【】公式を使った数の計算

[問題](1 学期期末)

乗法公式を利用して計算しなさい。

101^2

[解答欄]

[解答]$101^2=(100+1)^2=100^2+2\times100\times1+1^2=10201$

[解説]

$\ast 101=100+1$ より，$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ の公式を使うことに気づく。

[問題](1 学期期末)

次の式をくふうして計算しなさい。途中の計算過程がはっきり分かるように書きなさい。

(1) 105×95　　(2) 42^2

[解答欄]

(1)
(2)

[解答]

(1) $105\times95=(100+5)\times(100-5)=100^2-5^2=9975$

(2) $42^2=(40+2)^2=40^2+2\times40\times2+2^2=1764$

[解説]

(1) $105=100+5,\ 95=100-5$ より $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ の公式を使うことに気づく。

(2) $42=40+2$ より $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ の公式を使うことに気づく。

[問題](1 学期期末)

工夫して次の計算をしなさい。(途中の式を書くこと)

① 52^2　　② 88×92

[解答欄]

①
②

[解答]① $52^2=(50+2)^2=50^2+2\times50\times2+2^2=2704$

② $88\times92=(90-2)\times(90+2)=90^2-2^2=8096$

[解説]

①$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ の公式を使う。

②$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ の公式を使う。

[問題](1 学期期末)

次の式をくふうして計算しなさい。ただし，くふうした点がわかるように，途中の計算も解答用紙に書きなさい。

(1) 79^2

(2) 102×98

[解答欄]

(1)
(2)

[解答](1) $79^2=(80-1)^2=80^2-2\times80\times1+1^2=6241$

(2) $102\times98=(100+2)\times(100-2)=100^2-2^2=9996$

[解説]

(1) $79=80-1$ より，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ の公式を使うことに気づく。

(2) $102=100+2,\ 98=100-2$ より $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ の公式を使うことに気づく。

[問題](1 学期中間)

次の式をくふうして計算しなさい。ただし，途中の計算も解答用紙に書きなさい。

(1) 71×69

(2) $21\times57+21\times43$

(3) 497×503

(4) 65^2-35^2

[解答欄]

(1)
(2)
(3)
(4)

[解答](1) $71\times 69=(70+1)\times(70-1)=70^2-1^2=4900-1=4899$

(2) $21\times 57+21\times 43=21\times(57+43)=21\times 100=2100$

(3) $497\times 503=(500-3)\times(500+3)=500^2-3^2=250000-9=249991$

(4) $65^2-35^2=(65+35)\times(65-35)=100\times 30=3000$

[解説]

(1) $71=70+1,\ 69=70-1$ より $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ の公式を使うことに気づく。

(2) $21\times 57+21\times 43$ で 21 を共通因数と考えてくくり出す。

(3) $497=500-3,\ 503=500+3$ より $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ の公式を使うことに気づく。

(4) 因数分解の公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ を使う。

[問題](1 学期期末)

次の計算を，乗法の公式や因数分解を利用して解きなさい。

(1) 69×71　　(2) 79^2-21^2

[解答欄]

(1)
(2)

[解答](1) $69\times 71=(70-1)\times(70+1)=70^2-1^2=4900-1=4899$

(2) $79^2-21^2=(79+21)\times(79-21)=100\times 58=5800$

[解説]

(1) 乗法の公式のうちの $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を使う。

(2) 因数分解の公式のうちの $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ を使う。

[問題](1 学期中間)

次の計算を，乗法の公式や因数分解を利用して解け。途中の式をすべて書け。

① 88×92　　② $79^2 - 21^2$

[解答欄]

①
②

[解答]① $88 \times 92 = (90-2) \times (90+2) = 90^2 - 2^2 = 8096$

② $79^2 - 21^2 = (79+21) \times (79-21) = 100 \times 58 = 5800$

[問題](1 学期期末)

因数分解の公式を使って，工夫して計算しなさい。途中の計算も書くこと。

$175^2 - 25^2$

[解答欄]

[解答]$175^2 - 25^2 = (175+25) \times (175-25) = 200 \times 150 = 30000$

[解説]

因数分解の公式 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ を使う。

[問題](1 学期期末)

因数分解の公式を利用して計算しなさい。

$5.5^2 - 4.5^2$

[解答欄]

[解答]$5.5^2 - 4.5^2 = (5.5+4.5) \times (5.5-4.5) = 10$

[解説]

＊$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ の公式を使う。

【】式の値

[問題](1 学期中間)

$x=203$のとき，x^2-6x+9の値を求めよ。

[解答欄]

[解答]40000

[解説]

$x^2-6x+9=(x-3)^2=(203-3)^2=40000$

[問題](1 学期期末)

$a=6,\ b=\dfrac{1}{2}$のとき，$(a+b)^2-b(3a+b)$の値を求めなさい。

[解答欄]

[解答]33

[解説]

式を展開，整理してから代入。

$(a+b)^2-b(3a+b)=a^2-ab=36-3=33$

[問題](1 学期期末)

因数分解を利用して，次の式の値を求めなさい。途中の式をすべて書きなさい。

(1)　$x=\dfrac{8}{3}$のとき，x^2-4x+4の値

(2)　$x=3.75,\ y=2.25$のとき，x^2-y^2の値

[解答欄]

(1)
(2)

[解答](1) $x^2-4x+4=(x-2)^2=\left(\frac{8}{3}-2\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

(2) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=(3.75+2.25)\times(3.75-2.25)=6\times1.5=9$

[解説]

(1) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ の公式を使う。

(2) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ の公式を使う。

[問題](1 学期期末)

次の問いに答えなさい。

(1) $x=67,\ y=33$ のとき，$x^2+2xy+y^2$ の値を求めなさい。

(2) $x=\frac{1}{2},\ y=-2$ のとき，$(2x+y)^2-4xy$ の値を求めなさい。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 10000　(2) 5

[解説]

因数分解，式の展開を使って式を変形してから数値を代入する。

(1) 因数分解の公式 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ を使う。

$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2=(67+33)^2=100^2=10000$

(2) 式を展開して代入。$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ を使う。

$$(2x+y)^2-4xy=4x^2+4xy+y^2-4xy=4x^2+y^2=4\times\frac{1}{4}+4=5$$

[問題](1 学期期末)

次の式の値を求めなさい。(途中の式を書くこと)

① $x=4,\ y=-3$ のとき，$(x-5y)^2+(x+5y)(x-5y)$

② $a=6.85,\ b=3.15$ のとき，a^2-b^2

[解答欄]

①
②

[解答]① $(x-5y)^2+(x+5y)(x-5y)=2x^2-10xy=2\times4^2-10\times4\times(-3)=32+120$

$=152$　② $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=(6.85+3.15)\times(6.85-3.15)=10\times3.7=37$

[解説]

① $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ の公式を使ってまず式を展開。

②因数分解の公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ を使う。

[問題](2 学期期末)

$x=1+\sqrt{2}$ のときの x^2-2x の値を求めなさい。

[解答欄]

[解答]1

[解説]

$x^2-2x=x(x-2)$ に $x=1+\sqrt{2}$ を代入すると，

$$(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}-2)=(1+\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2})^2-1^2=2-1=1$$

＊(別解)

$x=1+\sqrt{2}$ より $x-1=\sqrt{2}$

両辺を 2 乗すると，$x^2-2x+1=2$　ゆえに $x^2-2x=2-1=1$

[問題](1 学期期末)

次の問いに答えなさい。

(1)　$x=198$ のとき，式 x^2+4x+4 の値を求めなさい。

(2)　$x=-3,\ y=4$ のとき，$3(4x^2+y^2)-4x(3x-y)$ の値を求めなさい。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1)　40000　(2)　0

[解説]

(1)　$x^2+4x+4=(x+2)^2=(198+2)^2=40000$

(2)　$3(4x^2+y^2)-4x(3x-y)=3y^2+4xy=y(3y+4x)=4\times(12-12)=0$

[問題](1 学期期末)

$a,\ b,\ c$ を整数とする。$(x+a)(x+b)$，$(x+a)(x-b)$ をそれぞれ展開したら，それぞれ次のようになった。$a,\ b,\ c$ の値を求めなさい。

$(x+a)(x+b)=x^2-3x-c$

$(x+a)(x-b)=x^2+7x+c$

[解答欄]

[解答] $a=2,\ b=-5,\ c=10$

[解説]

$(x+a)(x+b)=x^2-3x-c$ より，$x^2+(a+b)x+ab=x^2-3x-c$

両辺の x の係数，定数項は同じなので，$a+b=-3$ ･･･①，$ab=-c$ ･･･②

また，$(x+a)(x-b)=x^2+7x+c$ より，$x^2+(a-b)x-ab=x^2+7x+c$

両辺の x の係数，定数項は同じなので，$a-b=7$ ･･･③，$-ab=c$ ･･･④

①，③の式を $a,\ b$ の連立方程式として加減法で解く。

①＋③より，$2a=4,\ a=2$

①に $a=2$ を代入して，$2+b=-3,\ b=-5$

④に $a=2,\ b=-5$ を代入すると，(注：②と④の式は同じなので②に代入してもよい)

$c=-ab=-1\times 2\times(-5)=10$

よって，$a=2,\ b=-5,\ c=10$

【】整数の証明問題

[問題](1 学期期末)

奇数の 2 乗が奇数になることを証明しなさい。

[解答欄]

[解答]

n を整数とすると，奇数は $2n+1$ と表すことができる。

(奇数の 2 乗)＝ $(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 2(2n^2+2n)+1$

n は整数なので，$2n^2+2n$ も整数になる。よって，$2(2n^2+2n)+1$ は奇数となる。

したがって，奇数の 2 乗は奇数になる。

[解説]

・奇数は，$3 = 2\times 1+1,\ 5 = 2\times 2+1,\ 7 = 2\times 3+1$ のように，2 ×(整数)＋1の形で表すことができる。したがって，奇数は整数 n を使って $2n+1$ と表すことができる。

・また，$2\times(n^2+3n+2)+1$ などのように，2 ×(整式)＋1の形になっているものは，n が整数のとき n^2+3n+2 も整数になるので，2 ×(整数)＋1で奇数になる。

・例えば，$2n^2+8n+5$ は

$2n^2+8n+5 = (2n^2+8n+4)+1 = 2(n^2+4n+2)+1$ と変形することで奇数になることを説明できる。

[問題](前期中間)

奇数と奇数の積は奇数になることを証明しなさい。

[解答欄]

[解答]

2 つの奇数を，$2m+1, 2n-1$ とおく。ただし，m, n は整数とする。

$(2m+1)(2n+1)=4mn+2m+2n+1$

$=2(2mn+m+n)+1$

$2mn+m+n$ は整数なので，$2(2mn+m+n)+1$ は奇数になる。

よって，奇数と奇数の積は奇数になる。

[問題](1 学期中間)

連続する 2 つの整数の 2 乗の差は，その 2 数の和に等しいことを次のように証明した。(　　)の中にあてはまる数や式を入れなさい。

＜証明＞

2 つの整数を小さい方を n，大きい方を(　ア　)とすると，

2 乗の差は，

(　ア　)^2－n^2＝(　イ　)－n^2 ＝(　ウ　)

2 数の和は，(　ア　)＋n ＝(　エ　)

したがって，連続する 2 つの整数の 2 乗の差は，その 2 数の和に等しい。

[解答欄]

(ア)	(イ)	(ウ)
(エ)		

[解答](ア) $n+1$　(イ) n^2+2n+1　(ウ) $2n+1$　(エ) $2n+1$

[解説]

例えば，連続する 2 つの整数 $5, 6$ は，$5, 5+1$ と表すことができる。小さい方の整数を n とすると，連続する 2 整数は，$n, n+1$ と表すことができる。

[問題](1 学期期末)

連続する 3 つの整数で，まん中の整数の 2 乗から 1 をひいた数は，両端の整数の積に等しい。このことを証明しなさい。

[解答欄]

[解答]

連続する 3 つの整数を$n-1,\ n,\ n+1$とおくと，

まん中の整数の 2 乗から1をひいた数は，n^2-1・・・①

両端の整数の積は，$(n-1)(n+1)=n^2-1$・・・②

①と②は等しい。

よって，まん中の整数の 2 乗から1をひいた数は，両端の整数の積に等しい。

[解説]

例えば，連続する 3 つの整数$5,\ 6,\ 7$は，$5,\ 5+1,\ 5+2$と表すことができる。一般的には，整数nを使って，$n,\ n+1,\ n+2$と表すことができる。

真ん中の数を基準にとれば，例えば，3 つの整数$5,\ 6,\ 7$は，$6-1,\ 6,\ 6+1$と表すことができる。真ん中の整数をnとおくと，$n-1,\ n,\ n+1$と表すことができる。証明問題では$n-1,\ n,\ n+1$を使った方が計算が楽になることが多い。

[問題](1 学期期末)

　3, 4, 5 のように連続する 3 つの整数では, 中央の数の 2 乗から 1 をひくと両端の数の積に等しくなることを証明しなさい。

[解答欄]

[解答]
連続する 3 つの整数を$n-1,\ n,\ n+1$とおくと,
まん中の整数の 2 乗から1をひいた数は, n^2-1・・・①
両端の整数の積は, $(n-1)(n+1)=n^2-1$・・・②
①と②は等しい。
よって,まん中の整数の 2 乗から1をひいた数は,両端の整数の積に等しい。
[解説]
例えば,連続する 3 つの整数$5,\ 6,\ 7$は, $5,\ 5+1,\ 5+2$と表すことができる。一般的には,整数nを使って, $n,\ n+1,\ n+2$と表すことができる。
真ん中の数を基準にとれば,例えば,3 つの整数$5,\ 6,\ 7$は, $6-1,\ 6,\ 6+1$と表すことができる。真ん中の整数をnとおくと, $n-1,\ n,\ n+1$と表すことができる。証明問題では$n-1,\ n,\ n+1$を使った方が計算が楽になることが多い。

[問題](1 学期期末)
$2,\ 3,\ 4$や$7,\ 8,\ 9$のような連続する3つの整数があります。このとき,次の問いに答えなさい。
(1) 中央の数の2乗から他の2つの数の積を引いた差は,常に一定の値になります。この値を求めなさい。
(2) 中央の数をnとして,(1)のことがらを説明しなさい。
[解答欄]

(1)
(2)

[解答] (1) 1 (2) 連続する 3 つの数を, $n-1,\ n,\ n+1$とすると,
(中央の数の2乗)$=n^2$,(他の2つの数の積)$=(n-1)(n+1)=n^2-1$
ゆえに,(中央の数の2乗)−(他の2つの数の積)
$=n^2-(n+1)(n-1)=n^2-(n^2-1)=1$
よって中央の数の2乗から他の2つの数の積を引いた差は,常に一定の値1になる。

[解説]

(1) $2, 3, 4$ の場合，(中央の数の 2 乗)＝$3^2=9$，(他の 2 つの数の積)＝$2\times4=8$ なので，(中央の数の 2 乗)－(他の 2 つの数の積)＝$9-8=1$

$7, 8, 9$ の場合，(中央の数の 2 乗)－(他の 2 つの数の積)＝$8^2-7\times9=64-63=1$

(2) 例えば，連続する 3 つの整数 $5,\ 6,\ 7$ は，$5,\ 5+1,\ 5+2$ と表すことができる。一般的には，整数 n を使って，$n,\ n+1,\ n+2$ と表すことができる。

真ん中の数を基準にとれば，例えば，3 つの整数 $5,\ 6,\ 7$ は，$6-1,\ 6,\ 6+1$ と表すことができる。真ん中の整数を n とおくと，$n-1,\ n,\ n+1$ と表すことができる。証明問題では $n-1,\ n,\ n+1$ を使った方が計算が楽になることが多い。

[問題](1 学期中間)

下の式のように，連続する 2 つの偶数の積に 1 をたした数は，その間の奇数の 2 乗になる。このことを，下のように証明した。下の空欄にあてはまる式や言葉を答えなさい。

8×10　＋1　＝　9×9

(証明)

連続する 2 つの偶数を，自然数 n を使って，(　ア　)，(　イ　)とすると，

それらの積に 1 をたした数は，

(　ウ　)＝$4n^2+4n+1$　＝(　エ　)²となり，(　　　オ　　　)と等しくなる。

[解答欄]

(ア)	(イ)	(ウ)
(エ)	(オ)	

[解答](ア) $2n$　(イ) $2n+2$　(ウ) $2n(2n+2)+1$　(エ) $2n+1$

(オ) $2n$ と $2n+2$ の間の奇数の 2 乗

[解説]

例えば，偶数については $6=2\times3,\ 8=2\times4$ のように $2\times$(整数)と表すことができる。

整数 n を使って $2\times n=2n$ と表すことができる。

連続する 2 つの偶数，例えば，$6,\ 8$ は $6,\ 6+2$ と表すことができる。

小さい方の偶数を $2n$ とすると，大きい方の偶数は $2n+2$ と表すことができる。

[問題](1 学期期末)

6×8＋1＝7×7

10×12＋1＝11×11

上の式のように,「連続する 2 つの偶数の積に 1 をたした数は，その間の数の 2 乗」になる。

このことを，下のように証明した。下の空欄にあてはまる式や言葉を答えなさい。

＜証明＞

連続する 2 つの偶数を，自然数 n を使って，(　①　)，(　②　)とすると，

それらの積に 1 をたした数は,

(　③　)＝$4n^2+4n+1$＝(　④　)^{2}となり，(　　⑤　　)と等しくなる。

[解答欄]

①	②	③
④	⑤	

[解答]①　$2n$　②　$2n+2$　③　$2n(2n+2)+1$　④　$2n+1$　⑤ その間の数の 2 乗

[解説]

例えば, 偶数については $6=2\times3$, $8=2\times4$ のように 2 ×(整数)と表すことができる。

整数 n を使って $2\times n=2n$ と表すことができる。

連続する 2 つの偶数，例えば，6, 8 は 6, $6+2$ と表すことができる。

小さい方の偶数を $2n$ とすると，大きい方の偶数は $2n+2$ と表すことができる。

[問題](1 学期期末)

　となりあう 2 つの偶数の積に1をたすと，奇数の 2 乗になることを証明しなさい。

[解答欄]

[解答]

となりあう 2 つの偶数を $2n$, $2n+2$ とおく。(n は整数)

$2n(2n+2)+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$

$2n+1$ は奇数なので，となりあう 2 つの偶数の積に 1 をたすと，奇数の 2 乗になる

[解説]

・例えば，偶数については $6=2\times3$, $8=2\times4$ のように 2 ×(整数)と表すことができる。奇数については，$7=6+1=2\times3+1$, $9=8+1=2\times4+1$ のように 2 ×(整数)＋1 と表すことができる。一般に，整数 n を使って，偶数は $2n$，奇数は $2n+1$ と表すことができる。

・連続する 2 つの偶数，例えば，6, 8 は 6, $6+2$ と表すことができる。

小さい方の偶数を $2n$ とすると，大きい方の偶数は $2n+2$ と表すことができる。

[問題](1 学期期末)

「連続した 2 つの奇数の積に 1 をたした数は，偶数の 2 乗に等しい。」このことを次のように証明した。(　　)の中に適当な式や言葉を入れて証明を完成させなさい。

＜証明＞

連続した 2 つの奇数は，自然数 n を使って，

(　①　)，(　②　)と表される。

(　①　)(　②　)＋(　③　)＝(　④　)＝(　⑤　)^2

となり，偶数(　⑤　)の(　⑥　)である。

[解答欄]

①	②	③
④	⑤	⑥

[解答]①　$2n+1$　②　$2n+3$　③　1　④　$4n^2+8n+4$　⑤　$2n+2$　⑥　2 乗

[解説]

・奇数については，$7=6+1=2\times3+1$, $9=8+1=2\times4+1$ のように 2 ×(整数)＋1 と表すことができる。一般に，整数 n を使って，奇数は $2n+1$ と表すことができる。

・連続する奇数は，例えば 5, 7 は 5, $5+2$ と表すことができるので，一番小さい奇数を $2n+1$ とすると，その次の奇数は $2n+1+2=2n+3$ となる。

[問題](1 学期期末)

2 つの連続した奇数がある。大きい方の数の 2 乗から小さい方の数の 2 乗をひいた差は 8 の倍数であることを証明しなさい。

[解答欄]

[解答]

2 つの連続した奇数を $2n+1,\ 2n+3$ とおく。(ただし，n は整数)

(大きい方の数の 2 乗)＝$(2n+3)^2=4n^2+12n+9$

(小さい方の数の 2 乗)＝$(2n+1)^2=4n^2+4n+1$

ゆえに，(大きい方の数の 2 乗)－(小さい方の数の 2 乗)＝$(4n^2+12n+9)-(4n^2+4n+1)$

＝$4n^2+12n+9-4n^2-4n-1=8n+8=8(n+1)$

$n+1$ は整数なので，$8(n+1)$ は 8 の倍数になる。

したがって，大きい方の数の 2 乗から小さい方の数の 2 乗をひいた差は 8 の倍数である。

[解説]

・奇数については，$7=6+1=2\times3+1,\ 9=8+1=2\times4+1$ のように $2\times$(整数)＋1 と表すことができる。一般に，整数 n を使って，奇数は $2n+1$ と表すことができる。

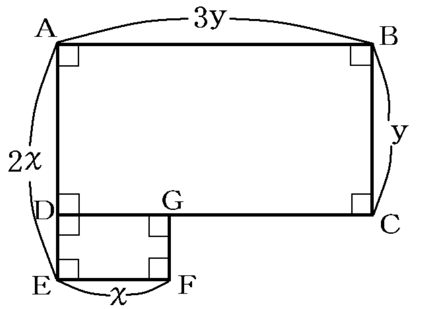
・連続する奇数は，例えば $5,\ 7$ は $5,\ 5+2$ と表すことができるので，一番小さい奇数を $2n+1$ とすると，その次の奇数は $2n+1+2=2n+3$ となる。

・整数 n を使って，2 の倍数は $2n$，3 の倍数は $3n$，･･･8 の倍数は $8n$ と表すことができる。また，$8(n+1)$ のように $8\times$(整式)の形で表された数は 8 の倍数であるといえる。

【】図形の問題

[問題](1 学期期末)

右のような図形の面積を，x，y を使って表しなさい。



[解答欄]

[解答] $3y^2+2x^2-xy$

[解説]

(長方形 ABCD の面積)＝(BC)×AB＝ $y\times 3y=3y^2$

DE＝AE－BC＝ $2x-y$ なので，

(長方形 DEFG の面積)＝DE×EF＝ $(2x-y)\times x=2x^2-xy$

ゆえに，(求める面積)＝ $3y^2+2x^2-xy$

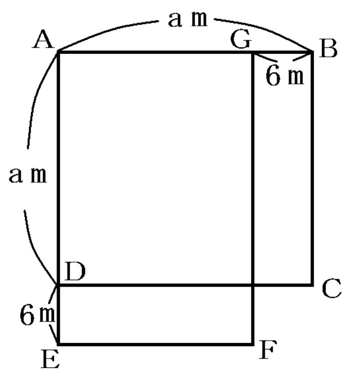
[問題](1 学期中間)

1 辺が a m の正方形の土地があります。この土地の縦を 6m 長く，横を 6m 短くして長方形を作ると，面積は，もとの土地よりも大きくなるのか，小さくなるのかを次のようにして考えました。次の問いに答えなさい。

(1)　1 辺が a m の正方形の土地の面積を求めよ。

(2)　新しくできた土地の面積を求めよ。

(3)　どちらの土地がどれだけ大きいですか。



[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[解答](1)　a^2 m²　(2)　a^2-36 m²　(3)　もとの土地が 36m²だけ大きい

[解説]

(1) (正方形ABCDの面積)＝(1 辺)²＝ $a\times a=a^2$ m²

(2) AE＝ $a+6$ (m)，AG＝ $a-6$ (m)なので，

(長方形AEFGの面積)＝AE×AG＝ $(a+6)(a-6)=a^2-36$ m²

(3) (正方形 ABCD の面積)−(長方形 AEFG の面積)

$$= a^2 - (a^2 - 36) = a^2 - a^2 + 36 = 36 \ \ \mathrm{m}^2$$

よって，もとの土地が 36m²だけ大きい

[問題](1 学期中間)

縦と横の長さが x m の正方形がある。次の問いに答えなさい。

(1) 縦と横の長さをそれぞれ 2m ずつ長くすると，面積はどれだけ増えるか求めなさい。

(2) 縦の長さを 3m 長くし，横の長さを 2m 短くすると，面積はどれだけ増えるか求めなさい。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $4x+4$ (m²)増える　(2) $x-6$ (m²)増える

[解説]

(1) (もとの正方形の面積)＝(1 辺)²＝ x^2 m²

縦と横の長さをそれぞれ 2m ずつ長くすると，1 辺が $x+2$ (m)の正方形になるので，

(新しい正方形の面積)＝(1 辺)²＝ $(x+2)^2 = x^2 + 2\times x\times 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$

ゆえに，(新しい正方形の面積)−(もとの正方形の面積)＝

＝ $x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4$ (m²)

よって，$4x+4$ (m²)増える

(2) (もとの正方形の面積)＝(1 辺)²＝ x^2 m²

縦の長さを 3m 長くし，横の長さを 2m 短くすると，縦が $x+3$ (m)，横が $x-2$ (m)の長方形ができるので，

(新しい長方形の面積)＝(縦)×(横)

＝ $(x+3)(x-2) = x^2 + (3-2)x + 3\times(-2) = x^2 + x - 6$

ゆえに，(新しい長方形の面積)−(もとの正方形の面積)＝

$x^2 + x - 6 - x^2 = x - 6$ (m²)

よって，$x-6$ (m²)増える

(注) $x > 6$ のとき $x-6>0$ なので増加。$x=6$ のときは 0 増加するので等しい。

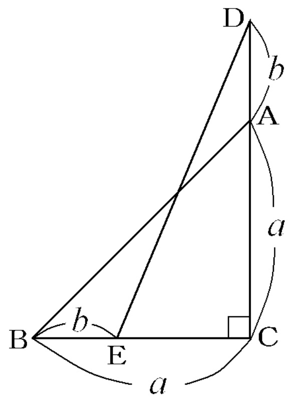
$x<6$ のときは $x-6<0$ なので(マイナスの値)だけ増加，すなわち減少する。

[問題](1 学期期末)

　直角をはさむ 2 辺の長さが a cmの直角二等辺三角形がある。その 2 辺のうちの一方を b cm長くし他方を b cm短くして直角三角形を作るとき，面積は何cm²小さくなりますか。

[解答欄]

[解答] $\frac{1}{2}b^2$ cm²だけ小さくなる



[解説]

(もとの三角形ABCの面積)＝ $\frac{1}{2}\times BC\times AC = \frac{1}{2}\times a\times a = \frac{1}{2}a^2$ cm²

EC＝BC－BE＝ $a-b$ cm

DC＝AC＋DA＝ $a+b$ cm なので，

(変形後の三角形 DEC の面積)＝ $\frac{1}{2}\times EC\times DC$

$= \frac{1}{2}\times(a-b)\times(a+b) = \frac{1}{2}(a^2-b^2) = \frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b^2$ cm²

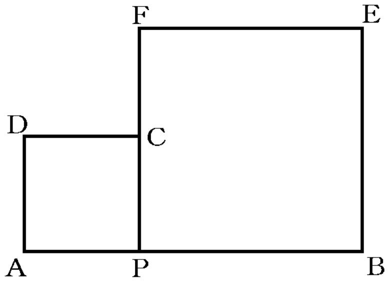
ゆえに，(変形後の三角形 DEC の面積)－(もとの三角形 ABC の面積)

$= \frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}a^2 = -\frac{1}{2}b^2$ cm²

よって，変形後の三角形DECの面積は，もとの三角形ABCの面積より $\frac{1}{2}b^2$ cm²だけ小さくなる

[問題](1 学期中間)

右の図のように，長さ 10cm の線分 AB 上に AP＝a cm となるようにとり AP，PB をそれぞれ 1 辺とする正方形を作ります。正方形 PBEF の面積は, 正方形 APCD の面積よりどれだけ広いでしょうか。



[解答欄]

[解答]$100-20a$ (cm²)だけ広い

[解説]

PB＝AB－AP＝$10-a$ (cm)なので,

(正方形PBEFの面積)＝(1 辺)²＝$(10-a)^2$

＝$10^2-2\times10\times a+a^2=100-20a+a^2$ (cm²)

また，AP＝a cmなので，(正方形APCDの面積)＝(1 辺)²＝a^2

(正方形 PBEF の面積)－(正方形 APCD の面積)

＝$100-20a+a^2-a^2=100-20a$ (cm²)

ゆえに，正方形PBEFの面積は，正方形APCDの面積より$100-20a$ (cm²)だけ広い。

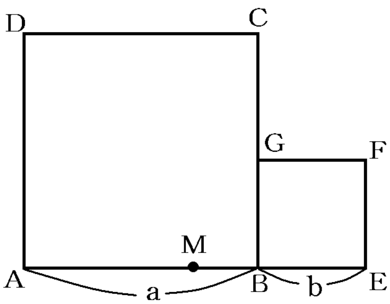
(注) $a<5$ のとき $100-20a>0$ で正方形 PBEF の面積が広い。$a=5$ のとき $100-20a=0$ で面積は等しい。$5<a<10$ のとき $100-20a<0$ なので正方形 PBEF の面積が(マイナスの値)広い，すなわち，狭い。

[問題](1 学期期末)

右の図で，四角形 ABCD，BEFG は，1 辺がそれぞれ a，b の正方形で, M は AE の中点です。このとき，次の問いに答えなさい。ただし，$a>b$ とする。

(1)　AM，MB の長さを a，b の式で表しなさい。

(2)　AM，MB をそれぞれ 1 辺とする 2 つの正方形の面積の和の 2 倍は, 正方形 ABCD と正方形 BEFG の面積の和に等しいことを証明しなさい。



[解答欄]

[解答]

(1) M は AE の中点なので，AM＝AE÷２＝(AB＋BE) ÷２＝$(a+b)\div 2=\dfrac{a+b}{2}$

MB＝AB－AM＝$a-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{2a}{2}-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{2a-(a+b)}{2}=\dfrac{2a-a-b}{2}=\dfrac{a-b}{2}$

AM＝$\dfrac{a+b}{2}$，MB＝$\dfrac{a-b}{2}$・・・答

(2)

(AMを１辺とする正方形の面積)＝(１辺)^2＝AM^2

$$=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{2^2}=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

(MBを１辺とする正方形の面積)＝(１辺)^2＝MB^2

$$=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{(a-b)^2}{2^2}=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}$$

(AM，MB をそれぞれ１辺とする２つの正方形の面積の和の２倍)

$$=\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{4}+\frac{a^2-2ab+b^2}{4}\right)\times 2=\frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{4}\times 2$$

$$=\frac{2a^2+2b^2}{4}\times 2=\frac{2(a^2+b^2)}{4}\times 2=a^2+b^2\cdots①$$

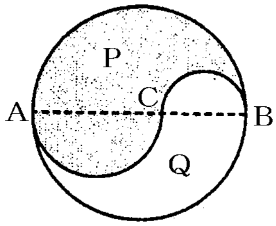
次に，

(正方形 ABCD の面積)＋(正方形 BEFG の面積)＝a^2+b^2・・・②

①，②より，AM，MB をそれぞれ１辺とする２つの正方形の面積の和の２倍は，正方形 ABCD と BEFG の面積の和に等しい。

[問題](1 学期期末)

右の図のように，AB を直径とする円が，AC，CB をそれぞれ直径とする半円によって，P，Q の 2 つの部分に分けられている。AC＝$2a$，CB＝$2b$ のとき，P と Q の面積比を求めよ。



[解答欄]

[解答] $a:b$

[解説]

AC(＝$2a$)を直径とする円の半径は a，CB(＝$2b$)を直径とする円の半径は b である。

また，AB＝AC＋CB＝$2a+2b$ なので，AB を直径とする円の半径は $a+b$ である。

(AB を直径とする半円の面積)＝$\dfrac{1}{2}\pi(a+b)^2$

(AC を直径とする半円の面積)＝$\dfrac{1}{2}\pi a^2$

(CB を直径とする半円の面積)＝$\dfrac{1}{2}\pi b^2$

(P の面積)＝$\dfrac{1}{2}\pi(a+b)^2+\dfrac{1}{2}\pi a^2-\dfrac{1}{2}\pi b^2=\dfrac{1}{2}\pi\{(a+b)^2+a^2-b^2\}$

$=\dfrac{1}{2}\pi(a^2+2ab+b^2+a^2-b^2)=\dfrac{1}{2}\pi(2a^2+2ab)=\pi(a^2+ab)$

(Q の面積)＝$\dfrac{1}{2}\pi(a+b)^2-\dfrac{1}{2}\pi a^2+\dfrac{1}{2}\pi b^2=\dfrac{1}{2}\pi\{(a+b)^2-a^2+b^2\}$

$=\dfrac{1}{2}\pi(a^2+2ab+b^2-a^2+b^2)=\dfrac{1}{2}\pi(2b^2+2ab)=\pi(b^2+ab)$

よって，

(P の面積)：(Q の面積)＝$\pi(a^2+ab):\pi(b^2+ab)=\pi a(a+b):\pi b(a+b)=a:b$

[問題](1 学期期末)

たて30 m，よこ40 m の長方形の花壇のまわりに幅a m の道をつくりました。道の面積を求めなさい。

[解答欄]

[解答] $4a^2+140a$ m²

[解説]

道幅も含めた外側の長方形の縦は$30+2a$ (m)，横は$40+2a$ (m)なので

(外側の長方形の面積)＝(縦)×(横)

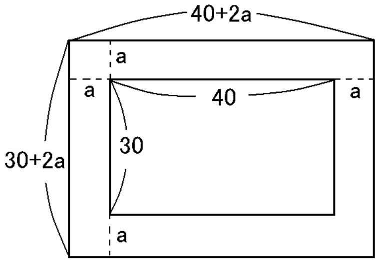
$=(30+2a)(40+2a)=(2a+30)(2a+40)$

$=(2a)^2+(30+40)\times 2a+30\times 40=4a^2+140a+1200$(m²)

(内側の長方形の面積)＝(縦)×(横)＝$30\times 40=1200$(m²)

(道の面積)＝(外側の長方形の面積)－(内側の長方形の面積)

$=4a^2+140a+1200-1200=4a^2+140a$(m²)

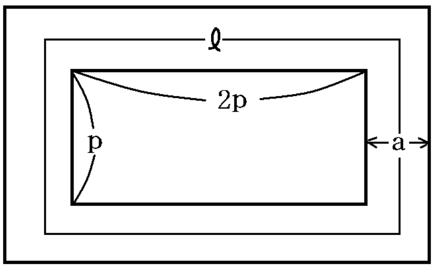


[問題](1 学期中間)

縦が p，横が$2p$ の長方形の花壇のまわりに，右の図のように幅a の道がある。道の面積をS，道のまん中を通る線の長さをl とするとき，

$S=al$

となることを証明しなさい。



[解答欄]

[解答]

外側の長方形の面積は,

$(2p+2a)\times(p+2a)=2p^2+6ap+4a^2$

内側の長方形の面積は，　$p\times 2p=2p^2$

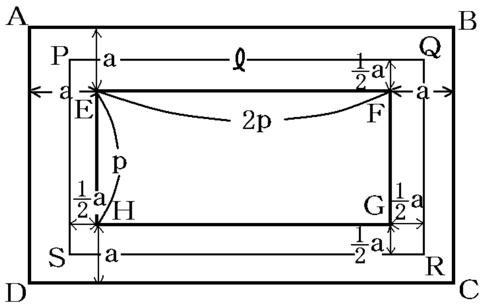
よって，　$S=(2p^2+6ap+4a^2)-2p^2=6ap+4a^2$

また，　$l=(2p+a+p+a)\times 2=6p+4a$　なので

$al=6ap+4a^2$

よって，　$S=al$ が成り立つ。

[解説]



図より，

AB＝$a+2p+a=2p+2a$

AD＝$a+p+a=p+2a$

ゆえに(外側の長方形 ABCD の面積)

＝AD×AB＝$(p+2a)(2p+2a)$

$=2p^2+2ap+4ap+4a^2=2p^2+6ap+4a^2$

(内側の長方形 EFGH の面積)＝EH×EF＝ $p\times 2p=2p^2$

よって，(道の面積 S)＝(外側の長方形 ABCD の面積)－(内側の長方形 EFGH の面積)

$=2p^2+6ap+4a^2-2p^2=6ap+4a^2$

ゆえに，　$S=6ap+4a^2\cdots$①

次に，　l の長さを求める。

図より，SR＝$\frac{1}{2}a+2p+\frac{1}{2}a=2p+a$，QR＝$\frac{1}{2}a+p+\frac{1}{2}a=p+a$

l＝(SR＋QR)×2＝$(2p+a+p+a)\times 2=(3p+2a)\times 2=6p+4a$

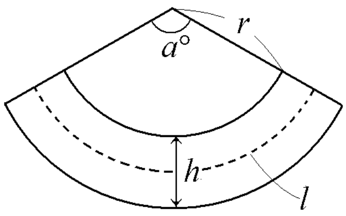
よって，　$al=a\times(6p+4a)=6ap+4a^2\cdots$②

①，②より，　$S=al$ が成り立つ。

(注)　証明問題の解答としては[解答]のように簡潔な書き方でよい。

[問題](前期期末)

右の図のように，半径が r ，中心角が $a°$ であるおうぎ形の花壇をつくる。おうぎ形の弧に沿って道を作り，道の幅を h ，この道の中央を通る線の長さを l ，道の面積を S とすると，$S=hl$ になる。このことを証明せよ。



[解答欄]

[解答]

$$S=\pi(r+h)^2\times\frac{a}{360}-\pi r^2\times\frac{a}{360}=(r+h)^2\times\frac{\pi a}{360}-r^2\times\frac{\pi a}{360}$$

$$=\left((r+h)^2-r^2\right)\times\frac{\pi a}{360}=\frac{\pi a}{360}\left(2rh+h^2\right)\cdots①$$

道の中央を通る弧の半径は $r+\frac{h}{2}$ なので,

$$l=2\pi\times\left(r+\frac{h}{2}\right)\times\frac{a}{360}=\frac{\pi a}{360}(2r+h)$$

よって，$hl=\frac{\pi a}{360}\left(2rh+h^2\right)\cdots②$

①，②より，$S=hl$ になる。

【】素因数分解

[問題](1 学期中間)
次の数の中から，素数をすべて選び出しなさい。

1, 2, 3, 4, 5, 6 7, 8

[解答欄]

[解答] 2,3,5,7

[解説]

素数は 1 とその数以外に約数をもたない数である。例えば，6 は 1，6 以外にも 2，3 などの約数をもつので素数ではない。これに対し，例えば 7 は 1，7 以外の約数をもたないので素数である。なお，1 は素数には入れない。

[問題](1 学期期末)

次の数の中で，素数であるものをすべて書きなさい。

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

[解答欄]

[解答] 2，3，5，7

[解説]

７のように1とその数自身以外に約数をもたない整数を素数という。1 は素数にはいれない。1 けたの素数は2, 3, 5, 7

[問題](1 学期中間)

素数の中で，最も小さい数を答えよ。

[解答欄]

[解答]2

[問題](1 学期中間)

1～20 までの自然数のうち，素数である数は何個あるか答えなさい。

[解答欄]

[解答]8 個

[解説]

100 以下の自然数については，約数をもつものは 1 けたの素数 2，3，5，7 のどれかで割り切れる。逆に言えば，2，3，5，7 のいずれでも割り切れない 100 以下の自然数は素数である。20 までの整数を書き並べて，2 の倍数，3 の倍数，5 の倍数，7 の倍数を消去すれば，残りが素数になる。1 から 20 までの数の中で素数であるのは， 2，3，5，7，11，13，17，19 の 8 個

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~

[問題](1 学期中間)

10 から 20 までの数の中で，素数はいくつあるか。

[解答欄]

[解答]4 個

[解説]

(3) 100 以下の自然数については, 約数をもつものは 1 けたの素数 2，3，5，7 のどれかで割り切れる。逆に言えば，2，3，5，7 のいずれでも割り切れない 100 以下の自然数は素数である。20 までの整数を書き並べて，2 の倍数，3 の倍数，5 の倍数，7 の倍数を消去すれば，残りが素数になる。10 から 20 までの数の中で素数であるのは，11，13，17，19 の 4 個

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~

[問題](1 学期期末)

10 より大きく，20 以下の素数をすべて答えなさい。

[解答欄]

[解答]11, 13, 17, 19

[解説]

7 のように 1 とその数自身以外に約数をもたない整数を素数という。1 は素数にはいれない。1 けたの素数は 2，3，5，7
100 以下の自然数については，約数をもつものは 1 けたの素数 2，3，5，7 のどれかで割り切れる。逆に言えば，2，3，5，7 のいずれでも割り切れない 100 以下の自然数は素数である。20 までの整数を書き並べて，2 の倍数，3 の倍数，5 の倍数，7 の倍数を消去すれば，残りが素数になる。10 から 20 までの数の中で素数であるのは，11，13，17，19

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~

[問題](1 学期中間)

1から 20 までの自然数のうち素数をすべて求めよ。

[解答欄]

[解答] 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

[解説]

7 のように 1 とその数自身以外に約数をもたない整数を素数という。1 は素数にはいれない。1 けたの素数は 2，3，5，7
100 以下の自然数については，約数をもつものは 1 けたの素数 2，3，5，7 のどれかで割り切れる。
逆に言えば，2，3，5，7 のいずれでも割り切れない 100 以下の自然数は素数である。
20 までの整数を書き並べて，2 の倍数，3 の倍数，5 の倍数，7 の倍数を消去すれば，残りが素数になる。1 から 20 までの数の中で素数であるのは，2，3，5，7，11，13，17，19

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~

[問題](1 学期中間)

50 までの自然数の中に素数は何個ありますか。

[解答欄]

[解答]15 個

[解説]

(1) 7 のように 1 とその数自身以外に約数をもたない整数を素数という。1 は素数にはいれない。1 けたの素数は 2，3，5，7

100 以下の自然数については，約数をもつものはかならずこの 2，3，5，7 のどれかで割り切れる。逆に言えば，2，3，5，7 のいずれでも割り切れない 100 以下の自然数は素数である。

50 までの整数を書き並べて，2 の倍数，3 の倍数, 5 の倍数, 7 の倍数を消去すれば, 残りが素数になる。50 までの整数の中で素数なのは，2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47 の 15 個である。

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

[問題](1 学期中間)

下の 31 から 50 までの自然数のうち，素数であるものはどれか。

31　32　33　34　35　36　37　38　39　40

41　42　43　44　45　46　47　48　49　50

[解答欄]

[解答] 31，37，41，43，47

[解説]

7 のように 1 とその数自身以外に約数をもたない整数を素数という。1 は素数にはいれない。1 けたの素数は 2，3，5，7

100 以下の自然数については，約数をもつものはかならずこの 2, 3, 5, 7 のどれかで割り切れる。逆に言えば，2，3，5，7 のいずれでも割り切れない 100 以下の自然数は素数である。

50 までの整数を書き並べて，2 の倍数，3 の倍数，5 の倍数，7 の倍数を消去すれば，残りが素数になる。31 から 50 までの自然数の中で素数なのは，31，37，41，43，47 である。

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

[問題](1 学期中間)

次の各問いに答えよ。

(1)　15 以下の素数をすべて答えよ。

(2)　素数の因数を何というか。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 2，3，5，7，11，13　(2) 素因数

[解説]

(1) 7 のように 1 とその数自身以外に約数をもたない整数を素数という。1 は素数にはいれない。1 けたの素数は 2，3，5，7

100 以下の自然数については，約数をもつものは 1 けたの素数 2，3，5，7 のどれかで割り切れる。

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~

逆に言えば，2，3，5，7 のいずれでも割り切れない 100 以下の自然数は素数である。

20 までの整数を書き並べて，2 の倍数，3 の倍数，5 の倍数，7 の倍数を消去すれば，残りが素数になる。15 以下の素数は，2，3，5，7，11，13

(2) $12=3\times4$ のように, ある数を約数の積の形で表したとき, その約数(この場合は 3 と 4)を 12 の因数という。特に，その因数が素数であるものを素因数という。この場合の 3 は素因数。また，$12=3\times2^2$ のように，ある整数を素数の積の形にすることを素因数分解という。

[問題](1 学期中間)

次の問いに答えなさい

(1)　10 までの自然数のうち素数は何個ありますか。

(2)　50 以下の自然数の中で 1 番大きな素数は何ですか。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 4 個　(2) 47

[解説]

(1) 7 のように 1 とその数自身以外に約数をもたない整数を素数という。1 は素数にはいれない。1 けたの素数は 2, 3, 5, 7 の 4 個

(2) 100 以下の自然数については, 約数をもつものはかならず 1 けたの素数 2, 3, 5, 7 のどれかで割り切れる。逆に言えば，2, 3, 5, 7 のいずれでも割り切れない 100 以下の自然数は素数である。50 は 2 で割れる，49 は 7 で割れる，48 は 2 で割れるので素数ではない。

47 は 2, 3, 5, 7 のいずれでも割れないので素数。ゆえに 50 以下の自然数の中で 1 番大きな素数は 47

[問題](1 学期期末)

次の(　　)の中に適当なことばを当てはめなさい。

- 整数がいくつかの整数の積の形で表されるとき，その 1 つ 1 つの数を，もとの数の(　①　)という。
- $18=2\times3\times3$ の式で，2, 3 は，1 を除いたそれよりも小さい自然数の積で表すことができない。このような自然数のことを(　②　)という。また，このような自然数の積の形で表すことを(　　③　　)するという。

[解答欄]

①	②	③

[解答]① 因数　② 素数　③ 素因数分解

[問題](1 学期中間)

次の文章の空欄①～③にあてはまる言葉を下の語群から選び，記号で答えよ。

$$72 = 2\times2\times2\times3\times3$$

上の式のように，整数がいくつかの整数の積で表されるとき，その 1 つ 1 つの数を，もとの数の(　①　)という。

また，2，3 のように，それよりも小さい自然数の積で表すことができない自然数を(　②　)という。

(①)の中で，(②)である数を特に，(　③　)という。

(語群)

ア 倍数　　イ 素数　　ウ 因数　　エ 関数　　オ 素因数

[解答欄]

①	②	③

[解答]① ウ　② イ　③ オ

[解説]

1 けたの素数は，2，3，5，7　1 は素数ではない。

[問題](1 学期中間)

24 を素因数分解し，累乗の形で表しなさい。

[解答欄]

[解答] $2^3\times3$

[解説]

＊1 けたの素数 2, 3, 5, 7 で順に割っていく。

右図に示した方法で計算する。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 24 \\ \hline 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$24 = 2^3\times3$

[問題](1 学期期末)

次の自然数を素因数分解しなさい。

(1) 6　　　　　(2) 72

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 2×3　(2) $2^3\times3^2$

[解説]

＊1 けたの素数 2, 3, 5, 7 で順に割っていく。

72 の素因数分解は，右図に示した方法で計算する。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$72=2^3\times3^2$

[問題](1 学期期末)

次の数を素因数分解しなさい。

(1) 12　　　　　(2) 72

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $2^2\times3$　(2) $2^3\times3^2$

[解説]

＊1 けたの素数 2, 3, 5, 7 で順に割っていく。

右図に示した方法で計算する。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$12=2^2\times3$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$72=2^3\times3^2$

[問題](1 学期中間)

120 を素因数分解しなさい。

[解答欄]

[解答] $2^3\times3\times5$

[解説]

1 けたの素数 2, 3, 5, 7 で割っていく。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 120 \\ \hline 2 & 60 \\ \hline 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

[問題](1 学期中間)

　次の数を素因数分解せよ。

① 72　　　　　　　　　　　　② 252

[解答欄]

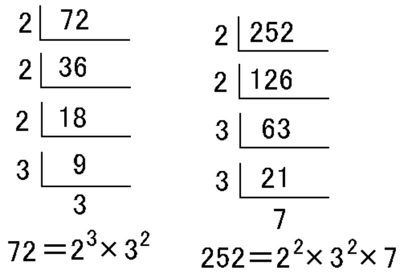
①	②

[解答]① $2^3\times3^2$　② $2^2\times3^2\times7$

[解説]

1 けたの素数 2, 3, 5, 7 で順に割っていく。

右図に示した方法で計算する。



[問題](1 学期中間)

　次の数を素因数に分解しなさい。

(1) 48　　　　(2) 84

[解答欄]

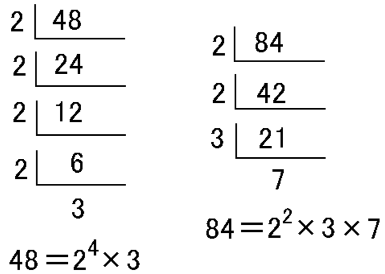
(1)	(2)

[解答](1) $2^4\times3$　(2) $2^2\times3\times7$

[解説]

＊1 けたの素数 2, 3, 5, 7 で順に割っていく。

右図に示した方法で計算する。



[問題](1 学期中間)

　次の数を素因数分解し，指数を使って表しなさい。

(1) 60　　　　(2) 378

[解答欄]

(1)	(2)

[解答] (1) $2^2\times3\times5$　(2) $2\times3^3\times7$

[解説]

＊1 けたの素数 2, 3, 5, 7 で順に割っていく。

右図に示した方法で計算する。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 60 \\ \hline 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 378 \\ \hline 3 & 189 \\ \hline 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$60＝2^2 \times 3 \times 5$

$378＝2 \times 3^3 \times 7$

[問題](1 学期期末)

次の素因数分解をしなさい。

① 72　　② 480

[解答欄]

①	②

[解答]① $2^3 \times 3^2$　② $2^5 \times 3 \times 5$

[解説]

＊1 けたの素数 2, 3, 5, 7 で順に割っていく。

右図に示した方法で計算する。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 480 \\ \hline 2 & 240 \\ \hline 2 & 120 \\ \hline 2 & 60 \\ \hline 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$72＝2^3 \times 3^2$

$480＝2^5 \times 3 \times 5$

[問題](1 学期中間)

次の数を素因数分解しなさい。

(1) 90　　(2) 36

(3) 75　　(4) 126

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
(4)		

[解答] (1) $2 \times 3^2 \times 5$　(2) $2^2 \times 3^2$　(3) 3×5^2　(4) $2 \times 3^2 \times 7$

[解説]

＊1 けたの素数 2, 3, 5, 7 で順に割っていく。下図に示した方法で計算する。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 90 \\ \hline 3 & 45 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 75 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 126 \\ \hline 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$90＝2 \times 3^2 \times 5$　$36＝2^2 \times 3^2$　$75＝3 \times 5^2$　$126＝2 \times 3^2 \times 7$

[問題](1 学期中間)

　次の数を素因数に分解しなさい。

① 24　　② 50　　③ 66　　④ 90　　⑤ 120

[解答欄]

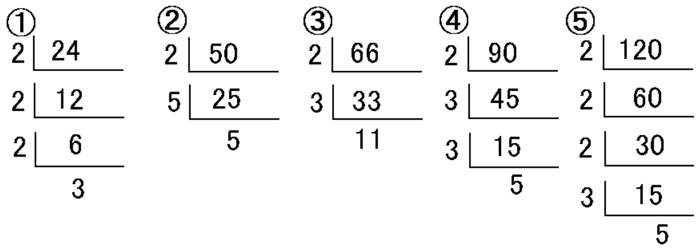
①	②	③
④	⑤	

[解答]①　$2^3\times3$　②　2×5^2　③　$2\times3\times11$　④　$2\times3^2\times5$　⑤　$2^3\times3\times5$

[解説]

＊1 けたの素数 2, 3, 5, 7 で順に割っていく。

下図に示した方法で計算する。



[問題](1 学期期末)

　次の(　　)の中に，適当な数や式や言葉を入れなさい。

(1)　90 を素因数分解すると(　　　　)となる。

(2)　2025 は(　　　　)の平方である。

(3)　20 以下の整数の中に素数は(　　　)個ある。

(4)　$30=2\times15$ のように 2 つ以上の整数の積の形に表すとき，積をつくっている 2 と 15 を 30 の(　　　　)という。

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
(4)		

[解答](1)　$2\times3^2\times5$　(2)　45　(3)　8　(4)　因数

[解説]

(1) ＊1 けたの素数 2, 3, 5, 7 で順に割っていく。

右図に示した方法で計算する。

(2) まず 2025 を右図のようにして素因数分解すると，

$$2025 = 3^4 \times 5^2 = \left(3^2 \times 5\right)^2 = 45^2$$ となる。

ゆえに 45 の平方(2 乗)になる。

2 | 90
3 | 45
3 | 15
　 5

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$

3 | 2025
3 | 675
3 | 225
3 | 75
5 | 25
　 5

$2025 = 3^4 \times 5^2$

(3) 7 のように 1 とその数自身以外に約数をもたない整数を素数という。1 は素数にはいれない。

1 けたの素数は 2，3，5，7

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~

100 以下の自然数については，約数をもつものは 1 けたの素数 2，3，5，7 のどれかで割り切れる。逆に言えば，2，3，5，7 のいずれでも割り切れない 100 以下の自然数は素数である。20 までの整数を書き並べて，2 の倍数，3 の倍数，5 の倍数，7 の倍数を消去すれば，残りが素数になる。1 から 20 までの数の中で素数であるのは，2，3，5，7，11，13，17，19 の 8 個

[問題](1 学期期末)

次の(ア)～(オ)について，正しいものには○，正しくないものには×をつけなさい。

(ア) 素数は，すべて奇数である。

(イ) 素数は，約数が 2 つだけの自然数である。

(ウ) いちばん小さい素数は 1 である。

(エ) 10 以上 30 以下の数の中に，素数は 6 つある。

(オ) 72 を素因数分解すると，$72 = 2^3 \times 9$ である。

[解答欄]

(ア)	(イ)	(ウ)
(エ)	(オ)	

[解答](ア) ×　(イ) ○　(ウ) ×　(エ) ○　(オ) ×

[解説]

(ア) 2 は偶数であるが，素数である。

(イ) 素数はその数自身と 1 を約数にもつ。

(ウ) 1 は素数に入れない。

(エ) 1 けたの素数は 2，3，5，7

100 以下の自然数については，約数をもつものは 1 けたの素数 2，3，5，7 のどれかで割り切れる。逆に言えば，2，3，5，7 のいずれでも割り切れない 100 以下の自然数は素数である。30 までの整数を書き並べて，2 の倍数，3 の倍数，5 の倍数，7 の倍数を消去すれば，残りが素数になる。10 以上 30 以下の整数の中で素数なのは，11，13，17，19，23，29 である。

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~

(オ) $72 = 2^3 \times 9$ は完全に素因数分解されていない。$9 = 3^2$ なので $72 = 2^3 \times 3^2$

【】素因数分解の応用

[問題](1 学期中間)

576 はどんな数の平方になっていますか。

[解答欄]

[解答] 24

[解説]

まず右図のようにして 576 を素因数分解すると，

$576 = 2^6 \times 3^2$ となる。

指数部分がすべて偶数なので，指数部分をそれぞれ 2 でわって

$576 = 2^6 \times 3^2 = (2^3 \times 3)^2 = 24^2$ と変形できる。

ゆえに 576 は 24 の平方になっている。

2 | 576
2 | 288
2 | 144
2 | 72
2 | 36
2 | 18
3 | 9
3

$576 = 2^6 \times 3^2$

[問題](1 学期中間)

45 にできるだけ小さい自然数をかけて，その結果がある整数の 2 乗になるようにしたい。どんな数を書ければよいか。

[解答欄]

[解答] 5

[解説]

＊整数を 2 乗した数を素因数分解すると，各素因数の指数は偶数になる。

例：$12^2 = (2^2 \times 3)^2 = 2^4 \times 3^2$ で指数 4, 2 はいずれも偶数

$45 = 3^2 \times 5$ なので 5 をかけると，$3^2 \times 5^2 = 15^2$ となる。

[問題](1 学期中間)

　90にできるだけ小さい自然数nをかけて，その結果が，ある自然数の 2 乗になるようにするには，nをいくつにすればよいですか。

[解答欄]

[解答]10

[解説]

整数を 2 乗した平方数を素因数分解すると，各素因数の指数は偶数になる。

　例：$12^2=(2^2\times3)^2=2^4\times3^2$で指数4, 2 はいずれも偶数

90を素因数分解すると，$90=3^2\times2\times5$

これに2×5かけると$3^2\times2^2\times5^2=(3\times2\times5)^2=30^2$

よって$n=2\times5=10$

[問題](1 学期期末)

　96にできるだけ小さい自然数をかけてある数の 2 乗にしたい。ある数を求めなさい。

[解答欄]

[解答]6

[解説]

＊整数を 2 乗した平方数を素因数分解すると，各素因数の指数は偶数になる。

　例：$12^2=(2^2\times3)^2=2^4\times3^2$で指数4, 2 はいずれも偶数

$96=4^2\times6$なので6をかけると，$4^2\times6^2=24^2$となる。

[問題](3 学期)

216 にできるだけ小さい自然数をかけて, ある自然数 a の 2 乗になるようにしたい。a の値を求めなさい。

[解答欄]

[解答] 36

[解説]

＊整数を 2 乗した数を素因数分解すると，各素因数の指数は偶数になる。

例：$12^2 = \left(2^2 \times 3\right)^2 = 2^4 \times 3^2$ で指数 4, 2 はいずれも偶数

216＝$2^3 \times 3^3$ なので，指数を偶数にするためには 2×3 をかければよい。

2×3 をかけると，$2^3 \times 3^3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^4 = (2^2 \times 3^2)^2 = 36^2$

[問題](1 学期期末)

次の数にできるだけ小さい自然数をかけてある数の 2 乗になるようにしたい。どんな数をかけたらよいか。

① 175　　② 84

[解答欄]

①	②

[解答]① 7　② 21

[解説]

整数を 2 乗した数を素因数分解すると，各素因数の指数は偶数になる。

例：$12^2 = \left(2^2 \times 3\right)^2 = 2^4 \times 3^2$ で指数 4, 2 はいずれも偶数

したがって，指数部分がすべて偶数になるような一番小さい数をかけてやる。

① $175 = 5^2 \times 7$ なので 7 をかけると指数部分がすべて偶数となる。

$175 \times 7 = 5^2 \times 7 \times 7 = 5^2 \times 7^2 = \left(5 \times 7\right)^2 = 35^2$

② $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ なので，3×7 をかけると指数部分がすべて偶数となる。

[問題](1 学期中間)

　150 にできるだけ小さい自然数をかけて，その結果がある数の 2 乗になるようにしたい。どんな数をかければよいか求めなさい。

[解答欄]

[解答] 6

[解説]

＊整数を 2 乗した数を素因数分解すると，各素因数の指数は偶数になる。

　例：$12^2=(2^2\times3)^2=2^4\times3^2$ で指数 $4, 2$ はいずれも偶数

150 を素因数分解すると，$150=2\times3\times5^2$ なので，指数部分をすべて偶数にするためには,

2×3 をかければよい。2×3 をかけると,

$150\times2\times3=2\times3\times5^2\times2\times3=2^2\times3^2\times5^2=(2\times3\times5)^2=30^2$ となる。

[問題](1 学期中間)

　216 にできるだけ小さい自然数をかけて，ある自然数の 2 乗にするには，どのような数をかければよいか。

[解答欄]

[解答] 6

[解説]

整数を 2 乗した平方数を素因数分解すると，各素因数の指数は偶数になる。

　例：$12^2=(2^2\times3)^2=2^4\times3^2$ で指数 $4, 2$ はいずれも偶数

したがって，指数部分がすべて偶数になるような一番小さい数をかけてやる。

$216=2^3\times3^3$ なので，2×3 をかけると指数部分がすべて偶数になる。

$216\times2\times3=2^3\times3^3\times2\times3=2^4\times3^4=(2^2\times3^2)^2=36^2$

[問題](1 学期期末)

　252 にできるだけ小さい自然数 a をかけて，積が自然数の平方になるようにしたい。a を求めなさい。

[解答欄]

[解答] 7

[解説]

整数を 2 乗した平方数を素因数分解すると，各素因数の指数は偶数になる。

例：$12^2=(2^2\times 3)^2=2^4\times 3^2$ で指数 $4,\ 2$ はいずれも偶数

したがって，指数部分がすべて偶数になるような一番小さい数をかけてやる。

$252=2^2\times 3^2\times 7$　平方数になるには各因数の指数が偶数になればよい。したがって

7 をかけると，$252\times 7=2^2\times 3^2\times 7^2=(2\times 3\times 7)^2=42^2$ となる

[問題](1 学期期末)

　56 にできるだけ小さい自然数をかけて，ある数の 2 乗にしたい。どのような数をかければよいか。途中の式をすべて書きなさい。

[解答欄]

[解答] $56=2^3\times 7$ に 2×7 をかけると，

$56\times 2\times 7=2^3\times 7\times 2\times 7=2^4\times 7^2=(2^2\times 7)^2=28^2$ となる。よってかける数は 14

[解説]

＊整数を 2 乗した平方数を素因数分解すると，各素因数の指数は偶数になる。

　例：$12^2=(2^2\times 3)^2=2^4\times 3^2$ で指数 $4,\ 2$ はいずれも偶数

したがって，指数部分がすべて偶数になるような一番小さい数をかけてやる。

$56=2^3\times 7$ なので $2\times 7=14$ をかけると $2^4\times 7^2$ と指数部分がすべて偶数になる。

[問題](1 学期期末)

次の問いに答えなさい。

(1) 次の数のうち，素数をすべて選びなさい。

1，2，3，4，5，6，7，8，9，10

(2) 12 を素因数分解しなさい

(3) 12n はある数の 2 乗になっています。このようなnのうち，もっとも小さなものを求めなさい。

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[解答] (1) $2, 3, 5, 7$ (2) $2^2 \times 3$ (3) $n = 3$

[解説]

(1) 7 のように1とその数自身以外に約数をもたない整数を素数という。1 は素数にはいれない。1 けたの素数は$2, 3, 5, 7$

(2) 1 けたの素数$2, 3, 5, 7$で割っていく。右図に示した方法で計算する。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$12 = 2^2 \times 3$

(3) 整数を 2 乗した数を素因数分解すると，各素因数の指数は偶数になる。

例：$12^2 = \left(2^2 \times 3\right)^2 = 2^4 \times 3^2$ で指数$4, 2$ はいずれも偶数

$12 = 2^2 \times 3$なので3をかけると，$12 \times 3 = 2^2 \times 3^2 = 6^2$ となる。

[問題](1 学期中間)

140 をできるだけ小さい自然数でわって，余りがなく，その商がある整数の 2 乗になるようにします。この自然数nを求めなさい。

[解答欄]

[解答] 35

[解説]

140 を素因数分解すると，$140 = 2^2 \times 5 \times 7$

ある整数の 2 乗にするためには，指数部分をすべて偶数にすればよい。

$140 = 2^2 \times 5 \times 7$ を5×7 でわると，2^2 になる。

ゆえに求める数は$5 \times 7 = 35$

[問題](1 学期中間)

　360 をできるだけ小さい自然数でわって，余りがなく，商が自然数の平方になるようにしたい。どんな数で割ればよいか求めよ。

[解答欄]

[解答]10

[解説]

整数を 2 乗した平方数を素因数分解すると，各素因数の指数は偶数になる。

　例：$12^2=\left(2^2\times3\right)^2=2^4\times3^2$ で指数 4, 2 はいずれも偶数

したがって，指数部分がすべて偶数になるような一番小さい数で割ってやる。

$360=2^3\times3^2\times5$　平方数になるためには各因数の指数が偶数にならなければならない。両辺を 2×5 でわると，$\dfrac{360}{2\times5}=2^2\times3^2=6^2$

[問題](1 学期中間)

　次の数に約数は何個ありますか。

① 54　　　② 120

[解答欄]

①	②

[解答]① 8 個　② 16 個

[解説]

素因数分解を使って約数を求めることができる。

例えば，$72=2^3\times3^2$ であるが，その約数はすべて $2^n\times3^m$ の形で表すことができる。(なぜなら，この場合 2, 3 以外の素数(たとえば 5)を因数にもつ数で $72=2^3\times3^2$ を割ることはできないから)

$72=2^3\times3^2$ の約数をすべて書き並べると

1×1	1×3^1	1×3^2
$2^1\times1$	$2^1\times3^1$	$2^1\times3^2$
$2^2\times1$	$2^2\times3^1$	$2^2\times3^2$
$2^3\times1$	$2^3\times3^1$	$2^3\times3^2$

のようになる。2 の部分の素因数は $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3$ で 4 通り $(3+1=4)$，3 の部分の素因数は $1,\ 3,\ 3^2$ で 3 通り $(2+1=3)$

よって，約数の個数は $(3+1)\times(2+1)=12$ 個

①$54=2\times3^3$ なので約数は，$(1+1)\times(3+1)=8$ 個

②$120=2^3\times3\times5$ なので約数は，$(3+1)\times(1+1)\times(1+1)=16$ 個

(別解)

① かけて 54 になる組み合わせは，

$1\times54,\ 2\times27,\ 3\times18,\ 6\times9$ ･･･①
$9\times6,\ 18\times3,\ 27\times2,\ 54\times1$ ･･･②

ゆえに約数は，1，2，3，6，9，18，27，54 の 8 個

この場合，②は①と並び方が逆になっているので，①だけですべての約数を求めることができる。(前の数)×(後の数)で(前の数)＞(後の数)になった時点(6×9 から 9×6 になるとき)でストップすればよい。

② かけて 120 になる組み合わせは

$1\times120,\ 2\times60,\ 3\times40,\ 4\times30,\ 5\times24,\ 6\times20,\ 8\times15,\ 10\times12,\ 12\times10$

12×10 で(前の数)＞(後の数)になるのでストップ。

ゆえに 120 の約数は，1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120 の 16 個

[印刷／他のPDFファイルについて]

※ このファイルは，FdData 中間期末数学 3 年(7,800 円)の一部を PDF 形式に変換したサンプルで，印刷はできないようになっています。製品版の FdData 中間期末数学 3 年は Word の文書ファイルで，印刷・編集を自由に行うことができます。

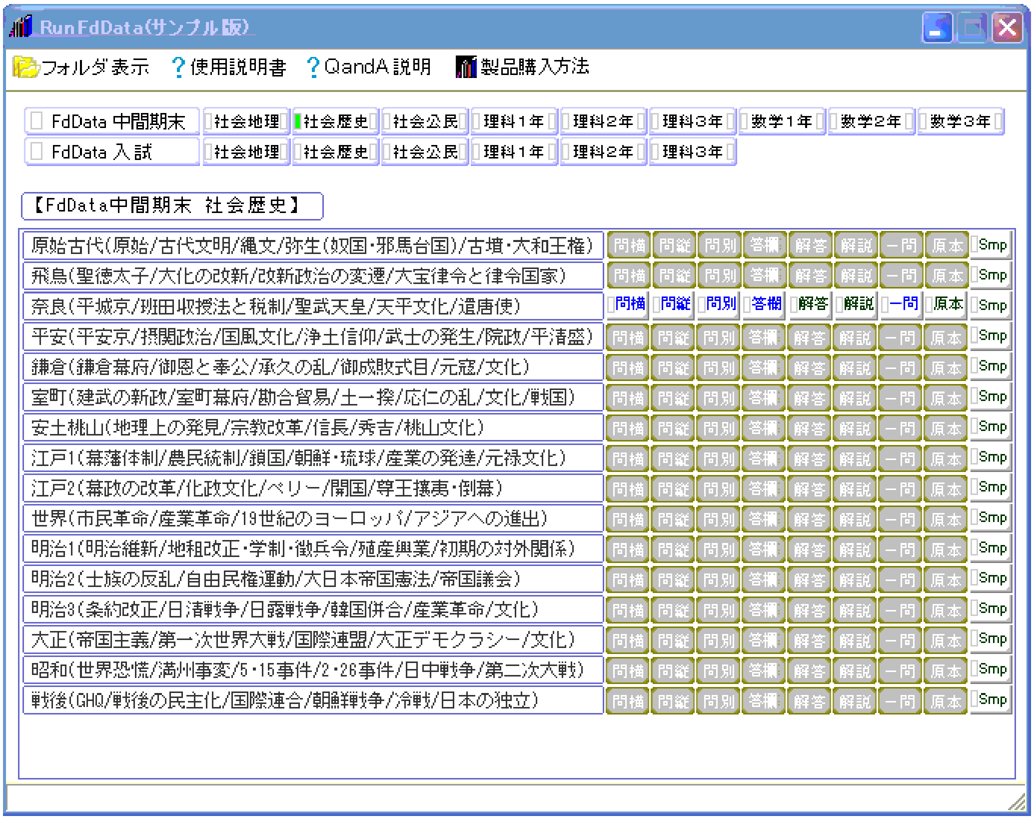
※FdData中間期末(社会･理科･数学)全分野のPDFファイル，および製品版の購入方法はhttp://www.fdtext.com/dat/ に掲載しております。

下図のような，[FdData 無料閲覧ソフト(RunFdData2)]を，Windows のデスクトップ上にインストールすれば， FdData 中間期末･FdData 入試の全 PDF ファイル(各教科約 1800 ページ以上)を自由に閲覧できます。次のリンクを左クリックするとインストールが開始されます。

RunFdData 【 http://fddata.deci.jp/lnk/instRunFdDataWDs.exe 】

※ダイアログが表示されたら，【実行】ボタンを左クリックしてください。インストール中，いくつかの警告が出ますが，[実行][許可する][次へ]等を選択します。

【イメージ画像】



【Fd教材開発】(092) 404-2266
http://www.fdtext.com/dat/