，三平方の定理より，

$$\mathrm{SG}=\sqrt{SF^2+GF^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}\ (\mathrm{cm})$$

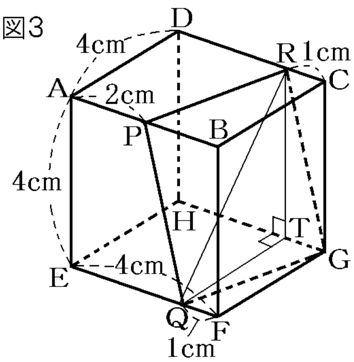
直角三角形 PGS で，三平方の定理より，

$$\mathrm{PG}=\sqrt{PS^2+SG^2}=\sqrt{4^2+\left(\sqrt{20}\right)^2}=\sqrt{16+20}=\sqrt{36}=6\ (\mathrm{cm})$$

(3) △QGR は，GQ＝GR の二等辺三角形なので，GQ と QR の長さがわかれば，面積を求めることができる。

図 3 の直角三角形 GQF で，三平方の定理より，

図3



$$\mathrm{GQ}=\sqrt{GF^2+QF^2}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}\ (\mathrm{cm})$$

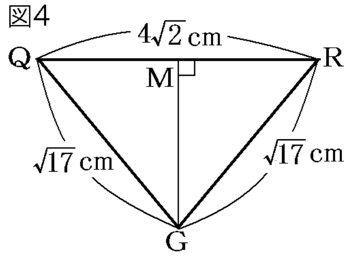
次に，R から HG に垂線 RT を引く。

直角三角形 QRT で，三平方の定理より，

$$\mathrm{QR}=\sqrt{QT^2+RT^2}=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{4^2\times 2}=4\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

図 4 で，G から QR へ垂線 GM を引くと，M は QR の中点になる。

図4



直角三角形 GRM で，三平方の定理より，

$$\mathrm{GM}=\sqrt{GR^2-RM^2}=\sqrt{\left(\sqrt{17}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{17-8}=\sqrt{9}=3(\mathrm{cm})$$

$$(\triangle\mathrm{QGR}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\times\mathrm{QR}\times\mathrm{GM}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 3=6\sqrt{2}\ (\mathrm{cm}^2)$$

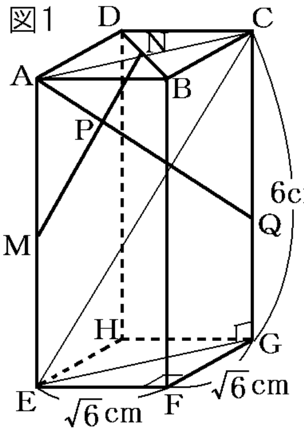
[解答 63](1) $2\sqrt{3}$ cm　(2) $\dfrac{3}{2}$ cm　(3) 3：5

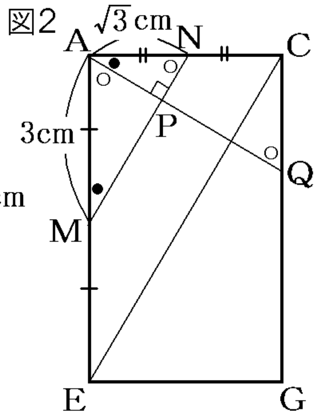
[解説]

(1) 図 1 の AEGC を通る平面で切ると，切断面は図 2 のようになる。図 2 で，N は AC の中点，M は AE の中点なので，中点連結定理より，MN＝$\dfrac{1}{2}$EC になる。

そこで，EC を求める。

図 1 の直角三角形 EGF で，三平方の定理より，





EG＝$\sqrt{EF^2+GF^2}=\sqrt{6+6}=\sqrt{12}$ (cm)

直角三角形 CEG で，三平方の定理より，

EC＝$\sqrt{EG^2+CG^2}=\sqrt{12+36}=\sqrt{48}=\sqrt{16\times 3}=4\sqrt{3}$ (cm)

よって，MN＝$\dfrac{1}{2}$EC＝$\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ (cm)

(2) 図 2 で，△ANP∽△MNA(2 角が等しい)なので，AP：MA＝AN：MN

(1)より MN＝$2\sqrt{3}$ (cm)なので，AP：3＝$\sqrt{3}$：$2\sqrt{3}$

比の外項の積は内項の積に等しいので，$2\sqrt{3}$AP＝$3\sqrt{3}$

AP＝$\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3}{2}$ (cm)

(3) △AQC∽△ANP(2 角が等しい)なので，AQ：AN＝AC：AP

AQ：$\sqrt{3}=2\sqrt{3}$：$\dfrac{3}{2}$

比の外項の積は内項の積に等しいので，

$\dfrac{3}{2}$AQ＝$\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}$，$\dfrac{3}{2}$AQ＝6，AQ＝$6\div\dfrac{3}{2}=6\times\dfrac{2}{3}=4$ (cm)

PQ＝AQ－AP＝$4-\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$ (cm)　よって，AP：PQ＝$\dfrac{3}{2}$：$\dfrac{5}{2}$＝3：5

[解答 64](1) $18\sqrt{3}$ cm² (2) $2\sqrt{3}$ cm

[解説]

(1) 直角三角形 DEH で，三平方の定理より，

$$\mathrm{DE}=\sqrt{DH^2+EH^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{36\times 2}=6\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

同様にして，EG＝$6\sqrt{2}$ (cm)，DG＝$6\sqrt{2}$ (cm)になるので，

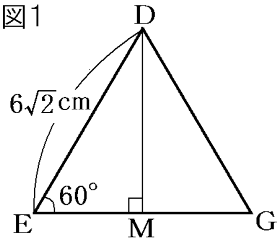
△DEG は図 1 のような 1 辺が $6\sqrt{2}$ cm の正三角形になる。

図 1 の△DEM は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は

1：2：$\sqrt{3}$ になるので，

$$\mathrm{DM}=\mathrm{DE}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{6}\ (\mathrm{cm})$$

図1



よって，(△DEG の面積)＝$\frac{1}{2}\times\mathrm{EG}\times\mathrm{DM}=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times 3\sqrt{6}=9\sqrt{12}=9\sqrt{4\times 3}=18\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)$

(2)

図2

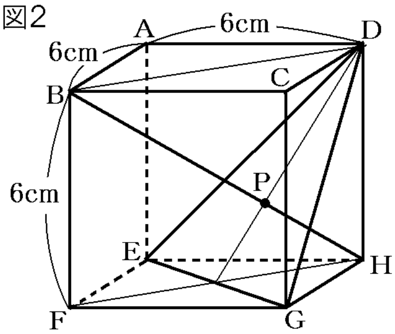


図3

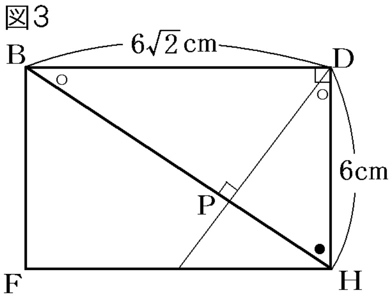


図 2 のように，この立方体を BFHD の断面で切った断面図が図 3 である。

図 2 の直角三角形 ABD で，三平方の定理より，

$$\mathrm{BD}=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{6^2\times 2}=6\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

図 3 の直角三角形 BHD で，三平方の定理より，

$$\mathrm{BH}=\sqrt{BD^2+HD^2}=\sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2+6^2}=\sqrt{72+36}=\sqrt{108}=\sqrt{36\times 3}=6\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$$

図 3 で，△DHP∽△BHD(2 角が等しい)なので，

PH：DH＝DH：BH，PH：6＝6：$6\sqrt{3}$

比の外項の積は内項の積に等しいので，

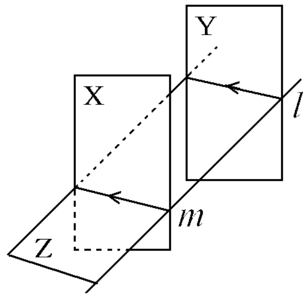
$$6\sqrt{3}\,\mathrm{PH}=36,\ \mathrm{PH}=\frac{36}{6\sqrt{3}}=\frac{36\times\sqrt{3}}{6\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{36\sqrt{3}}{18}=2\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$$

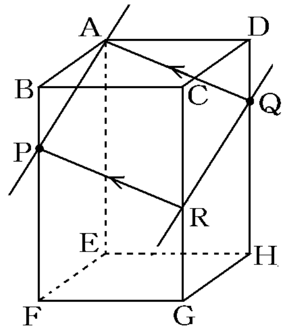
[解答 65] $8\sqrt{6}$ cm²

[解説]

まず，3 点 A，P，Q を通る平面が側面 BCGF と交わってできる直線がどのようになるかについて考える。

右図のように平行な 2 つの平面 X，Y に平面 Z が交わるとき，X と Z が交わってできる直線を m，Y と Z が交わってできる直線を l とすると，$l \,/\!/\, m$ となる。



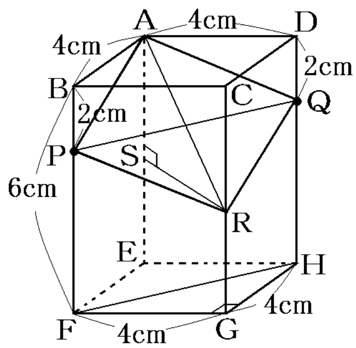


したがって，3 点 A，P，Q を通る平面が側面 BCGF と交わってできる直線を PR とすると，PR // AQ となる。･･･①

同様に 3 点 A，P，Q を通る平面が側面 CDHG と交わってできる直線を QR とすると，QR // AP となる。･･･②

①，②より，四角形 APRQ は平行四辺形になる。

直角三角形 AQD において，三平方の定理より，



$$AQ = \sqrt{AD^2 + QD^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}\ (\mathrm{cm})$$

直角三角形 APB において，三平方の定理より，

$$AP = \sqrt{AB^2 + PB^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}\ (\mathrm{cm})$$

したがって，平行四辺形 APRQ は隣り合う辺の長さが等しいので，ひし形になる。

平行四辺形やひし形は 4 辺の長さが決まっても，形は一意的に決まらない(押しつぶせば形が変わるから)。

そこで，対角線に注目する。ひし形の対角線は互いに垂直に交わるので，2 つの対角線の長さがわかれば，その面積を求めることができる。

図で，BP＝DQ なので，PQ // FH，PQ＝FH になる。

直角三角形 FHG で，三平方の定理より，

$$FH = \sqrt{FG^2 + HG^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

したがって，PQ＝ $4\sqrt{2}$ cm となる。･･･③

次に，AR の長さを求める。

図のように，R から辺 AE に垂線 RS をひく。

ところで，AQ // PR なので，P と R の高さの差は D と Q の高さの差と同じ 2cm になる。

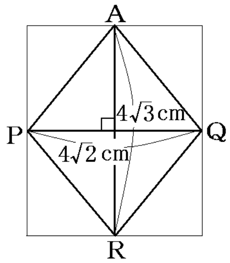
したがって，CR＝2＋2＝4(cm)になる。

よって，AS＝CR＝4(cm)

次に，SR＝EG＝FH＝$4\sqrt{2}$ (cm)になる。
直角三角形 ARS で，三平方の定理より，

AR＝$\sqrt{AS^2+SR^2}=\sqrt{4^2+\left(4\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{16+32}=\sqrt{48}=\sqrt{16\times 3}=4\sqrt{3}$ (cm)･･･④

③,④より，ひし形 APRQ の 2 つの対角線の長さは，$4\sqrt{2}$ cm，$4\sqrt{3}$ cm である。したがって，
(ひし形 APRQ の面積)＝AR×PQ÷2
＝$4\sqrt{3}\times 4\sqrt{2}\div 2=8\sqrt{6}$ (cm²)



【】円柱・球など
[円柱]
[解答 66] $\sqrt{43}$ cm
[解説]

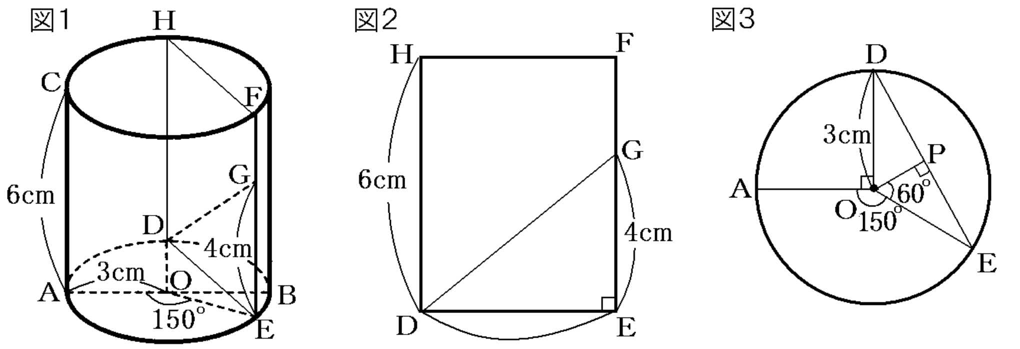
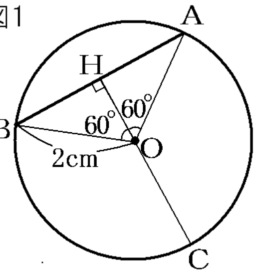


図 1 の DG を含む切断面 DEFH は図 2 のようになる。図 2 の DE の長さがわかれば，DG の長さを計算できる。
図 3 で，∠EOD＝360°－150°－90°＝120° なので，∠EOP＝60° になる。
△OEP は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は 1：2：$\sqrt{3}$ になるので，
EP＝OE×$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (cm)
よって，DE＝EP×2＝$3\sqrt{3}$ (cm)
図 2 の直角三角形 DGE で，三平方の定理より，

DG＝$\sqrt{DE^2+GE^2}=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2+4^2}=\sqrt{27+16}=\sqrt{43}$ (cm)

[解答 67](1) $2\sqrt{3}$ cm　(2) $3\sqrt{15}$ cm²
[解説]
(1) 右の図 1 で△OBH は 30°90°60° の直角三角形で 3 辺の比は $1:2:\sqrt{3}$ になるので，

図1

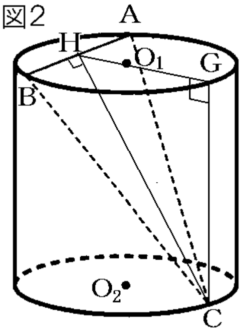


$$BH = OB \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ (\text{cm})$$

$$AB = 2BH = 2\sqrt{3}\ (\text{cm})$$

(2) 点 C が図 1 のような位置にあるとき△ABC の面積が最も大きくなる。
図 2 の CH の長さがわかれば△ABC の面積が計算できる。
図 1 の△OBH で，(1)と同じように考えると，

図2



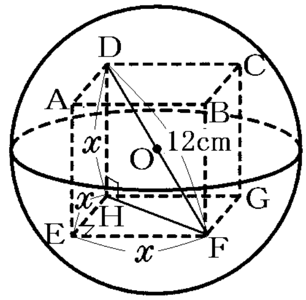
$$OH = OB \times \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1(\text{cm})$$

したがって，図 2 の $GH = GO_1 + O_1H = 2 + 1 = 3(\text{cm})$
図 2 の直角三角形 CHG で，三平方の定理より，

$$CH = \sqrt{CG^2 + GH^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}\ (\text{cm})$$

よって，(△ABC の面積) $= \frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{5} = 3\sqrt{15}\ (\text{cm}^2)$

[球]
[解答 68] $4\sqrt{3}$ cm
[解説]
立方体の 8 つの頂点が，球に内接している。
右図のように，立方体の対角線 DF の中点に球の中心 O があり，DF は球の直径になる。
この立方体の 1 辺を x cm とする。
右図の直角三角形 HFE で，三平方の定理より，



$$HF = \sqrt{HE^2 + FE^2} = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{x^2 \times 2} = \sqrt{2}x\ (\text{cm})$$

直角三角形 DFH で，三平方の定理より，

$$DF = \sqrt{DH^2 + HF^2} = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{2}x\right)^2} = \sqrt{x^2 + 2x^2} = \sqrt{x^2 \times 3} = \sqrt{3}x\ (\text{cm})$$

DF は球の直径なので，

$$\sqrt{3}x = 12,\ x = 12 \div \sqrt{3} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}\ (\text{cm})$$

[解答 69] $\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$ cm³

[解説]

右図の PT(高さ)がわかれば，正四角錐 P－ABCD の体積を求めることができる。PT＝PO－TO で，

TO＝AE÷2＝2÷2＝1(cm)なので，

球の半径(PO)を求めればよい。

右の図 1 の直角三角形 EGF で，

三平方の定理より，

図1

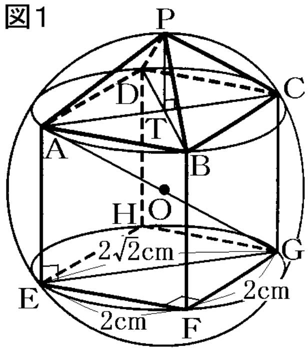
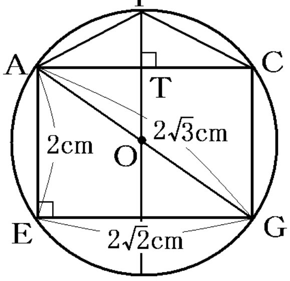


図2



EG ＝

$$\sqrt{EF^2+GF^2}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2^2\times 2}=2\sqrt{2}\,(\mathrm{cm})$$

直角三角形 AGE で，三平方の定理より，

AG＝$\sqrt{AE^2+GE^2}=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4+8}=\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$

AG は球の直径なので，球の半径は $2\sqrt{3}\div 2=\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$ になる。

したがって，PO＝$\sqrt{3}$ cm

よって，PT＝PO－TO＝$\sqrt{3}-1\,(\mathrm{cm})$

(正四角錐 P－ABCD の体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積 ABCD)×(高さ PT)

$$=\frac{1}{3}\times(2\times 2)\times\left(\sqrt{3}-1\right)=\frac{4\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}=\frac{4\sqrt{3}-4}{3}\,(\mathrm{cm}^3)$$

【】体積

【】正四面体

[解答 70](1) $2\sqrt{6}$ cm　(2) $18\sqrt{2}$ cm³

[解説]

(1) 図 1 の△OMC に注目する。

△OAB は 1 辺が 6cm の正三角形で∠OAM＝60° なので，

△OAM は 30° 90° 60° の直角三角形で，3 辺の比は 1：2：$\sqrt{3}$

である。よって，OM＝OA×$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$＝$6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$である。

CM も同様にして，CM＝$3\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$である。

△OMC の面積がわかれば図 3 の OG を求めることができる。

図1

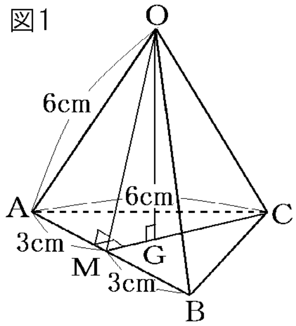
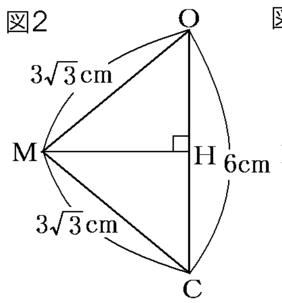
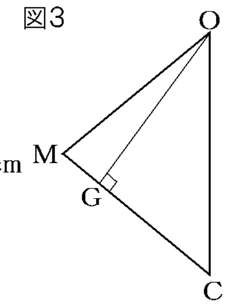


図 2 の直角三角形 OMH で，三平方の定理より，





$\mathrm{MH}=\sqrt{OM^2-OH^2}=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2-3^2}=\sqrt{27-9}$

$=\sqrt{18}=3\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$

$(\triangle\mathrm{OMC}$ の面積$)=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{OC}\times\mathrm{MH}=\dfrac{1}{2}\times6\times3\sqrt{2}$

$=9\sqrt{2}\ (\mathrm{cm}^2)$・・・①

次に，図 3 で，底辺を MC とすると，高さは OG なので，

$(\triangle\mathrm{OMC}$ の面積$)=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{MC}\times\mathrm{OG}$・・・②

①，②より，$\dfrac{1}{2}\times\mathrm{MC}\times\mathrm{OG}=9\sqrt{2}$

$\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times\mathrm{OG}=9\sqrt{2}$，$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{OG}=9\sqrt{2}$，

$\mathrm{OG}=9\sqrt{2}\div\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{2}\times\dfrac{2}{3\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{6}}{3}=2\sqrt{6}\ (\mathrm{cm})$

(2) (1)より $\mathrm{CM}=3\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$なので，

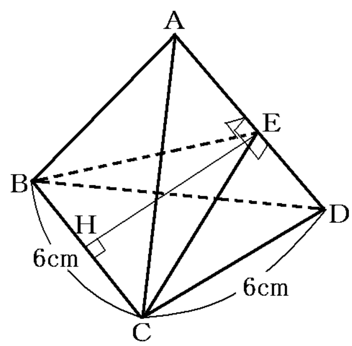
$(\triangle\mathrm{ABC}$ の面積$)=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{CM}=\dfrac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}=9\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)$

よって，(三角錐 OABC の体積$)=\dfrac{1}{3}\times(\triangle\mathrm{ABC}$ の面積$)\times\mathrm{OG}=\dfrac{1}{3}\times9\sqrt{3}\times2\sqrt{6}$

$=6\sqrt{18}=18\sqrt{2}\ (\mathrm{cm}^3)$

[解答 71] $9\sqrt{2}$ cm³

[解説]



正三角形 CAD で, E は AD の中点なので, CE⊥AD になる。
同様に，BE⊥AD なので，AE は平面 BCE と垂直な位置関係になる。よって，三角錐 ABCE の底面を△BCE としたときの高さは AE になる。AE＝AD÷2＝6÷2＝3(cm)
次に，△BCE の面積を計算するために，EC を求める。
△CDE はは 30°90°60°の直角三角形で 3 辺の比は
$1:2:\sqrt{3}$ になるので，$\mathrm{CE}=\mathrm{CD}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$

同様にして，$\mathrm{BE}=3\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$
二等辺三角形 EBC の点 E から辺 BC に垂線 EH を引くと，H は BC の中点になる。
直角三角形 ECH で，三平方の定理より，

EH＝$\sqrt{CE^2-CH^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-3^2}=\sqrt{27-9}=\sqrt{18}=\sqrt{9\times2}=3\sqrt{2}$ (cm)

(三角錐 ABCE の体積)＝$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times$BC×EH×AE＝$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times6\times3\sqrt{2}\times3=9\sqrt{2}$ (cm³)

[解答 72](1)　$4\sqrt{11}$ cm²　(2)　$\dfrac{2\sqrt{33}}{3}$ cm

[解説]

(1) 図 1 の直角三角形 ABP で, 三平方の定理より，AP＝$\sqrt{AB^2-BP^2}=\sqrt{64-16}=\sqrt{48}$

＝$\sqrt{16\times3}=4\sqrt{3}$ (cm)

図1

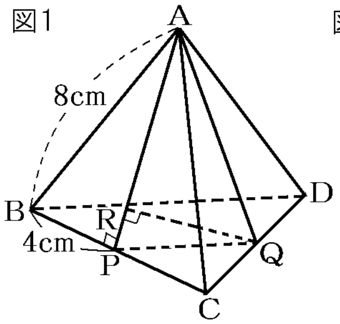


図2

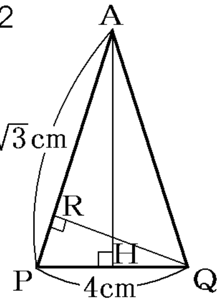


図 2 の直角三角形 APH で, 三平方の定理より,

AH＝$\sqrt{AP^2-PH^2}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-2^2}=\sqrt{48-4}$

＝$\sqrt{44}=\sqrt{4\times11}=2\sqrt{11}$ (cm)

(△APQ の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times$PQ×AH＝$\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{11}=4\sqrt{11}$ (cm²)

(2) 図 2 の△APQ の底辺を AP とすると，高さは QR になるので,

(△APQ の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times$AP×QR＝$4\sqrt{11}$ が成り立つ。

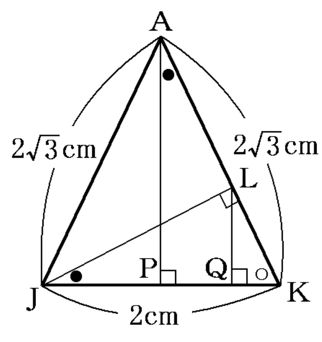
$\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times$QR＝$4\sqrt{11}$，$2\sqrt{3}\times$QR＝$4\sqrt{11}$，QR＝$\dfrac{4\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{11}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{33}}{3}$ (cm)

[解答 73] $\dfrac{1}{12}$ 倍

[解説]

三角錐 LBJD の底面を△BJD とすると，J は CD の中点なので，△BJD の面積は△BCD の $\dfrac{1}{2}$ 倍になる。三角錐 LBJD の高さは L から面 BCD におろした垂線の長さになる。

この高さが正四面体 ABCD の高さの何倍になるかがわかれば,
体積が何倍になるか求めることができる。
右図のような△AJK で，LK の長さがわかれば,
AK : LK＝AP : LQ で，高さの比 AP : LQ がわかる。
△JKL∽△AKP(2 角が等しい)なので,
KL : KP＝JK : AK



KL：1＝2： $2\sqrt{3}$
比の外項の積は内項の積に等しいので，

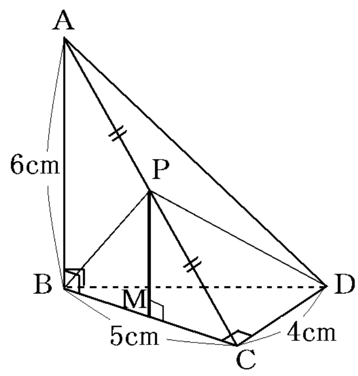
$2\sqrt{3}$ KL＝2，KL＝$\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$(cm)

よって，AP：LK＝AK：LK＝$2\sqrt{3}$ ： $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ＝6：1

したがって，三角錐 LBJD の底面積は正四面体 ABCD の底面積の$\dfrac{1}{2}$倍で，三角錐 LBJD の高さは正四面体 ABCD の高さの$\dfrac{1}{6}$倍なので，

三角錐 LBJD の体積は，正四面体 ABCD の体積の，$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$(倍)になる。

【】体積：高さの発見
[解答 74]10cm^3
[解説]
高さを求めるのがポイントである。



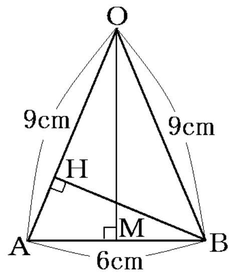
P から線分 BC に垂線 PM を引くと，
∠PMC＝∠ABC＝90° で，同位角が等しいので PM // AB
ところで, AB⊥BC, AB⊥BD なので, AB⊥面 BCD になる。
よって，PM⊥面 BCD となる。
したがって，△BCD を底面としたとき，高さは PM になる。
点 P は辺 AC の中点なので，PM＝AB÷2＝6÷2＝3(cm)
(△BCD の面積)＝BC×CD÷2＝5×4÷2＝10(cm^2)

よって，(三角錐 P－BCD の体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(△BCD の面積)×PM

＝$\dfrac{1}{3}$×10×3＝10(cm^3)

[解答 75](1) $4\sqrt{2}\,cm$　(2) $8\sqrt{7}\,cm^3$

[解説]



(1) 右図のように，側面の△OAB を取り出して考える。

底辺を OA とすると，BH は高さになる。

そこで，別の方法で△OAB の面積を求める。

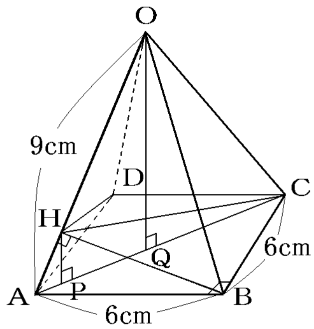
O から底辺 AB に垂線 OM を引くと, △OAB は二等辺三角形なので,

M は AB の中点になる。したがって，AM＝6÷2＝3(cm)

直角三角形 OAM で，三平方の定理より，

OM＝$\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{9^2-3^2}=\sqrt{72}=\sqrt{36\times 2}=6\sqrt{2}$ (cm)

よって，(△OAB の面積)＝AB×OM÷2＝6× $6\sqrt{2}$ ÷2＝$18\sqrt{2}$ (cm²)



底辺を OA，BH を高さとすると,

(△OAB の面積)＝OA×BH÷2＝$18\sqrt{2}$ (cm²)

9×BH÷2＝$18\sqrt{2}$，BH＝$18\sqrt{2}$ ÷9×2＝ $4\sqrt{2}$ (cm)

(2) 右図のように対角線 AC に，垂線 HP，OQ を引く。

四角錐 H－ABCD で, ABCD を底面とすると, 高さは HP となる。

そこで，HP の長さを求める。

直角三角形 ABC で，三平方の定理より，

AC＝$\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{6^2\times 2}=6\sqrt{2}$ (cm)

Q は AC の中点になるので,

AQ＝$6\sqrt{2}\div 2=3\sqrt{2}$ (cm)

直角三角形 OAQ で，三平方の定理より，

OQ＝$\sqrt{OA^2-AQ^2}=\sqrt{9^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{81-18}=\sqrt{63}=\sqrt{9\times 7}=3\sqrt{7}$ (cm)

△OAQ で，HP // OQ なので，HP：OQ＝AH：AO，HP： $3\sqrt{7}$ ＝AH：9

AH の長さが求まれば，HP が計算できる。

直角三角形 ABH で，AH＝$\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{6^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{36-32}=\sqrt{4}=2$ (cm)

よって，HP： $3\sqrt{7}$ ＝2：9　比の外項の積は内項の積に等しいので，HP×9＝ $3\sqrt{7}$ ×2

よって，HP＝ $3\sqrt{7}$ ×2÷9＝$\dfrac{3\sqrt{7}\times 2}{9}=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$ (cm)

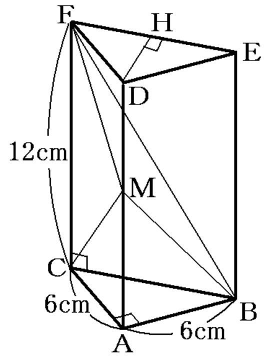
(四角錐 H－ABCD の体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面 ABCD の面積)×(高さ HP)

＝$\dfrac{1}{3}\times 6^2\times\dfrac{2\sqrt{7}}{3}=\dfrac{1\times 6\times 6\times 2\sqrt{7}}{3\times 3}=8\sqrt{7}$ (cm³)

[解答 76]72cm^3

[解説]

三角錐 MFCB の△BFC を底面として考える。



直角三角形 BCA で，三平方の定理より，

BC＝$\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{36\times2}=6\sqrt{2}$ (cm)

(△BFC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×BC×FC＝$\dfrac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times12=36\sqrt{2}$ (cm^2)

少し難しいのは，M から底面までの距離(高さ)である。

△BFC は面 BCFE に含まれているが，面 BCFE と辺 AD は平行なので，M からこの平面に引いた垂線の長さは，D からこの平面に引いた垂線 DH の長さと等しくなる。

直角三角形 DEH で，DE＝AB＝6(cm)，EH＝$\dfrac{1}{2}$EF＝$\dfrac{1}{2}$BC＝$\dfrac{1}{2}\times6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ (cm)なので，

三平方の定理より，

DH＝$\sqrt{DE^2-EH^2}=\sqrt{6^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{36-18}=\sqrt{18}=\sqrt{9\times2}=3\sqrt{2}$ (cm)

よって，(三角錐 MFCB の体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(△BFC の面積)×(高さ)＝$\dfrac{1}{3}\times36\sqrt{2}\times3\sqrt{2}$＝72(cm^3)

[解答 77]16 cm^3

[解説]

まず，四角錐 DFBCG の底面の面積を求める。

図1

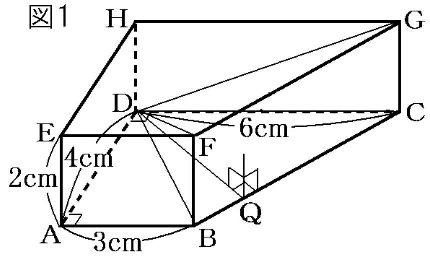


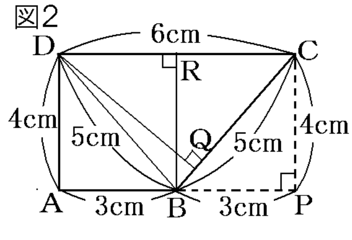
図 2 の直角三角形 BCP で，三平方の定理より，

BC＝$\sqrt{BP^2+CP^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ (cm)

(長方形 FBCG の面積)＝FB×BC＝2×5＝10(cm^2)

少し難しいのは高さである。

図2



点 D をふくむ面 DABC と面 FBCG が垂直であることに注目する。D から BC へ垂線 DQ を引くと，DQ は面 FBCG にも垂直になる。したがって，DQ が高さになる。

図 2 を使って DQ の長さを求める。

△BCD で DC を底辺と考えると BR が高さになるので，

(△BCD の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×DC×BR＝$\dfrac{1}{2}\times6\times4$＝12(cm^2)

△BCD で BC を底辺と考えると DQ が高さになる。

(△BCD の面積)$=\frac{1}{2}\times$BC$\times$DQ$=\frac{1}{2}\times 5\times$DQ$=\frac{5}{2}$DQ

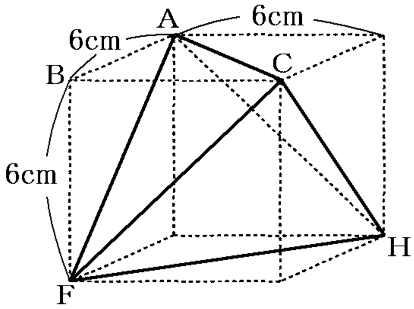
よって，$\frac{5}{2}$DQ$=12$，DQ$=12\div\frac{5}{2}=12\times\frac{2}{5}=\frac{24}{5}$(cm)

(四角錐 DFBCG の体積)$=\frac{1}{3}\times$(長方形 FBCG の面積)$\times$DQ$=\frac{1}{3}\times 10\times\frac{24}{5}=16$(cm^3)

【】体積→高さ

[解答 78]① 72cm^3　② $4\sqrt{3}$cm

[解説]

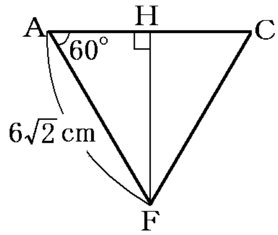


① 三角錐 AFCH の体積は，立方体の体積から，4 つの合同な三角錐(FABC など)を引き算して求めることができる。

(立方体の体積)$=6\times 6\times 6=216$(cm^3)

(三角錐 FABC の体積)$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 6\times 6\times 6=36$(cm^3)

(三角錐 AFCH の体積)$=216-36\times 4=72$(cm^3)



② FC$=\sqrt{CB^2+FB^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{36\times 2}=6\sqrt{2}$ (cm)

△AFC は 1 辺が $6\sqrt{2}$ cm の正三角形である。

右図で，△AFH は 30°　90°　60°　の直角三角形で 3 辺の比は 1 : 2 : $\sqrt{3}$ になるので，

FH$=$AF$\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{6}$ (cm)

(△AFC の面積)$=\frac{1}{2}\times$AC$\times$FH$=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times 3\sqrt{6}=9\sqrt{12}=9\sqrt{4\times 3}=18\sqrt{3}$ (cm^2)

図の三角錐 AFCH で，△AFC を底面としたときの高さを h cm とすると，

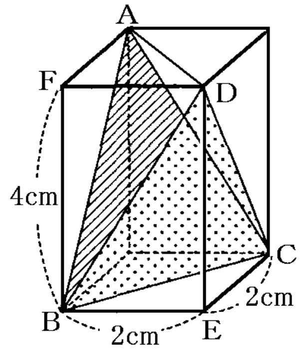
(三角錐 AFCH の体積)$=\frac{1}{3}\times$(△AFC の面積)$\times h=72$

$\frac{1}{3}\times 18\sqrt{3}\times h=72$，$6\sqrt{3}h=72$，$h=\frac{72}{6\sqrt{3}}=\frac{72\times\sqrt{3}}{6\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{72\sqrt{3}}{18}=4\sqrt{3}$ (cm)

[解答 79](1) $2\sqrt{2}$ cm　(2) $\dfrac{8}{3}$ cm

[解説]

(1) 直角三角形 BCE で，三平方の定理より，



BC$=\sqrt{BE^2+CE^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{4\times 2}=2\sqrt{2}$ (cm)

(2) 右図のように A と D を結ぶ。

三角錐 DABC の体積と底面の△ABC の面積を求め，これを使って高さを間接的に求める。

(正四角柱の体積)$=2\times 2\times 4=16$(cm^3)

(三角錐 DBCE の体積)$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times 4=\dfrac{8}{3}$ (cm^3)

三角錐 DABC はこの正四角柱から，4 つの合同な三角錐(三角錐 DBCE など)を切り取ったものであるので，

(三角錐 DABC の体積)$=16-\dfrac{8}{3}\times 4=16-\dfrac{32}{3}=\dfrac{48-32}{3}=\dfrac{16}{3}$ (cm^3)・・・①

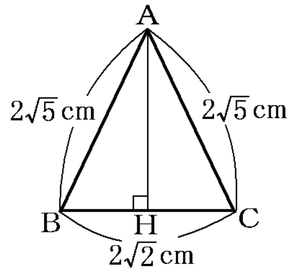
次に，△ABC の面積を求める。

直角三角形 ABF で，三平方の定理より，

AB$=\sqrt{AF^2+BF^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}=2\sqrt{5}$ (cm)

同様にして，AC$=2\sqrt{5}$ (cm)

右図の直角三角形 ABH で，三平方の定理より，



AH$=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{20-2}$

$=\sqrt{18}=\sqrt{9\times 2}=3\sqrt{2}$ (cm)

(△ABC の面積)$=\dfrac{1}{2}\times$BC$\times$AH$=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=6$(cm^2)・・・②

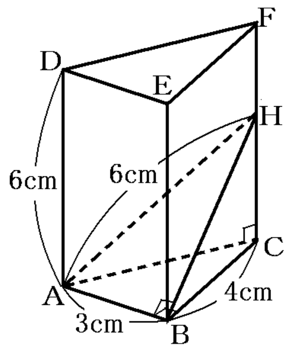
頂点 D と面 ABC の距離を h cm とおくと，

$\dfrac{1}{3}\times$(△ABC の面積)$\times h=$(三角錐 DABC の体積)なので，①，②より，

$\dfrac{1}{3}\times 6\times h=\dfrac{16}{3}$，$6h=16$，$h=\dfrac{16}{6}=\dfrac{8}{3}$ (cm)

[解答 80] $\dfrac{4\sqrt{33}}{9}$ cm

[解説]



三角錐 HABC の体積と△ABH の面積から，面 ABH と点 C との距離を求める。

まず，△ABC を底面，HC を高さと考えて体積を求める。

直角三角形 ABC で，三平方の定理より，

$$\mathrm{AC} = \sqrt{AB^2 + CB^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5\,(\mathrm{cm})$$

直角三角形 AHC で，三平方の定理より，

$$\mathrm{HC} = \sqrt{AH^2 - AC^2} = \sqrt{36-25} = \sqrt{11}\,(\mathrm{cm})$$

よって，(三角錐 HABC の体積) $= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{CB} \times \mathrm{HC} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sqrt{11} = 2\sqrt{11}\,(\mathrm{cm}^3)$

次に，△ABH を底面と考えたときの体積について考える。

AB⊥面 BCFE なので，∠ABH＝90° である。

直角三角形 AHB で，三平方の定理より，

$$\mathrm{BH} = \sqrt{AH^2 - AB^2} = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = \sqrt{9\times 3} = 3\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$$

よって，(△ABH の面積) $= \dfrac{1}{2} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{BH} = \dfrac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}\,(\mathrm{cm}^2)$

面 ABH と点 C との距離(高さ)を h cm とすると，

(三角錐 HABC の体積) $= \dfrac{1}{3} \times$ (△ABH の面積) $\times h$

$$2\sqrt{11} = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{2} \times h,\quad 4\sqrt{11} = 3\sqrt{3}h,\quad h = \frac{4\sqrt{11}}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{11}\times\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{33}}{9}\,(\mathrm{cm})$$

[解答 81]2 cm

[解説]

組み立てた立体は右の図 1 のようになる。

まず，△MNE を底面として，この立体の体積を求める。

このときの，ポイントは DE が高さになることである。

ここで，直線が平面と垂直になるための条件について説明しておこう。右の図 2 のように，直線 PQ が平面 T 上の 2 つの直線 QR，QS とそれぞれ垂直である(PQ⊥QS，PQ⊥QR)とき，PQ は平面 T に垂直になる。

図1

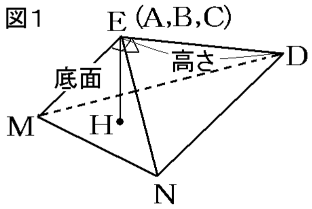


図2

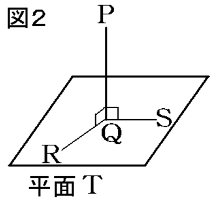


図 1 で，∠DEN＝∠DCN＝90°，∠DEM＝∠DAM＝90° なので，DE は底面 MNE 上の EN と EM にそれぞれ垂直になる。

よって，DE⊥△MNE となる。

(△MNE の面積)＝(△MNB の面積)＝3×3÷2＝$\frac{9}{2}$(cm²)

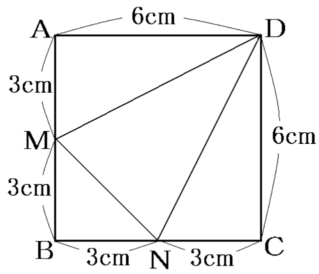
DE＝DA＝6(cm)

したがって，(体積)＝$\frac{1}{3}$×(△MNE の面積)×(高さ DE)＝$\frac{1}{3}\times\frac{9}{2}\times 6$＝9(cm³)

次に，図 1 の△MND を底面としたとき，E から△MND へおろした垂線 EH が高さになる。

このとき，(体積)＝$\frac{1}{3}$×(△MND の面積)×(高さ EH)＝9(cm³)・・・①

そこで，△MND の面積を求める。右図から，



(△MND)＝(正方形 ABCD)−(△MDA)−(△NDC)−(△MNB)

＝6×6−6×3÷2−6×3÷2−3×3÷2

＝36−9−9−$\frac{9}{2}$＝$\frac{27}{2}$(cm²)

①に(△MND)＝$\frac{27}{2}$を代入すると，

$\frac{1}{3}\times\frac{27}{2}$×(高さ EH)＝9

よって，(高さ EH)＝$9\div\frac{1}{3}\div\frac{27}{2}=9\times 3\times\frac{2}{27}$＝2(cm)

【】角錐台

[解答 82]56cm^3

[解説]

<Point> AD，BP，CQ の延長線→1 点で交わる。

右図のように，この三角柱を上方向にのばした図形を考える。

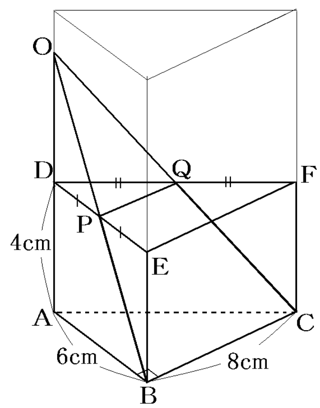
同時に AD, BP, CQ を延長すると, 3 直線は 1 点 O で交わる。

DP // AB，DP : AB＝1 : 2 なので,

OD : OA＝1 : 2 となる。

したがって，OD＝DA＝4(cm)，OA＝4＋4＝8(cm)

まず，三角錐 O－ABC の体積を求める。



(底面△ABC の面積)$=\frac{1}{2}\times AB\times BC=\frac{1}{2}\times 6\times 8=24$(cm^2)

(O－ABC の体積)$=\frac{1}{3}\times$(底面△ABC の面積)×(高さ OA)

$=\frac{1}{3}\times 24\times 8=64$(cm^3)

次に，三角錐 O－DPQ の体積を求める。

三角錐 O－DPQ と三角錐 O－ABC は相似で,

相似比は OD : OA＝4 : 8＝1 : 2　したがって，体積比は $1^3 : 2^3=1 : 8$

よって，(O－DPQ の体積)＝(O－ABC の体積)$\times\frac{1}{8}=64\times\frac{1}{8}=8$(cm^3)

よって，(O－ABC の体積)－(O－DPQ の体積)＝64－8＝56(cm^3)

[解答 83] $\frac{56}{3}$cm^3

[解説]

<Point> 右図のように，GC，FP，HQ を延長して考える。

OC : OG＝PC : FG＝2 : 4＝1 : 2

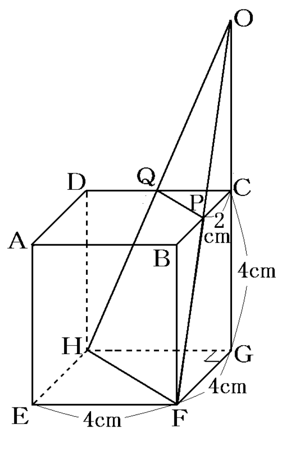
よって，OC＝CG＝4cm，OG＝8cm

(O－HFG の体積)$=\frac{1}{3}\times$(底面積)×(高さ)

$=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times 4\times 4)\times 8=\frac{64}{3}$(cm^3)

三角錐 O－QPC と三角錐 O－HFG は相似で,

相似比は，PC : FG＝1 : 2 なので，体積比は $1^3 : 2^3=1 : 8$



よって，(O－QPC の体積)＝(O－HFG の体積)×$\frac{1}{8}=\frac{64}{3}\times\frac{1}{8}=\frac{8}{3}$(cm^3)

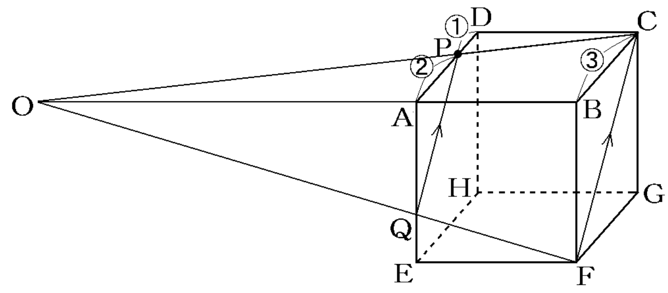
よって，(立体 PCQ－FGH の体積)＝(O－HFG の体積)－(O－QPC の体積)

$=\frac{64}{3}-\frac{8}{3}=\frac{56}{3}$(cm^3)

[解答 84] $\frac{19}{54}a^3$cm^3

[解説]

3 点 F，C，P を通る平面が AEHD の面と交わってできる直線は CF と平行になるので, 右図の PQ のようになる。したがって，この平面によって切り取られ頂点 B をふくむ立体は，右図の APQ－BCF になる。



CP，BA，FQ を延長すると，3 直線は 1 点で交わる。

AP : PD＝2 : 1，AD＝BC なので，AP : BC＝2 : (2＋1)＝2 : 3

したがって，OA : OB＝AP : BC＝2 : 3，OA : AB＝2 : 1

AB＝a cm なので，OA＝$2a$ cm，OB＝$3a$ cm

(O－BCF の体積)＝$\frac{1}{3}$×(底面積△BCF)×(高さ OB)＝$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times a\times a\times 3a=\frac{1}{2}a^3$(cm^3)

三角錐 O－APQ と三角錐 O－BCF は相似で，相似比は AP : BC＝2 : 3 なので，

体積比は $2^3 : 3^3$＝8 : 27

よって，(O－APQ の体積)＝(O－BCF の体積)×$\frac{8}{27}=\frac{1}{2}a^3\times\frac{8}{27}=\frac{4}{27}a^3$(cm^3)

ゆえに，(O－BCF の体積)－(O－APQ の体積)＝$\frac{1}{2}a^3-\frac{4}{27}a^3=\frac{27}{54}a^3-\frac{8}{54}a^3=\frac{19}{54}a^3$(cm^3)

[解答 85]224cm^3

[解説]

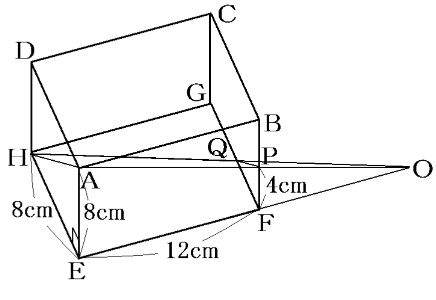
<Point> EF，AP，HQ を延長して考える。

OF : OE＝PF : AE＝4 : 8＝1 : 2

よって，OF＝FE＝12cm，OE＝24cm

三角錐 O－AHE の底面を△AHE とすると，

高さは OE＝24cm



(底面積)＝HE×AE÷2＝8×8÷2＝32(cm²)

(三角錐 O－AHE の体積)＝$\frac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\frac{1}{3}$×32×24＝256(cm³)

三角錐 O－PQF と三角錐 O－AHE は相似で，相似比は PF：AE＝1：2 なので，
体積比は，$1^3:2^3$＝1：8

よって，(三角錐 O－PQF の体積)＝256×$\frac{1}{8}$＝32(cm³)

ゆえに，(三角錐 O－AHE の体積)－(三角錐 O－PQF の体積)＝256－32＝224(cm³)

【】その他

[円柱]

[解答 86](1) $40\sqrt{2}$ cm²　(2) 20π cm²　(3) $40\pi-80$ (cm³)

[解説]

(1) 図 1 の直角三角形 ADO で，三平方の定理より，

AD＝$\sqrt{OA^2+OD^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{16\times 2}=4\sqrt{2}$ (cm)

(長方形 ABCD の面積)＝AD×AB＝$4\sqrt{2}\times 10=40\sqrt{2}$ (cm²)

(2) 図 1 で，(弧 AD)＝(円周)×$\frac{90}{360}=2\pi\times 4\times\frac{1}{4}=2\pi$ (cm)

(水にふれている部分の面積)＝(弧 AD)×AB＝$2\pi\times 10=20\pi$ (cm²)

(3) 弧 BC と弦 BC で囲まれた部分の面積を S(cm²)とすると，

S＝(おうぎ形 OAD)－(△OAD)＝$\pi\times 4^2\times\frac{90}{360}-\frac{1}{2}\times 4\times 4=4\pi-8$ (cm²)

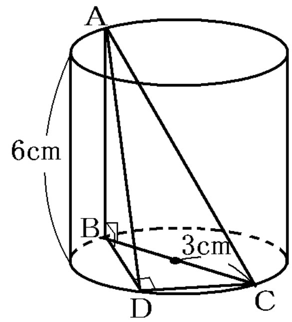
(水の体積)＝S×AB＝$(4\pi-8)\times 10=40\pi-80$ (cm³)

[解答 87](1) $6\sqrt{2}$ cm　(2) $9\sqrt{3}$ cm³

[解説]

(1) 直角三角形 ACB で，三平方の定理より，

AC＝$\sqrt{AB^2+CB^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{6^2\times 2}=6\sqrt{2}$ (cm)



(2) △ABC の底辺を BC，△ABD の底辺を BD とすると，高さはともに AB になる。△ABC の面積が，△ABD の面積の 2 倍になるので，BC＝2BD になる。

よって，BD＝BC÷2＝6÷2＝3(cm)

∠D は直径 BC の円周角なので 90°である。

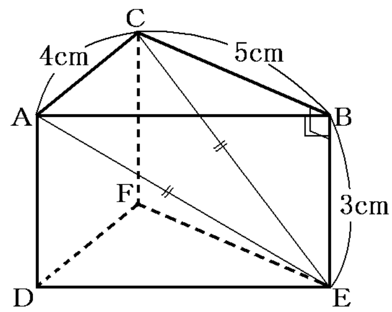
直角三角形 BCD で，三平方の定理より，

$\mathrm{DC}=\sqrt{BC^2-BD^2}=\sqrt{6^2-3^2}=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=\sqrt{9\times3}=3\sqrt{3}$ (cm)

(△BCD の面積)$=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{DC}\times\mathrm{BD}=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times3=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ (cm²)

(三角錐 ABCD の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(△BCD の面積)$\times\mathrm{AB}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\times6=9\sqrt{3}$ (cm³)

[解答 88] $6\sqrt{21}$ cm³
[解説]
△ABC を底面とすると，高さは BE(＝3cm)である。
底面の面積がわかれば，体積を求めることができる。
そこで，まず，辺 AB の長さを求めることにする。
直角三角形 CEB で，三平方の定理より，

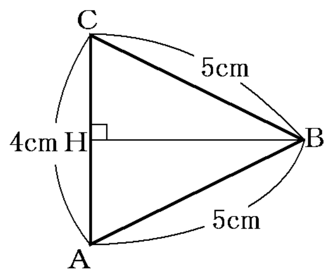


$\mathrm{CE}=\sqrt{CB^2+EB^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$ (cm)

$\mathrm{AE}=\mathrm{CE}=\sqrt{34}$ (cm)
直角三角形 AEB で，三平方の定理より，

$\mathrm{AB}=\sqrt{AE^2-EB^2}=\sqrt{\left(\sqrt{34}\right)^2-3^2}=\sqrt{34-9}=\sqrt{25}=5$ (cm)

したがって，△ABC は AB＝CB＝5(cm)の二等辺三角形であることがわかる(二等辺三角形は 3 辺がわかれば面積を求めることができる)。右図の直角三角形 BCH で，三平方の定理より，



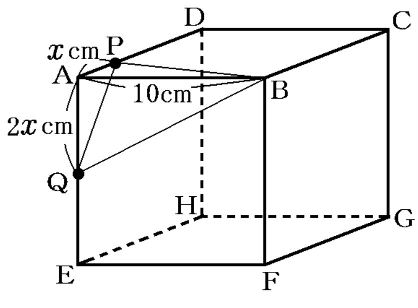
$\mathrm{BH}=\sqrt{BC^2-CH^2}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$ (cm)

よって，(△ABC の面積)$=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{AC}\times\mathrm{BH}=\dfrac{1}{2}\times4\times\sqrt{21}=2\sqrt{21}$ (cm²)

(三角柱の体積)＝(△ABC の面積)×BE$=2\sqrt{21}\times3=6\sqrt{21}$ (cm³)

[解答 89] $\sqrt{6}$ cm
[解説]△ABP を底面とすると，高さは AQ である。
AP＝x (cm)とおくと， AQ＝2AP＝$2x$ (cm)

(QABP の体積)$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{AP}\times\mathrm{AQ}=20$



$\dfrac{1}{6}\times10\times x\times2x=20$， $\dfrac{10}{3}x^2=20$， $x^2=6$

$x>0$ なので， $x=\sqrt{6}$ (cm)

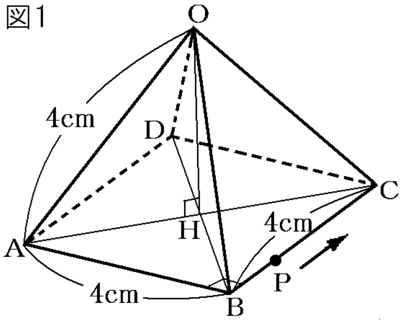
[解答 90] $x=3,\ 9$

[解説]

まず，この正四角錐の高さを求める。

図１の直角三角形 ACB で，三平方の定理より，

図1



$\mathrm{AC}=\sqrt{AB^2+CB^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{16\times2}=4\sqrt{2}$ (cm),

$\mathrm{AH}=\mathrm{AC}\div2=4\sqrt{2}\div2=2\sqrt{2}$ (cm)

直角三角形 OAH で，三平方の定理より，

$\mathrm{OH}=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{4^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{16-8}=\sqrt{8}$

$=\sqrt{4\times2}=2\sqrt{2}$ (cm)

次に，P が BC 間にあるとき，CD 間にあるとき，DA 間にあるときに分けて考える。

図2

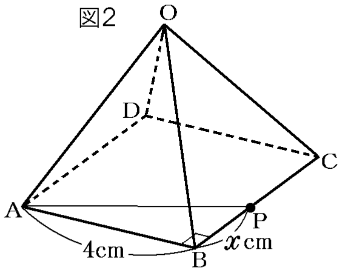


図3

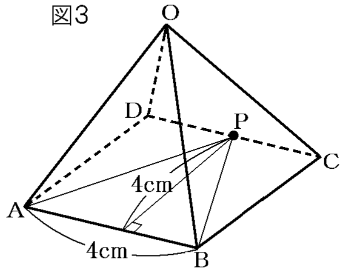
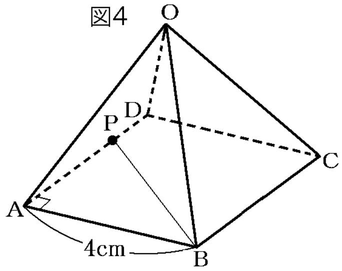


図4



① 図 2 のように P が BC 間にあるとき

$(\triangle\mathrm{ABP}\text{ の面積})=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{PB}=\dfrac{1}{2}\times4\times x=2x\ (\mathrm{cm}^2)$

$(\text{三角錐 OABP の体積})=\dfrac{1}{3}\times(\triangle\mathrm{ABP}\text{ の面積})\times(\text{高さ})=\dfrac{1}{3}\times2x\times2\sqrt{2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}x\ (\mathrm{cm}^3)$

三角錐 OABP の体積が $4\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^3$ なので，$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}x=4\sqrt{2}$ とおくと，$\dfrac{1}{3}x=1$，$x=3$

② 図 3 のように P が CD 間にあるとき

$(\triangle\mathrm{ABP}\text{ の面積})=\dfrac{1}{2}\times4\times4=8(\mathrm{cm}^2)$

$(\text{三角錐 OABP の体積})=\dfrac{1}{3}\times(\triangle\mathrm{ABP}\text{ の面積})\times(\text{高さ})=\dfrac{1}{3}\times8\times2\sqrt{2}=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}\ (\mathrm{cm}^3)$

したがって，条件を満たす x は存在しない。

③ 図 4 のように P が DA 間にあるとき

BC＋CD＋DP＝x なので，AP＝4×3－x＝$12-x$ (cm)

$(\triangle\mathrm{ABP}\text{ の面積})=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{PB}=\dfrac{1}{2}\times4\times(12-x)=2(12-x)(\mathrm{cm}^2)$

(三角錐 OABP の体積)＝$\frac{1}{3}$×(△ABP の面積)×(高さ)＝$\frac{1}{3}\times 2(12-x)\times 2\sqrt{2}$

＝$\frac{4\sqrt{2}}{3}(12-x)$(cm³)

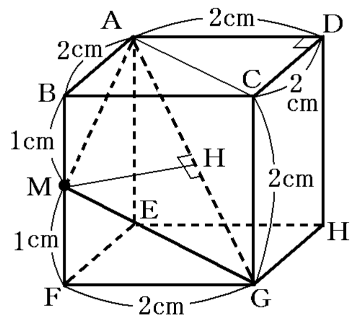
三角錐 OABP の体積が $4\sqrt{2}$ cm³ なので，$\frac{4\sqrt{2}}{3}(12-x)=4\sqrt{2}$ とおくと，

$\frac{1}{3}(12-x)=1$，$12-x=3$，$x=12-3=9$(cm)

[回転体]

[解答 91] $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ cm³

[解説]



まず，△AMG の 3 辺の長さを求める。直角三角形 ACD で，

三平方の定理より，AC＝$\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$(cm)

直角三角形 AGC で，三平方の定理より，

AG＝$\sqrt{AC^2+GC^2}=\sqrt{(\sqrt{8})^2+2^2}=\sqrt{8+4}=\sqrt{12}$

　＝$\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{3}$(cm)

直角三角形 MGF で，三平方の定理より，

MG＝$\sqrt{MF^2+GF^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$(cm)

同様にして，MA＝$\sqrt{5}$(cm)

点 M から AG へ垂線 MH を引くと，△AMG は二等辺三角形なので，AH＝GH＝$\sqrt{3}$(cm)

直角三角形 AMH で，三平方の定理より，

MH＝$\sqrt{MA^2-AH^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{5-3}=\sqrt{2}$(cm)

△AMH を対角線 AG を軸として 1 回転させてできる立体は，底面の半径が MH＝$\sqrt{2}$(cm)で，高さが AH＝$\sqrt{3}$(cm)の円錐になる。この円錐の体積は，

$\frac{1}{3}\times\pi\times \mathrm{MH}^2\times \mathrm{AH}=\frac{1}{3}\pi\times(\sqrt{2})^2\times\sqrt{3}=\frac{1}{3}\pi\times 2\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$(cm³)

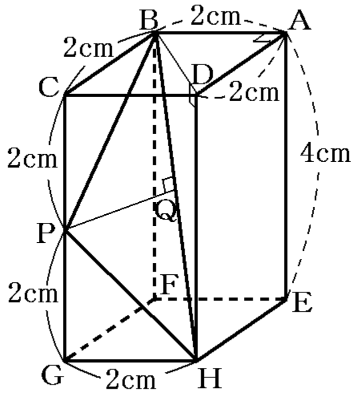
同様にして，△GMH を対角線 AG を軸として 1 回転させてできる立体の体積も $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$(cm³)

になる。よって，求める体積は，$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi=\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$(cm³)になる。

[解答 92](1)　$2\sqrt{6}$ cm　(2)　$\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\pi$ cm^3

[解説]

(1) 直角三角形 BDA で，三平方の定理より，



$$\mathrm{BD} = \sqrt{BA^2 + DA^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

直角三角形 BHD で，三平方の定理より，

$$\mathrm{BH} = \sqrt{BD^2 + HD^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{8+16} = \sqrt{24}$$

$$= \sqrt{4\times 6} = 2\sqrt{6}\ (\mathrm{cm})$$

(2) 直角三角形 PHG で，三平方の定理より，

PH＝$\sqrt{4+4} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$ (cm)　同様に，PB＝$2\sqrt{2}$ (cm)

したがって，△PBH は PB＝PH の二等辺三角形になる。

P から BH に垂線 PQ を引くと，二等辺三角形の性質より，BQ＝HQ になる。

(1)より，BH＝$2\sqrt{6}$ (cm)なので，BQ＝HQ＝$2\sqrt{6} \div 2 = \sqrt{6}$ (cm)

直角三角形 BPQ で，三平方の定理より，

$$\mathrm{PQ} = \sqrt{BP^2 - BQ^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{8-6} = \sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

△BPQ を BH を軸として 1 回転させてできる立体は，底面の半径が PQ＝$\sqrt{2}$ (cm)で，高さが BQ＝$\sqrt{6}$ (cm)の円錐になる。この円錐の体積は，

$$\frac{1}{3}\times\pi\times\mathrm{PQ}^2\times\mathrm{BQ} = \frac{1}{3}\pi\times\left(\sqrt{2}\right)^2\times\sqrt{6} = \frac{1}{3}\pi\times 2\times\sqrt{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\ (\mathrm{cm}^3)$$

同様に，△HPQ を BH を軸として 1 回転させてできる立体の体積も $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ (cm^3)

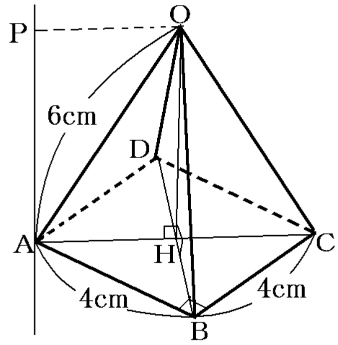
よって，求める体積は，$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi + \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}\pi$ (cm^3)

[解答 93](1)　$4\sqrt{2}$ cm　(2)　$2\sqrt{7}$ cm　(3)　$32\sqrt{7}\pi$ cm^3

[解説]

(1) 右図の直角三角形 ABC で，三平方の定理より，

図1



$$\mathrm{AC} = \sqrt{AB^2 + CB^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{16\times 2} = 4\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

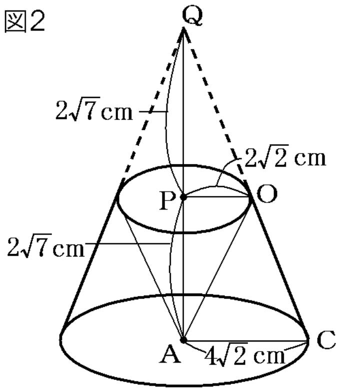
(2) AH＝AC÷2＝$4\sqrt{2} \div 2 = 2\sqrt{2}$ (cm)

直角三角形 OAH で，三平方の定理より，

$\mathrm{OH} = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{36-8} = \sqrt{28}$

$= \sqrt{4\times 7} = 2\sqrt{7}$ (cm)

図2



(3) 頂点 A を通り底面 ABCD に垂直な直線を軸として，正四角すい OABCD を 1 回転させてできる立体は，図 2 の Q を頂点 AC を底面の円の半径とする円錐(V_1 とする)から，Q を頂点 PQ を底面の円の半径とする円錐(V_2 とする)と，A を頂点と PO を底面の円の半径とする円錐(V_3 とする)をのぞいた部分になる。

図 2 で，PO // AC なので，△QPO∽△QAC で，

PO＝AH＝ $2\sqrt{2}$ (cm)，AC＝ $4\sqrt{2}$ (cm)なので相似比は 1：2 である。したがって，QA＝ $4\sqrt{7}$ (cm)，QP＝ $2\sqrt{7}$ (cm)になる。

V_1 は底面の半径が $4\sqrt{2}$ cm で高さが $4\sqrt{7}$ (cm)の円錐なので，

(V_1 の体積)$= \dfrac{1}{3}\times\pi\times\left(4\sqrt{2}\right)^2\times 4\sqrt{7} = \dfrac{1}{3}\pi\times 32\times 4\sqrt{7} = \dfrac{128\sqrt{7}\pi}{3}$ (cm^3)

V_2 と V_1 は相似で，相似比は 1：2 なので，体積比は $1^3 : 2^3 = 1 : 8$ なので，

$V_2 = \dfrac{1}{8}V_1 = \dfrac{1}{8}\times\dfrac{128\sqrt{7}\pi}{3} = \dfrac{16\sqrt{7}\pi}{3}$ (cm^3)

同様にして，$V_3 = \dfrac{16\sqrt{7}\pi}{3}$ (cm^3)

よって，(求める体積)$= V_1 - V_2 - V_3 = \dfrac{128\sqrt{7}\pi}{3} - \dfrac{16\sqrt{7}\pi}{3} - \dfrac{16\sqrt{7}\pi}{3} = \dfrac{96\sqrt{7}\pi}{3} = 32\sqrt{7}\pi$ (cm^3)