【】二次関数の変域①

[問題](2学期期末)

関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ について， x の変域が次のときの y の変域を求めなさい。

① $2 \leqq x \leqq 6$　　　② $-4 \leqq x \leqq 1$

[解答欄]

①	②

[解答]① $2 \leqq y \leqq 18$　② $0 \leqq y \leqq 8$

[解説]

①＊ $x=0$ が x の変域内にないときは2点を比較

$x=0$ は $2 \leqq x \leqq 6$ の範囲内にないので,

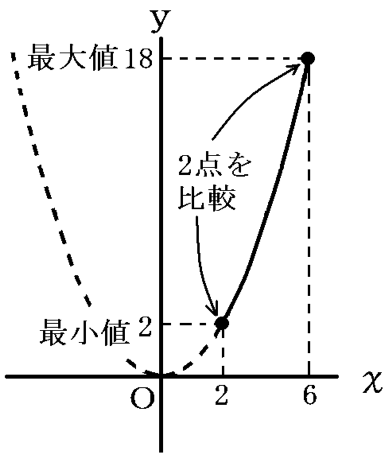
$x=2,\ 6$ のときの y の値を比較する。

$x=2$ のとき $y=\dfrac{1}{2}\times 2^2=2$

$x=6$ のとき $y=\dfrac{1}{2}\times 6^2=18$

よって最小値は $y=2$，最大値は $y=18$

ゆえに $2 \leqq y \leqq 18$



②＊ $x=0$ が x の変域内にあるときは3点を比較

$x=0$ が $-4 \leqq x \leqq 1$ の変域内にあるので,

$x=0,\ -4,\ 1$ のときの y の値を比較する。

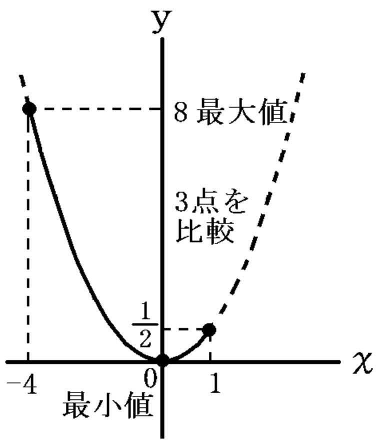
$x=0$ のとき $y=0$

$x=-4$ のとき $y=\dfrac{1}{2}\times(-4)^2=8$

$x=1$ のとき $y=\dfrac{1}{2}\times 1^2=\dfrac{1}{2}$

よって最小値は $y=0$，最大値は $y=8$

ゆえに $0 \leqq y \leqq 8$



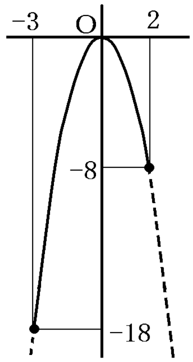
[問題](3 学期)

関数 $y=-2x^2$ で，x の変域が $-3\leqq x\leqq 2$ のときの y の変域を求めなさい。

[解答欄]

[解答] $-18\leqq y\leqq 0$

[解説]



$x=0$ が x の変域内にあるときは 3 点を比較

$x=0$ のとき，$y=0$

$x=-3$ のとき，$y=-2\times(-3)^2=-18$

$x=2$ のとき，$y=-2\times 2^2=-8$

よって，y の変域は

$-18\leqq y\leqq 0$

[問題](2 学期期末)

関数 $y=2x^2$ について，x の変域が $-1\leqq x\leqq 3$ のとき，y の変域を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答] $0\leqq y\leqq 18$

[解説]

$x=0$ が $-1\leqq x\leqq 3$ の変域内にあるので，$x=0,\ -1,\ 3$ のときの y の値を比較する。

$x=0$ のとき $y=0$，$x=-1$ のとき $y=2\times(-1)^2=2$，$x=3$ のとき $y=2\times 3^2=18$

よって最小値は $y=0$，最大値は $y=18$

ゆえに $0\leqq y\leqq 18$

[問題](2 学期中間)

x の変域が $-3\leqq x\leqq 1$ のとき，関数 $y=2x^2$ の y の変域を求めなさい。

[解答欄]

[解答] $0\leqq y\leqq 18$

[解説]

$x=0$ が $-3 \leqq x \leqq 1$ の変域内にあるので，$x=0,\ -3,\ 1$ のときの y の値を比較する。

$x=0$ のとき $y=0$，$x=-3$ のとき $y=2\times(-3)^2=18$，$x=1$ のとき $y=2\times 1^2=2$

よって最小値は $y=0$，最大値は $y=18$

ゆえに $0 \leqq y \leqq 18$

[問題](2 学期期末)

関数 $y=-3x^2$ において，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 1$ のとき，y の変域を求めなさい。

[解答欄]

[解答] $-12 \leqq y \leqq 0$

[解説]

$x=0$ が $-2 \leqq x \leqq 1$ の変域内にあるので，$x=0,\ -2,\ 1$ のときの y の値を比較する。

$x=0$ のとき $y=0$，$x=-2$ のとき $y=-3\times(-2)^2=-12$，$x=1$ のとき $y=-3\times 1^2=-3$

よって最小値は $y=-12$，最大値は $y=0$　ゆえに $-12 \leqq y \leqq 0$

[問題](2 学期期末)

関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ で，x の変域が $-6 \leqq x \leqq 3$ のときの y の変域を求めなさい。

[解答欄]

[解答] $0 \leqq y \leqq 18$

[解説]

$x=0$ は $-6 \leqq x \leqq 3$ の範囲内にあるので，$x=0,\ -6,\ 3$ のときの y の値を比較する。

$x=0$ のとき $y=0$，$x=-6$ のとき $y=\frac{1}{2}\times(-6)^2=18$，$x=3$ のとき $y=\frac{1}{2}\times 3^2=\frac{9}{2}$

よって最小値は $y=0$，最大値は $y=18$　ゆえに $0 \leqq y \leqq 18$

[問題](2 学期中間)

関数 $y=\frac{1}{3}x^2\left(-3\leqq x\leqq 2\right)$ の y の変域を求めなさい。

[解答欄]

[解答] $0\leqq y\leqq 3$

[解説]

$x=0$ は $-3\leqq x\leqq 2$ の範囲内にあるので, $x=0,\ -3,\ 2$ のときの y の値を比較する。

$x=0$ のとき $y=0$, $x=-3$ のとき $y=\frac{1}{3}\times\left(-3\right)^2=3$, $x=2$ のとき $y=\frac{1}{3}\times 2^2=\frac{4}{3}$

よって最小値は $y=0$, 最大値は $y=-3$　ゆえに $0\leqq y\leqq 3$

[問題](2 学期中間)

関数 $y=-2x^2\left(-3\leqq x\leqq -1\right)$ の y の変域を求めなさい。

[解答欄]

[解答] $-18\leqq y\leqq -2$

[解説]

$x=0$ は $-3\leqq x\leqq -1$ の範囲内にないので, $x=-3,\ -1$ のときの y の値を比較する。

$x=-3$ のとき $y=-2\times\left(-3\right)^2=-18$, $x=-1$ のとき $y=-2\times\left(-1\right)^2=-2$

よって最小値は $y=-18$, 最大値は $y=-2$　ゆえに $-18\leqq y\leqq -2$

[問題](2 学期中間)

次の関数について, y の変域を求めなさい。

(1)　関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ について, x の変域が $-2<x\leqq 4$ のときの y の変域。

(2)　関数 $y=x^2$ について, x の変域が $2\leqq x\leqq 3$ のときの y の変域。

(3)　関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ について, x の変域が $-1\leqq x\leqq 4$ のときの y の変域。

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[解答](1) $0 \leqq y \leqq 8$　(2) $4 \leqq y \leqq 9$　(3) $-8 \leqq y \leqq 0$

[解説]

(1) $x=0$ は $-2<x \leqq 4$ の変域の中。よって，$x=0,\ -2,\ 4$ のときの y の値を求める。

$x=0$ のとき $y=0$，$x=-2$ のとき $y=\frac{1}{2}\times(-2)^2=2$，$x=4$ のとき $y=\frac{1}{2}\times 4^2=8$。

よって y の最小値は $y=0$，最大値は $y=8$　ゆえに $0 \leqq y \leqq 8$

(2) $x=0$ は $2 \leqq x \leqq 3$ の変域内にはない。よって，$x=2,\ 3$ のときの y の値を求める。

$x=2$ のとき $y=2^2=4$，$x=3$ のとき $y=3^2=9$

よって y の最小値は $y=4$，最大値は $y=9$　ゆえに $4 \leqq y \leqq 9$

(3) $x=0$ は $-1 \leqq x \leqq 4$ の変域の中。よって，$x=0,\ -1,\ 4$ のときの y の値を求める。

$x=0$ のとき $y=0$，$x=-1$ のとき $y=-\frac{1}{2}\times(-1)^2=-\frac{1}{2}$，

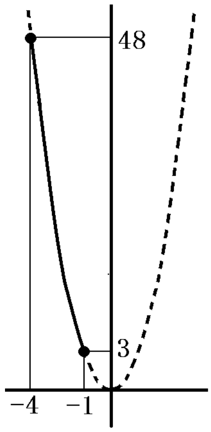
$x=4$ のとき $y=-\frac{1}{2}\times 4^2=-8$

よって，最小値は $y=-8$，最大値は $y=0$　ゆえに $-8 \leqq y \leqq 0$

[問題](3 学期)

関数 $y=ax^2$ において，$x=2$ のとき $y=12$ である。x の変域が $-4 \leqq x \leqq -1$ のとき，y の変域を求めなさい。

[解答欄]



[解答] $3 \leqq y \leqq 48$

[解説]

$y=ax^2$ に $x=2$，$y=12$ を代入すると，$12=a\times 2^2$，$a=12\div 4=3$

よって，$y=3x^2$

$x=0$ は $-4 \leqq x \leqq -1$ の範囲内にないので，

$x=-4,\ -1$ のときの y の値を比較する。

$x=-4$ のとき，$y=3\times(-4)^2=48$　$x=-1$ のとき，$y=3\times(-1)^2=3$

ゆえに，$3 \leqq y \leqq 48$

【】二次関数の変域②

[問題](3 学期)

次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y=4x^2$ について，x の変域が $-3 \leqq x \leqq 2$ のときの y の変域を求めなさい。

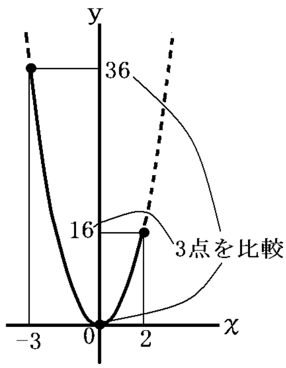
(2) 関数 $y=ax^2$ について，x の変域が $-\dfrac{1}{5} \leqq x \leqq \dfrac{1}{4}$ のときの y の変域が $0 \leqq y \leqq 1$ であるとき，a の値を求めなさい。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $0 \leqq y \leqq 36$ (2) $a=16$

[解説] (1) $x=0$ が x の変域内にあるときは 3 点を比較



$x=0, -3, 2$ のときの y の値を比較する。

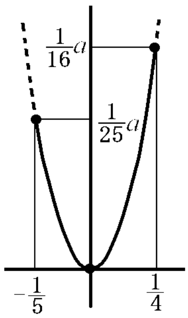
$x=0$ のとき $y=0$

$x=-3$ のとき $y=4\times(-3)^2=36$

$x=2$ のとき $y=4\times 2^2=16$

よって最小値は $y=0$，最大値は $y=36$ ゆえに $0 \leqq y \leqq 36$

(2) 右図のように，y の値が最大になるのは，$x=\dfrac{1}{4}$ のときで，



そのときの y の値は $y=a\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}a$

y の変域が $0 \leqq y \leqq 1$ なので，$\dfrac{1}{16}a=1$ よって $a=16$

[問題](3 学期)

関数 $y=ax^2$ について，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 4$ のとき，y の変域は $-8 \leqq y \leqq 0$ となる。このとき a の値を求めなさい。

[解答欄]

[解答] $a=-\dfrac{1}{2}$

[解説]
y の変域が $-8 \leqq y \leqq 0$ で負の範囲にあるので，比例定数 a は負の値をとる。
$x=0$ は $-2 \leqq x \leqq 4$ の変域内にあるので，まず，$x=0, -2, 4$ のときの y の値を比較して最大値と最小値を求める。
$x=0$ のとき $y=a\times 0^2=0$，$x=-2$ のとき $y=a\times(-2)^2=4a$
$x=4$ のとき $y=a\times 4^2=16a$
$a<0$ なので最小値は $y=16a$，最大値は $y=0$　ゆえに $16a \leqq y \leqq 0$
y の変域は $-8 \leqq y \leqq 0$ と与えられているので，$16a=-8$　ゆえに $a=-\dfrac{1}{2}$

[問題](2 学期期末)
関数 $y=ax^2$ において，x の変域が $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，y の変域は $b \leqq y \leqq 8$ です。このとき，a，b の値を求めなさい。
[解答欄]

[解答] $a=2,\ b=0$
[解説]
y の変域が $b \leqq y \leqq 8$ と正の範囲にあるので，グラフは上に開いており $a>0$
$x=0$ は $-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲内にあるので，$x=0, -1, 2$ のときの y の値を比較する。
$x=0$ のとき $y=0$，$x=-1$ のとき $y=a\times(-1)^2=a$，$x=2$ のとき $y=a\times 2^2=4a$
$a>0$ なので，最小値は $y=0$，最大値は $y=4a$　ゆえに $0 \leqq y \leqq 4a$ ･･･①
y の変域は $b \leqq y \leqq 8$ で，①と同じになるので，$b=0,\ 4a=8$　ゆえに $a=2, b=0$

[問題](2 学期中間)
関数 $y=ax^2$ において，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 3$ のとき，y の変域が $b \leqq y \leqq 18$ である。a，b の値を求めなさい。
[解答欄]

[解答] $a=2,\ b=0$

[解説]
y の変域が $b \leqq y \leqq 18$ と正の範囲にあるので，グラフは上に開いており $a > 0$
$x = 0$ は $-2 \leqq x \leqq 3$ の範囲内にあるので， $x = 0, -2, 3$ のときの y の値を比較する。
$x = 0$ のとき $y = 0$， $x = -2$ のとき $y = a \times (-2)^2 = 4a$， $x = 3$ のとき $y = a \times 3^2 = 9a$
$a > 0$ なので，最小値は $y = 0$，最大値は $y = 9a$　ゆえに $0 \leqq y \leqq 9a$・・・①
y の変域は $b \leqq y \leqq 18$ で，①と同じになるので， $b = 0,\ 9a = 18$
ゆえに $a = 2,\ b = 0$

[問題](3 学期)
　関数 $y = -x^2$ について， x の変域が $-3 \leqq x \leqq a$ とき， y の変域が $-16 \leqq y \leqq b$ である。$a,\ b$ の値を求めなさい。
[解答欄]

[解答] $a = 4,\ b = 0$
[解説]
比例定数が負であるので，最小値 -16 をとるのは $x = -3$ か $x = a$ のときである。
$x = -3$ のときは $y = -(-3)^2 = -9$ で最小値にはならない。
ゆえに $x = a$ のときに最小値をとる。$x = a$ のとき $y = -a^2$ であるので， $-a^2 = -16$，
$a = \pm 4$
ところで $-3 \leqq x \leqq a$ なので $-3 \leqq a$　よって $a = 4$
x の変域が $-3 \leqq x \leqq 4$ なので， $x = 0$ のとき最大値 $y = 0$ をとる。
ゆえに $b = 0$

[問題](2 学期期末)
　関数 $y = -2x^2$ について，x の変域が $-3 \leqq x \leqq a$ のとき，y の変域が $-32 \leqq y \leqq b$ である。$a,\ b$ の値を求めなさい。
[解答欄]

[解答] $a = 4,\ b = 0$

[解説]

比例定数が負であるので，最小値-32をとるのは$x=-3$か$x=a$のときである。

$x=-3$のときは$y=-2\times(-3)^2=-18$で最小値にはならない。

ゆえに$x=a$のときに最小値をとる。$x=a$のとき　$y=-2a^2$であるので，$-2a^2=-32$

よって$a^2=16$　ゆえに$a=\pm4$

ところで$-3\leqq x\leqq a$なので$-3\leqq a$　よって$a=4$

xの変域が$-3\leqq x\leqq 4$になるので，$x=0$のとき最大値$y=0$をとる。

ゆえに$b=0$

[問題](3 学期)

2 つの関数$y=2x+6$，$y=ax^2$において，xの変域が$-3\leqq x\leqq 2$のときyの変域が一致する。aの値を求めなさい。

[解答欄]

[解答]$a=\dfrac{10}{9}$

[解説]

まず，xの変域が$-3\leqq x\leqq 2$のときの$y=2x+6$の変域を求める。

$x=-3$のとき，$y=2\times(-3)+6=0$，

$x=2$のとき，$y=2\times2+6=10$

よって，yの変域は，$0\leqq y\leqq 10$

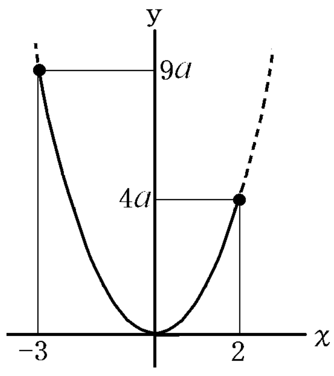
$y=ax^2$の変域も$0\leqq y\leqq 10$になる。

右図のように，$y=ax^2$のyの値が最大になるのは，

$x=-3$のときで，

そのときのyの値は$y=a\times(-3)^2=9a$となる

よって，$9a=10$，$a=\dfrac{10}{9}$



[問題](2 学期期末)

　2 つの関数 $y=-3x^2$ と $y=ax+b$ (a, b は定数, $a>0$)は, x の変域が $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき, y の変域が同じになります。このとき, a, b の値を求めなさい。

[解答欄]

[解答] $a=4,\ b=-8$

[解説]

まず, $y=-3x^2$ の変域を求める。

$x=0$ は $-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲内にあるので, $x=0,\ -1,\ 2$ のときの y の値を比較する。

$x=0$ のとき $y=0$, $x=-1$ のとき $y=-3\times(-1)^2=-3$, $x=2$ のとき $y=-3\times 2^2=-12$

よって最小値は $y=-12$, 最大値は $y=0$　ゆえに変域は $-12 \leqq y \leqq 0$ ･･･①

次に, $y=ax+b$ の変域を求める。

$a>0$ なので, $x=-1$ のときに最小値 $y=-a+b$, $x=2$ のときに最大値 $y=2a+b$ をとる。ゆえに y の変域は $-a+b \leqq y \leqq 2a+b$ ･･･②

変域①, ②が同じなので,

$-a+b=-12$ ･･･①

$2a+b=0$ ･･･②

これを $a,\ b$ の連立方程式として解く。②－①より, $3a=12$　ゆえに $a=4$

②に $a=4$ を代入すると, $2\times 4+b=0$　ゆえに　$b=-8$

よって, $a=4,\ b=-8$

[問題](2 学期期末)

　x の変域が $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき, $y=x^2$ と $y=ax+b$ ($a>0$)の y の変域が一致するのは, a ＝(　①　), b ＝(　②　)のときである。

[解答欄]

①	②

[解答]① $\dfrac{4}{3}$　② $\dfrac{4}{3}$

[解説]

まず, $y=x^2$ の変域を求める。

$x=0$ は $-1 \leqq x \leqq 2$ の変域内にあるので，$x=0,\ -1,\ 2$ のときの y の値を比較して $y=x^2$ の最大値と最小値を求める。

$x=0$ のとき $y=0$，$x=-1$ のとき $y=(-1)^2=1$，$x=2$ のとき $y=2^2=4$

よって $y=x^2$ の最大値は $y=4$，最小値は $y=0$　ゆえに y の変域は $0 \leqq y \leqq 4$ ･･･①

次に，$y=ax+b$ の変域を求める。

$a>0$ なので，直線は右上がりで $x=-1$ のとき最小値 $y=-a+b$

$x=2$ のとき最大値 $y=2a+b$ をとる。

ゆえに y の変域は $-a+b \leqq y \leqq 2a+b$ ･･･②

①と②の変域が一致するので，$-a+b=0$ ･･･③，$2a+b=4$ ･･･④

これを $a,\ b$ の連立方程式として解く。④－③より，$3a=4$，ゆえに $a=\dfrac{4}{3}$

③に $a=\dfrac{4}{3}$ を代入すると，$-\dfrac{4}{3}+b=0$　ゆえに $b=\dfrac{4}{3}$

【】二次関数の変化の割合①

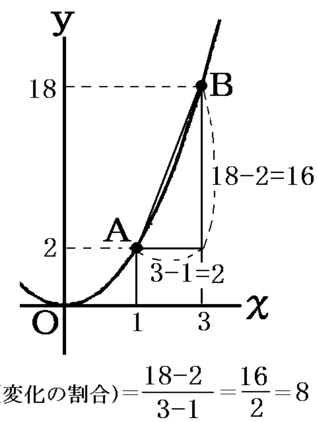
[問題](2 学期期末)

関数 $y=2x^2$ について，x の値が1から3まで増加するときの変化の割合を求めよ。

[解答欄]

[解答]8

[解説]



$x=1$ のとき $y=2\times1^2=2$

$x=3$ のとき $y=2\times3^2=18$

y ：$2\to18$ (増加量)＝$18-2=16$

x ：$1\to3$ (増加量)＝$3-1=2$

ゆえに，(変化の割合)＝$\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{16}{2}=8$

[問題](3 学期)

関数 $y=3x^2$ で，x の値が 1 から 4 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

[解答欄]

[解答]15

[解説]

$x=1$ のとき $y=3\times1^2=3$，$x=4$ のとき $y=3\times4^2=48$ なので，

(変化の割合)＝$\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{48-3}{4-1}=\dfrac{45}{3}=15$

[問題](2 学期中間)

関数 $y=-2x^2$ において，x が次のように変わるときの変化の割合をそれぞれ求めなさい。

(1) 1から3　　(2) −3から−1　　(3) −2から2

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[解答](1) −8　(2) 8　(3) 0

[解説]

(1) $x=1$のとき$y=-2\times1^2=-2$，$x=3$のとき$y=-2\times3^2=-18$

y：$-2\to-18$　(増加量)＝$-18-(-2)=-16$

x：$1\to3$　　(増加量)＝$3-1=2$

ゆえに，(変化の割合)＝$\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{-16}{2}=-8$

＊(参考)

2 乗に比例する関数の変化の割合の簡単な計算方法

$y=ax^2$でxがpからqに変化するとき，

(変化の割合) $=\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{aq^2-ap^2}{q-p}=\dfrac{a(q^2-p^2)}{q-p}=\dfrac{a(q+p)(q-p)}{q-p}=a(q+p)$

これを使うと，(変化の割合)＝$a(p+q)=-2\times(1+3)=-8$

(2)，(3)はこの簡単な計算方法を使ってみる。

(2) (変化の割合)＝$a(p+q)=-2\times(-3-1)=8$

(3) (変化の割合)＝$a(p+q)=-2\times(-2+2)=0$

＊(1)～(3)でわかるように，$y=ax^2$の場合，変化の割合は一定ではない。

[問題](2 学期期末)

関数$y=3x^2$において，xの値が2から4まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

[解答欄]

[解答]18

[解説]

$x=2$のとき$y=3\times2^2=12$，$x=4$のとき$y=3\times4^2=48$

y：$12\to48$　(増加量)＝$48-12=36$

x：$2\to4$　(増加量)＝$4-2=2$

ゆえに，(変化の割合) $=\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{36}{2}=18$

[問題](2 学期期末)

関数 $y=4x^2$ について，x の値が3から5まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

[解答欄]

[解答]32

[解説]

$x=3$ のとき $y=4\times3^2=36$，$x=5$ のとき $y=4\times5^2=100$

y ：$36\to100$　(増加量)$=100-36=64$

x ：　$3\to5$　　(増加量)$=5-3=2$

ゆえに，(変化の割合) $=\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{64}{2}=32$

[問題](2 学期中間)

関数 $y=-\dfrac{3}{2}x^2$ について，x の値が2から4まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

[解答欄]

[解答]-9

[解説]

$x=2$ のとき $y=-\dfrac{3}{2}\times2^2=-6$，$x=4$ のとき $y=-\dfrac{3}{2}\times4^2=-24$

y ：$-6\to-24$　(増加量)$=-24-(-6)=-18$

x ：　$2\to4$　　(増加量)$=4-2=2$

ゆえに，(変化の割合) $=\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{-18}{2}=-9$

[問題](2 学期中間)

関数 $y=2x^2$ について，x の値が -4 から -2 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

[解答欄]

[解答] -12

[解説]

$x=-4$ のとき $y=2\times(-4)^2=32$， $x=-2$ のとき $y=2\times(-2)^2=8$

y ：$32\to 8$　　(増加量)＝$8-32=-24$

x ：$-4\to -2$　(増加量)＝$-2-(-4)=2$

ゆえに，(変化の割合) $=\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{-24}{2}=-12$

[問題](2 学期期末)

関数 $y=x^2$ について，次の問いに答えなさい。

① x の値が 2 から 5 まで増加するときの y の増加量を求めなさい。

② x の値が -4 から -1 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

[解答欄]

①	②

[解答]① 21　② -5

[解説]

① (y の増加量)＝$5^2-2^2=25-4=21$

② $x=-4$ のとき $y=(-4)^2=16$， $x=-1$ のとき $y=(-1)^2=1$

y ：$16\to 1$　　(増加量)＝$1-16=-15$

x ：$-4\to -1$　(増加量)＝$-1-(-4)=3$

ゆえに，(変化の割合)＝$\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{-15}{3}=-5$

[問題](2 学期中間)

　次に問いに答えなさい。

(1)　関数 $y=x^2$ で，x の値が -3 から -1 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

(2)　関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ について x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

(3)　関数 $y=2x^2$ について，x が -3 から 1 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[解答](1)　-4　(2)　2　(3)　-4

[解説]

＊2 乗に比例する関数の変化の割合の簡単な計算方法

$y=ax^2$ で x が p から q に変化するとき,

(変化の割合) $=\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{aq^2-ap^2}{q-p}=\dfrac{a(q^2-p^2)}{q-p}=\dfrac{a(q+p)(q-p)}{q-p}=a(q+p)$

(1) (変化の割合)$=1\times(-3-1)=-4$

(2) (変化の割合)$=\dfrac{1}{2}\times(1+3)=2$

(3) (変化の割合)$=2\times(-3+1)=-4$

[問題](3 学期)

　次の関数について，x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

(1)　$y=3x-\dfrac{1}{2}$

(2)　$y=\dfrac{8}{x}$

(3)　$y=2x^2$

(4)　$y=-\dfrac{1}{3}x^2$

[解答欄]

(1)	(2)	(3)	(4)

[解答](1)　3　(2)　-1　(3)　12　(4)　-2

[解説]

(1) $x=2$ のとき $y=3\times 2-\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$，$x=4$ のとき $y=3\times 4-\frac{1}{2}=\frac{23}{2}$

よって，(x の増加量)$=4-2=2$ で，(y の増加量)$=\frac{23}{2}-\frac{11}{2}=6$

ゆえに，(変化の割合)$=\frac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\frac{6}{2}=3$

＊1 次関数 $y=ax+b$ で a は変化の割合を表すので，計算せずに，(変化の割合)$=3$ とだすこともできる。

(2) $x=2$ のとき $y=\frac{8}{2}=4$，$x=4$ のとき $y=\frac{8}{4}=2$

よって，(x の増加量)$=4-2=2$ で，(y の増加量)$=2-4=-2$

ゆえに，(変化の割合)$=\frac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\frac{-2}{2}=-1$

(3) $x=2$ のとき $y=2\times 2^2=8$，$x=4$ のとき $y=2\times 4^2=32$

よって，(x の増加量)$=4-2=2$ で，(y の増加量)$=32-8=24$

ゆえに，(変化の割合)$=\frac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\frac{24}{2}=12$

(4) $x=2$ のとき $y=-\frac{1}{3}\times 2^2=-\frac{4}{3}$，$x=4$ のとき $y=-\frac{1}{3}\times 4^2=-\frac{16}{3}$

よって，(x の増加量)$=4-2=2$ で，(y の増加量)$=-\frac{16}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)=-4$

ゆえに，(変化の割合)$=\frac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\frac{-4}{2}=-2$

[問題](2 学期期末)

関数 $y=\frac{1}{x}$ の x が 1 から 3 まで変わるときの変化の割合は(　　　)である。

[解答欄]

[解答]$-\dfrac{1}{3}$

[解説]

$x=1$のとき$y=\dfrac{1}{1}=1$，$x=3$のとき$y=\dfrac{1}{3}$

y：$1\to\dfrac{1}{3}$　(増加量)$=\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{2}{3}$

x：$1\to 3$　(増加量)$=3-1=2$

ゆえに，(変化の割合) $=\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=$($y$の増加量)÷($x$の増加量)$=-\dfrac{2}{3}\div 2=-\dfrac{1}{3}$

[問題](2 学期期末)

関数$y=ax^2$では，その変化の割合は，1 次関数の場合と異なり(　　　)ではない。

[解答欄]

[解答]一定

[解説]

例えば，1 次関数$y=3x+5$の場合，

xが$1\to 3$と2増加するとき，yは$8\to 14$と6増加する

xが$3\to 6$と3増加するとき，yは$14\to 23$と9増加する

yの増加量は異なっているが，変化の割合(xが1増加するときのyの増加量)は

(変化の割合)$=\dfrac{14-8}{3-1}=\dfrac{6}{2}=3$，(変化の割合)$=\dfrac{23-14}{6-3}=\dfrac{9}{3}=3$

と等しくなる。直線の場合の変化の割合は一定で，直線の傾きと等しくなる。

これに対し，2 次関数の場合は一定ではない。

[問題](2 学期期末)

　ある斜面をころがりはじめてから x 秒間にころがる距離を y m とすると，$y=3x^2$ という関係があります。このとき，1秒後から4秒後までの平均の速さを求めなさい。

[解答欄]

[解答]15 m/秒

[解説]

$x=1$ のとき $y=3\times1^2=3$，$x=4$ のとき $y=3\times4^2=48$

y ：$3\to48$　(増加量)＝(進んだ距離)＝$48-3=45$ m

x ：$1\to4$　(増加量)＝(かかった時間)＝$4-1=3$ 秒

(平均の速さ)＝$\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{45}{3}=15$ m/秒

[問題](2 学期中間)

　ボールが斜面をころがり始めてからの時間を x 秒，その間にころがった距離を y m とすると，x と y との間には，$y=2x^2$ という関係がある。この運動について，3秒から5秒までの平均の速さを求めなさい。

[解答欄]

[解答]16 m/秒

[解説]

$x=3$ のとき $y=2\times3^2=18$，$x=5$ のとき $y=2\times5^2=50$

y ：$18\to50$　(増加量)＝(進んだ距離)＝$50-18=32$ m

x ：　$3\to5$　(増加量)＝(かかった時間)＝$5-3=2$ 秒

(平均の速さ)＝$\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{32}{2}=16$ m/秒

【】二次関数の変化の割合②

[問題](2 学期中間)

関数 $y=ax^2$ で, x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合が 12 になった。このとき, a の値を求めなさい。

[解答欄]

[解答] $a=3$

[解説]

$x=1$ のとき $y=a\times 1^2=a$, $x=3$ のとき $y=a\times 3^2=9a$

y : $a\rightarrow 9a$ (増加量) $=9a-a=8a$

x : $1\rightarrow 3$ (増加量) $=3-1=2$

ゆえに, (変化の割合) $=\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{8a}{2}=4a$

変化の割合は 12 なので, $4a=12$ ゆえに, $a=3$

[問題](3 学期)

関数 $y=ax^2$ において, x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合は 2 である。a の値を求めなさい。

[解答欄]

[解答] $a=\dfrac{1}{2}$

[解説]

$x=1$ のとき $y=a\times 1^2=a$, $x=3$ のとき $y=a\times 3^2=9a$

y : $a\rightarrow 9a$ (増加量) $=9a-a=8a$

x : $1\rightarrow 3$ (増加量) $=3-1=2$

ゆえに, (変化の割合) $=\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{8a}{2}=4a$

変化の割合は 2 なので, $4a=2$ ゆえに $a=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

[問題](2 学期期末)

関数 $y=ax^2$ において，x の値が 1 から 3 に増加したときの変化の割合が 6 であるときの a の値を求めなさい。

[解答欄]

[解答] $a=\dfrac{3}{2}$

[解説]

$x=1$ のとき $y=a\times1^2=a$ ， $x=3$ のとき $y=a\times3^2=9a$

y ： $a\rightarrow9a$ 　(増加量)＝$9a-a=8a$

x ：$1\rightarrow3$ 　(増加量)＝$3-1=2$

ゆえに，(変化の割合) $=\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{8a}{2}=4a$

変化の割合は 6 なので，$4a=6$ 　ゆえに $a=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

[問題](2 学期中間)

y が x の 2 乗に比例し，x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合が 2 であるような関数の式を求めなさい。

[解答欄]

[解答] $y=\dfrac{1}{2}x^2$

[解説]

求める関数の式を $y=ax^2$ とおくと，

$x=1$ のとき $y=a\times1^2=a$ ， $x=3$ のとき $y=a\times3^2=9a$

y ： $a\rightarrow9a$ 　(増加量)＝$9a-a=8a$

x ：$1\rightarrow3$ 　(増加量)＝$3-1=2$

ゆえに，(変化の割合) $=\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{8a}{2}=4a$

変化の割合は 2 なので，$4a=2$　ゆえに $a=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

ゆえに求める式は $y=\frac{1}{2}x^2$

[問題](3 学期)

　次の問いに答えなさい。

(1)　関数 $y=ax^2$ について，x が 2 から 4 まで増加したときの y の増加量は 24 であった。a の値を求めなさい。

(2)　関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ について，x が a から $a+2$ まで増加したときの変化の割合は 6 であった。a の値を求めなさい。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1)　$a=2$　(2)　$a=-7$

[解説]

(1)　$x=2$ のとき $y=a\times 2^2=4a$，$x=4$ のとき $y=a\times 4^2=16a$

したがって，(y の増加量)$=16a-4a=24$, $12a=24$, $a=2$

(2)　$x=a$ のとき $y=-\frac{1}{2}a^2$，$x=a+2$ のとき $y=-\frac{1}{2}(a+2)^2$

(x の増加量)$=4-2=2$ で,

(y の増加量)$=-\frac{1}{2}(a+2)^2-\left(-\frac{1}{2}a^2\right)=-\frac{1}{2}a^2-2a-2+\frac{1}{2}a^2=-2a-2$

よって，(変化の割合)$=\frac{(\text{y}の増加量)}{(\text{x}の増加量)}=\frac{-2a-2}{2}=-a-1$

ゆえに $-a-1=6$, $-a=7$, $a=-7$

[問題](2 学期期末)

関数 $y=ax^2$ (a は定数)のグラフ上の 2 点 A，B の x 座標はそれぞれ $-3,\ 6$ で，直線 AB の傾きは 1 である。このとき，a の値を求めなさい。

[解答欄]

[解答] $a=\dfrac{1}{3}$

[解説]

$x=-3$ のとき $y=a\times(-3)^2=9a$，$x=6$ のとき $y=a\times6^2=36a$

y ：$9a\rightarrow36a$　(増加量)＝$36a-9a=27a$

x ：$-3\rightarrow6$　(増加量)＝$6-(-3)=9$

ゆえに，(変化の割合) $=\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{27a}{9}=3a$

直線 AB の傾きが1であるので，変化の割合は1である。

ゆえに，$3a=1$　よって $a=\dfrac{1}{3}$

[問題](2 学期期末)

関数 $y=x^2$ で，x の値が a から $a+2$ まで増加するときの変化の割合は 4 です。このとき，a の値を求めなさい。

[解答欄]

[解答] $a=1$

[解説]

$x=a$ のとき $y=a^2$，$x=a+2$ のとき $y=(a+2)^2=a^2+4a+4$

y ：$a^2\rightarrow a^2+4a+4$　(増加量)＝$a^2+4a+4-a^2=4a+4$

x ：$a\rightarrow a+2$　(増加量)＝$a+2-a=2$

ゆえに，(変化の割合) $=\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{4a+4}{2}=2a+2$

変化の割合は 4 なので，$2a+2=4,\ 2a=2,\ a=1$

[問題](2 学期期末)

x の値が a から $a+3$ まで増加するとき, 2 つの関数 $y=2x^2$ と $y=2x+1$ の変化の割合が等しい。このとき, a の値を求めなさい。

[解答欄]

[解答] $a=-1$

[解説]

まず, $y=2x^2$ の変化の割合を求める。

$x=a$ のとき $y=2a^2$, $x=a+3$ のとき $y=2(a+3)^2=2(a^2+6a+9)=2a^2+12a+18$

y ： $2a^2 \to 2a^2+12a+18$　(増加量)$=2a^2+12a+18-2a^2=12a+18$

x ： $a \to a+3$　(増加量)$=a+3-a=3$

ゆえに, (変化の割合) $=\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{12a+18}{3}=4a+6$

1 次関数の変化の割合はつねに傾きに等しいので, $y=2x+1$ の変化の割合は 2

よって, $4a+6=2$, $4a=-4$, $a=-1$

[問題](2 学期期末)

関数 $y=ax^2$ (a は定数)について, x の値が 1 から 4 まで増加するときの変化の割合は, x の値が 0 から 1 まで増加するときの変化の割合よりも 3 大きくなります。このとき, a の値を求めなさい。

[解答欄]

[解答] $a=\dfrac{3}{4}$

[解説]

まず, x の値が 1 から 4 まで増加するときの変化の割合を求める。

$x=1$ のとき $y=a\times1^2=a$, $x=4$ のとき $y=a\times4^2=16a$

y ： $a \to 16a$　(増加量)$=16a-a=15a$

x ： $1 \to 4$　(増加量)$=4-1=3$

ゆえに, (変化の割合) $=\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{15a}{3}=5a$ ･･･①

次に，x の値が0から1まで増加するときの変化の割合を求める。

$x=0$ のとき $y=0$，$x=1$ のとき $y=a\times 1^2=a$

y ：$0\to a$　(増加量)＝$a-0=a$　　x ：$0\to 1$　(増加量)＝$1-0=1$

ゆえに，(変化の割合) $=\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{a}{1}=a\cdots$②

条件より①の変化量は②の変化量より3大きいので，$5a=a+3$, $4a=3$　ゆえに $a=\dfrac{3}{4}$

[問題](2 学期中間)

次の各問いにあてはまる関数は，下の①～⑤のどれですか。

(1)　グラフが(－2，－4)を通るもの。

(2)　$y=-\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフと x 軸について対称なもの。

(3)　x が 0 から 4 まで，増加したとき変化の割合が一番大きいもの。

①　$y=2x^2$　②　$y=\dfrac{1}{2}x^2$　③　$y=-x^2$　④　$y=x^2$　⑤　$y=2x-3$

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[解答](1) ③　(2) ②　(3) ①

[解説]

(1) $x=-2$ を①～⑤にそれぞれ代入すると，① $y=8$，② $y=2$，③ $y=-4$，④ $y=4$

⑤ $y=-7$　よって(－2，－4)を通るのは③

(2) $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフと x 軸について対称なグラフは比例定数の符号が逆になる。

(3) ⑤は 1 次関数で変化の割合は直線の傾き2と等しい。

①～④は 2 乗に比例する関数で，それぞれ変化の割合を計算すればよいが，ここで 2 乗に比例する関数の変化の割合の簡単な計算方法を紹介しておく。

$y=ax^2$ で x が p から q に変化するとき，

(変化の割合) $=\dfrac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\dfrac{aq^2-ap^2}{q-p}=\dfrac{a(q^2-p^2)}{q-p}=\dfrac{a(q+p)(q-p)}{q-p}=a(q+p)$

これを使って①～④の変化の割合を計算すると，

① $2\times(0+4)=8$，② $\frac{1}{2}\times(0+4)=2$，③ $-1\times(0+4)=-4$，④ $1\times(0+4)=4$

以上より変化の割合が一番大きいものは①

[問題](2 学期中間)

次の(1)～(3)にあてはまる関数を下のア～カからすべて記号で選びなさい。(4)については変域を求めなさい。

ア　$y=2x^2$　　イ　$y=-2x^2$　　ウ　$y=-x^2$　　エ　$y=-3x+2$

オ　$y=2x+5$　　カ　$y=x^2$

(1)　$x>0$ のとき，x の値が増加すると，y の値が減少するのは，どれか。

(2)　$x=0$ のとき，y の値が最小になるのは，どれか。

(3)　変化の割合が一定であるものは，どれか。

(4)　イの関数について，x の変域が $-3\leqq x\leqq 2$ のときの y の変域を求めなさい。

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
(4)	(5)	(6)

[解答](1) イ，ウ，エ，　(2) ア，カ　(3) エ，オ　(4) $-18\leqq y\leqq 0$

[解説]

(1) エ，オは 1 次関数で，このうち x の値が増加すると，y の値が減少するのは傾きが負であるエである。アイウカは 2 乗に比例する関数で，このうち，$x>0$ のとき x の値が増加すると y の値が減少するのは比例定数が負のイ，ウである。

(2) $x=0$ のとき y の値が最小になるのは，比例定数が正の 2 乗に比例する関数ア，カの場合である。

(3) 2 乗に比例する関数では変化の割合は一定ではない。1 次関数の場合，変化の割合は常に傾きと等しく一定の値をとる。ゆえに変化の割合が一定であるのはエ，オ。

(4) $x=0$ は $-3\leqq x\leqq 2$ の範囲内にあるので，$x=0,\ -3,\ 2$ のときの y の値を比較する。

$x=0$ のとき $y=0$，$x=-3$ のとき $y=-2\times(-3)^2=-18$，

$x=2$ のとき $y=-2\times 2^2=-8$

よって最小値は $y=-18$，最大値は $y=0$　ゆえに $-18\leqq y\leqq 0$

[印刷／他の PDF ファイルについて]
※ このファイルは，FdData 中間期末数学 3 年(7,200 円)の一部を PDF 形式に変換したサンプルで，印刷はできないようになっています。製品版の FdData 中間期末数学 3 年は Word(または一太郎)の文書ファイルで，印刷･編集を自由に行うことができます。※FdData 中間期末(社会･理科･数学)全分野の PDF ファイル，および製品版の購入方法は http://www.fdtext.com/dat/ に掲載しております。

下図のような，[FdData 無料閲覧ソフト(RunFdData)]を，Windows のデスクトップ上にインストールすれば，FdData 中間期末･FdData 入試の全 PDF ファイル(各教科約 1500 ページ)を自由に閲覧できます。次のリンクを左クリックするとインストールが開始されます。
RunFdData(Word 版) 【 http://www.fdtext.com/lnk/instRunFdDataWDs.exe 】
RunFdData(一太郎版) 【 http://www.fdtext.com/lnk/instRunFdDataTAs.exe 】
※ダイアログが表示されたら，【実行】ボタンを左クリックしてください。インストール中，いくつかの警告が出ますが，[実行][許可する][次へ]等を選択します。

【イメージ画像】

【Fd 教材開発：URL http://www.fdtext.com/dat/ Tel (092) 404-2266】