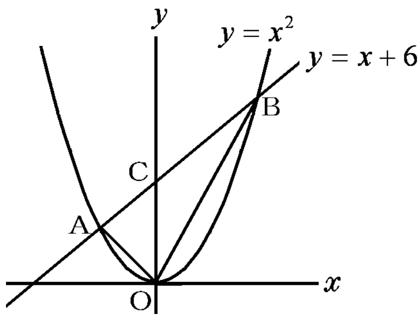
【】 面積

[問題](2学期期末)

右の図は，関数 $y=x^2$ ･･･①，$y=x+6$ ･･･② のグラフである。次の各問いに答えなさい。

(1)　交点A，Bの座標を求めなさい。

(2)　△AOBの面積を求めなさい。



[解答欄]

(1)A	B	(2)

[解答](1) A$(-2,\ 4)$，B$(3,\ 9)$　(2) 15

[解説]

<Point> 放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=bx+c$ の交点→$ax^2=bx+c$ を解く

交点においては，$y=ax^2$ の y と $y=bx+c$ の y が同じなので，ax^2 と $bx+c$ が等しくなる。よって，$ax^2=bx+c$ が成り立つ。

(1) $y=x^2$ と $y=x+6$ の交点を求めるために，$x^2=x+6$ とおく。

$x^2-x-6=0$，$(x-3)(x+2)=0$，$x=3,\ -2$

$x=3$ のとき $y=3^2=9$，$x=-2$ のとき $y=4$　よって，A$(-2,\ 4)$，B$(3,\ 9)$

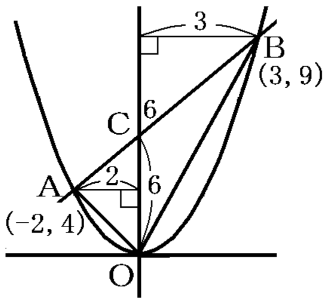
<Point> △AOBの面積→y 軸で2つの三角形に分けて求める。

(2) 直線ABと y 軸の交点をCとすると，

$y=x+6$ の y 切片が6なので，OC＝6

△AOCの面積は, OC＝6を底辺とすると高さは点Aの x 座標より2なので，$\frac{1}{2}\times6\times2=6$

△BOCの面積は, OC＝6を底辺とすると高さは点Bの x 座標より3なので，$\frac{1}{2}\times6\times3=9$



ゆえに，(△AOBの面積)＝$6+9=15$

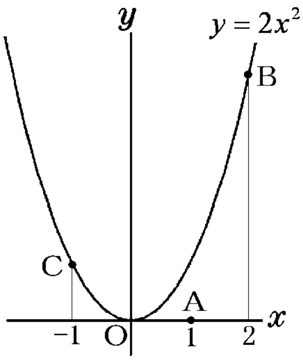
[問題](2 学期期末)

右の図のように，関数 $y=2x^2$ のグラフと，3 点 A，B，C があります。点 A の座標は(1，0)で，点 B，C は放物線上にあり，それぞれの x 座標は 2，－1 です。次の問いに答えなさい。

(1)　直線 BC の式を求めなさい。

(2)　△OBC の面積を求めなさい。

(3)　△ABC の面積を求めなさい。



[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[解答](1)　$y=2x+4$　(2)　6　(3)　9

[解説]

(1) 点 B の x 座標は 2 なので，$y=2x^2$ に入して $y=2\times2^2=8$　ゆえに B$(2,\ 8)$

点 C の x 座標は -1 なので，$y=2x^2$ に入して $y=2\times(-1)^2=2$　ゆえに C$(-1,\ 2)$

直線 BC の式を $y=ax+b$ とおいて，B$(2,\ 8)$，C$(-1,\ 2)$を代入すると，

$8=2a+b\cdots$①，$2=-a+b\cdots$②　これを連立方程式として解く。

①－②より，$8-2=2a+b-(-a+b)$，$6=2a+b+a-b$，$6=3a$，$a=2$

②に $a=2$ を代入すると，$2=-2+b$，$b=4$

ゆえに直線 BC の式は $y=2x+4$

(2)<Point> △OBC の面積→ y 軸で 2 つの三角形に分けて求める。

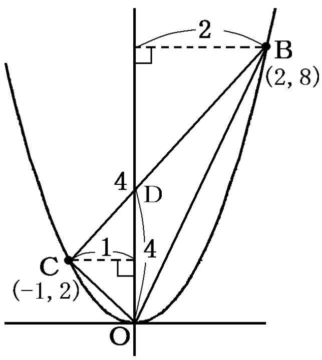
直線 BC が y 軸と交わる点を D とすると，

$y=2x+4$ より点 D の y 座標は 4 で OD＝4

△OBD の底辺を OD＝4 とすると，

点 B の x 座標が 2 なので，△OBD の高さは 2

ゆえに(△OBD の面積)＝$\frac{1}{2}\times4\times2=4$



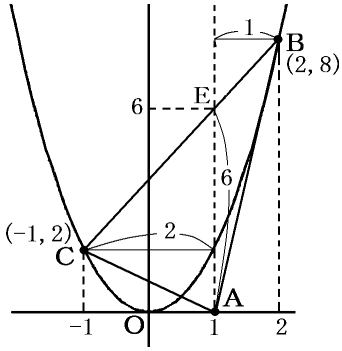
同様に，△OCD の底辺を OD＝4 とすると，

点 C の x 座標が -1 なので，△OCD の高さは 1

ゆえに(OCD の面積)＝$\frac{1}{2}\times4\times1=2$　ゆえに(△OBC の面積)＝$4+2=6$

(3) <Point> △ABC の面積→y 軸に平行な直線で 2 つの三角形に分けて求める。

点 A を通って y 軸に平行な直線を引き，直線 BC との交点を E とする。



$y=2x+4$ に $x=1$ を代入すると $y=6$　ゆえに点 E の y 座標は 6 で，AE＝6

△ABE の底辺を AE＝6 とする。点 B の x 座標が 2，点 A の x 座標は 1 なので△ABE の高さは $2-1=1$

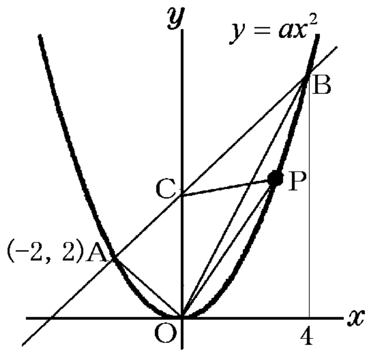
ゆえに△ABE の面積＝$\dfrac{1}{2}\times 6\times 1=3$

△ACE の底辺を AE＝6 とする。点 C の x 座標が -1，点 A の x 座標は 1 なので△ABE の高さは $1-(-1)=2$

ゆえに(△ACE の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times 6\times 2=6$　よって△ABC の面積＝$6+3=9$

[問題](2 学期中間)

図の曲線は，関数 $y=ax^2$ のグラフであり，点 A，B は曲線上の点で，点 A の座標は(－2，2)，点 B の x 座標は 4 である。また，点 C は直線 AB と y 軸との交点で，点 P は放物線上を原点 O から点 B まで動く点である。



(1)　関数 $y=ax^2$ について，a の値を求めなさい。

(2)　直線 AB の式を求めなさい。

(3)　三角形 OAB の面積を求めなさい。

(4)　三角形 OCP の面積が三角形 OAB の面積の $\dfrac{1}{2}$ になるとき，点 P の座標を求めなさい。

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
(4)		

[解答](1) $a=\dfrac{1}{2}$　(2) $y=x+4$　(3) 12　(4) $\left(3,\ \dfrac{9}{2}\right)$

[解説]

(1) 点 A(−2，2)は $y=ax^2$ 上にあるので， $x=-2,\ y=2$ を $y=ax^2$ に代入して，

$2=a\times(-2)^2$ ， $4a=2$　ゆえに $a=\dfrac{1}{2}$

(2) 直線 AB の式を $y=bx+c$ とおく。

点 B の x 座標は 4 なので， y 座標は $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入して， $y=\dfrac{1}{2}\times4^2=8$

$y=bx+c$ は点 B を通るので， $x=4,\ y=8$ を代入して $8=4b+c$ ･･･①

また， $y=bx+c$ は点 A を通るので，

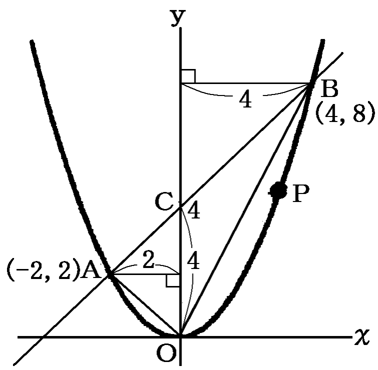
$x=-2,\ y=2$ を代入して $2=-2b+c$ ･･･②

①，②を $b,\ c$ についての連立方程式として解く。

①−②より， $8-2=4b+c-(-2b+c),\ 6=4b+c+2b-c$ ， $6=6b,\ b=1$

これを①に代入すると， $8=4+c,\ c=4$

よって $b=1,\ c=4$　ゆえに直線 AB の式は $y=x+4$



(3) 直線 AB の式が $y=x+4$ なので，点 C の y 座標は 4 で OC＝4

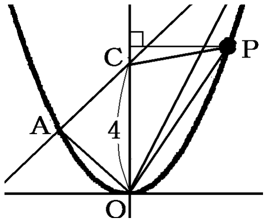
△OBC で OC＝4 を底辺とすると, 点 B の x 座標が 4 であることから△OBC の高さは 4

ゆえに(△OBC の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times4\times4=8$

△OAC で OC＝4 を底辺とすると，点 A の x 座標が -2 であることから△OAC の高さは 2

ゆえに(△OAC の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times4\times2=4$

よって△OAB の面積は， $8+4=12$



(4) △OPC の面積は△OAB の面積の $\dfrac{1}{2}$ なので $12\times\dfrac{1}{2}=6$ 。

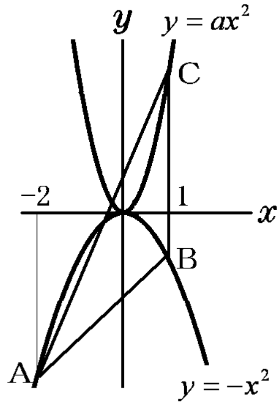
底辺 OC＝4 なので△OPC の高さは 3

よって点 P の x 座標は 3

$y=\dfrac{1}{2}x^2$ に $x=3$ を代入すると， $y=\dfrac{1}{2}\times3^2=\dfrac{9}{2}$　ゆえに点 P の座標は $\left(3,\ \dfrac{9}{2}\right)$

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図のように，関数 $y=-x^2$ のグラフ上に 2 点 A，B があり，関数 $y=ax^2$ (a ＞0)のグラフ上に点 C がある。A の x 座標は－2 で，B と C の x 座標はどちらも 1 である。△ABC の面積が 9cm² であるとき，関数 $y=ax^2$ の a の値を求めよ。ただし，座標の 1 目盛りを 1cm とする。



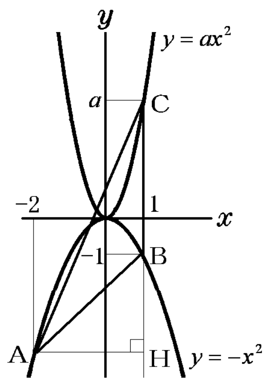
(岩手県)

[解答欄]

[解答] a ＝5

[解説]

△ABC の底辺を BC とすると，高さは右図の AH になる。



点 C の x 座標は 1 なので， $y=ax^2$ に $x=1$ を代入して $y=a$

よって，BC＝ a －(－1)＝ a ＋1

AH＝1－(－2)＝1＋2＝3

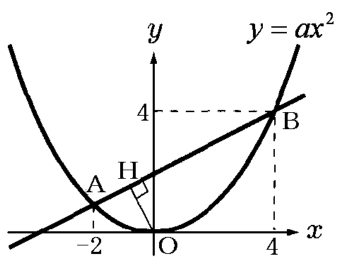
ゆえに，(△ABC の面積)＝(底辺 BC)×(高さ AH)÷2

$=(a+1)\times 3\div 2=\dfrac{3(a+1)}{2}$ (cm²)

よって， $\dfrac{3(a+1)}{2}=9$， $3(a+1)=18$， $a+1=6$， a ＝5

[問題](増補 10)(補充問題)(三平方の定理を使う)

右の図のように，原点をOとし， $y=ax^2$ のグラフ上に 2 点 A，B がある。点 A，B の x 座標はそれぞれ－2，4 であり，点 B の y 座標は 4 である。原点Oから直線 AB に垂線 OH をひく。このとき, 次の(1)～(4)の各問いに答えなさい。



(佐賀県)

(1)　a の値を求めなさい。

(2)　直線ABの式を求めなさい。

(3)　線分ABの長さを求めなさい。

(4)　線分OHの長さを求めなさい。

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
(4)		

[解答](1) $\frac{1}{4}$　(2) $y=\frac{1}{2}x+2$　(3) $3\sqrt{5}$　(4) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

[解説]

(1) $y=ax^2$ は点 B(4, 4)を通るので, $x=4,\ y=4$ を $y=ax^2$ に代入して,

$4=a\times16,\ a=4\div16=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

(2) 点 A の x 座標 $x=-2$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入すると, $y=\frac{1}{4}\times4=1$

よって点 A の座標は(−2, 1)

直線 AB の式を $y=bx+c$ とおく。

$y=bx+c$ は点 A を通るので, $x=-2,\ y=1$ を $y=bx+c$ に代入して,

$1=-2b+c,\ -2b+c=1$ ･･･①

$y=bx+c$ は点 B(4, 4)を通るので, $x=4,\ y=4$ を $y=bx+c$ に代入して,

$4=4b+c,\ 4b+c=4$ ･･･②

①, ②を連立方程式として解く。②−①より,

$4b+c-(-2b+c)=4-1,\ 4b+c+2b-c=3,\ 6b=3,\ b=3\div6=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$b=\frac{1}{2}$ を①に代入すると, $-2\times\frac{1}{2}+c=1,\ -1+c=1,\ c=1+1=2$

よって, 直線 AB の式は, $y=\frac{1}{2}x+2$ となる。

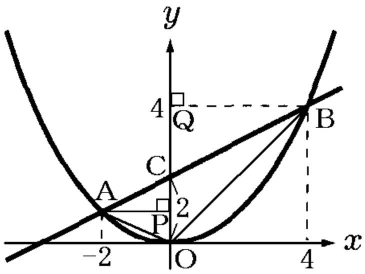
(3) 2 点 $(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)$ の長さは三平方の定理より,

$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ となる。

A(−2, 1), B(4, 4)なので,

(線分 AB の長さ)$=\sqrt{(4-(-2))^2+(4-1)^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=3\sqrt{5}$

(4) △OAB の面積を使って OH の長さを求める。



まず，△OAB の面積を求める。

右図のように，△OAB を△OAC と△OBC に分ける。

△OAC の底辺を OC とすると，高さは AP になる。

直線 AB の式は $y=\dfrac{1}{2}x+2$ なので，点 C の y 座標は 2 になる。よって，OC＝2

高さは AP で，点 A の x 座標が－2 であることより，AP＝2

よって，(△OAC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×OC×AP＝$\dfrac{1}{2}$×2×2＝2

同様にして，(△OBC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×OC×BQ＝$\dfrac{1}{2}$×2×4＝4

ゆえに，(△OAB の面積)＝(△OAC の面積)＋(△OBC の面積)＝2＋4＝6

次に，△OAB の面積を AB を底辺として考える。このとき，高さは OH なので，

(△OAB の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×AB×OH　よって，$\dfrac{1}{2}$×AB×OH＝6,

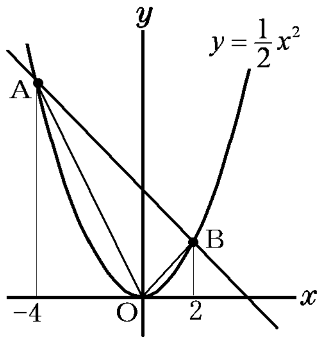
AB＝$3\sqrt{5}$ なので，$\dfrac{1}{2}\times 3\sqrt{5}$ ×OH＝6，$\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ ×OH＝6

OH＝$6\div\dfrac{3\sqrt{5}}{2}=6\times\dfrac{2}{3\sqrt{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

【】面積の二等分：△OAB

[問題](2 学期中間)

右の図のように，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に，点 A，B がある。点 A，B の x 座標は，それぞれ－4，2 である。点 O を通り，△OAB の面積を二等分する直線の式を求めなさい。



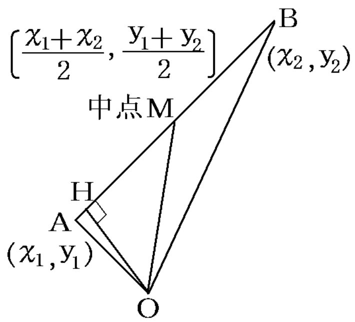
[解答欄]

[解答] $y=-5x$

[解説]

<Point> △AOB の面積を二等分する OM

→M は AB の中点



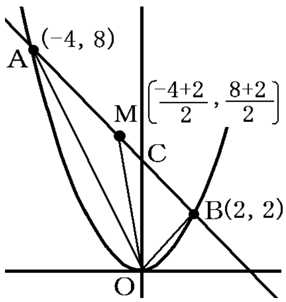
△OAM で AM を底辺とすると，高さは OH

△OBM で BM を底辺とすると，高さは OH

高さが共通なので，AM＝BM なら面積が等しい。

中点の求め方：2 つの座標の平均をとる。

線分 AB の中点を M とすると，直線 OM は三角形 OAB の面積を二等分する。



まず，点 A，B の座標を求める。

点 A の x 座標は－4 なので， x ＝－4 を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して，

$y=\frac{1}{2}\times(-4)^2$ ＝8　よって，点 A の座標は(－4，8)

点 B の x 座標は 2 なので， x ＝2 を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して，

$y=\frac{1}{2}\times 2^2$ ＝2　よって，点 B の座標は(2，2)

中点 M の座標の x 座標は点 A，B のそれぞれの x 座標の平均,

中点 M の座標の y 座標は点 A，B のそれぞれの y 座標の平均。

A$\left(-4,\ 8\right)$，B$\left(2,\ 2\right)$なので，　M$\left(\dfrac{-4+2}{2},\ \dfrac{8+2}{2}\right)$，すなわち M$\left(-1,\ 5\right)$

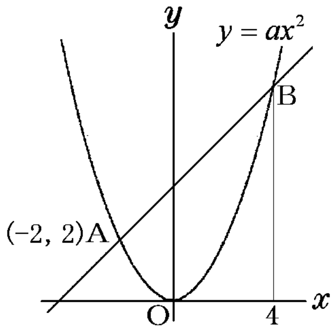
OM は原点を通る直線なので，　$y=ax$ とおくことができる。

$x=-1,\ y=5$ を $y=ax$ に代入すると，$5=-a$　ゆえに $a=-5$

よって OM の式は $y=-5x$

[問題](2 学期中間)

右の図は，放物線 $y=ax^2$ と放物線上の 2 点 A，B を通る直線のグラフです。A(－2，2)で，B の x 座標が 4 のとき，次の問いに答えなさい。



(1)　a の値を求めなさい。

(2)　原点 O を通り，△AOB の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。

[解答欄]

(1)	(2)

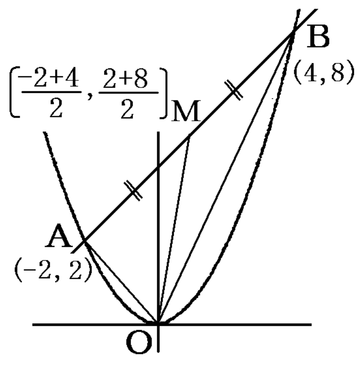
[解答](1)　$a=\dfrac{1}{2}$　(2)　$y=5x$

[解説]

(1)　$y=ax^2$ が A(－2，2)を通るので，$x=-2,\ y=2$ を $y=ax^2$ に代入する。

$2=4a$ なので $a=\dfrac{1}{2}$

(2) 原点 O を通り，△AOB の面積を 2 等分する直線は AB の中点 M を通る。



点 B の x 座標は 4 なので，$x=4$ を $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入して，

$y=\dfrac{1}{2}\times 4^2=8$　よって，点 B の座標は(4，8)

点 A(－2，2)，B(4，8)の中点の座標は

$\left(\dfrac{-2+4}{2},\ \dfrac{2+8}{2}\right)=\left(1,\ 5\right)$

求める直線は原点を通るので $y=bx$ とおくことができる。

$y=bx$ に $x=1,\ y=5$ を代入すると，$5=b\times1$，$b=5$

よって求める直線の式は $y=5x$

[問題](2 学期中間)

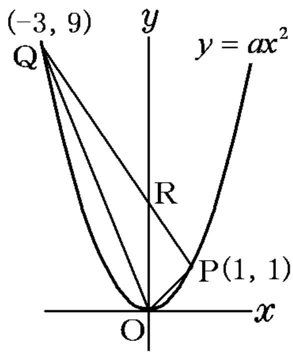
右の図で，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に，2 点 P(1，1)，Q(－3，9)がある。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　a の値を求めなさい。

(2)　2 点 P，Q を通る直線の式を求めなさい。

(3)　OPQ の面積を求めなさい。ただし，1 目盛りを 1cm とする。

(4)　原点を通り△OPQ の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。



[解答欄]

(1)	(2)	(3)
(4)		

[解答](1)　$a=1$　(2)　$y=-2x+3$　(3)　6 cm²　(4)　$y=-5x$

[解説]

(1)　$y=ax^2$ は点 P(1，1)を通るので，$y=ax^2$ に $x=1,\ y=1$ を代入して，

$1=a\times1^2$，$a=1$

(2) 2 点 P，Q を通る直線の式を $y=bx+c$ とおく。

点 P(1，1)を通るので $x=1,\ y=1$ を $y=bx+c$ に代入して，$1=b+c$ ･･･①

点 Q(－3，9) を通るので $x=-3,\ y=9$ を $y=bx+c$ に代入して，$9=-3b+c$ ･･･②

①，②を $b,\ c$ についての連立方程式として解く。

①－②より，$1-9=b+c-(-3b+c),\ -8=b+c+3b-c$，$-8=4b,\ b=-2$

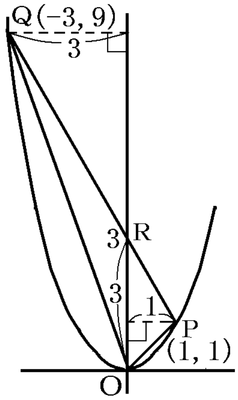
①に $b=-2$ を代入して，$1=-2+c,\ c=3$

ゆえに $b=-2,\ c=3$　よって，P，Q を通る直線の式は $y=-2x+3$

(3)　$y=-2x+3$ の y 切片は 3 なので OR＝3

△OPR の底辺を OR＝3 とする。点 P の x 座標は 1 なので，△OPR の高さは 1

ゆえに(△OPR の面積)＝$\frac{1}{2}\times 3\times 1=\frac{3}{2}$



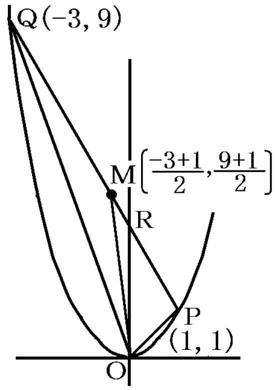
△OQR の底辺を OR＝3とする。点 Q の x 座標は-3なので，

△OQR の高さは3

ゆえに(△OQR の面積)＝$\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{9}{2}$

よって(△OPQ の面積)＝$\frac{3}{2}+\frac{9}{2}=\frac{12}{2}=6$ cm²

(4) 線分 PQ の中点を M とすると，



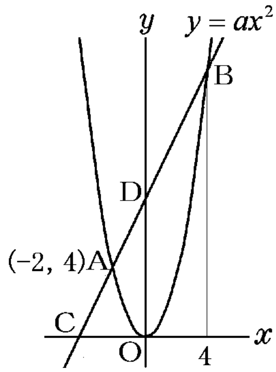
直線 OM は△OPQ の面積を 2 等分する。

P(1，1)，Q(－3，9)なので，

中点 M は$\left(\frac{-3+1}{2},\ \frac{9+1}{2}\right)=(-1,\ 5)$

OM は原点を通る直線なので $y=dx$ とおくことができる。$y=dx$ は点 M$(-1,\ 5)$を通るので，$x=-1,\ y=5$ を代入して，$5=-d$，$d=-5$　ゆえに OM の式は $y=-5x$

[問題](2 学期期末)



関数 $y=ax^2$ のグラフの上に 2 点 A，B があります。点 A の座標が(－2，4)であるとき，次の問いに答えなさい。

(1) a の値を求めなさい。

(2) 点 B の x 座標が 4 のとき，直線 AB の式を求めなさい。

(3) △OAB の面積を求めなさい。

(4) B を通り，△OCB の面積を二等分する直線の式を求めなさい。

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
(4)		

[解答](1) $a=1$　(2) $y=2x+8$　(3) 24　(4) $y=\frac{8}{3}x+\frac{16}{3}$

[解説]

(1)　$y=ax^2$が点(－2，4)を通るので，$y=ax^2$に$x=-2,\ y=4$を代入すると，

$4=a\times(-2)^2$，$4a=4,\ a=1$

(2) 直線 AB の式を$y=bx+c$とおく。

直線 AB が(－2，4)を通るので$x=-2,\ y=4$を$y=bx+c$に代入して$4=-2b+c$・・・①

点 B のx座標が 4 なので，y座標は$y=x^2$に代入して$y=4^2=16$

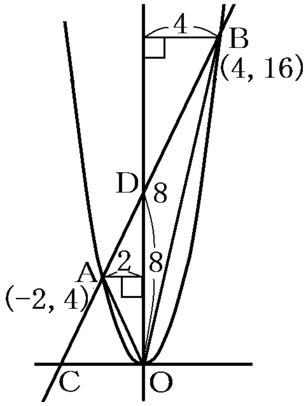
$x=4,\ y=16$を$y=bx+c$に代入して$16=4b+c$・・・②

①，②を$b,\ c$についての連立方程式として解く。

②－①より，$16-4=4b+c-(-2b+c)$，$12=4b+c+2b-c$ $12=6b,\ b=2$

①に$b=2$を代入すると，$4=-4+c,\ c=8$

よって，$b=2,\ c=8$　ゆえに直線 AB の式は$y=2x+8$



(3) AB の式が$y=2x+8$であることより，点 D のy座標は8

△OBD の底辺を OD＝8とする。

点 B のx座標が4であることより高さは4

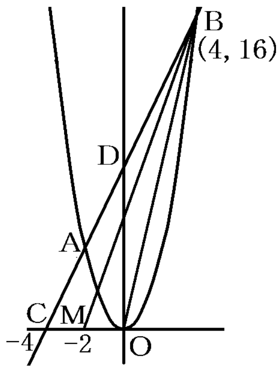
ゆえに(△OBD の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times8\times4=16$

△OAD の底辺を OD＝8とする。

点 A のx座標が-2であることより高さは2

ゆえに(△OAD の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times8\times2=8$

ゆえに(△OAB の面積)＝$16+8=24$



(4)　$y=2x+8$に$y=0$を代入すると，$0=2x+8$

$x=-4$　ゆえに C$(-4,\ 0)$

B を通り，△OCB の面積を二等分する直線は OC の中点

M$(-2,\ 0)$を通る

B$(4,\ 16)$，中点 M$(-2,\ 0)$を通る直線の式を$y=dx+e$とおく。

$x=4,\ y=16$を代入すると，$16=4d+e$・・・①

$x=-2,\ y=0$を代入すると，$0=-2d+e$・・・②

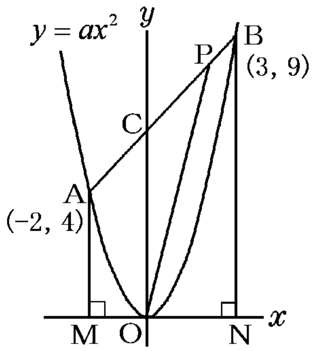
①－②より，$16=6d$，$d=\dfrac{16}{6}=\dfrac{8}{3}$

②に$d=\dfrac{8}{3}$を代入すると，$0=-\dfrac{16}{3}+e,\ e=\dfrac{16}{3}$　よって，BM は$y=\dfrac{8}{3}x+\dfrac{16}{3}$

【】面積の二等分：台形

[問題](2 学期期末)

図のように放物線 $y = ax^2$ 上に点 A(－2，4)，点 B(3，9)がある。また，A，B から x 軸に下ろした垂線と x 軸の交点をそれぞれ M，N とするとき次の問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 点 A，B を通る直線の方程式を求めよ。

(3) 線分 AB 上に点 P をとる。線分 OP が台形 AMNB の面積を 2 等分するとき，点 P の座標を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[解答](1) $a = 1$　(2) $y = x + 6$　(3) $\left(\dfrac{25}{12},\ \dfrac{97}{12}\right)$

[解説]

(1) $y = ax^2$ 上に点 A(－2，4)があるので，$x = -2,\ y = 4$ を $y = ax^2$ に代入して，

$4 = a \times (-2)^2$，$4a = 4$，$a = 1$

(2) 直線 AB の式を $y = bx + c$ とおく。

$y = bx + c$ 上に点 A(－2，4)があるので，$x = -2,\ y = 4$ を $y = bx + c$ に代入して，

$4 = -2b + c$ ･･･①

また，$y = bx + c$ 上に点 B(3，9)があるので，$x = 3,\ y = 9$ を $y = bx + c$ に代入して，

$9 = 3b + c$ ･･･②

①，②を $b,\ c$ についての連立方程式として解く。

②－①より，$9 - 4 = 3b + c - (-2b + c)$，$5 = 3b + c + 2b - c$，$5 = 5b,\ b = 1$

これを②に代入すると，$9 = 3 + c,\ c = 6$

ゆえに直線 AB の式は $y = x + 6$

(3)(台形 AMNB の面積)$= \dfrac{1}{2} \times (4 + 9) \times 5 = \dfrac{65}{2}$

(台形 AMOC の面積)$= \dfrac{1}{2} \times (4 + 6) \times 2 = 10$

線分 OP が台形 AMNB の面積を 2 等分するので，

(台形 AMOC の面積)＋(△OPC の面積)＝$\frac{65}{2}\times\frac{1}{2}$

したがって，(△OPC の面積)＝$\frac{65}{2}\times\frac{1}{2}-10=\frac{25}{4}$

底辺を OC とすると，右図の PH が高さになる。

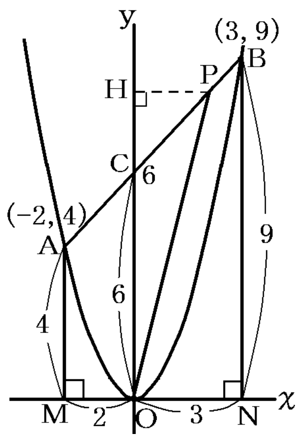
ゆえに，(△OPC の面積)＝$\frac{1}{2}$ ×OC×PH＝$\frac{25}{4}$

OC＝6 なので，$\frac{1}{2}\times 6\times$PH＝$\frac{25}{4}$

ゆえに，PH＝$\frac{25}{4}\div 3=\frac{25}{12}$

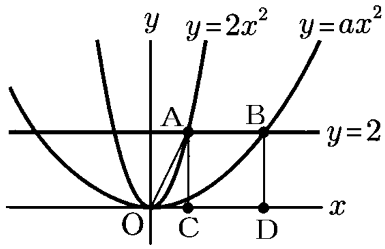
よって，点 P の x 座標は $\frac{25}{12}$　$y=x+6=\frac{25}{12}+6=\frac{97}{12}$

ゆえに点 P の座標は$\left(\frac{25}{12},\ \frac{97}{12}\right)$



[問題](増補 10)(補充問題)

図で，O は原点，A，B はそれぞれ，直線 $y=2$ と 2 つの関数 $y=2x^2$，$y=ax^2$ (a は定数，$a>0$)のグラフとの交点のうち，x 座標が正である点である。また，C，D は x 軸上の点で，四角形 ACDB は正方形である。このとき，次の問いに答えよ。



(愛知県)

(1) a の値を求めよ。

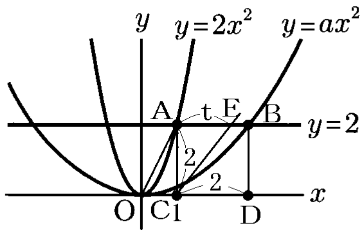
(2) 点 C を通り，台形 AODB の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $a=\frac{2}{9}$　(2) $y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$

[解説]



(1) 点 A の y 座標は 2 なので，$y=2x^2$ に $y=2$ を代入して，$2=2x^2$，$x^2=1$，$x>0$ なので，$x=1$

よって，点 C の x 座標も 1 である。

次に，四角形 ACDB は正方形で，AC＝2 なので，CD＝2

よって，点 D の x 座標は 1＋2＝3 とわかる。

したがって，点 B の座標は(3，2)である。

点 B は $y=ax^2$ 上の点なので，$y=ax^2$ に $x=3,\ y=2$ を代入して，

$2=a\times 3^2$，$9a=2$

よって，$a=\dfrac{2}{9}$

(2) (台形 AODB の面積)＝(上底 AB＋下底 OD)×(高さ AC)÷2＝(2＋3)×2÷2＝5

点 C を通り，台形 AODB の面積を 2 等分する直線を右上図の CE とし，AE＝t とおく。

(台形 AOCE の面積)＝(上底 AE＋下底 OC)×(高さ AC)÷2＝(t＋1)×2÷2＝t＋1

与えられた条件より，(台形 AOCE の面積)＝(台形 AODB の面積)÷2

よって，$t+1=\dfrac{5}{2}$，$t=\dfrac{5}{2}-1=\dfrac{3}{2}$

(直線 CE の傾き)＝$\dfrac{AC}{AE}=AC\div AE=2\div\dfrac{3}{2}=2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$

したがって，直線 CE は，$y=\dfrac{4}{3}x+b$ とおくことができる。

直線 CE は点 C(1，0)を通るので，$y=\dfrac{4}{3}x+b$ に $x=1,\ y=0$ を代入して，

$0=\dfrac{4}{3}\times 1+b$，よって，$b=-\dfrac{4}{3}$

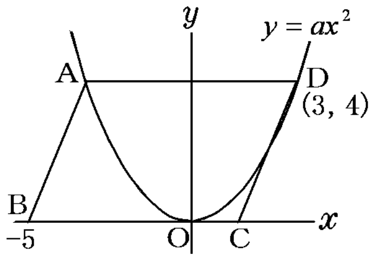
したがって，直線 CE の式は，$y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{3}$ となる。

【】面積の二等分：平行四辺形

[問題](増補 10)(補充問題)

　次の図のように，平行四辺形 ABCD の頂点 A，D は放物線 $y=ax^2$ 上にあり，頂点 B，C は x 軸上にある。B，D の座標が(－5，0)，(3，4)であるとき，次の問いに答えよ。

(北海道)



(1)　a の値を求めよ。

(2)　点(2，4)を通り，平行四辺形 ABCD の面積を 2 等分する直線の方程式を求めよ。

[解答欄]

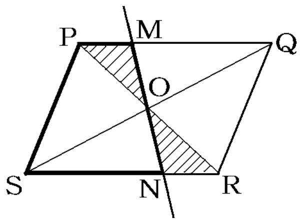
(1)	(2)

[解答](1) $\dfrac{4}{9}$　(2) $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}$

[解説]

<Point>平行四辺形の対角線の交点を通る直線

→平行四辺形の面積を二等分



右の平行四辺形で，△OPM≡△ORN なので，

(△OPM の面積)＝(△ORN の面積)

よって，

(PSNM の面積)＝(PSNO の面積)＋(△OPM の面積)＝(PSNO の面積)＋(△ORN の面積)

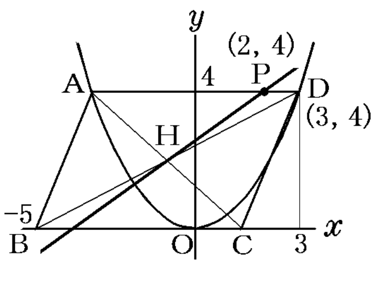
＝(△PSR の面積)＝(平行四辺形 PSRQ)÷2

(1) 点 D(3，4)は $y=ax^2$ 上にあるので，$x=3$，$y=4$ を代入して，$4=a\times 3^2$

よって，$a=\dfrac{4}{9}$

(2) 平行四辺形 ABCD の対角線 AC，BD の交点を H とすると，平行四辺形 ABCD の面積を 2 等分する直線は右図の直線 PH になる。H は点 B(－5，0)と点 D(3，4)の中点なので，

H の座標は，$\left(\dfrac{-5+3}{2},\ \dfrac{0+4}{2}\right)$＝(－1，2)となる。



直線 PH の式を $y = bx + c$ とおく。

$y = bx + c$ は H(−1，2)を通るので， x =−1， y =2 を代入して， $2 = -b + c$ ･･･①

$y = bx + c$ は P(2，4)を通るので， x =2， y =4 を代入して， $4 = 2b + c$ ･･･②

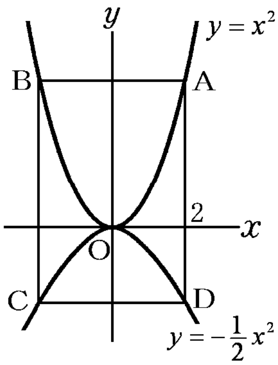
②−①より， $4 - 2 = (2b + c) - (-b + c)$, $2 = 3b$　よって， $b = 2 \div 3 = \frac{2}{3}$

$b = \frac{2}{3}$ を①に代入すると， $2 = -\frac{2}{3} + c$, $c = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

したがって，直線 PH の式は $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ となる。

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図のように，放物線 $y = x^2$ 上に 2 点 A と B を，放物線 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 上に 2 点 C と D をとる。ただし，線分 AB と線分 CD は x 軸に平行で，線分 AD と線分 BC は y 軸に平行である。点 A の x 座標が 2 のとき，点(1，3)を通り，四角形 ABCD の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。(沖縄県)

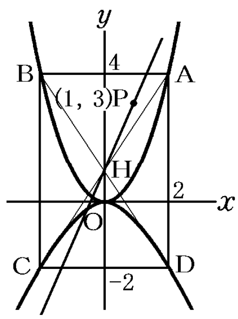


[解答欄]

[解答] $y = 2x + 1$

[解説]

四角形 ABCD は長方形である。長方形は平行四辺形の一種なので，長方形 ABCD の面積を二等分する直線は，対角線の交点 H を通る。点 H は BD(または AC)の中点なので，B と D の座標がわかれば，点 H の座標を求めることができる。



点 A の x 座標が 2 なので，点 D の x 座標も 2 になる。

点 D は $y = -\frac{1}{2}x^2$ 上の点なので， x =2 を代入して，

$y = -\frac{1}{2} \times 2^2$ =−2　よって，点 D の座標は(2，−2)になる。

点 B は y 軸について点 A と対称なので，点 B の x 座標は-2 になる。

点 B は $y=x^2$ 上の点なので， $x=-2$ を代入して， $y=(-2)^2=4$

よって，点 B の座標は$(-2,\ 4)$

H の座標は，D(2，-2)と B(-2，4)の中点なので， $\left(\dfrac{2-2}{2},\ \dfrac{-2+4}{2}\right)=(0,\ 1)$

H(0，1)と P(1，3)を通る直線の式を $y=ax+b$ とおく。

$y=ax+b$ は H(0，1)を通るので， $x=0$， $y=1$ を代入して，$1=0+b$ ・・・①

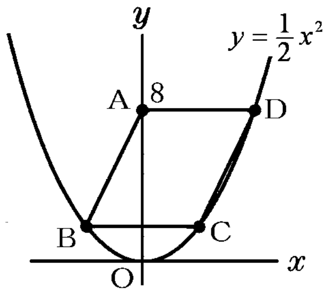
$y=ax+b$ は P(1，3)を通るので， $x=1$， $y=3$ を代入して，$3=a+b$ ・・・②

①より， $b=1$　これを②に代入すると，$3=a+1$，よって， $a=3-1=2$

したがって，求める直線の式は， $y=2x+1$ となる。

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図で放物線は $y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフである。点 A は y 軸上の点で， y 座標は 8 である。また，点 B，C，D は放物線上にあり，四角形 ABCD は平行四辺形で，点 D の x 座標は正, AD と x 軸は平行である。原点を通り, 平行四辺形 ABCD の面積を 2 等分する直線の式を求めなさい。(青森県)

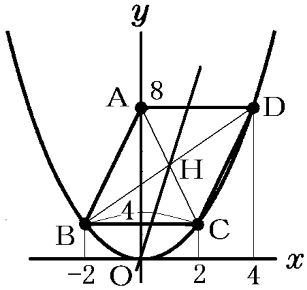


[解答欄]

[解答] $y=5x$

[解説]

対角線 AC と BD の交点を H とすると, 直線 OH は平行四辺形 ABCD の面積を二等分する。



平行四辺形の対角線の交点は，対角線を二等分するので，H は AC の中点である(BD の中点でもある)。

したがって A と C の座標がわかれば H の座標を求めることができる。

まず，仮定より，点 A の座標は(0，8)

点 D の y 座標は点 A の y 座標と同じなので， $y=8$

D は $y=\frac{1}{2}x^2$ にあるので，$y=8$ を代入すると，$8=\frac{1}{2}x^2$，$x^2=16$，

$x>0$ なので，$x=4$

ABCD は平行四辺形なので，BC＝AD　よって，BC＝4

したがって，点 C の x 座標は，$x=4\div2=2$

点 C は $y=\frac{1}{2}x^2$ にあるので，$x=2$ を代入して，$y=\frac{1}{2}\times2^2=2$

よって，点 C の座標は(2，2)とわかる。

点 A(0，8)と点 C(2，2)の中点 H の座標は，$\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{8+2}{2}\right)=(1,\ 5)$

直線 OH は原点を通るので，$y=ax$ とおくことができる。

$y=ax$ に $x=1$，$y=5$ を代入すると，$5=a\times1$　よって，$a=5$

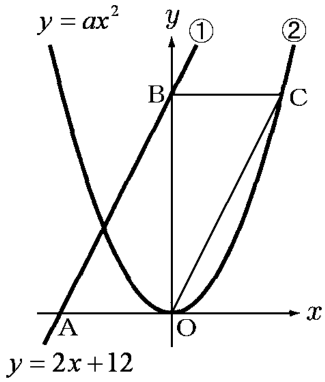
したがって，直線 OH の式は，$y=5x$ となる。

【】平行四辺形

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図で，①は 1 次関数 $y=2x+12$ のグラフ，②は関数 $y=ax^2$ のグラフである。①と x 軸，y 軸との交点を，それぞれ A，B とする。②上に点 C をとり，平行四辺形 BAOC をつくることができるとき，a の値を求めなさい。

(山形県)

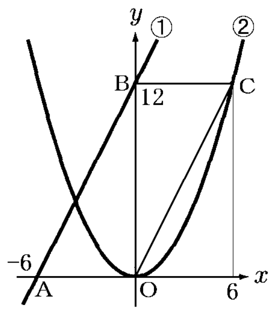


[解答欄]

[解答] $a=\frac{1}{3}$

[解説]

<Point>平行四辺形→対辺が平行で長さが等しい



$y=2x+12$ の y 切片は 12 なので，点 B の座標は(0，12)

$y=2x+12$ に $y=0$ を代入すると，

$0=2x+12,\ 2x=-12,\ x=-12\div 2,\ x=-6$

よって，点 A の座標は(－6，0)

四角形 BAOC は平行四辺形なので，

BC // AO，BC＝AO＝6

よって，点 C の座標は(6，12)

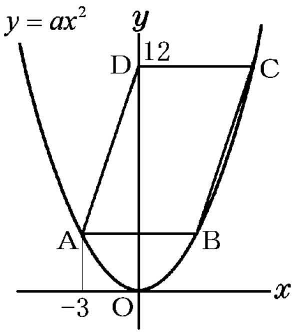
点 C は $y=ax^2$ 上の点なので，$x=6,\ y=12$ を $y=ax^2$ に代入して，

$12=a\times 6^2$，$36a=12,\ a=12\div 36=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図のように，関数 $y=ax^2$ ($a>0$)のグラフ上に 2 点 A，B がある。線分 AB は x 軸に平行で，点 A の x 座標は－3 である。いま，$y=ax^2$ のグラフ上に点 C，y 軸上に点 D を，四角形 ABCD が平行四辺形になるようにとったところ，点 D の y 座標は 12 になった。関数 $y=ax^2$ の a の値を求めなさい。

(岩手県)

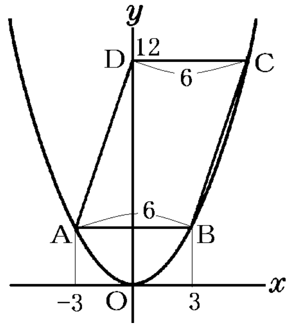


[解答欄]

[解答] $a=\dfrac{1}{3}$

[解説]

<Point>平行四辺形→対辺が平行で長さが等しい



点 A の x 座標は－3 で, 点 B は A と y 軸について対称なので,

点 B の x 座標は 3 になる。

よって，AB＝3－(－3)＝3＋3＝6

四角形 ABCD は平行四辺形なので，DC＝AB＝6

したがって，点 C の x 座標は 6 になる。

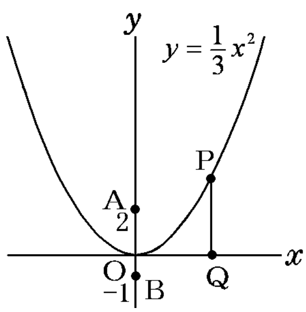
点 D の y 座標は 12 で，DC // AB なので，点 C の y 座標も 12 になる。

点 C は $y=ax^2$ 上の点なので， $x=6,\ y=12$ を $y=ax^2$ に代入して，

$12=a\times 6^2$，$36a=12$，$a=12\div 36=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図のように，関数 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ のグラフ上に x 座標が正である点 P をとる。この点 P から x 軸にひいた垂線と x 軸との交点を Q とする。また， y 軸上の 2 つの点 A，B の座標を，それぞれ(0，2)，(0，－1)とする。直線 AP と線分 BQ が平行になるように点 P をとるとき，点 P の座標を求めよ。(新潟県)

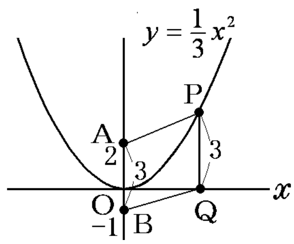


[解答欄]

[解答]P(3，3)

[解説]

<Point>平行四辺形→対辺が平行で長さが等しい



AO // PQ，AP // OQ なので，四角形 AOQP は平行四辺形になる。したがって，PQ＝AO＝2－(－1)＝2＋1＝3

したがって，点 P の y 座標は 3 になる。

点 P は $y=\frac{1}{3}x^2$ 上にあるので，$y=3$ を $y=\frac{1}{3}x^2$ に代入して，$3=\frac{1}{3}x^2$，$x^2=9$

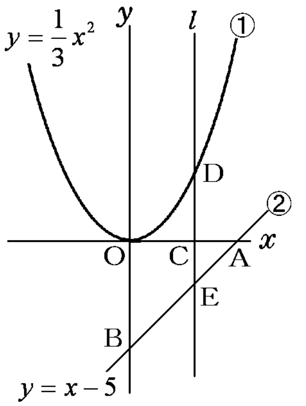
点 P の x 座標は正なので，$x=3$　よって，点 P の座標は(3，3)

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図の①，②は関数

$y=\frac{1}{3}x^2$・・・①　$y=x-5$・・・②

のグラフである。点 O は原点で，点 A，B はそれぞれ②のグラフが x 軸，y 軸と交わる点である。また，y 軸に平行な直線 l が x 軸および①, ②のグラフと交わる点をそれぞれ C, D, E とする。四角形 OBED が平行四辺形になるとき, 点 C の x 座標を求めよ。(佐賀県)



[解答欄]

[解答]3

[解説]

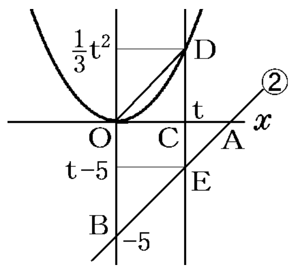
<Point>平行四辺形→対辺が平行で長さが等しい

四角形 OBED は平行四辺形なので，DE＝OB

点 B は $y=x-5$ の y 切片なので，B の y 座標は－5

よって，OB＝5

点 C の x 座標を $x=t$ とすると，



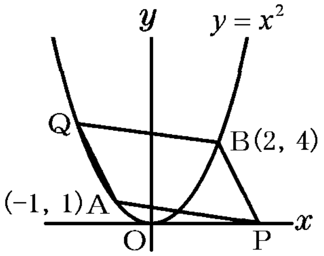
点 D の y 座標は $y=\frac{1}{3}t^2$ で，点 E の y 座標は $y=t-5$

よって，DE＝$\frac{1}{3}t^2-(t-5)=\frac{1}{3}t^2-t+5$

DE＝OB なので，$\frac{1}{3}t^2-t+5=5$，$\frac{1}{3}t^2-t=0$，$t^2-3t=0$，$t(t-3)=0$

$t>0$ なので，$t=3$

[問題](増補 10)(補充問題)



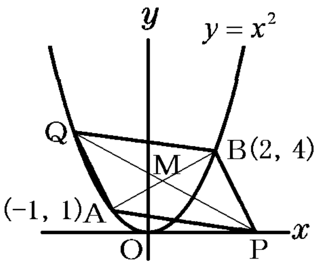
右の図で，曲線は関数 $y=x^2$ のグラフであり，グラフ上に 2 点 A(－1，1)，B(2，4)をとる。また，x 軸上に x 座標が正である点 P をとり，グラフ上に点 Q をとって，四角形 APBQ をつくる。この四角形 APBQ が平行四辺形になるとき，点 Q の座標を求めなさい。

(埼玉県)

[解答欄]

[解答]$\left(-\sqrt{5},\ 5\right)$

[解説]



<Point>平行四辺形→対角線はそれぞれ中点で交わる

右図のように対角線 AB，PQ の交点を M とする。

対角線の交点はそれぞれの中点になるので，

M の座標は A(－1，1)，B(2，4)から，

$\left(\dfrac{-1+2}{2},\ \dfrac{1+4}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$ と計算できる。

また，M は PQ の中点でもある。

点 P の y 座標は 0 である。点 Q の y 座標を b とすると，

$\dfrac{0+b}{2}=\dfrac{5}{2}$，$b=5$

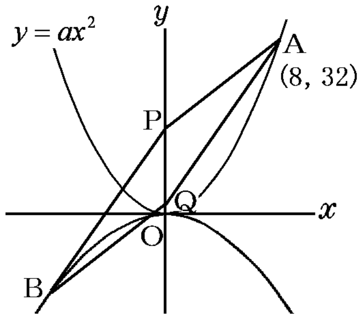
点 Q は $y=x^2$ 上にあるので，$y=5$ を $y=x^2$ に代入すると，

$5=x^2$，点 Q の x 座標は負なので，$x=-\sqrt{5}$

よって，点 Q の座標は $\left(-\sqrt{5},\ 5\right)$

[問題](3 学期)

右の図のように，関数 $y=ax^2\ (a>0)$ のグラフ上に点 A(8, 32)があり, 関数 $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ のグラフ上に点 B がある。また，y 軸上に 2 点 P，Q があり，点 P の y 座標は点 Q の y 座標より大きい。四角形 APBQ は，面積 136 の平行四辺形である。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　a の値を求めよ。

(2)　直線 AB の方程式を求めよ。

(3)　点 P の座標を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

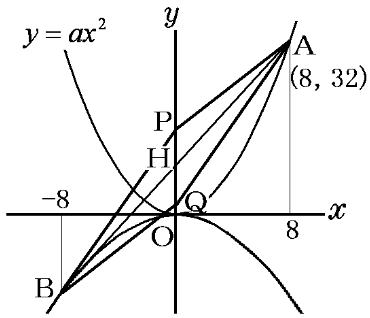
[解答](1) $a=\dfrac{1}{2}$ (2) $y=3x+8$　(3) $\left(0,\ \dfrac{33}{2}\right)$

[解説]

(1) $y=ax^2\ (a>0)$ 上に点 A(8，32)があるので，$x=8,\ y=32$ を $y=ax^2$ に代入して，

$32=a\times 8^2$，$a=\dfrac{1}{2}$

(2) 線分 AB と PQ の交点を H とする。P, Q がともに y 軸上にあるので，H は y 軸上にあり，その x 座標は 0 である。平行四辺形の対角線の交点 H は線分 AB の中点になる。



点 B の x 座標を t とおき，x 座標に注目すると，

$\dfrac{t+8}{2}=0$　ゆえに $t=-8$

$y=-\dfrac{1}{4}x^2$ に $x=-8$ を代入すると，

$y=-\dfrac{1}{4}\times(-8)^2=-16$　よって B(－8，－16)

次に，直線 AB の式を $y=bx+c$ とおく。

点 A(8，32)は $y=bx+c$ 上にあるので，$x=8,\ y=32$ を代入して，$32=8b+c$ ･･･①

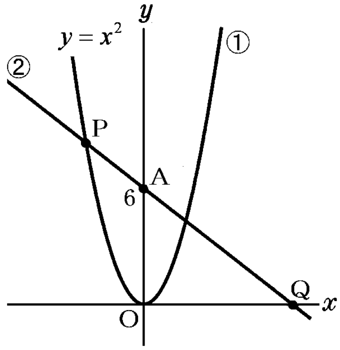
また，点 B(－8，－16)も $y=bx+c$ 上にあるので，$x=-8,\ y=-16$ を代入して，
$-16=-8b+c$ ･･･②　①，②を $b,\ c$ についての連立方程式として解く。
①－②より，$32-(-16)=8b+c-(-8b+c)$，$48=8b+c+8b-c$，$48=16b$
よって，$b=48\div16$，$b=3$
①に $b=3$ を代入すると，$32=8\times3+c$，$c=32-24$，$c=8$
ゆえに直線の式は $y=3x+8$

(3) △APQ の面積は平行四辺形 APBQ の半分なので $136\div2=68$ である。
点 A の座標が(8，32)なので，PQ を△APQ の底辺としたときの高さは 8 である。
よって(△APQ の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×PQ×8＝68　ゆえに PQ＝17
ところで，直線 AB の y 軸との交点を H とすると，直線 AB の式 $y=3x+8$ より，
H の y 座標は 8
HP＝$\dfrac{1}{2}$PQ＝$\dfrac{17}{2}$
ゆえに P の y 座標は $\dfrac{17}{2}+8=\dfrac{33}{2}$
ゆえに点 P の座標は $\left(0,\ \dfrac{33}{2}\right)$

【】線分比・面積比

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図において，曲線①は関数 $y=x^2$ のグラフである。点 A(0，6)を通る右下がりの直線②が曲線①と交わる 2 点のうち x 座標が負の点を P とし，また，直線②と x 軸との交点を Q とする。PA：AQ＝1：3 となるとき，点 P の座標を求めよ。(茨城県)



[解答欄]

[解答] $\left(-2\sqrt{2}，8\right)$

[解説]

P から x 軸に垂線 PH をひく。

AO // PH なので，平行線の性質より，

AO：PH＝QA：QP

PA：AQ＝1：3 なので，QA：QP＝3：(3＋1)＝3：4

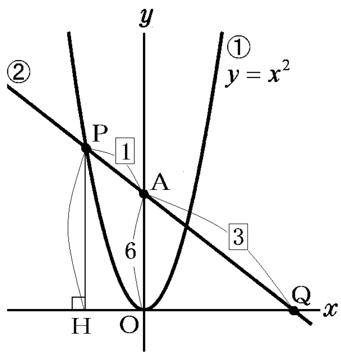
また，A の y 座標が 6 なので，AO＝6

よって，6：PH＝3：4

比の内項の積は外項の積に等しいので,

PH×3＝6×4，PH＝6×4÷3＝8

よって，点 P の y 座標は 8 である。

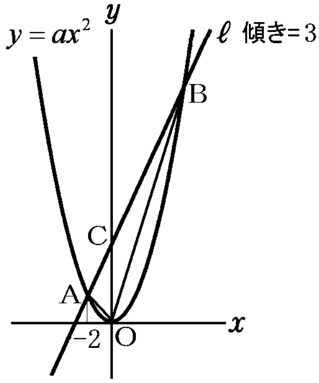


点 P は $y=x^2$ 上の点なので， $y=8$ を $y=x^2$ に代入して，$8=x^2$ となる。

x ＜0 なので，$x=-\sqrt{8}=-\sqrt{4\times2}=-2\sqrt{2}$　よって，点 P の座標は $\left(-2\sqrt{2}，8\right)$ となる。

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図の放物線は関数 $y=ax^2$ のグラフであり，直線 l と 2 点 A，B で交わっている。また，点 C は直線 l と y 軸との交点である。点 A の x 座標が－2, 直線 l の傾きが 3 であり，△AOC と△BOC の面積比が 1：3 であるとき，a の値を求めよ。(三重県)

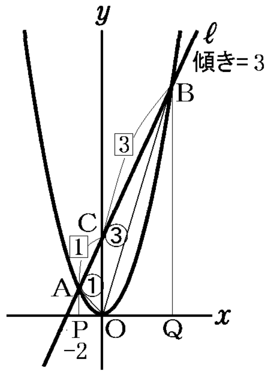


[解答欄]

[解答] $a=\dfrac{3}{4}$

[解説]

<Point> 面積比→底辺の比→x座標の比



△AOC の底辺を AC，△BOC の底辺を BC とすると，

高さは共通になるので，

AC：CB＝(△AOC の面積)：(△BOC の面積)＝1：3 となる。

図のように，x 軸に垂線 AP，BQ をひくと，AP//CO//BQ なので，

PO：OQ＝AC：CB＝1：3 となる。

点 A の x 座標は−2 なので P の x 座標も−2 で，点 Q の x 座標は 2×3＝6 になる。したがって，点 B の x 座標も 6 になる。

点 A，B は $y=ax^2$ 上にあるので，

点 A の y 座標は，$x=-2$ を $y=ax^2$ に代入して，$y=a\times(-2)^2=4a$

点 B の y 座標は，$x=6$ を $y=ax^2$ に代入して，$y=a\times 6^2=36a$

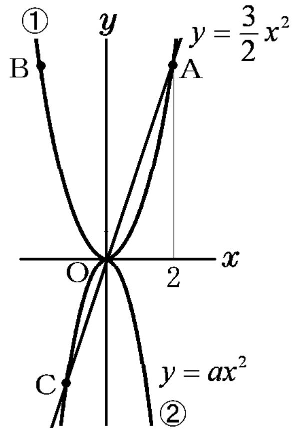
したがって，(直線 AB の傾き)＝$\dfrac{36a-4a}{6-(-2)}=\dfrac{32a}{8}=4a=3$

よって，$a=3\div 4=\dfrac{3}{4}$

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図のように，原点を O とし，2 つの関数 $y=\dfrac{3}{2}x^2$ ･･･①，$y=ax^2$ ･･･②のグラフがある。2 点 A，B は①のグラフ上にあり，点 A の x 座標は 2 で，点 B は点 A と y 軸について対称な点である。直線 OA と②のグラフとの交点を C とする。△OAB と△OBC の面積の比が 2：3 となるとき，a の値を求めなさい。

(佐賀改)

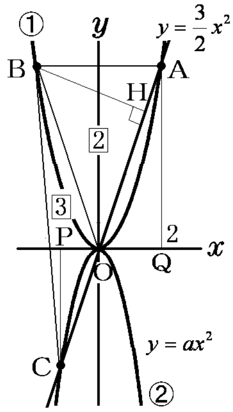


[解答欄]

[解答] $a=-1$

[解説]

<Point> 面積比→底辺の比→x 座標の比



△OAB の底辺を OA，△OBC の底辺を OC とすると，

高さはともに BH で共通になるので，底辺の比は面積比と等しくなる。したがって，OA：OC＝2：3

点 A，C から x 軸に垂線 AQ，CP をひくと，

CP // AQ なので，OQ：OP＝OA：OC＝2：3 となる。

OQ＝2 なので，2：OP＝2：3

よって，OP＝3 となる。

したがって，点 C の x 座標は－3 となる。あと，点 C の y 座標がわかれば，$y=ax^2$ の a の値を求めることができる。

そこで，直線 CA の式を求める。

点 A は x 座標が 2 なので，$y=\frac{3}{2}x^2$ に $x=2$ を代入すると，$y=\frac{3}{2}\times 2^2=6$

よって，直線 CA の傾きは $\frac{6}{2}=3$ となり，CA の式は $y=3x$ となる。

点 C の x 座標は－3 なので，$y=3x$ に $x=-3$ を代入して，$y=3\times(-3)=-9$

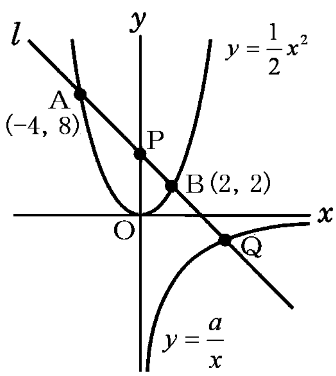
したがって，点 C の座標は(－3，－9)となる。

点 C は $y=ax^2$ 上にあるので，$x=-3,\ y=-9$ を $y=ax^2$ に代入して，

$-9=a\times(-3)^2$，$9a=-9$　よって，$a=-1$

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図のように, 関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上の点 A(－4, 8), B(2，2)を通る直線 l がある。また，この直線が y 軸および関数 $y=\frac{a}{x}$ (a は負の定数，$x>0$)のグラフと交わる点を，それぞれ P，Q とする。△OAP：△OQP＝2：3 になるとき，a の値を求めよ。(沖縄県)

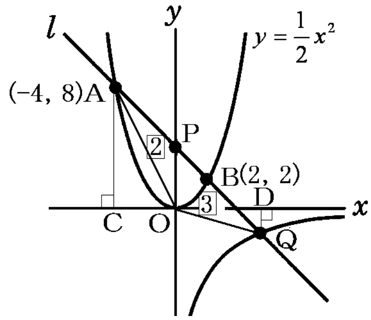


[解答欄]

[解答] $a=-12$

[解説]

<Point> 面積比→底辺の比→x座標の比



△OAP の底辺を AP，△OQP の底辺を PQ とすると，

高さは O から l におろした垂線の長さで共通になる。

したがって，底辺の比は面積比と等しくなり，

AP：PQ＝△OAP：△OQP＝2：3 になる。

右図のように，点 A，Q から x 軸に垂線 AC，QD をひくと，AC // PO // QD なので，

CO：OD＝AP：PQ＝2：3

CO＝4 なので，4：OD＝2：3 となる。

したがって，OD＝6

よって，点 Q の x 座標は 6 になる。

点 Q の y 座標がわかれば，$y=\dfrac{a}{x}$ に代入して a の値を求めることができる。

そこで，直線 l の式を求める。

直線 l の式を $y=bx+c$ とおく。

直線 l は A(−4，8)を通るので，$y=bx+c$ に $x=-4,\ y=8$ を代入して，

$8=-4b+c$ ･･･①

直線 l は B(2，2)を通るので，$y=bx+c$ に $x=2,\ y=2$ を代入して，

$2=2b+c$ ･･･②

①−②より，$8-2=-4b+c-(2b+c)$，$6=-6b$　よって，$b=6\div(-6)=-1$

②に $b=-1$ を代入して，$2=2\times(-1)+c$，$c=2+2=4$

よって，直線 l の式は，$y=-x+4$

x 座標が 6 である点 Q は直線 l 上にあるので，$y=-x+4$ に $x=6$ を代入して，

$y=-6+4=-2$

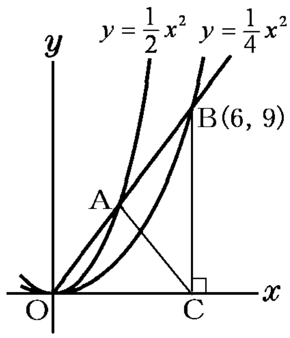
よって，点 Q の座標は(6，−2)

点 Q は $y=\dfrac{a}{x}$ 上にもあるので，$x=6,\ y=-2$ を $y=\dfrac{a}{x}$ に代入して，

$-2=\dfrac{a}{6},\ a=(-2)\times 6$　よって，$a=-12$

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図のように，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフと，原点を通る直線との交点をそれぞれ A，B とする。点 B から x 軸に垂線 BC をひく。点 B の座標が(6，9)のとき，△BOC と△BAC の面積の比を求めなさい。



(埼玉県)

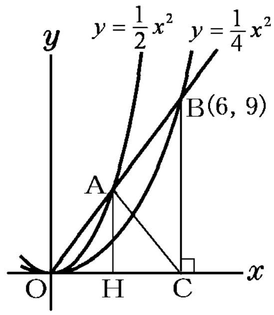
[解答欄]

[解答]2：1

[解説]

<Point>　x 座標の比→底辺の比→面積比

△BOC の底辺を OB，△BAC の底辺を AB とすると，高さは共通になる。したがって，△BOC と△BAC の面積の比は底辺の比 OB：AB と等しくなる。点 A の座標がわかれば，この比がわかる。･･･①



まず，直線 OB の式を求める。OB は原点を通る直線なので，その式は $y=ax$ とおくことができる。点 B の座標は(6, 9)なので，$x=6,\ y=9$ を $y=ax$ に代入して，

$9=a\times6,\ a=9\div6=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$　よって OB の式は $y=\frac{3}{2}x$ となる。

次に，$y=\frac{3}{2}x$ と $y=\frac{1}{2}x^2$ の交点 A を求める。

$y=\frac{1}{2}x^2$ を $y=\frac{3}{2}x$ に代入して，$\frac{1}{2}x^2=\frac{3}{2}x$

両辺を 2 倍して，$x^2=3x$，$x^2-3x=0,\ x(x-3)=0$　よって，$x=0,\ 3$

したがって，点 A の x 座標は $x=3$ で，右上図の OH＝3 となる。

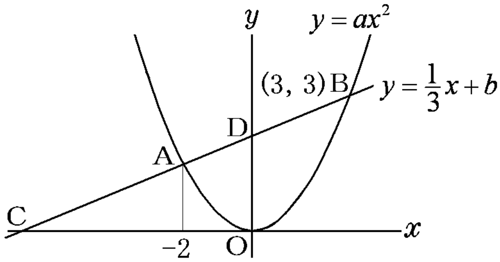
したがって，OA：OB＝OH：OC＝3：6＝1：2

よって，OB：AB＝2：(2－1)＝2：1

①より，△BOC と△BAC の面積の比は 2：1 となる。

[問題](2 学期期末)

次の図のように，放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=\frac{1}{3}x+b$ がある。放物線と直線の交点を A，B とし，直線と x 軸，y 軸の交点をそれぞれ C，D とする。いま，点 A の x 座標が-2，点 B の座標が(3，3)である。



(1)　a，b の値を求めなさい。

(2)　点 C の座標を求めなさい。

(3)　y 軸上に点 E(0，7)をとるとき，△ABE と△ACE の面積の比を最も簡単な整数比で表しなさい。

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[解答](1) $a=\frac{1}{3}$，$b=2$　(2) (−6，0)　(3) 5：4

[解説]

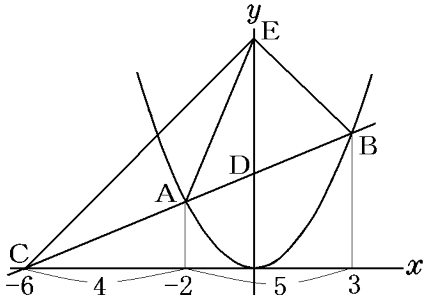
(1) $y=ax^2$ は点 B(3，3)を通るので，$x=3$, $y=3$ を $y=ax^2$ に代入すると，

$3=a\times 3^2$　ゆえに $a=\frac{1}{3}$　$y=\frac{1}{3}x+b$ は点 B(3，3)を通るので，$x=3$, $y=3$ を直線 $y=\frac{1}{3}x+b$ に代入すると，$3=1+b$　ゆえに $b=2$

(2) 点 C は x 軸上にあるので，y 座標は 0　$y=\frac{1}{3}x+2$ に $y=0$ を代入すると，

$0=\frac{1}{3}x+2$，両辺を 3 倍して，$0=x+6$

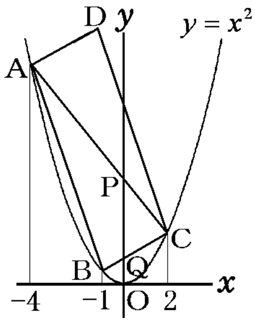
ゆえに $x=-6$　よって，点 C の座標は(−6，0)



(3) C，A，B の x 座標がそれぞれ−6，−2，3 であることから CA：AB＝4：5

△ABE と△ACE の底辺をそれぞれ AB，AC とすると，高さは共通になる。よって底辺の比が面積比となる。ゆえに△ABE：△ACE＝5：4

[問題](増補 10)(補充問題)



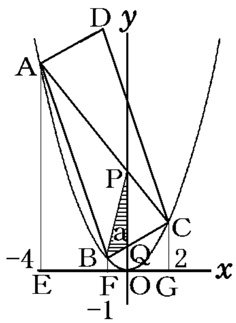
右の図は, 関数 $y=x^2$ のグラフである。このグラフ上に 3 点 A, B，C があり，それぞれの x 座標は－4，－1，2 である。点 D を四角形 ABCD が平行四辺形になるようにとり，線分 AC，BC が y 軸と交わる点をそれぞれ P，Q とする。このとき，△CPQ と平行四辺形 ABCD の面積の比を求めよ。(岩手県)

[解答欄]

[解答]1：9

[解説]

<Point> x 座標の比→底辺の比→面積比



右図のように，x 軸に A，B，C からそれぞれ垂線 AE，BF，CG をひく。また，右図の△PBQ の面積を a とおく。

△PBQ の底辺を BQ，△PQC の底辺を QC とすると，高さは共通なので，面積比は底辺の比と等しくなり，

(△PBQ の面積)：(△PQC の面積)＝BQ：QC

BF // QO // CG なので，BQ：QC＝FO：OG＝1：2

よって，(△PBQ の面積)：(△PQC の面積)＝1：2

(△PBQ の面積)＝a なので，(△PQC の面積)＝2a

したがって，(△BCP の面積)＝a＋2a＝3a

次に，△ABP の面積を a をつかって表す。

△ABP の底辺を AP，△BCP の底辺を PC とすると，高さは共通なので，面積比は底辺の比と等しくなり，

(△ABP の面積)：(△BCP の面積)＝AP：PC

AE // PO // CG なので，AP：PC＝EO：OG＝4：2＝2：1

よって，(△ABP の面積)：(△BCP の面積)＝2：1

(△BCP の面積)＝3a なので，(△ABP の面積)＝6a

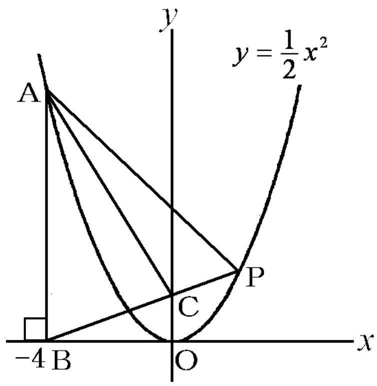
よって，(△ABC の面積)＝(△ABP の面積)＋(△BCP の面積)＝6a＋3a＝9a

(平行四辺形 ABCD の面積)＝(△ABC の面積)×2＝9a×2＝18a

よって，(△CPQ の面積)：(平行四辺形 ABCD の面積)＝2a：18a＝1：9

[問題](3 学期)

右の図で，A は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上の点で，線分 AB は x 軸に垂直である。また，P は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上にあって $x>0$ の範囲を動く点であり，C は直線 PB と y 軸との交点である。点 A の x 座標が -4 のとき，次の問いに答えよ。



(1) 点 P の x 座標が 2 であるとき直線 PA の式を求めよ。

(2) △PAB が，PA＝PB の二等辺三角形になるとき，点 P の座標を求めよ。

(3) △ABC の面積が△ACP の面積の 2 倍になるとき，点 B を通り，△ABP の面積を二等分する直線の式を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[解答](1) $y=-x+4$　(2) $(2\sqrt{2}，4)$　(3) $y=\frac{5}{3}x+\frac{20}{3}$

[解説]

(1) 直線 AP の式を $y=ax+b$ とおく。

点 A の x 座標が -4 なので，点 A の y 座標は $y=\frac{1}{2}x^2$ に $x=-4$ を代入して

$y=\frac{1}{2}\times(-4)^2=8$　$y=ax+b$ に $x=-4,\ y=8$ を代入して $8=-4a+b$ ･･･①

点 P の x 座標が 2 なので，点 P の y 座標は $y=\frac{1}{2}x^2$ に $x=2$ を代入して

$y=\frac{1}{2}\times 2^2=2$　$y=ax+b$ に $x=2,\ y=2$ を代入して $2=2a+b$ ･･･②

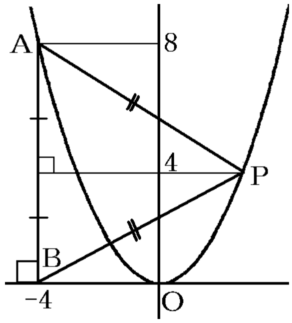
①，②を連立方程式として解く。

②－①より，$2-8=2a+b-(-4a+b)$，$-6=2a+b+4a-b$，$-6=6a,\ a=-1$

これを②に代入すると，$2=-2+b,\ b=4$

ゆえに $a=-1,\ b=4$　よって直線 AP の式は，$y=-x+4$

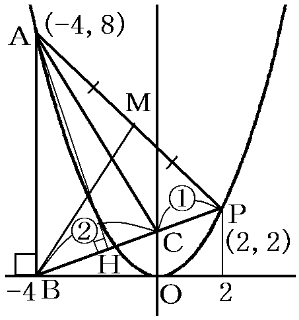
(2) △PAB が，PA＝PB の二等辺三角形であることから，点 P の y 座標は点 A と点 B の y 座標の中点となる。点 A の y 座標は(1)より 8 なので，点 P の y 座標は $y=\dfrac{8+0}{2}=4$



$y=\dfrac{1}{2}x^2$ に $y=4$ を代入すると $4=\dfrac{1}{2}x^2$，$x^2=8$，$x>0$ なので $x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

ゆえに点 P の座標は($2\sqrt{2}$，4)

(3) △ABC の底辺を BC，△ACP の底辺を CP とすると，高さはともに図の AH。高さが同じなので底辺の長さの比が面積比と等しくなる。



△ABC の面積が△ACP の面積の 2 倍になるので，

BC：CP＝2：1 となる。

よって，点 B の x 座標が -4 なので，点 P の x 座標は 2，点 P の y 座標は $y=\dfrac{1}{2}\times2^2=2$　ゆえに点 P の座標は(2，2)となる。(1)より点 A の座標は(-4，8)　点 B を通り，△ABP の面積を 2 等分する直線は AP の中点 M$\left(\dfrac{-4+2}{2},\dfrac{8+2}{2}\right)$＝($-1$，$5$)を通る。

直線 BM の式を $y=cx+d$ とおく。

点 M を通るので，$x=-1,\ y=5$ を代入して，$5=-c+d$ ･･･③

点 B を通るので，$x=-4,\ y=0$ を代入して，$0=-4c+d$ ･･･④

③，④を連立方程式として解く。

③－④より，$5=3c,\ c=\dfrac{5}{3}$　これを③に代入すると，$5=-\dfrac{5}{3}+d$，$d=5+\dfrac{5}{3}=\dfrac{20}{3}$

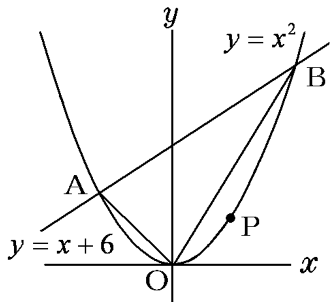
ゆえに，$c=\dfrac{5}{3}$，$d=\dfrac{20}{3}$

よって，求める直線の式は，$y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{20}{3}$

【】等積変形①

[問題](増補 10)(2 学期期末)

右の図のように，放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+6$ との交点を A，B とする。O を原点とするとき，放物線 $y=x^2$ 上の O から B までの間に点 P をとって，△AOB＝△APB となるようにしたい。このとき，点 P の座標を求めよ。



[解答欄]

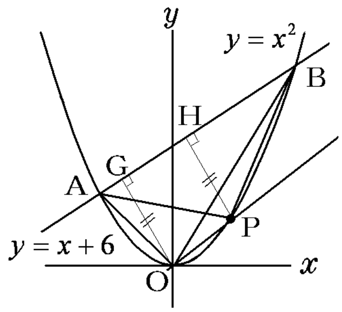
[解答](1，1)

[解説]

<Point> 平行線を引き，等積変形

右図のように，原点を通って，AB に平行な直線を引くと，放物線と交わる点が求める点 P になる。

△AOB と△APB の共通の底辺を AB とすると，AB // OP ならば，右図のように，OG＝OH となり，高さが等しくなるので，2 つの三角形の面積は等しくなる。



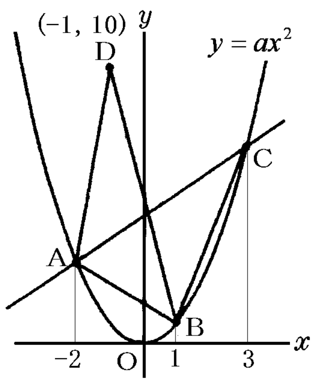
OP の傾きは直線 AB($y=x+6$)の傾きと同じなので，OP の式は，$y=x$ となる。$y=x$ と $y=x^2$ の交点を求めるために，$y=x$ と $y=x^2$ を連立方程式として解く。$y=x^2$ を $y=x$ に代入して，$x^2=x,\ x^2-x=0,\ x(x-1)=0,\ x=0,\ 1$

よって，点 P の x 座標は 1 になる。$x=1$ を $y=x$ に代入すると，$y=1$

よって，点 P の座標は，(1，1)となる。

[問題](3 学期)

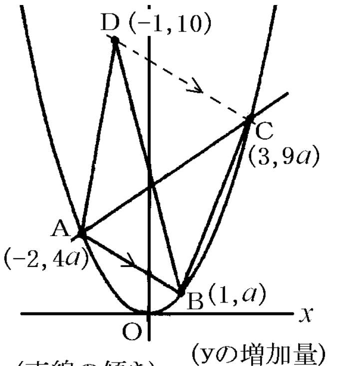
右の図で, 曲線は関数 $y=ax^2$ である。曲線①上に 3 点 A, B, C をそれぞれ x 座標が, －2, 1, 3 となるようにとる。ただし, a ＞0 とする。点 D の座標が(－1, 10)のとき, △ABC と△ABD の面積が等しくなるように a の値を求めなさい。



[解答欄]

[解答] $a=\dfrac{10}{13}$

[解説]



△ABC と△ABD の底辺を AB とすると, 面積が等しくなることから，AB を共通の底辺としたとき，この 2 つの三角形の高さは等しい。

よって AB // DC で，直線 AB と直線 DC の傾きは等しい。

点 A は $y=ax^2$ 上にあり， x 座標が－2 なので,

$x=-2$ を $y=ax^2$ に代入して， $y=a\times(-2)^2=4a$

よって，点 A の座標は(-2， $4a$)になる。

同様にして，点 B(1， a)，点 C(3， $9a$)になる。

点 D(－1，10)なので,

(AB の傾き)＝$\dfrac{a-4a}{1-(-2)}=-a$

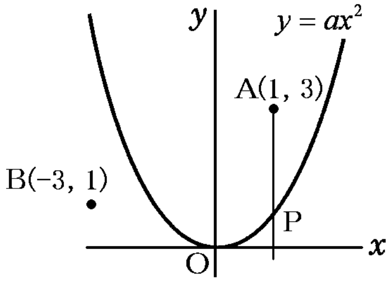
(DC の傾き)＝$\dfrac{9a-10}{3-(-1)}=\dfrac{9a-10}{4}$

直線 AB と直線 DC の傾きは等しいので,

$-a=\dfrac{9a-10}{4}$， $-4a=9a-10$, $-13a=-10$　ゆえに， $a=\dfrac{10}{13}$

[問題](増補 10)(補充問題)

　右の図のように，関数 $y=ax^2$ (a は正の定数)のグラフと 2 点 A(1，3)，B(－3，1)がある。点 O は原点とする。点 A を通り y 軸に平行な直線と $y=ax^2$ のグラフとの交点を P とする。△ABP の面積と△ABO の面積が等しくなるとき，a の値を求めよ。ただし，0＜a＜3 とする。(北海道)

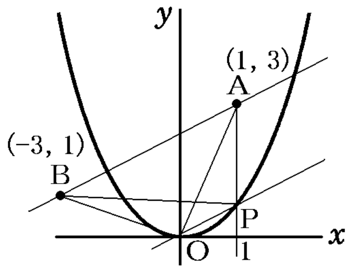


[解答欄]

[解答] $a=\dfrac{1}{2}$

[解説]

BA // OP のとき, △ABP と△ABO の面積は等しくなる。



(直線 BA の傾き)＝$\dfrac{3-1}{1-(-3)}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

したがって，直線 OP の傾きも $\dfrac{1}{2}$ なので,

直線 OP の式は $y=\dfrac{1}{2}x$

AP は y 軸に平行なので，点 P の x 座標は，点 A の x 座標と同じで， $x=1$ となる。

$y=\dfrac{1}{2}x$ に $x=1$ を代入すると， $y=\dfrac{1}{2}$

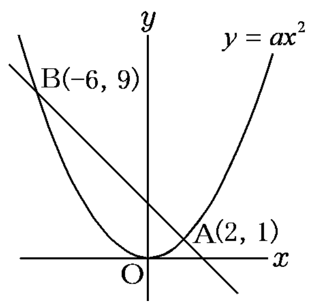
よって，点 P の座標は $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$

点 P は $y=ax^2$ 上にあるので， $y=ax^2$ に $x=1$， $y=\dfrac{1}{2}$ を代入して,

$\dfrac{1}{2}=a\times1^2$　よって， $a=\dfrac{1}{2}$

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に 2 点 A(2，1), B(−6，9)がある。原点を O として，次の問いに答えよ。(長崎県)



(1)　a の値を求めよ。

(2)　直線 AB の式を求めよ。

(3)　関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点 P をとり，直線 AB と直線 OP が平行になるようにする。このとき，三角形 ABP の面積を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[解答](1) $\dfrac{1}{4}$　(2) $y=-x+3$　(3) 12

[解説]

(1) 点 A(2，1)は $y=ax^2$ 上にあるので，$y=ax^2$ に $x=2$，$y=1$ を代入して，

$1=a\times4$，よって，$a=\dfrac{1}{4}$

(2) 直線 AB の式を $y=bx+c$ とおく。

点 A(2，1)は $y=bx+c$ 上にあるので，$y=bx+c$ に $x=2$，$y=1$ を代入して，

$1=2b+c$，$2b+c=1$・・・①

点 B(−6，9)は $y=bx+c$ 上にあるので，$y=bx+c$ に $x=-6$，$y=9$ を代入して，

$9=-6b+c$，$-6b+c=9$・・・②

①−②より，$(2b+c)-(-6b+c)=1-9,\ 8b=-8,\ b=8\div(-8)$，よって，$b=-1$

①に $b=-1$ を代入すると，$-2+c=1,\ c=3$

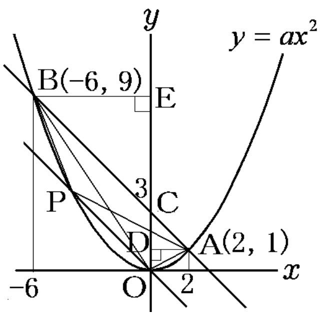
ゆえに，直線 AB の式は $y=-x+3$ となる。

(3) △ABP と△ABO で，AB を共通の底辺とすると，

AB // OP なので，2 つの三角形の高さは等しくなり，

(△ABP の面積)＝(△ABO の面積) となる。

そこで，△ABO の面積を，右図の△ACO と△BCO に分割して求める。



直線 AB の式は $y=-x+3$ なので，y 切片は 3 で，OC＝3

点 A の x 座標は 2 なので,△ACO の底辺を OC＝3 とすると，

高さは AD＝2

よって，(△ACO の面積)＝(底辺 OC)×(高さ AD)÷2＝3×2÷2＝3

同様にして，(△BCO の面積)＝(底辺 OC)×(高さ BE)÷2＝3×6÷2＝9

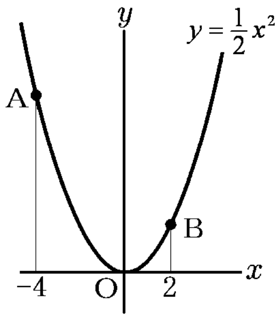
よって，(△ABO の面積)＝(△ACO の面積)＋(△BCO の面積)＝3＋9＝12

ゆえに，(△ABP の面積)＝(△ABO の面積)＝12

【】等積変形②

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図は，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフである。このグラフ上に 2 点 A，B があり， x 座標はそれぞれ－4，2 である。△AOC の面積が△AOB の面積の 2 倍となるように，y 軸上に点 C(0, c)をとる。このときの c の値を求めなさい。ただし，c＞0 とする。



(富山県)

[解答欄]

[解答]c＝12

[解説]

まず，右図のように，点 B を通って直線 AO に平行な直線 BD をひく。△AOB と△AOD で，AO を共通の底辺とすると，AO // BD なので，それぞれの三角形の高さ(BG と DF)は等しくなる。よって，(△AOB の面積)＝(△AOD の面積)となる。

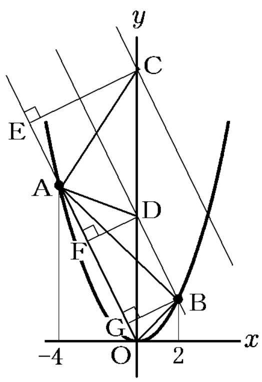
次に，y 軸上の正の部分に CO＝2DO となる点 C をとる。

△AOC と△AOB で，AO を共通の底辺とすると，

△AOC の高さ CE は，△AOB の高さ BG の 2 倍になる。

したがって，(△AOC の面積)＝(△AOB の面積)×2 になる。

点 C の y 座標は，点 D の y 座標の 2 倍になる。



そこで，直線 BD の式を求める。

点 A の x 座標は－4 なので， $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して， $y=\frac{1}{2}\times(-4)^2=8$

点 B の x 座標は 2 なので， $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して， $y=\frac{1}{2}\times 2^2=2$

よって，(直線 BD の傾き)＝(直線 AO の傾き)＝ $\frac{8-0}{-4-0}=-2$

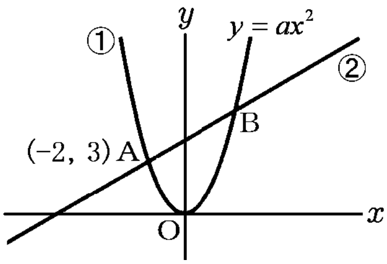
したがって，BD の式は $y=-2x+b$ とおくことができる。

$y=-2x+b$ は点 B(2，2)を通るので， $x=2,\ y=2$ を代入して，

$2=-2\times 2+b$ ， $2=-4+b$ ， $b=2+4=6$

よって，BD の式は $y=-2x+6$ となる。
点 D は $y=-2x+6$ の y 切片なので，点 D の y 座標は 6 になる。
点 C の y 座標は点 D の y 座標の 2 倍なので，c＝6×2＝12 となる。

[問題](増補 10)(補充問題)



右の図において，①は関数 $y=ax^2$ のグラフで，②は傾きが $\frac{1}{2}$ の直線であり，①と②は 2 点 A，B で交わっている。点 A の座標が(－2，3)であるとき，次の問いに答えなさい。(高知県)

(1) 定数 a の値を求めよ。

(2) x 軸上に x 座標が正である点Pをとり，△PABの面積が△OABの面積の2倍となるようにしたい。このときの点Pの x 座標を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $a=\frac{3}{4}$　(2) 8

[解説]

(1) 点 A(－2，3)は $y=ax^2$ 上にあるので，
$x=-2,\ y=3$ を $y=ax^2$ に代入して，
$3=a\times(-2)^2$，$4a=3$　よって，$a=\frac{3}{4}$

(2) まず，直線②の式を求めておく。

直線②の傾きは $\frac{1}{2}$ なので，$y=\frac{1}{2}x+b$ とおく。

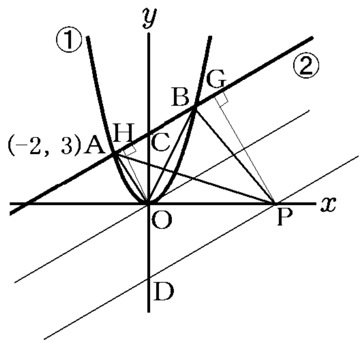
点 A(－2，3)は $y=\frac{1}{2}x+b$ 上にあるので，$x=-2,\ y=3$ を代入して，

$3=\frac{1}{2}\times(-2)+b,\ 3=-1+b$　よって，$b=4$

したがって，直線②の式は，　$y=\frac{1}{2}x+4$

よって，②と y 軸との交点を C とすると，点 C の座標は(0，4)となる。

ここで，右図のように，CO＝DO となる点 D(0，－4)をとる。



点 D を通り②に平行な直線 DP をひく。

△OAB と△PAB で，AB を共通の底辺とすると，

△OAB の高さは OH，△PAB の高さは PG となる。

CO＝DO なので，PG＝OH×2 となる。

したがって, (△PAB の面積)＝(△OAB の面積)×2 になる。

点 P の座標を求めるために直線 DP の式を求める。

直線 DP は②と平行なので傾きは $\frac{1}{2}$ である。また点 D の座標は(0，－4)なので，y 切片は

－4 である。したがって，直線 DP の式は，　$y=\frac{1}{2}x-4$ である。

点 P の y 座標は 0 なので，　$y=\frac{1}{2}x-4$ に $y=0$ を代入して，　$0=\frac{1}{2}x-4$

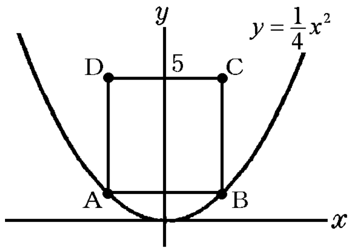
両辺を 2 倍すると，　$x-8=0$　よって $x=8$

よって，点 P の x 座標は 8 になる。

【】座標 t→方程式

[問題](3 学期)

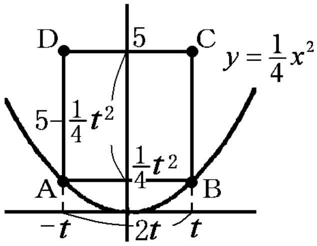
図で，A，B は関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上の点で四角形 ABCD は正方形である。辺 AB が x 軸に平行で, 点 C の y 座標が 5 のとき，点 B の座標を求めなさい。



[解答欄]

[解答]B(2，1)

[解説]



点 B の x 座標を t とすると $B\left(t,\ \frac{1}{4}t^2\right)$

点Cの y 座標が5なので，BC=$5-\frac{1}{4}t^2$

また，点 B の x 座標は t なので，AB＝$2t$

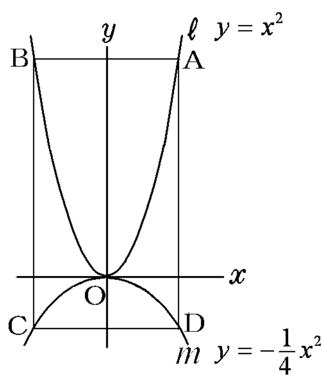
四角形 ABCD は正方形なので，$2t=5-\frac{1}{4}t^2$　$8t=20-t^2$，　$t^2+8t-20=0$

$(t-2)(t+10)=0$　ゆえに $t=2,\ -10$　$t>0$ なので $t=2$

$y=\frac{1}{4}x^2$ に $x=t=2$ を代入すると，$y=1$　ゆえに B(2，1)

[問題](増補 10)(補充問題)

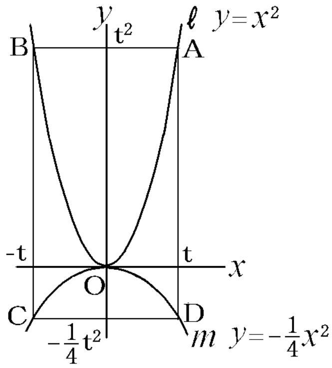
次の図において，l は $y=x^2$ のグラフを，m は $y=-\frac{1}{4}x^2$ のグラフを表す。A は l 上を動く点で，A の x 座標は正の範囲にあるものとする。A を通り x 軸に平行な直線をひき，これが，l と再び交わる点を B とする。また，m 上に 2 点 C，D をとり，長方形 ABCD をつくる。O は原点であり，x 軸の 1 目もりと y 軸の 1 目もりとの長さは等しい。長方形 $ABCD$ が正方形になるように点 A をとるとき，A の x 座標を求めよ。
(大阪府)



[解答欄]

[解答] $\dfrac{8}{5}$

[解説]



点 A の x 座標を $x=t$ とおくと，AB は x 軸に平行なので，B は y 軸について A と対称になる。よって，点 B の x 座標は $x=-t$ となる。

したがって，AB＝$t-(-t)=2t$ ･･･①

点 A の y 座標は，$y=x^2$ に $x=t$ を代入して，$y=t^2$

AD は y 軸に平行なので点 D の x 座標も $x=t$ となる。

点 D の y 座標は，

$y=-\dfrac{1}{4}x^2$ に $x=t$ を代入して，$y=-\dfrac{1}{4}t^2$

したがって，AD＝$t^2-\left(-\dfrac{1}{4}t^2\right)=t^2+\dfrac{1}{4}t^2=\dfrac{5}{4}t^2$ ･･･②

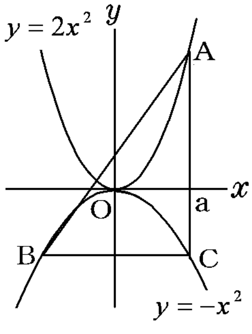
長方形 ABCD が正方形になるためには，AD＝AB

①，②より，$\dfrac{5}{4}t^2=2t,\ 5t^2=8t,\ 5t^2-8t=0,\ 5t\left(t-\dfrac{8}{5}\right)=0$

$t>0$ なので，$t-\dfrac{8}{5}=0$　よって，$t=\dfrac{8}{5}$

[問題](増補 10)(補充問題)

次の図のように, 頂点 A は関数 $y=2x^2$ のグラフ上に, 頂点 B, C は関数 $y=-x^2$ のグラフ上にあり，辺 AC が y 軸に平行，辺 BC が x 軸に平行な直角三角形 ABC がある。項点 A の x 座標を a(a＞0)とする。直角三角形 ABC が AC＝BC の直角二等辺三角形になるとき，a の値を求めよ。

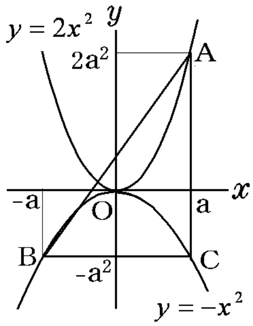


(岩手県)

[解答欄]

[解答]$\dfrac{2}{3}$

[解説]



まず，BC の長さを a を使って表す。

BC は x 軸に平行なので，B は y 軸について C と対称になる。

点 C の x 座標が x ＝a なので, 点 B の x 座標は x ＝－a になる。

したがって，BC＝a－(－a)＝2a・・・①

次に，AC の長さを a を使って表す。

点 A の y 座標は，$y=2x^2$ に x ＝a を代入して，y ＝2a²

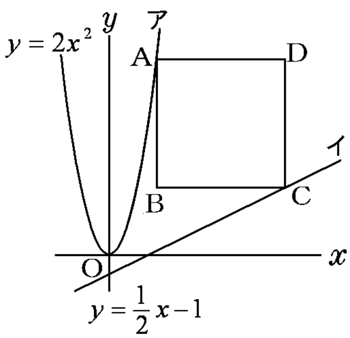
点 C の y 座標は，$y=-x^2$ に x ＝a を代入して，y ＝－a²

したがって，AC＝2a²－(－a²)＝3a²・・・②

AC＝BC なので，①，②より，3a²＝2a，3a²－2a＝0，a(3a－2)＝0

a＞0 なので，3a－2＝0，3a＝2　よって，a＝$\dfrac{2}{3}$

[問題](増補 10)(補充問題)

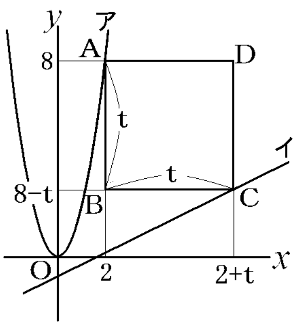


次の図で，曲線アは関数 $y=2x^2$ のグラフで，直線イは関数 $y=\dfrac{1}{2}x-1$ のグラフである。正方形 ABCD において，辺 AD，AB はそれぞれ x 軸，y 軸に平行で，頂点 A は曲線アの上に，頂点 C は直線イの上にある。A の x 座標が 2 のとき，C の x 座標を求めよ。(茨城県)

[解答欄]

[解答]$\dfrac{22}{3}$

[解説]



正方形 ABCD の 1 辺の長さを t とおくと，

右図から，点 C の x 座標は $x=2+t$ となる。

また，A の y 座標は $y=2\times2^2$ ＝8 で，AB＝t なので，

点 B の y 座標は $y=8-t$ となる。

したがって，点 C の y 座標も $y=8-t$ となる。

点 C の x 座標 $x=2+t$， y 座標 $y=8-t$ を

$y=\frac{1}{2}x-1$ に代入すると，$8-t=\frac{1}{2}(2+t)-1$

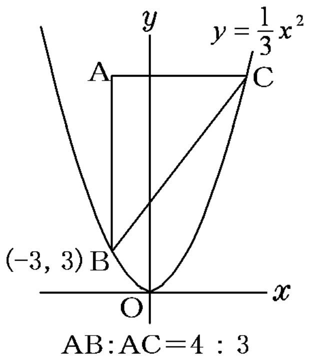
両辺を 2 倍して，$16-2t=2+t-2,\ -2t-t=2-2-16,\ -3t=-16$

よって，$t=\frac{16}{3}$　点 C の x 座標は，$x=2+t=2+\frac{16}{3}=\frac{22}{3}$

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図で，　ABC は　A＝90°の直角三角形である。2 つの頂点 B，C は $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフ上にあり，辺 AC は x 軸に平行である。AB：AC＝4：3，点 B の座標を(－3，3)とするとき，点 C の座標を求めよ。ただし，点 C の x 座標は正である。

(千葉県)



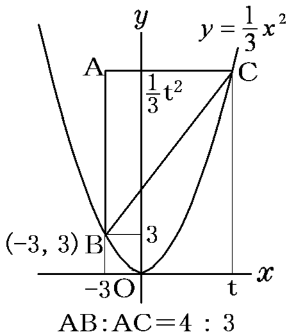
[解答欄]

[解答]$\left(7,\ \frac{49}{3}\right)$

[解説]

点 C の x 座標を t とおく($t>0$)。

C は $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフ上にあるので，点 C の y 座標は $y=\frac{1}{3}t^2$



よって，AB＝$\frac{1}{3}t^2-3$，AC＝$t-(-3)=t+3$

AB：AC＝4：3 なので，$\left(\frac{1}{3}t^2-3\right):(t+3)=4:3$

比の外項の積は内項の積と等しいので，

$$\left(\frac{1}{3}t^2-3\right)\times 3=(t+3)\times 4,\quad t^2-9=4t+12,\quad t^2-4t-21=0,\quad (t-7)(t+3)=0$$

$t>0$ なので，$t=7$

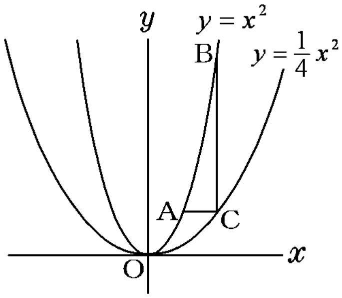
$y=\dfrac{1}{3}t^2=\dfrac{1}{3}\times 7^2=\dfrac{49}{3}$

よって，点 C の座標は，$\left(7,\ \dfrac{49}{3}\right)$

[問題](増補 10)(補充問題)

　次の図で，2 点 A，B は関数 $y=x^2$ のグラフ上の点であり，点 C は関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ のグラフ上の点である。線分 AC が x 軸に平行で，線分 BC が y 軸に平行で，2 点 A，B の x 座標は正である。AC：BC＝1：9 であるとき点 A の座標を求めよ。

(千葉県)



AC：BC＝1：9

[解答欄]

[解答](3，9)

[解説]

点 A の x 座標を t とおく(t＞0)。

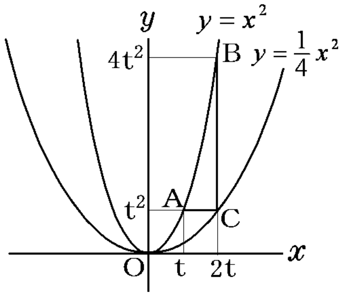
点 A は $y=x^2$ のグラフ上にあるので，y 座標は，$y=t^2$

点 C の y 座標は点 A の y 座標と同じ $y=t^2$

そこで，点 C の x 座標を求める。

点 C は関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ のグラフ上にあるので，$y=t^2$

を代入して，$t^2=\dfrac{1}{4}x^2$，$x^2=4t^2$



AC：BC＝1：9

t＞0，x＞0 なので，$x=2t$

点 B の x 座標は，点 C の x 座標と同じ $x=2t$ である。

点 B は $y=x^2$ のグラフ上にあるので，y 座標は，

$y=(2t)^2=4t^2$

よって，BC＝$4t^2-t^2=3t^2$，AC＝$2t-t=t$

AC：BC＝1：9 なので，t ：$3t^2$＝1：9

比の内項の積は外項の積に等しいので，$3t^2\times1=t\times9$，$3t^2=9t$，$t^2=3t$，$t^2-3t=0$，$t(t-3)=0$

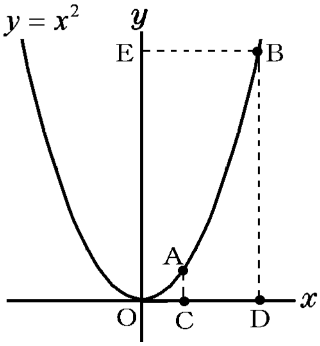
t＞0 なので，t＝3

$t^2=3^2=9$ なので，点 A の座標は(3，9)

[問題](2 学期期末)

右の図で, 2 点 A, B は関数 $y=x^2$ のグラフ上の点であり，2 点 C，D は x 軸上の点です。また，点 E は y 軸上の点です。

線分 AC，BD がそれぞれ y 軸に平行で，線分 EB が x 軸に平行であるとき，次の問いに答えなさい。(ただし，2 点 C，D の x 座標は正であり，点 D の x 座標は点 C の x 座標より大きいとします。)



(1)　点 D の x 座標が点 C の x 座標の 3 倍であるとき, 点 B の y 座標は点 A の y 座標の何倍であるか求めなさい。

(2)　線分 CD の長さが 2，△ABE の面積が 40 であるとき，点 A の座標を求めなさい。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 9 倍　(2) (3，9)

[解説]

(1) 点 C の x 座標を a とすると，点 B の x 座標は $3a$

このとき点 C の y 座標は $y=a^2$，点 B の y 座標は $y=(3a)^2=9a^2$　よって 9 倍

(2) 点 A の x 座標を b とおくと y 座標は b^2，

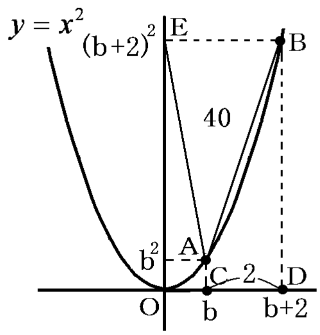
線分 CD の長さが 2 なので，点 B の x 座標は $b+2$，

y 座標は $(b+2)^2$

△ABE で，底辺を BE とすると，底辺＝$b+2$

高さ＝$(b+2)^2-b^2=4b+4$

よって，面積＝$\dfrac{1}{2}\times(b+2)\times(4b+4)=40$



$\frac{1}{2}\left(4b^2+4b+8b+8\right)=40$，$2b^2+6b+4=40$，$2b^2+6b-36=0$

$b^2+3b-18=0$，$(b+6)(b-3)=0$

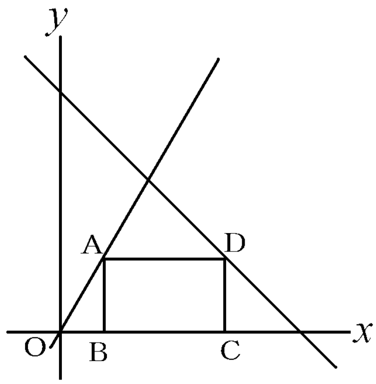
$b>0$ なので $b=3$

ゆえに点 A の x 座標は 3，y 座標は $y=x^2$ に $x=3$ を代入して $y=3^2=9$

ゆえに点 A の座標は $(3,\ 9)$

[問題](2 学期中間)

右の図で，四角形 ABCD は長方形で，辺 BC は x 軸上にあり，頂点 A，D はそれぞれ直線 $y=2x$，$y=-x+6$ 上にある。長方形 ABCD の面積が 6 となるときの点 A の座標を求めなさい。



[解答欄]

[解答](1，2)

[解説]

点 A の x 座標を t とおくと，点 A の y 座標は

$y=2x$ に代入して，$y=2t$

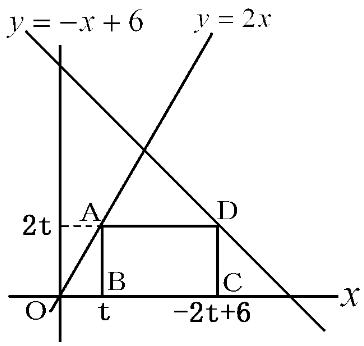
よって点 D の y 座標も $y=2t$

$y=-x+6$ に $y=2t$ を代入すると，

$2t=-x+6$，$\therefore x=-2t+6$

点 D の x 座標は $x=-2t+6$

よって BC の長さは $-2t+6-t=-3t+6$



また，AB の長さは $2t$

よって，長方形 ABCD の面積は，BC×AB＝6 なので，$(-3t+6)\times 2t=6$

$-6t^2+12t=6,\ -6t^2+12t-6=0,\ t^2-2t+1=0$

よって，$(t-1)^2=0$　ゆえに，$t=1$

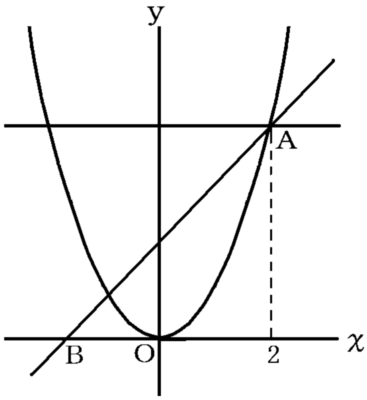
よって点 A の x 座標は 1，点 A の y 座標は $y=2t=2\times1=2$

ゆえに，点 A の座標は(1，2)となる。

【】格子点

[問題](2 学期期末)

右の図のように，関数 $y=x^2$ とこのグラフ上の点 A(2，4)が与えられている。また x 座標，y 座標が，ともに整数となるような点を格子点という。



(1)　点 A を通り x 軸に平行な直線と，この関数のグラフとで囲まれた図形の内部の格子点は何個か。ただし線上の点は内部に含めない。

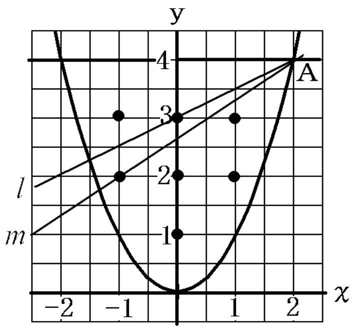
(2)　x 軸上に点 B(b，0)をとり，直線 AB とこの関数のグラフで囲まれた図形の内部の格子点が 5 個であるとき，b の値のとり得る範囲を求めよ。ただし，線上の点は内部に含めない。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 7 個　(2)　$-6 \leqq b < -4$

[解説]



(1)　右図より 7 個

(2)　条件をみたすのは右図の l と m の間

l の式は，図より傾きが $\frac{1}{2}$ で，y 切片が 3 なので，

$y=\frac{1}{2}x+3$ ･･･①

m の式の傾きは図より $\frac{2}{3}$，$y=\frac{2}{3}x+c$ とおく。$x=-1$ のとき $y=2$ なので，

代入して，$2=-\frac{2}{3}+c$，$c=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$　ゆえに，m の式は $y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$ ･･･②

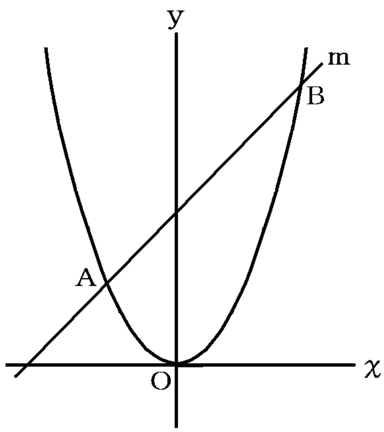
①に $y=0$ を代入すると，$0=\frac{1}{2}x+3$，$0=x+6$，$x=-6$

②に $y=0$ を代入すると，$0=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$，$2x+8=0$，$x=-4$

よって　$-6 \leqq b < -4$

[問題](2 学期期末)

　右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフと直線 m があり，$y=ax^2$ のグラフと直線 m は，2 点 A(−2, 3), B(b , 12)で交わっています。ただし，$b>0$ とします。次の各問いに答えなさい。



(1)　a，b の値を求めなさい。

(2)　直線 m の式を求めなさい。

(3)　$y=ax^2$ のグラフの A から B までの部分で, x 座標, y 座標がともに整数になる点はいくつありますか。ただし，2 点 A，B も含めて数えるものとします。

(4)　$y=ax^2$ のグラフと直線 AB で囲まれる部分に，x 座標も y 座標もともに整数である点はいくつありますか。ただし，$y=ax^2$ のグラフ上の点および線分 AB 上の点も含めて数えるものとします。

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
(4)		

[解答](1)　$a=\dfrac{3}{4}$，$b=4$　(2)　$y=\dfrac{3}{2}x+6$　(3)　4 個　(4)　31個

[解説]

(1)　$y=ax^2$ に A(−2，3)を代入すると，$3=a\times(-2)^2$ で，$a=\dfrac{3}{4}$　放物線の式は $y=\dfrac{3}{4}x^2$

$y=\dfrac{3}{4}x^2$ に B(b，12)を代入すると，$12=\dfrac{3}{4}b^2$　$b>0$ なので $b=4$

(2)　$y=cx+d$ とおき，A(−2，3)，B(4，12)を代入すると，

$3=-2c+d$, $12=4c+d$　この連立方程式を解くと $c=\dfrac{3}{2}$，$d=6$　よって $y=\dfrac{3}{2}x+6$

(3)　放物線の AB 間で

$x=0$ のとき $y=0$，$x=\pm1$ のとき $y=\dfrac{3}{4}$，$x=\pm2$ のとき $y=3$，$x=3$ のとき $y=\dfrac{27}{4}$

$x=4$ のとき $y=12$

よって A から B までの部分で，x 座標，y 座標がともに整数になる点は 4 個

(4) 条件をみたす点をあげると，

・$x=-2$ のとき $y=3$ で1個

・$x=-1$ のとき，$y=\dfrac{3}{4}\times(-1)^2=\dfrac{3}{4}=0.75$，$y=\dfrac{3}{2}\times(-1)+6=4.5$ より

$0.75\leqq y\leqq 4.5$ を満たす y は，$y=1, 2, 3, 4$ で4個

・$x=0$ のとき，$y=\dfrac{3}{4}\times 0^2=0$ m $y=\dfrac{3}{2}\times 0+6=6$ より，

$0\leqq y\leqq 6$ を満たす y は，0から6までで7個

・$x=1$ のとき，$y=\dfrac{3}{4}\times 1^2=0.75$，$y=\dfrac{3}{2}\times 1+6=7.5$

$0.75\leqq y\leqq 7.5$ を満たす y は，1から7までで7個

・$x=2$ のとき，$y=\dfrac{3}{4}\times 2^2=3$，$y=\dfrac{3}{2}\times 2+6=9$

$3\leqq y\leqq 9$ を満たす y は，3から9までで7個

・$x=3$ のとき，$y=\dfrac{3}{4}\times 3^2=\dfrac{27}{4}=6.75$，$y=\dfrac{3}{2}\times 3+6=10.5$

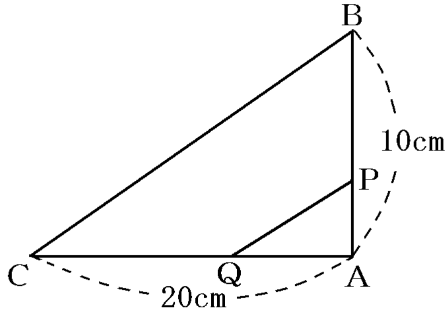
$6.75\leqq y\leqq 10.5$ を満たす y は，7から10までで4個

・$x=4$ のときは $y=12$ で1個　　以上より，合計31個

【】二次関数の応用（動点の問題）

[問題](2 学期中間)

右の図のような直角三角形 ABC がある。点 P は辺 AB 上を毎秒 1cm の速さで，A から B まで動き，点 Q は辺 AC 上を毎秒 2cm の速さで，A から C まで動く。P，Q が同時に A を出発してから x 秒後の△APQ の面積を y cm² とするとき，次の問いに答えなさい。



(1)　y を x の式で表しなさい。また，x の変域も求めなさい。

(2)　△APQ の面積が 12cm² になるのは，P，Q が出発してから何秒後か。

[解答欄]

(1)		(2)

[解答](1)　$y = x^2$，$0 \leqq x \leqq 10$　(2)　$2\sqrt{3}$ 秒後

[解説]

(1)　x 秒後には，AP＝x cm，AQ＝$2x$ cm

よって $y = \dfrac{1}{2} \times x \times 2x = x^2$

P が B 点に達するのは 10 秒後，Q が C 点に達するのも 10 秒後

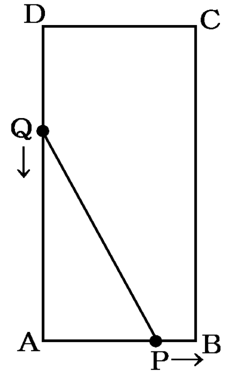
よって x の変域は，$0 \leqq x \leqq 10$

(2)　$y = x^2$ に $y = 12$ を代入すると，$12 = x^2$

$x \geqq 0$ なので $x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$　よって $2\sqrt{3}$ 秒後

[問題](2 学期中間)

AB＝15cm, BC＝30cm の長方形 ABCD がある。右の図のように，P は AB 上を毎秒 3cm の速さで A から B まで動く。また，Q は毎秒 2cm の速さで D から A まで動く。P，Q が出発して x 秒後にできる△DPQ の面積を y cm² とするとき，次の問いに答えなさい。



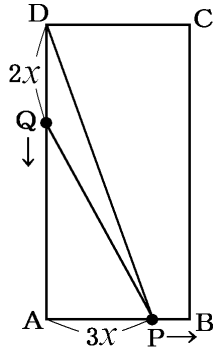
(1)　y を x の式で表しなさい。

(2)　△DPQ の面積が長方形 ABCD の面積の $\dfrac{1}{6}$ になるのは，P が出発してから何秒後ですか。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $y=3x^2$　(2) 5 秒後



[解説]

(1) x 秒後には，DQ＝$2x$ cm，AP＝$3x$ cm なので，

(△DPQ の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 DQ)×(高さ PA)

$y=\dfrac{1}{2}\times 2x\times 3x=3x^2$

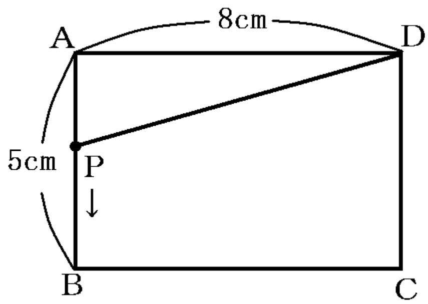
(2) 長方形の面積は 30×15＝450cm² なので，

$y=450\times\dfrac{1}{6}=75$　cm²

よって，$y=3x^2$ に $y=75$ を代入すると，$75=3x^2$，$x^2=75\div 3$，$x^2=25$

$x>0$ なので $x=5$　これは条件を満たす。

[問題](2 学期中間)

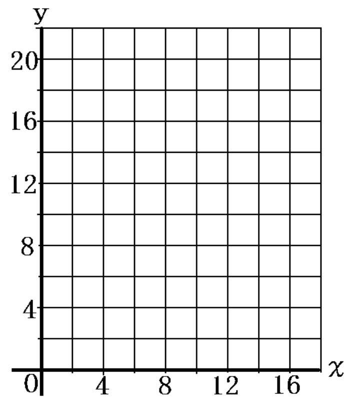


右の図のように，縦が 5cm，横が 8cm の長方形 ABCD の辺上を，毎秒 1cm の速さで頂点 A→B→C と動く点 P がある。点 P が頂点 A を出発してから x 秒後の△APD の面積を y cm² とするとき，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1)　点 P が辺 AB 上にあるとき，y を x の式で表しなさい。また，このときの x の変域を求めなさい。

(2)　点 P が辺 BC 上にあるとき，y の値を求めなさい。また，このときの x の変域を求めなさい。

(3)　点 P が頂点 A を出発してから頂点 C まで動くときの x と y 関係を表すグラフを，解答用紙の図にかきなさい。

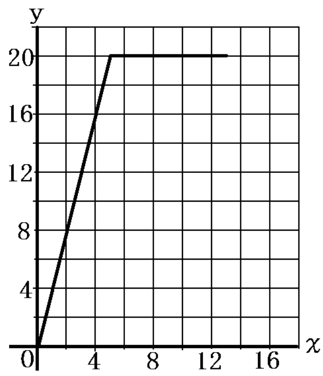


[解答欄]

(1)	
(2)	

[解答](1)　$y=4x$，$0\leqq x\leqq 5$　(2)　$y=20$，$5\leqq x\leqq 13$

[解説]



(1) 毎秒 1cm の速さなので AP＝x cm

△APD で AD＝8cm を底辺とすると高さは AP＝x cm

よって，(△APD の面積)＝$y=\dfrac{1}{2}\times 8\times x$，$y=4x$

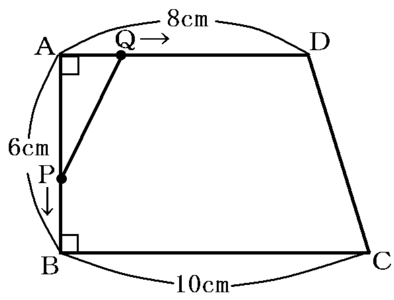
B につくのは5秒後なので，変域は，$0\leqq x\leqq 5$

(2) 点 P が BC 上にあるとき，底辺を AD＝8cm とすると

高さは常に 5cm である。ゆえに $y=\dfrac{1}{2}\times 8\times 5=20$

点 B にくるのは5秒後，点 C にくるのは $5+8=13$ 秒後なので，x の変域は $5\leqq x\leqq 13$

[問題](2 学期期末)



次の図のような，AD // BC の台形 ABCD があり，AB＝6cm，BC＝10cm，AD＝8cm，∠A＝∠B＝90°である。点 P，Q はそれぞれ点 A を同時に出発して，点 P は辺 AB，BC 上を点 A から点 C まで毎秒 2cm の速さで移動し，点 Q は辺 AD 上を点 A から点 D まで毎秒 1cm の速さで移動する。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　点 P, Q がそれぞれ点 A を同時に出発してから x 秒後の△APQ の面積を y cm^2 とするとき，次のそれぞれの場合について y を x の式で表し，x の変域も求めなさい。

①　点 P が AB 上にあるとき

②　点 P が BC 上にあるとき

(2)　AP＝PQ となるときの△APQ の面積を求めなさい。ただし，点 P，Q が点 A の位置にあるときは除く。

[解答欄]

(1)①	②	(2)

[解答](1)①　$y=x^2$，$0\leqq x\leqq 3$　②　$y=3x$，$3\leqq x\leqq 8$　(2) 12cm^2

[解説]

(1)① 点Pが点Bに到着するのは$6\div 2=3$秒後　ゆえに点PがAB上にあるときのxの変域は$0\leqq x\leqq 3$

AP＝$2x$，AQ＝xなので面積は　$y=\frac{1}{2}x\times 2x=x^2$

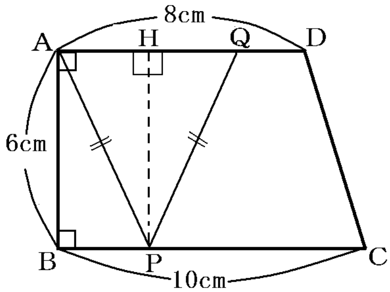
② 点Pが点Cに到着するのは，$(6+10)\div 2=8$秒後　ゆえに点PがBC上にあるときのxの変域は$3\leqq x\leqq 8$

AQ＝x cmを底辺とすると，高さは常に6cm　ゆえに$y=\frac{1}{2}\times x\times 6=3x$

(2) PがAB上にあるときはAP＜PQでAP＝PQとならない。

PがBC上にあるとき，AP＝PQであるので

右図のような状態になる。



図から明らかなように

△APH≡△QPH

ゆえにBP=AH＝$\frac{1}{2}$AQ，ゆえにAQ＝2BP

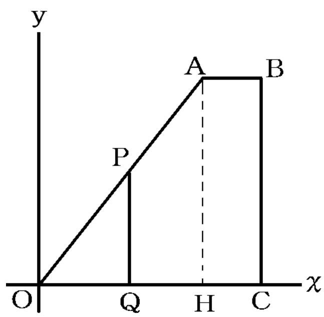
AQ＝x cm

AP＋BP＝$2x$，6＋BP＝$2x$，BP＝$2x-6$

ゆえに$x=2(2x-6)$　これを解いて$x=4$　ゆえに$y=3x=3\times 4=12$

[問題](2学期期末)

右の図のように，点O(0，0)，A(2，3)，B(3，3)，C(3，0)を頂点とする四角形OABCにおいて，動点Pは辺OA, AB上をOからBまで動く。Pからx軸に垂線をひき，x軸との交点をQ(x，0)とする。線分PQによって分けられた四角形OABCの2つの部分のうち，頂点Oの側にある方の面積をyとして，次の問いに答えなさい。



(1)　次の場合について，yをxの式で表しなさい。

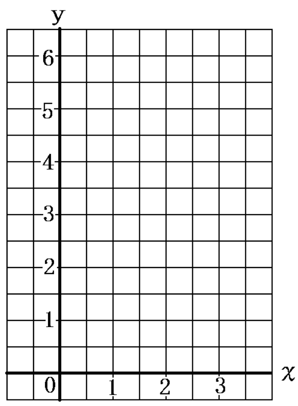
① $0\leqq x\leqq 2$のとき

② $2\leqq x\leqq 3$のとき

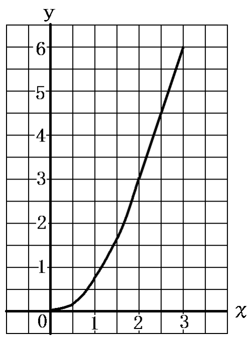
(2)　xとyとの関係を表すグラフをかきなさい。

[解答欄]

(1)①	②



[解答](1)①　$y=\frac{3}{4}x^2$　②　$y=3x-3$



[解説]

(1)①　直線 OA の式は原点を通るので $y=ax$ とおける。

点 A を通るので $x=2,\ y=3$ を代入して $3=2a$

ゆえに $a=\frac{3}{2}$　ゆえに OA の式は $y=\frac{3}{2}x$

ゆえに OQ＝x のとき PQ＝$\frac{3}{2}x$

よって面積 $y=\frac{1}{2}\times x\times\frac{3}{2}x$　$y=\frac{3}{4}x^2$

②　P が AB 上にあるとき，AP＝$x-2$ なので

(面積)＝△OAH＋四角形

ゆえに $y=\frac{1}{2}\times2\times3+(x-2)\times3$　$y=3x-3$

[印刷／他の PDF ファイルについて]
※ このファイルは，FdData 中間期末数学 3 年(7,200 円)の一部を PDF 形式に変換したサンプルで，印刷はできないようになっています。製品版の FdData 中間期末数学 3 年は Word(または一太郎)の文書ファイルで，印刷･編集を自由に行うことができます。※FdData 中間期末(社会･理科･数学)全分野の PDF ファイル，および製品版の購入方法は http://www.fdtext.com/dat/ に掲載しております。

下図のような，[FdData 無料閲覧ソフト(RunFdData)]を，Windows のデスクトップ上にインストールすれば，FdData 中間期末･FdData 入試の全 PDF ファイル(各教科約 1500 ページ)を自由に閲覧できます。次のリンクを左クリックするとインストールが開始されます。 RunFdData(Word 版)　【 http://www.fdtext.com/lnk/instRunFdDataWDs.exe 】 RunFdData(一太郎版)　【 http://www.fdtext.com/lnk/instRunFdDataTAs.exe 】 ※ダイアログが表示されたら，【実行】ボタンを左クリックしてください。インストール中，いくつかの警告が出ますが，[実行][許可する][次へ]等を選択します。

【イメージ画像】

【Fd 教材開発：URL http://www.fdtext.com/dat/　Tel (092) 404-2266】