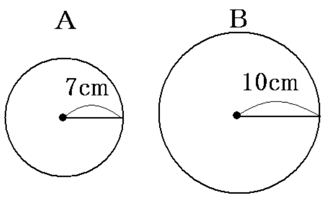
【】相似比と面積比①

[問題](3 学期)

右の図の２つの円 A, B について, 次の各問いに答えよ。



(1) A，B の円の相似比を求めよ。

(2) A，B の円の面積をそれぞれ求めよ。

(3) 面積の比を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)A	B
(3)		

[解答](1) 7：10　(2)A 49π cm²　B 100π cm²　(3) 49：100

[解説]

(1) 円 A，B の半径の比が 7：10 なので，相似比は 7：10 である。

(2) (Aの円の面積)＝$\pi \times 7^2 = 49\pi$ (cm²),

(Bの円の面積)＝$\pi \times 10^2 = 100\pi$ (cm²)

(3) (A の円の面積)：(B の円の面積)＝49π ：100π ＝49：100

２つの円の相似比が 7：10 のとき，面積比は $7^2 : 10^2$＝49：100 になる。

一般に，２つの相似な図形の相似比がa：bのとき，面積比は$a^2 : b^2$ となる。

<Point>相似比a：b → 面積比$a^2 : b^2$

[問題](2 学期期末)

相似比が 5：3 の相似な図形がある。これら２つの図形の面積の比を求めよ。

[解答欄]

[解答]25：9

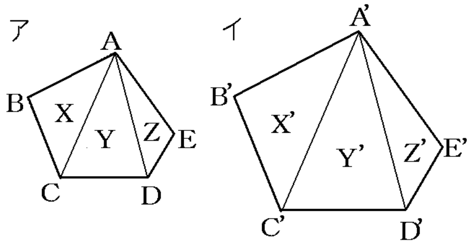
[解説]

<Point>相似比a：b → 面積比$a^2 : b^2$

相似比が 5：3 のとき，面積比は $5^2 : 3^2$＝25：9 となる。

[問題](増補 16)(後期期末)

右の図のように，アとイの相似比が 1 : k である 2 つの相似な五角形をそれぞれ 3 つの三角形に分け，各三角形の面積を X, Y, Z および, X’，Y’，Z’とする。このとき，対応する三角形はそれぞれ相似で，相似比はすべて 1 : k である。この相似な五角形の面積 S，S’の比について説明した，次の文章中の①～⑤に適語を入れよ。



X’＝k^2X，Y’＝(　①　)，Z’＝(　②　)であるから，

X’＋Y’＋Z’＝ k^2X ＋(①)＋(②)

＝(　③　)×(X＋Y＋Z)

したがって，S’＝(　④　)

つまり，S : S’ ＝(　⑤　) が成り立つ。

[解答欄]

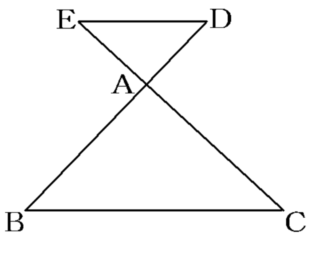
①	②	③
④	⑤	

[解答]① k^2Y　② k^2Z　③ k^2　④ k^2S　⑤ 1 : k^2

[問題](入試問題)

右図のように，△ABC の辺 BA，CA の延長上に BC // DE となるように，それぞれ点 D，E をとる。AE＝4cm，AC＝8cm であるとき，△ADE と△ABC の面積の比を求めよ。

(栃木県)



[解答欄]

[解答]1 : 4

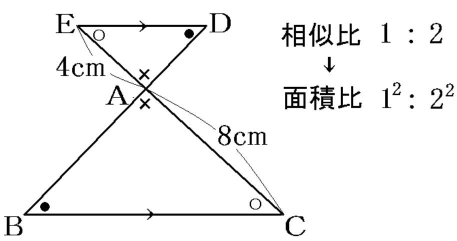
[解説]

<Point>相似比a : b→ 面積比a^2 : b^2

BC // DE なので△ADE∽△ABC で,

AE と AC は対応する辺なので,

相似比は，AE : AC＝4 : 8＝1 : 2



面積比は相似比の 2 乗になるので，

(△ADEの面積) : (△ABCの面積)＝1^2 : 2^2＝1 : 4

[問題](2 学期期末)

次の各問いに答えよ。

(1) 2 つの相似な三角形の相似比が 1 : 3 であるとき，面積比を求めよ。

(2) 相似比が 2 : 3 である 2 つの円O，O'で，円Oの面積が 16πcm²のとき，円O'の面積を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 1 : 9　(2) 36πcm²

[解説]

(1) 2 つの三角形の相似比が 1 : 3 であるので，面積比は 1^2 : 3^2＝1 : 9 となる。

(2) 2 つの円 O，O'の相似比が 2 : 3 であるので，面積比は，

(円Oの面積) : (円O'の面積)＝2^2 : 3^2＝4 : 9 となる。

円Oの面積が 16πcm²であるので，16π : (円O'の面積)＝4 : 9

比で，内項の積は外項の積に等しいので，(円 O'の面積)×4＝16π×9

よって，(円O'の面積)＝16π×9÷4＝36π(cm²)

[問題](後期中間)

相似な 2 つの平面図形A，Bの相似比が 2 : 5 で，Aの面積が 24cm²である。Bの面積を求めよ。

[解答欄]

[解答]150cm²

[解説]

A，B の相似比が 2 : 5 であるので，面積比は，

(Aの面積) : (Bの面積)＝2^2 : 5^2＝4 : 25

Aの面積が 24cm²であるので，24 : (Bの面積)＝4 : 25

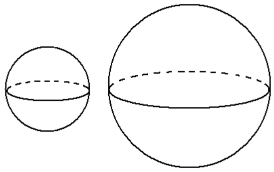
比で，内項の積は外項の積に等しいので，(B の面積)×4＝24×25

よって，(Bの面積)＝24×25÷4＝150(cm²)

【】相似比と表面積比

[問題](3 学期)

　右の図のような，2 つの球がある。2 つの球の半径は，2cm と 5cm である。小さい球の表面積を S，大きい球の表面積を S'とするとき，S ; S'を最も簡単な整数の比で求めよ。



[解答欄]

[解答]4：25

[解説]

(球の表面積)＝$4\pi\times$(半径)^{2}なので，

S＝$4\pi\times2^2$＝16π(cm^2)，S'＝$4\pi\times5^2$＝100π(cm^2)

よって，S ; S'＝16π ：100π＝4：25

一般に，相似な立体の相似比がa：bのとき，表面積比はa^2：b^2となる。

<Point>立体の相似比a：b → 表面積比a^2：b^2

[問題](2 学期期末)

　相似比が 2：7 である 2 つの相似な円柱の表面積の比を求めよ。

[解答欄]

[解答]4：49

[解説]

2 つの円柱の相似比が 2：7 のとき，表面積比は 2^2：7^2＝4：49 となる。

[問題](2 学期期末)

　球の半径を$\dfrac{1}{2}$倍にすると，表面積はもとの球の何倍になるか。

[解答欄]

[解答]$\dfrac{1}{4}$倍

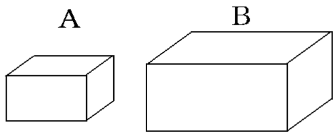
[解説]

立体の相似比a：b → 表面積比a^2：b^2なので，

球の半径を$\dfrac{1}{2}$倍にすると，表面積は$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$倍になる。

[問題](2 学期期末)

　右の図の立体 A と B は相似で，相似比が 3：5 である。Aの表面積が 180cm^2のときBの表面積を求めよ。



[解答欄]

[解答]500cm^2

[解説]

立体AとBは相似で，相似比が 3：5 なので，表面積比は 3^2：5^2＝9：25 となる。

よって，(A の表面積)：(B の表面積)＝9：25

Aの表面積は 180cm^2なので，180：(Bの表面積)＝9：25

比で，内項の積は外項の積に等しいので，

(B の表面積)×9＝180×25

よって，(Bの表面積)＝180×25÷9＝500(cm^2)

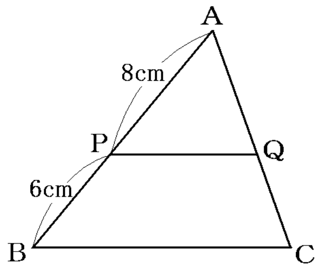
【】相似比と面積比②

[問題](2 学期期末)

右の図で，PQ // BC，AP＝8cm，PB＝6cm であるとき，次の各問いに答えよ。

(1) △ABC と△APQ の面積の比を求めよ。

(2) △APQ と台形 PBCQ の面積の比を求めよ。



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 49：16　(2) 16：33

[解説]

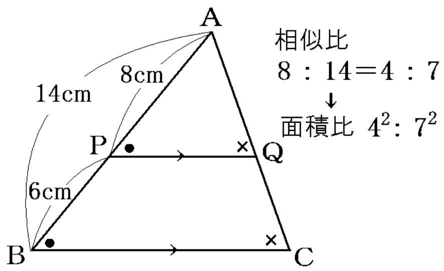
(1) PQ // BC なので，△ABC∽△APQ である。

△ABC と△APQ の相似比は，

AB：AP＝(8＋6)：8＝14：8＝7：4

面積比は相似比の 2 乗になるので，

(△ABCの面積)：(△APQの面積)＝7^2：4^2＝49：16



(2) (△ABC の面積)：(△APQ の面積)＝49：16 なので，(△ABC の面積)＝49a とすると，

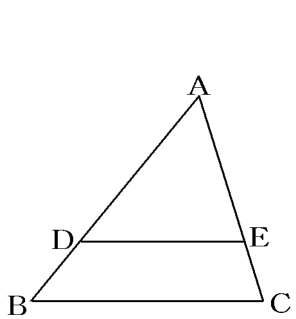
(△APQ の面積)＝16a となる。

(台形 PBCQ の面積)＝(△ABC の面積)－(△APQ の面積)＝49a－16a＝33a

よって，(△APQ の面積)：(台形 PBCQ の面積)＝16a：33a＝16：33

[問題](2 学期期末)

右の図のように，△ABC の辺 BC に平行な直線が辺 AB，AC とそれぞれ点 D，E で交わっており，AD：DB＝3：1 である。△ADEの面積が 81cm²のとき四角形DBCEの面積を求めよ。



[解答欄]

[解答]63cm²

[解説]

DE // BC なので，△ABC∽△ADE である。

AD : DB＝3 : 1 なので，△ABC と△ADE の相似比は，

AB : AD＝(3＋1) : 3＝4 : 3 である。

面積比は相似比の 2 乗になるので，

(△ABCの面積) : (△ADEの面積)＝4^2 : 3^2＝16 : 9

(△ADEの面積)＝81cm²なので，

(△ABC の面積) : 81＝16 : 9

比で，外項の積は内項の積に等しいので，

(△ABC の面積)×9＝81×16

よって，(△ABCの面積)＝81×16÷9＝144(cm²)

したがって，

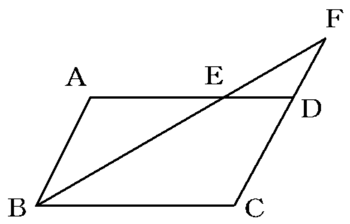
(四角形DBCEの面積)＝(△ABCの面積)－(△ADEの面積)＝144－81＝63(cm²)

[問題](2 学期期末)

右図の平行四辺形において，AD を 3 : 2 に分ける点を E とする。BE，CD を延長し，その交点を F とするとき，次の各問いに答えよ。

(1) △ABE と△DFE の面積比を求めよ。

(2) △DFE と台形 EBCD の面積比を求めよ。



[解答欄]

(1)	(2)

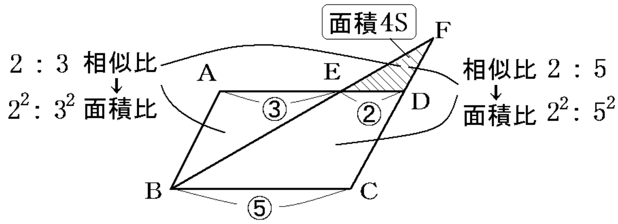
[解答](1) 9 : 4　(2) 4 : 21

[解説]

(1) AB // DF なので，△ABE∽△DFE である。AE と DE は対応する辺なので，2 つの三角形の相似比は，

AE : DE＝3 : 2 になる。したがって，

面積比は，3^2 : 2^2＝9 : 4 になる。



(2) ED // BC なので，△DFE∽△CFB である。

ED と BC は対応する辺なので，2 つの三角形の相似比は，

ED : BC＝2 : (2＋3)＝2 : 5 となる。

したがって，面積比は $2^2 : 5^2$＝4 : 25 となる。

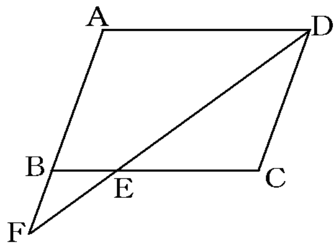
よって，△DFE の面積を 4S とすると，△CFB の面積は 25S で,

台形 EBCD の面積は，25S－4S＝21S となる。

したがって，△DFE と台形 EBCD の面積比は 4S : 21S＝4 : 21 となる。

[問題](2 学期期末)

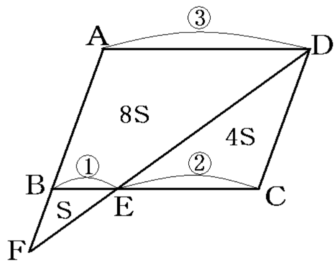
右の図の平行四辺形 ABCD で，辺 BC 上に点 E を，BE : EC＝1 : 2 となるようにとり，AB の延長と DE の延長との交点を F とする。平行四辺形 ABCD の面積が 72cm²のとき，△BFEの面積を求めよ。



[解答欄]

[解答]6cm²

[解説]



BE : EC＝1 : 2 で，AD＝BC＝BE＋EC なので,

BE : EC : AD＝1 : 2 : 3 である。

BE // AD なので，△BFE∽△AFD

相似比は，BE : AD＝1 : 3 なので,

(△BFEの面積) : (△AFDの面積)＝$1^2 : 3^2$＝1 : 9

よって，△BFE の面積をＳとすると,

(△AFD の面積)＝9Ｓ　したがって,

(四角形 ABED の面積)＝(△AFD の面積)－(△BFE の面積)＝9Ｓ－Ｓ＝8Ｓ・・・①

同様にして，△BFE∽△CDE で，相似比は 1 : 2 なので,

(△BFEの面積) : (△CDEの面積)＝$1^2 : 2^2$＝1 : 4

よって，(△CDE の面積)＝(△BFE の面積)×4＝Ｓ×4＝4Ｓ・・・②

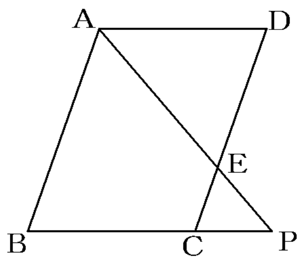
①，②より，(平行四辺形 ABCD の面積)＝8Ｓ＋4Ｓ＝12Ｓ

平行四辺形ABCDの面積が 72cm²なので，12Ｓ＝72

したがって，Ｓ＝72÷12＝6(cm²)

[問題](入試問題)

右図において，四角形 ABCD は平行四辺形である。△AED と△PEC の面積比が 9：4 のとき，平行四辺形 ABCD と台形 ABCE の面積比を求めよ。



(香川県)

[解答欄]

[解答]10：7

[解説]

AD // CP なので，△AED∽△PEC

面積比が 9：4 なので，相似比は$\sqrt{9}:\sqrt{4}$＝3：2

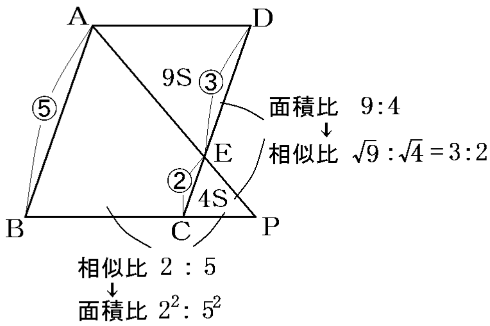
よって，DE：CE＝3：2

AB＝CD＝DE＋CE なので，

DE：CE：AB＝3：2：(3＋2)＝3：2：5

ここで，△PEC の面積を 4S とおく。

(S とおいてもよいが，分数で計算が少し面倒になる)



△AED：△PEC＝9：4 なので，△AED＝9S

EC // AB なので，△PEC∽△PAB

相似比はEC：AB＝2：5 なので，面積比は 2^2：5^2＝4：25

(△PEC の面積)＝4S なので，(△PAB の面積)＝25S

よって，(台形 ABCE の面積)＝25S－4S＝21S

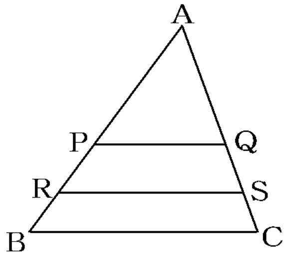
(平行四辺形 ABCD の面積)＝(△AED の面積)＋(台形 ABCE の面積)＝9S＋21S＝30S

以上より，(平行四辺形 ABCD の面積)：(台形 ABCE の面積)＝30S：21S＝10：7

[問題](入試問題)

右図のような△ABC において，PQ // RS // BC であり，△APQ，四角形 PRSQ，四角形 RBCS の面積がみな等しい。AP＝1 のとき，RB の長さを求めよ。

(巣鴨高)



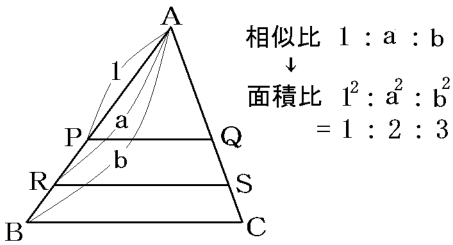
[解答欄]

[解答] $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

[解説]

右図のように AR＝a，AB＝b とすると，AP：AR：AB＝1：a：b

PQ // RS // BC なので，△APQ，△ARS，△ABC は互いに相似で，相似比は 1：a：b となる。



面積比は相似比の 2 乗になるので，

△APQ：△ARS：△ABC＝1^2：a^2：b^2 ･･･①

ところで，△APQ，四角形 PRSQ，四角形 RBCS の面積がみな等しいので，△APQ の面積を S とすると，△ARS＝△APQ＋四角形 PRSQ＝S＋S＝2S

△ABC＝△ARS＋四角形 RBCS＝2S＋S＝3S

よって，△APQ：△ARS：△ABC＝S：2S：3S＝1：2：3･･･②

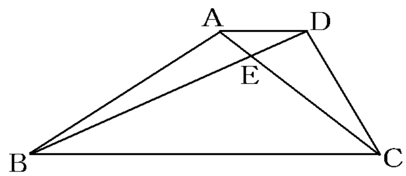
①，②より，1：a^2：b^2＝1：2：3　よって，a^2＝2，b^2＝3

a＞0，b＞0 なので，a＝$\sqrt{2}$，b＝$\sqrt{3}$　ゆえに，RB＝b－a＝$\sqrt{3}-\sqrt{2}$

【】相似比と面積比③

[問題](入試問題)

図のような AD // BC の台形 ABCD において，対角線 AC と BD の交点を E とする。DE : EB＝1 : 4 とし，△AED の面積を 5 とするとき，台形 ABCD の面積を求めよ。



(日本大豊山高)

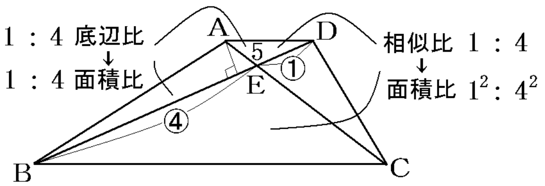
[解答欄]

[解答]125

[解説]

<Point> △AED∽△CEB　相似比 1 : 4→面積比 $1^2 : 4^2$

△AED と△ABE　高さ共通，底辺比 1 : 4→面積比 1 : 4



AD // BC なので，△AED∽△CEB で，相似比は，DE : EB＝1 : 4

面積比は相似比の 2 乗になるので，

(△AEDの面積) : (△CEBの面積)＝$1^2 : 4^2$＝1 : 16

(△AED の面積)＝5 なので，(△CEB の面積)＝5×16＝80･･･①

次に，△AED と△ABE の面積比を求める。

2 つの三角形の底辺をそれぞれ DE，BE とすると，高さは共通なので，面積比は底辺の比と同じになる。

したがって，(△AED の面積) : (△ABE の面積)＝DE : BE＝1 : 4

(△AED の面積)＝5 なので，(△ABE の面積)＝5×4＝20･･･②

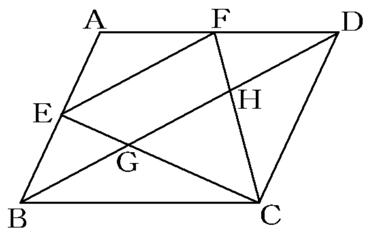
△AED と△DCE についても，まったく同様に考えて，

(△DCE の面積)＝5×4＝20･･･③

①，②，③より，(台形 ABCD の面積)＝(△AED の面積)＋(△CEB の面積)＋(△ABE の面積)＋(△DCE の面積)＝5＋80＋20＋20＝125

[問題](入試問題)

図で，四角形 ABCD は平行四辺形で，E，F はそれぞれ辺 AB，AD の中点である。BD と CE の交点を G，BD と CF の交点を H とするとき，四角形 EGHF の面積は，△ABD の面積の何倍か。



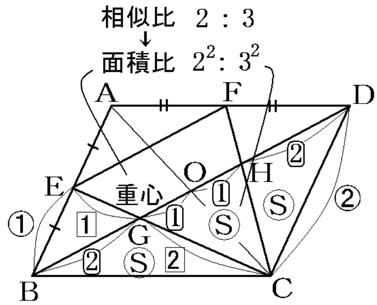
(愛知県)

[解答欄]

[解答] $\frac{5}{12}$ 倍

[解説]

A と C を結ぶ。△ABC で O は AC の中点，E は AB の中点なので，G は△ABC の重心になる。



したがって，BG：GO＝2：1

同様にして，DH：HO＝2：1

さらに，BO＝DO なので，BG＝GH＝HD となる。

△CBG，△CGH，△CHD の底辺をそれぞれ BG，GH，HD とすると，高さは共通になるので，この 3 つの三角形の面積は等しくなる。

△CGH の面積を S とすると，△CBD の面積は，S＋S＋S＝3S となる。

よって，(△ABD の面積)＝(△CBD の面積)＝3S･･･①

次に，四角形 EGHF の面積を S で表す。

E，F はそれぞれ AB，AD の中点なので，中点連結定理より EF // BD

GH // EF となるので，△CGH と△CEF は相似になる。

G は△ABC の重心なので，CG：GE＝2：1　よって，CG：CE＝2：(2＋1)＝2：3

したがって，△CGHと△CEFの相似比は 2：3 で，面積比は 2^2：3^2＝4：9

よって，(△CGH の面積)：(△CEF の面積)＝4：9

ゆえに，S：(△CEF の面積)＝4：9

比の内項の積は外項の積に等しいので，(△CEF の面積)×4＝S×9

(△CEF の面積)＝S×9÷4＝$\frac{9}{4}$S

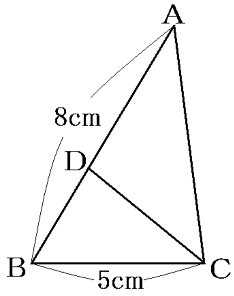
よって，(四角形 EGHF の面積)＝(△CEF の面積)－(△CGH の面積)＝$\frac{9}{4}$S－S＝$\frac{5}{4}$S･･･②

①，②より，(四角形 EGHF の面積)÷(△ABD の面積)＝$\frac{5}{4}$S ÷3S＝$\frac{5}{4}\times\frac{1}{3}$＝$\frac{5}{12}$(倍)

[問題](入試問題)

右の図の△ABC で，∠BCD＝∠CAD のとき，△ADC と△DBC の面積比を，最も簡単な整数の比で答えよ。

(駿台甲府高)

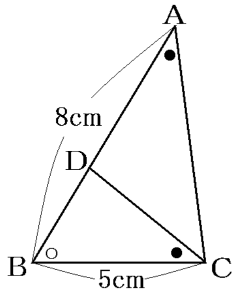


[解答欄]

[解答]39：25

[解説]

右図のように等しい角の印を記入すると相似な三角形の対応関係がつかみやすい。



△ABC∽△CBD

相似比　8：5

↓

面積比　8^2：5^2

△ABC と△CBD において，

∠B は共通で，仮定より∠CAB＝∠DCB なので，

2 組の角がそれぞれ等しくなり，△ABC∽△CBD

右図からわかるように，BA と BC は対応する辺なので，

△ABC と△CBD の相似比は，BA：BC＝8：5

面積比は相似比の 2 乗になるので，

(△ABCの面積)：(△CBDの面積)＝8^2：5^2＝64：25

(△ADC の面積)＝(△ABC の面積)－(△CBD の面積)なので，

(△ADC の面積)：(△CBD の面積)＝(64－25)：25＝39：25

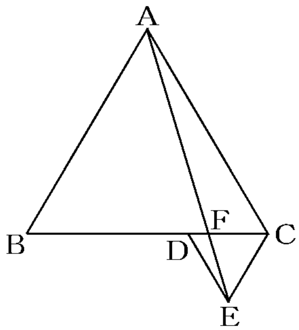
[問題](入試問題)

右の図のように, 1 辺 6cm の正三角形 ABC と 1 辺 2cm の正三角形 CDE がある。ただし，頂点 D は辺 BC 上にある。このとき，次の各問いに答えよ。

(京都府)

(1) 頂点 A，E を結ぶ線分と辺 BC との交点を F とするとき，DF : FC を最も簡単な整数の比で表せ。

(2) △ABC の面積は，△DEF の面積の何倍であるか答えよ。



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 1 : 3　(2) 36 倍

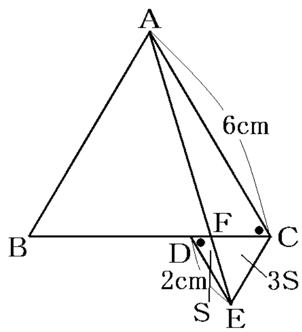
[解説]

(1) △ABC，△CDE は正三角形なので，

∠ACB＝∠CDE＝60°で錯角が等しいので，AC // DE

よって，DF : FC＝DE : AC＝2 : 6＝1 : 3

(2) <Point>最小の部分の面積を S とおく



△DEF の面積を S とする。

△DEF と△CEF で，それぞれの底辺を DF，FC とすると，高さは共通になるので，面積の比は底辺の比 DF : FC＝1 : 3 と等しくなる。

よって，(△CEF の面積)＝3S となる。

したがって，(△CDE の面積)＝S＋3S＝4S

次に，△CDE と△ABC の面積を比較する。

2 つの三角形は正三角形なので相似である。相似比は DE : AC＝2 : 6＝1 : 3

面積比は相似比の 2 乗になるので,

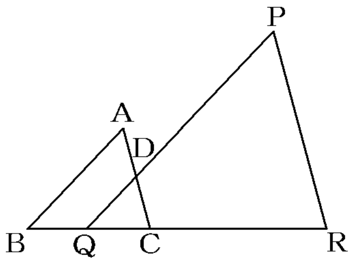
(△CDEの面積) : (△ABCの面積)＝1^2 : 3^2＝1 : 9

(△CDE の面積)＝4S なので，(△ABC の面積)＝4S×9＝36S

よって，(△ABC の面積)÷(△DEF の面積)＝36S÷S＝36(倍)

[問題](入試問題)

右の図で，△ABC∽△PQR であり，点 Q は辺 BC の中点で，点 R は辺 BC の延長上にある。また，点 D は辺 AC と辺 PQ との交点である。PQ＝2AB のとき，四角形 DCRP の面積は，四角形 ABQD の面積の何倍か。



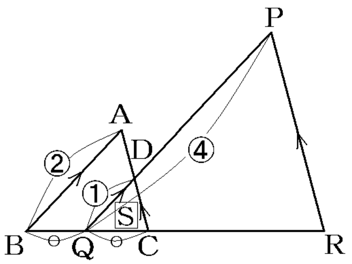
(香川県)

[解答欄]

[解答]5 倍

[解説]

<Point>最小の部分の面積を S とおく



△DQC の面積を S として，残りの部分の面積を S で表すことを考える。まず，四角形 ABQD について考える。

△ABC∽△PQR なので AB // DQ となり，△CDQ∽△CAB

Q が CB の中点なので相似比は CQ：CB＝1：2

面積比は相似比の 2 乗になるので，

(△CDQの面積)：(△CABの面積)＝1^2：2^2＝1：4

(△CDQ の面積)＝S なので，(△CAB の面積)＝4S

よって，(四角形 ABQD の面積)＝4S－S＝3S･･･①

次に，四角形 DCRP について考える。

△ABC∽△PQR なので DC // PR となり，△QCD∽△QRP

DQ：AB＝1：2，AB：PQ＝1：2 なので，DQ：PQ＝1：4

よって，△QCD と△QRP の相似比は 1：4

面積比は相似比の 2 乗になるので，

(△QCDの面積)：(△QRPの面積)＝1^2：4^2＝1：16

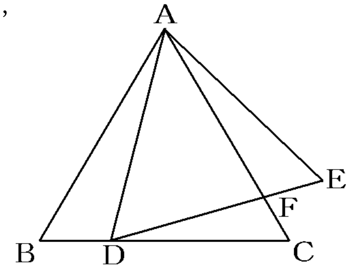
(△QCD の面積)＝S なので，(△QRP の面積)＝16S

よって，(四角形 DCRP の面積)＝(△QRP の面積)－(△QCD の面積)＝16S－S＝15S･･･②

①，②より，(四角形 DCRP の面積)÷(四角形 ABQD の面積)＝15S÷3S＝5(倍)

[問題](入試問題)

　右の図のように，正三角形 ABC の辺 BC 上に点 D をとり，AD を 1 辺とする正三角形 ADE をつくり，AC と DE の交点を F とする。BD : DC＝1 : 2 のとき，△DCF の面積は△ABC の面積の何倍か。(和歌山県)



[解答欄]

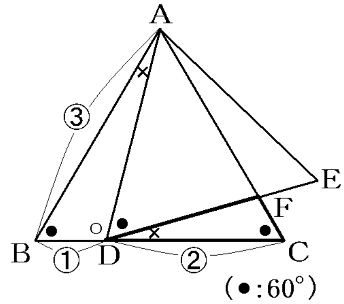
[解答] $\frac{4}{27}$ 倍

[解説]

△ABD と△DCF について調べてみる。

まず，等しい角を図の中に記入する。

60°を[●]で表すと，△ABC，△ADE が正三角形なので，右図のように 3 つの角を[●]で表す。



次に，∠CDF を[×]，∠ADB を[○]と表す。

∠CDF＋∠ADE＋∠ADB＝180°なので，

[×]＋[●]＋[○]＝180°

ところで，△ABD で，∠BAD＋[●]＋[○]＝180°なので，∠BAD＝[×] となる。

よって，△ABD と△DCF は 2 組の角がそれぞれ等しい([×]と[●])ので相似になる。

AB＝BC＝BD＋DC なので，AB : DC＝(1＋2) : 2＝3 : 2

AB と DC は対応する辺なので，△ABD と△DCF の相似比は 3 : 2

面積比は相似比の 2 乗になるので，

(△ABDの面積) : (△DCFの面積)＝3^2 : 2^2＝9 : 4

したがって，(△DCF の面積)＝4S とすると，(△ABD の面積)＝9S

次に，△ABD と△ABC の面積比を求める。

BD，BC をそれぞれの三角形の底辺とすると，高さは共通なので，底辺の長さの比と面積比は等しくなる。

よって，(△ABD の面積) : (△ABC の面積)＝BD : BC＝1 : (1＋2)＝1 : 3

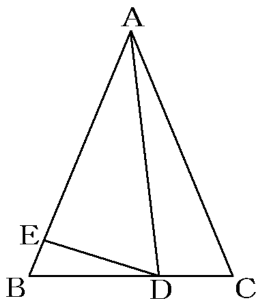
(△ABD の面積)＝9S なので，(△ABC の面積)＝9S×3＝27S

したがって，(△DCF の面積)÷(△ABC の面積)＝4S÷27S＝$\frac{4S}{27S}=\frac{4}{27}$(倍)

[問題](入試問題)

右の図で，△ABC は AB＝AC の二等辺三角形で，AB＝14cm，BC＝11cm である。また，点 D，E はそれぞれ辺 BC，AB 上にあり，∠ADE＝∠ACD である。次の(1)，(2)の問いに答えよ。

(千葉県)



(1) △DEB∽△ADC であることを証明せよ。

(2) △ADC の面積と△DEB の面積の比が 4：1 であるとき，△ABC の面積は△AED の面積の何倍か求めよ。

[解答欄]

(1)
(2)

[解答]

(1) △DEB と△ADC において，

△ABC は AB＝AC の二等辺三角形なので，

∠DBE＝∠ACD・・・①

∠DBE＝∠ACD＝a とおくと，仮定より∠ADE＝∠ACD＝a

∠ADC＋∠ADE＋∠BDE＝180°

∠ADC＋a＋∠BDE＝180°・・・②

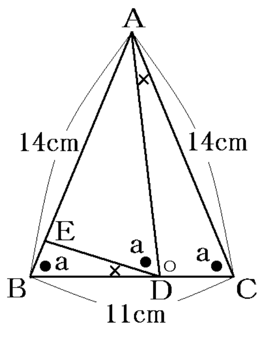
△ADC で，三角形の内角の和は 180°なので，

∠ADC＋∠ACD＋∠CAD＝180°

∠ADC＋a＋∠CAD＝180°・・・③

②，③より，∠BDE＝∠CAD・・・④

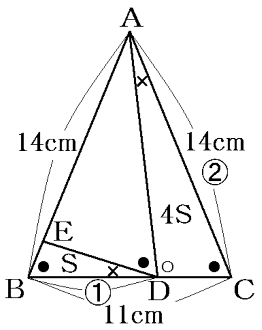
①，④より，2 組の角がそれぞれ等しいので，△DEB∽△ADC



(2) $\frac{11}{6}$倍

[解説]

(2) △ADC と△DEB の面積比が 4：1 であるので，



(△DEB の面積)＝S とおくと，(△ADC の面積)＝4S

面積比は相似比の 2 乗なので，

△ADC と△DEB の相似比は，$\sqrt{4}:\sqrt{1}$＝2：1 となる。

したがって，△ADC と△DEB の対応する辺の比は 2：1 なので，

AC：DB＝2：1

AC＝14cm なので，DB＝14÷2＝7(cm)

△ADC と△ABC の底辺をそれぞれ，CD，CB とすると，高さは共通なので，面積比は底辺の長さの比と等しくなる。

したがって，(△ADC の面積)：(△ABC の面積)＝CD：CB＝(11－7)：11＝4：11

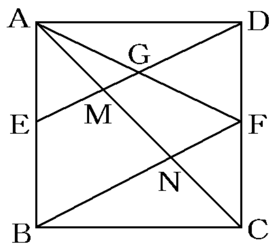
(△ADC の面積)＝4S なので，(△ABC の面積)＝11S

(△AED の面積)＝(△ABC の面積)－(△DEB の面積)－(△ADC の面積)＝11S－S－4S＝6S

よって，(△ABC の面積)÷(△AED の面積)＝11S÷6S＝$\dfrac{11S}{6S}=\dfrac{11}{6}$(倍)

[問題](増補 16)(後期中間)

右の図の正方形 ABCD で，辺 AB，CD の中点をそれぞれ E，F，AF と ED の交点を G，対角線 AC と ED，BF の交点をそれぞれ M，N とする。このとき，四角形 GMNF の面積は正方形 ABCD の面積の何倍になるか求めよ。

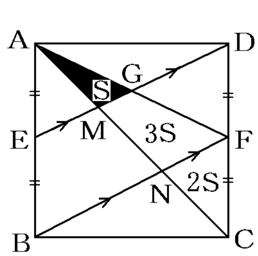


[解答欄]

[解答]$\dfrac{1}{8}$倍

[解説]

まず，ED // BF，AM＝MN＝NC になることに注目する。



最初に，ED // BF，AM＝MN＝NC になる理由を説明する。

四角形 BFDE は，EB // DF で EB＝DF で平行四辺形なので，

ED // BF になる。△AEM と△ABN は EM // BN なので相似で，

相似比 1：2 となり，AM＝MN となる。

また△ABN と△CFN も相似で相似比は 2 : 1 なので，AN : NC＝2 : 1

よって，AM＝MN＝NC になる。

次に，△AMG の面積を S として，四角形 GMNF の面積と正方形 ABCD の面積を S で表すことにする。<Point>最小の部分の面積を S とおく

MG // NF なので，△AMG と△ANF は相似で，相似比は AM : AN＝1 : 2 である。

相似な図形の面積比は相似比の 2 乗になるので，

(△AMGの面積) : (△ANFの面積)＝1 : 2^2＝1 : 4 なので，(△ANFの面積)＝4S

よって，(四角形 GMNF の面積)＝4S－S＝3S

次に，△FAC で AN : NC＝2 : 1 なので，

△FAN と△FNC は高さが共通で底辺の比が 2 : 1 なので，面積比は 2 : 1 になる。

△FAN の面積は 4S なので，△FNC の面積は 4S÷2＝2S となる。

以上より，(△FAC の面積)＝S＋3S＋2S＝6S

(△DAC の面積)＝(△FAC の面積)×2＝6S×2＝12S

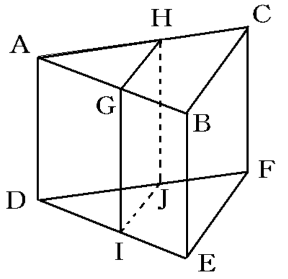
(正方形 ABCD の面積)＝(△DAC の面積)×2＝12S×2＝24S

よって，四角形 GMNF の面積 3S は，正方形の面積 24S の，$\frac{3S}{24S}=\frac{1}{8}$倍になる。

【】底面積比R

[問題](補充問題)

次の図の三角柱ABC－DEFの体積は 64cm^{3}である。AB，AC，DE，DF の中点をそれぞれ G，H，I，J とする。G，H，I，J を通る平面でこの三角柱を切ったときにできる四角柱 GBCH－IEFJ の体積を求めよ。



[解答欄]

[解答]48cm^3

[解説]

三角柱 ABC－DEF と三角柱 AGH－DIJ の高さは同じなので，2 つの三角柱の体積比は底面積の比と等しくなる。

I は DE の中点で，J は DF の中点なので，中点連結定理より，IJ // EF，IJ $=\dfrac{1}{2}$EF となる。したがって，△DIJ と△DEF は相似で，相似比は 1：2 になる。

相似比が 1：2 なので，面積比は $1^2:2^2=1:4$ になる。

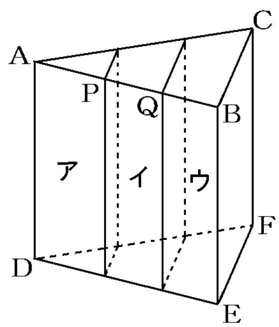
よって，2 つの三角柱の体積比は 1：4 となる。

三角柱ABC－DEFの体積は 64cm^{3}なので，三角柱AGH－DIJの体積は，64÷4＝16(cm^3)となる。よって，四角柱GBCH－IEFJの体積は 64－16＝48(cm^3)になる。

[問題](入試問題)

点 A，B，C，D，E，F を項点とする三角柱がある。図のように，辺 AB を 3 等分する点を，それぞれ，P，Q とし，点 P，Q を通って，側面 BEFC に平行な面で切って，3 つの角柱ア，イ，ウをつくる。このとき，角柱アの体積と角柱ウの体積の比を求めよ。

(佐賀県)



[解答欄]

[解答]1：5

[解説]

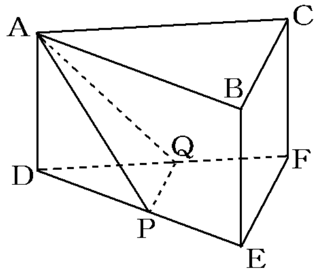
アの三角柱，ア＋イの三角柱，ア＋イ＋ウの三角柱の底面の三角形は，それぞれ相似で，相似比は 1：2：3 である。したがって，底面積の比は $1^2:2^2:3^2=1:4:9$ になる。

3 つの三角柱の高さは同じであるので，体積比も 1：4：9 になる。

(アの三角柱の体積)：(ア＋イの三角柱の体積)：(ア＋イ＋ウの三角柱の体積)＝1：4：9 なので，(アの体積)：(イの体積)：(ウの体積)＝1：(4－1)：(9－4)＝1：3：5 になる。

[問題](入試問題)

右の図は体積が 60cm^3 の三角柱である。辺DE，DFの中点をそれぞれ P，Q とするとき，三角すい ADPQ の体積を求めよ。(長野県)

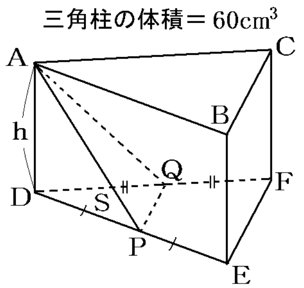


[解答欄]

[解答]5cm^3

[解説]

△DPQの面積を$S\text{cm}^2$，高さADを$h\text{cm}$とすると，



(三角すいADPQの体積)＝$\dfrac{1}{3}Sh(\text{cm}^3)$

P は DE の中点，Q は DF の中点なので，中点連結定理より，

PQ // EF，PQ＝$\dfrac{1}{2}$EF

よって，△DPQ と△DEF は相似で，相似比は 1：2 となる。

したがって，面積比は $1^2:2^2=1:4$ となる。

よって，(△DEFの面積)＝$4S(\text{cm}^3)$

ゆえに，(三角柱の体積)＝$4Sh(\text{cm}^3)$

(三角すい ADPQ の体積)：(三角柱の体積)＝$\dfrac{1}{3}Sh:4Sh=1:12$

(三角柱の体積)＝$60(\text{cm}^3)$なので，

(三角すいADPQの体積)＝60÷12＝$5(\text{cm}^3)$

【】相似比と体積比①

[問題](2 学期期末)

相似比が a : b の相似な 2 つの三角錐がある。これらの三角錐の体積の比を求めよ。

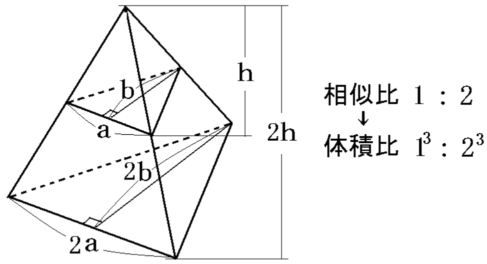
[解答欄]

[解答]$a^3 : b^3$

[解説]

<Point> 相似比a : b→体積比$a^3 : b^3$

たとえば，右図のように，2 つの相似な三角すいがあり，相似比は 1 : 2 であるとする。
小さい三角すいの底面の三角形の底辺を a，高さを b とすると，大きい三角すいの底面の三角形の底辺は 2a，高さは 2b となる。
また，小さい三角すいの頂点から底面におろした高さを h とすると，大きい三角すいの高さは 2h になる。



(小さい三角すいの体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times a\times b)\times h=\dfrac{1}{6}abh$

(大きい三角すいの体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times 2a\times 2b)\times 2h=\dfrac{8}{6}abh$

すなわち，大きい三角すいの体積は，小さい三角すいの$\dfrac{8}{6}abh\div\dfrac{1}{6}abh=8=2^3$(倍)になり，

体積比は，$1^3 : 2^3$となる。

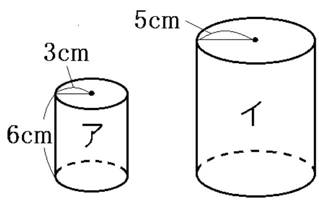
一般に，2 つの相似な立体があり，相似比がa : b なら，体積比は$a^3 : b^3$となる。

[問題](3 学期)

右の図のような相似である 2 つの円柱ア，イがある。
このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 円柱ア，イの表面積の比を求めよ。

(2) 円柱ア，イの体積の比を求めよ。



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 9：25　(2) 27：125

[解説]

(1) 相似比が$a:b$なら表面積比は$a^2:b^2$である。

アとイの相似比は半径に注目すると，3：5 である。

したがって，(アの表面積)：(イの表面積)＝$3^2:5^2$＝9：25 である。

(2) 相似比が$a:b$なら体積比は$a^3:b^3$である。

したがって，(アの体積)：(イの体積)＝$3^3:5^3$＝27：125 である。

[問題](2 学期期末)

　相似な 2 つの円柱 F，G があり，底面の円の半径は，それぞれ，2cm，3cm である。次の各問いに答えよ。

(1)　F と G の側面積の比を求めよ。

(2)　F と G の体積の比を求めよ。

(3)　F の高さが 4cm のとき，G の体積を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[解答](1) 4：9　(2) 8：27　(3) 54π cm^3

[解説]

(1) 相似比が$a:b$なら面積比は$a^2:b^2$である。側面積比は面積比に等しい。

F と G の相似比は半径に注目すると，2：3 である。

したがって，(Fの側面積)：(Gの側面積)＝$2^2:3^2$＝4：9 である。

(2) 相似比が$a:b$なら体積比は$a^3:b^3$である。

したがって，(Fの体積)：(Gの体積)＝$2^3:3^3$＝8：27 である。

(3) まず，F の体積を求める。円柱 F の底面の半径は 2cm，高さは 4cm なので，

(Fの底面の面積)＝$\pi r^2=\pi\times 2^2=4\pi$(cm^2)

したがって，(Fの体積)＝(底面積)×(高さ)＝4π(cm^2)×4(cm)＝16π(cm^3)

(2)より，(F の体積)：(G の体積)＝8：27 なので，16π：(G の体積)＝8：27

比の内項の積は外項の積に等しいので，(G の体積)×8＝$16\pi\times 27$

よって，(Gの体積)＝$16\pi\times 27\div 8=54\pi$(cm^3)

[問題](2 学期期末)

相似な 2 つの円柱P，Qがあり，相似比は 2：3 である。Qの体積が 135πcm³のとき，P の体積を求めよ。

[解答欄]

[解答]40πcm³

[解説]

相似比がa：bなら体積比はa^3：b^3である。

したがって，(Pの体積)：(Qの体積)＝2^3：3^3＝8：27 である。

Qの体積は 135πcm³なので，(Pの体積)：135π＝8：27

比の外項の積は内項の積に等しいので，(P の体積)×27＝135π×8

よって，(Pの体積)＝135π×8÷27＝40π(cm³)

[問題](後期中間)

2 つの相似な三角錐 P，Q があり，その相似比は 3：5 である。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) P と Q の表面積の比を求めよ。

(2) Pの体積が 54cm³のとき，Qの体積を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 9：25　(2) 250cm³

[解説]

(1) 相似比がa：bなら表面積比はa^2：b^2である。

P，Qの相似比は 3：5 なので，表面積の比は，3^2：5^2＝9：25 である。

(2) 相似比がa：bなら体積比はa^3：b^3である。

したがって，(Pの体積)：(Qの体積)＝3^3：5^3＝27：125 である。

Pの体積は 54cm³なので，54：(Qの体積)＝27：125

比の内項の積は外項の積に等しいので，(Q の体積)×27＝54×125

よって，(Qの体積)＝54×125÷27＝250(cm³)

[問題](2 学期期末)

表面積の比が 16：25 である相似な 2 つの正四角すいがある。この 2 つの正四角すいの①高さの比と，②体積の比をそれぞれ求めよ。

[解答欄]

①	②

[解答]① 4：5　② 64：125

[解説]

相似比が a：b なら表面積の比は a^2：b^2 である。

4^2＝16，5^2＝25 なので，表面積の比は 16：25＝4^2：5^2 である。

したがって，相似比は 4：5 で，高さの比は 4：5 となる。

相似比が a：b なら体積比は a^3：b^3 であるので，体積の比は 4^3：5^3＝64：125 である。

[問題](後期中間)

2 つの球の表面積の比が 4：9 であるとき，体積の比を求めよ。

[解答欄]

[解答]8：27

[解説]

相似比が a：b なら表面積の比は a^2：b^2 である。

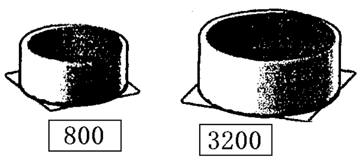
2^2＝4，3^2＝9 なので，2 つの球の相似比は 2：3 である。

相似比が a：b なら体積比は a^3：b^3 であるので，

2 つの球の体積比は，2^3：3^3＝8：27 である。

[問題](増補 16)(後期期末)

ある店では，直径 15cm で 800 円と，25cm で 3200 円の大小 2 つのチーズケーキを売っている。どちらを買った方が得か。そう考えた根拠も書け。ただし，2 つのチーズケーキは相似な円柱であるとする。



[解答欄]

[解答]

2 つのチーズケーキの相似比は，15：25＝3：5 である。

したがって，体積比は，3^3：5^3＝27：125 となる。

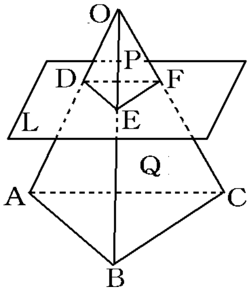
したがって, 大きいチーズケーキは小さいチーズケーキの 125÷27＝約 4.6(倍)の体積がある。値段については，大きいチーズケーキは小さいチーズケーキの 3200(円)÷800(円)＝4(倍)である。

したがって，大きいチーズケーキの方が得である。

【】相似比と体積比②：円錐・角すい

[問題](増補 16)(後期中間)

右の図のように，三角錐 OABC の底面 ABC に平行な平面 L が，辺 OA を 2：3 の比に分けている。このとき，平面 L で分けられた三角錐の 2 つの部分を P，Q とする。次の各問いに答えよ。



(1) △DEF の面積は△ABC の面積の何倍か。

(2) P と Q の体積の比を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $\frac{4}{25}$ 倍　(2) 8：117

[解説]

平面 L は底面 ABC と平行なので，三角錐 ODEF と三角錐 OABC は相似である。

平面 L が辺 OA を 2：3 の比に分けているので，OD：DA＝2：3 である。

したがって，OD：OA＝2：(2＋3)＝2：5 で，

三角錐 ODEF と三角錐 OABC の相似比は，2：5 になる。

よって，(△DEFの面積)：(△ABCの面積)＝2^2：5^2＝4：25 なり，

△DEF の面積は△ABC の面積の $\frac{4}{25}$ 倍となる。

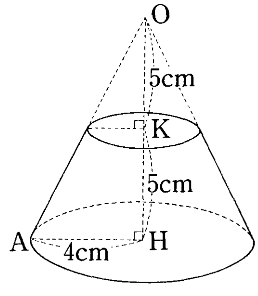
三角錐 ODEF と三角錐 OABC の相似比は，2：5 なので，

(三角錐ODEFの体積)：(三角錐OABCの体積)＝2^3：5^3＝8：125

よって，(P の体積)：(Q の体積)＝8：(125－8)＝8：117

[問題](2 学期期末)

右の図の立体は，底面の半径 HA が 4cm，高さ OH が 10cm の円錐を，OH の中点 K を通り底面に平行な平面で切り，小さな円錐を取り除いたものである。この立体の体積はいくらか。



[解答欄]

[解答]$\dfrac{140}{3}\pi$ cm^3

[解説]

(もとの円錐の体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\dfrac{1}{3}$×4×4×π×10＝$\dfrac{160\pi}{3}$(cm^3)

もとの円錐の高さは 10cm，切り取った円錐の高さは 5cm なので，

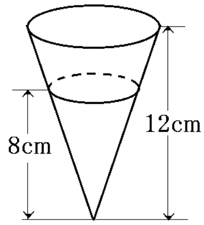
2 つの円錐の相似比は 2：1 になる。したがって，体積比は 2^3：1^3＝8：1 なので，

(切り取った円錐)＝$\dfrac{160\pi}{3}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{20\pi}{3}$(cm^3)

よって，(切り取った後の円錐台の体積)＝$\dfrac{160\pi}{3}-\dfrac{20\pi}{3}=\dfrac{140\pi}{3}$(cm^3)

[問題](後期中間)

右の図のように深さが 12cmの円錐形の容器に 72cm^{3}の水を入れると深さが 8cmになる。あと何cm^{3}の水を入れると容器がいっぱいになるか。

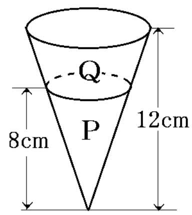


[解答欄]

[解答]171cm^3

[解説]

右図の小さい円錐(P の部分)と大きい円錐(P＋Q の部分)は相似であり，



相似比は，8：12＝2：3 である。

相似比がa：bなら体積比はa^3：b^3であるので，

(Pの体積)：(P＋Qの体積)＝2^3：3^3＝8：27 である。

(Pの体積)＝72cm^{3}なので，

72：(P＋Q の体積)＝8：27

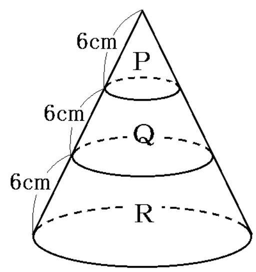
比の内項の積は外項の積に等しいので，(P＋Q の体積)×8＝72×27

よって，(P＋Qの体積)＝72×27÷8＝243(cm^3)

したがって，(Qの体積)＝(P＋Qの体積)－(Pの体積)＝243－72＝171(cm^3)

[問題](後期中間)

右の図のように，体積が 270 cm^{3}の円錐を底面に平行な平面で切り，3 つの部分に分けるとき，R の体積を求めよ。



[解答欄]

[解答]190cm^3

[解説]

P＋Q の部分の円錐と P＋Q＋R の部分の円錐は相似で，相似比は 12：18＝2：3 である。

したがって，体積比は，(P＋Qの部分)：(P＋Q＋Rの部分)＝2^3：3^3＝8：27 となる。

(P＋Q＋Rの部分)＝270 cm^{3}なので，(P＋Qの部分)：270＝8：27

比で，外項の積は内項の積に等しいので，(P＋Q の部分)×27＝270×8

よって，(P＋Qの部分)＝270×8÷27＝80(cm^3)

したがって，(Rの部分の体積)＝270－80＝190(cm^3)

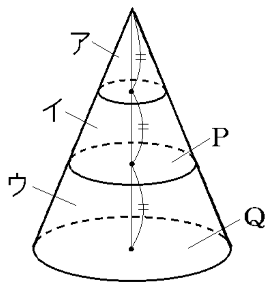
[問題](2 学期期末)

右の図のように円錐を底面に平行で高さを 3 等分する平面で切り，3 つの部分をそれぞれア，イ，ウとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 底面 P と Q の円周の長さの比を求めよ。

(2) 立体イとウの体積の比を求めよ。

(3) 立体イの体積が 126π cm^{3}のとき，もとの円錐の体積を求めよ。



[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[解答](1) 2：3　(2) 7：19　(3) 486π cm^3

[解説]

(1) アの円錐，ア＋イの円錐，ア＋イ＋ウの円錐は相似で，相似比は 1：2：3 である。

P はア＋イの円錐の底面で，Q はア＋イ＋ウの円錐の底面なので，円周の長さの比は，相似比と等しく，2：3 になる。

(2) アの円錐，ア＋イの円錐，ア＋イ＋ウの円錐の相似比は 1：2：3 であるので，

体積比は，(アの円錐)：(ア＋イの円錐)：(ア＋イ＋ウの円錐)＝1^3：2^3：3^3＝1：8：27

したがって,(アの体積)＝1 とすると,(ア＋イの体積)＝8,(ア＋イ＋ウの体積)＝27 である。

よって,(イの体積)＝8－1＝7,(ウの体積)＝27－8＝19 となり,

イとウの体積の比は 7：19 となる。

(3) (2)より,(イの体積):(ア＋イ＋ウの体積)＝7:27 である。イの体積は 126πcm^3なので,

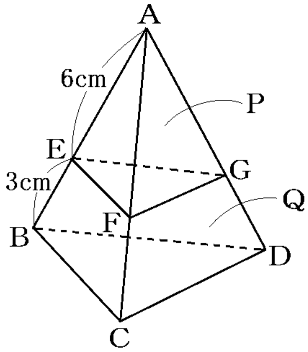
126π：(ア＋イ＋ウの体積)＝7：27

比で,内項の積は外項の積に等しいので,(ア＋イ＋ウの体積)×7＝126π×27

したがって,(ア＋イ＋ウの体積)＝126π×27÷7＝486π(cm^3)

[問題](2 学期期末)

右の図のように,三角錐を底面に平行な平面で切って,2 つの部分 P,Q に分けた。△EFG はそのときの切り口である。三角錐Pの体積が 24cm^3のとき,立体Qの体積を求めよ。



[解答欄]

[解答]57cm^3

[解説]

三角錐AEFG(三角錐P)と三角錐ABCDは相似で,相似比は 6:(6＋3)＝6:9＝2:3 である。

したがって,体積比は,(三角錐AEFG)：(三角錐ABCD)＝2^3：3^3＝8：27

(三角錐AEFG)＝24cm^3なので,24：(三角錐ABCD)＝8：27

比で,内項の積は外項の積に等しいので,(三角錐 ABCD)×8＝24×27

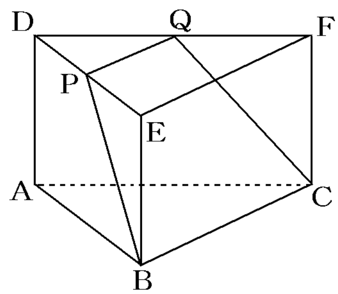
よって,(三角錐ABCD)＝24×27÷8＝81(cm^3)

したがって,(立体Qの体積)＝81－24＝57(cm^3)

【】相似比と体積比③：立体の切断

[問題](入試問題)

図のように底面が AB＝6cm，BC＝8cm，∠ABC＝90°の直角三角形で，高さが 4cm の三角柱がある。辺 DE, DF の中点をそれぞれ P，Q とする。平面 PBCQ で三角柱を切るとき，A を含む側の体積を求めよ。



(新田高)

[解答欄]

[解答]56cm³

[解説]

<Point> AD，BP，CQ の延長線→1 点で交わる。

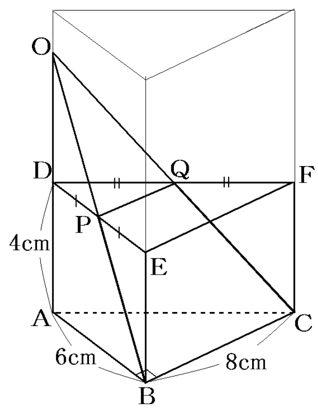
右図のように，この三角柱を上方向にのばした図形を考える。

同時に AD, BP, CQ を延長すると, 3 直線は 1 点 O で交わる。

DP // AB，DP：AB＝1：2 なので，

OD：OA＝1：2 となる。

したがって，OD＝DA＝4(cm)，OA＝4＋4＝8(cm)



まず，三角すい O−ABC の体積を求める。

(底面△ABCの面積)＝AB×BC÷2＝6×8÷2＝24(cm²)

(O−ABC の体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面△ABC の面積)×(高さ OA)

＝$\dfrac{1}{3}$×24×8＝64(cm³)

次に，三角すい O−DPQ の体積を求める。

三角すい O−DPQ と三角すい O−ABC は相似で，

相似比は OD：OA＝4：8＝1：2

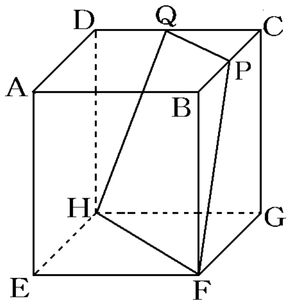
したがって，体積比は 1^3：2^3＝1：8

よって，(O−DPQの体積)＝(O−ABCの体積)×$\dfrac{1}{8}$＝64×$\dfrac{1}{8}$＝8(cm³)

よって，(O−ABCの体積)−(O−DPQの体積)＝64−8＝56(cm³)

[問題](入試問題)

右の図のように，1 辺 4cm の立方体において，辺 BC，CD 上にそれぞれ中点 P，Q をとり，4 点 P，Q，H，F を通る平面でこの直方体を切った。このとき，立体 PCQ－FGH の体積を求めよ。(長崎県)

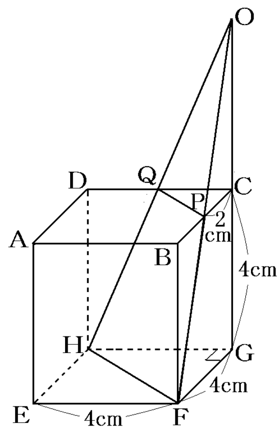


[解答欄]

[解答] $\dfrac{56}{3}$ cm³

[解説]

<Point> 右図のように，GC，FP，HQ を延長して考える。



OC：OG＝PC：FG＝2：4＝1：2

よって，OC＝CG＝4cm，OG＝8cm

(O－HFG の体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)

＝$\dfrac{1}{3}$×(4×4÷2)×8＝$\dfrac{64}{3}$ (cm³)

三角すい O－QPC と三角すい O－HFG は相似で,

相似比は，PC：FG＝1：2 なので，体積比は 1^3：2^3＝1：8

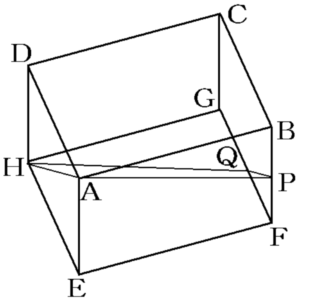
よって，(O－QPCの体積)＝(O－HFGの体積)×$\dfrac{1}{8}=\dfrac{64}{3}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{8}{3}$ (cm³)

よって，(立体 PCQ－FGH の体積)＝(O－HFG の体積)－(O－QPC の体積)

＝$\dfrac{64}{3}-\dfrac{8}{3}=\dfrac{56}{3}$ (cm³)

[問題](入試問題)

右の図は，AD＝AE＝8cm，AB＝12cm の直方体の容器 ABCD－EFGH に水がいっぱい入っていたものを傾けて，水面が四角形 APQH になるところまで水を流し出したものである。点 P，Q がそれぞれ辺 BF，FG の中点であるとき，容器に残っている水の体積を求めよ。



(高知県)

[解答欄]

[解答]224cm³

[解説]

<Point> EF，AP，HQ を延長して考える。

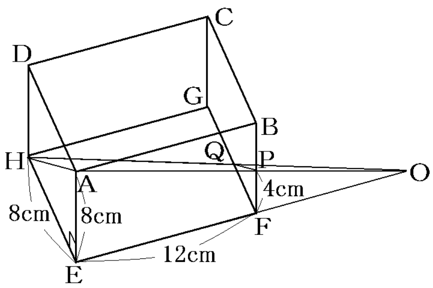
OF：OE＝PF：AE＝4：8＝1：2

よって，OF＝FE＝12cm，OE＝24cm

三角すい O－AHE の底面を△AHE とすると，

高さは OE＝24cm

(底面積)＝HE×AE÷2＝8×8÷2＝32(cm²)



(三角すいO－AHEの体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\dfrac{1}{3}$×32×24＝256(cm³)

三角すい O－PQF と三角すい O－AHE は相似で，相似比は PF：AE＝1：2 なので，

体積比は，1^3：2^3＝1：8

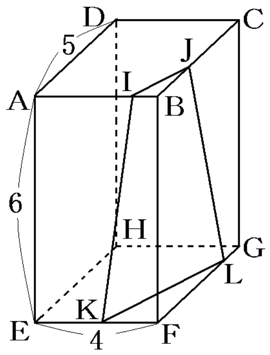
よって，(三角すいO－PQFの体積)＝256×$\dfrac{1}{8}$＝32(cm³)

ゆえに，(三角すいO－AHEの体積)－(三角すいO－PQFの体積)＝256－32＝224(cm³)

[問題](補充問題)

右の図のように辺の長さが与えられた直方体 ABCD－EFGH がある。いま，BI＝1，BJ＝2，FK＝2 となるように辺 AB，BC，EF 上に点 I，J，K をとり，3 点 I，J，K を通る平面と辺 FG との交点を L とする。このとき，次の問いに答えよ。

(郁文館高)



(1) 線分 FL の長さを求めよ。

(2) この直方体は，3 点 I，J，K を通る平面によって 2 つの立体に分けられる。このとき，小さいほうの立体の体積を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 4　(2) 14

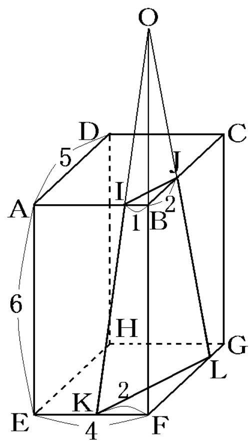
[解説]

(1) <Point> KI，FB，LJ を延長して考える。

IB // KF，IB : KF＝1 : 2 なので，OB : OF＝1 : 2

BJ // FL なので，BJ : FL＝OB : OF

よって，2 : FL＝1 : 2　ゆえに，FL＝2×2＝4



(2) OF＝6×2＝12，(O－KFL の体積)＝$\frac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)

＝$\frac{1}{3}$×($\frac{1}{2}$×KF×FL)×OF＝$\frac{1}{6}$×2×4×12＝16

三角すい O－IBJ と三角すい O－KFL は相似で，相似比は，

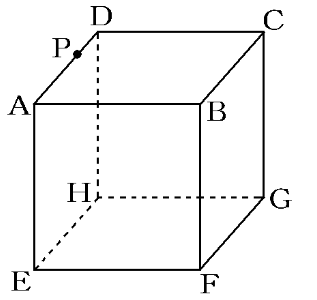
IB : KF＝1 : 2 なので，体積比は $1^3 : 2^3$＝1 : 8

よって，(O－IBJ の体積)＝(O－KFL の体積)×$\frac{1}{8}$＝16×$\frac{1}{8}$＝2

ゆえに，(O－KFL の体積)－(O－IBJ の体積)＝16－2＝14

[問題](入試問題)

右の図の立体 ABCD－EFGH は，1 辺の長さが a cm の立方体である。点 P は，辺 AD 上の点で，AP：PD＝2：1 とする。今，3 点 F，C，P を通る平面でこの立方体を切った。2 つに分けられた立体のうち，項点 B がある方の立体の体積を求めよ。(山形県)

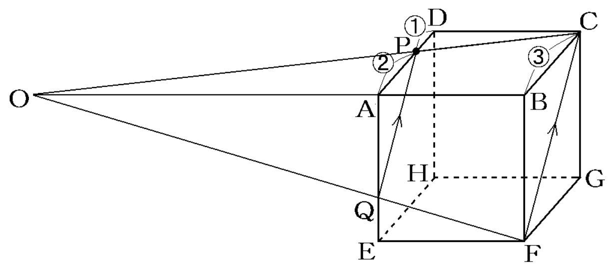


[解答欄]

[解答] $\dfrac{19}{54}a^3$ cm^3

[解説]

3 点 F，C，P を通る平面が AEHD の面と交わってできる直線は CF と平行になるので, 右図の PQ のようになる。したがって，この平面によって切り取られ頂点 B をふくむ立体は，右図の APQ－BCF になる。



CP，BA，FQ を延長すると，3 直線は 1 点で交わる。

AP：PD＝2：1，AD＝BC なので，AP：BC＝2：(2＋1)＝2：3

したがって，OA：OB＝AP：BC＝2：3，OA：AB＝2：1

AB＝ a cm なので，OA＝ $2a$ cm，OB＝ $3a$ cm

(O－BCFの体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積△BCF)×(高さOB)＝$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times a\times a\times 3a=\dfrac{1}{2}a^3$ (cm^3)

三角すい O－APQ と三角すい O－BCF は相似で，相似比は AP：BC＝2：3 なので,

体積比は $2^3:3^3=8:27$

よって，(O－APQの体積)＝(O－BCFの体積)×$\dfrac{8}{27}=\dfrac{1}{2}a^3\times\dfrac{8}{27}=\dfrac{4}{27}a^3$ (cm^3)

ゆえに，(O－BCF の体積)－(O－APQ の体積)＝$\dfrac{1}{2}a^3-\dfrac{4}{27}a^3=\dfrac{27}{54}a^3-\dfrac{8}{54}a^3$

$=\dfrac{19}{54}a^3$ (cm^3)

[印刷／他のPDFファイルについて]

※ このファイルは，FdData 中間期末数学 3 年(7,800 円)の一部を PDF 形式に変換したサンプルで，印刷はできないようになっています。製品版の FdData 中間期末数学 3 年は Word の文書ファイルで，印刷・編集を自由に行うことができます。

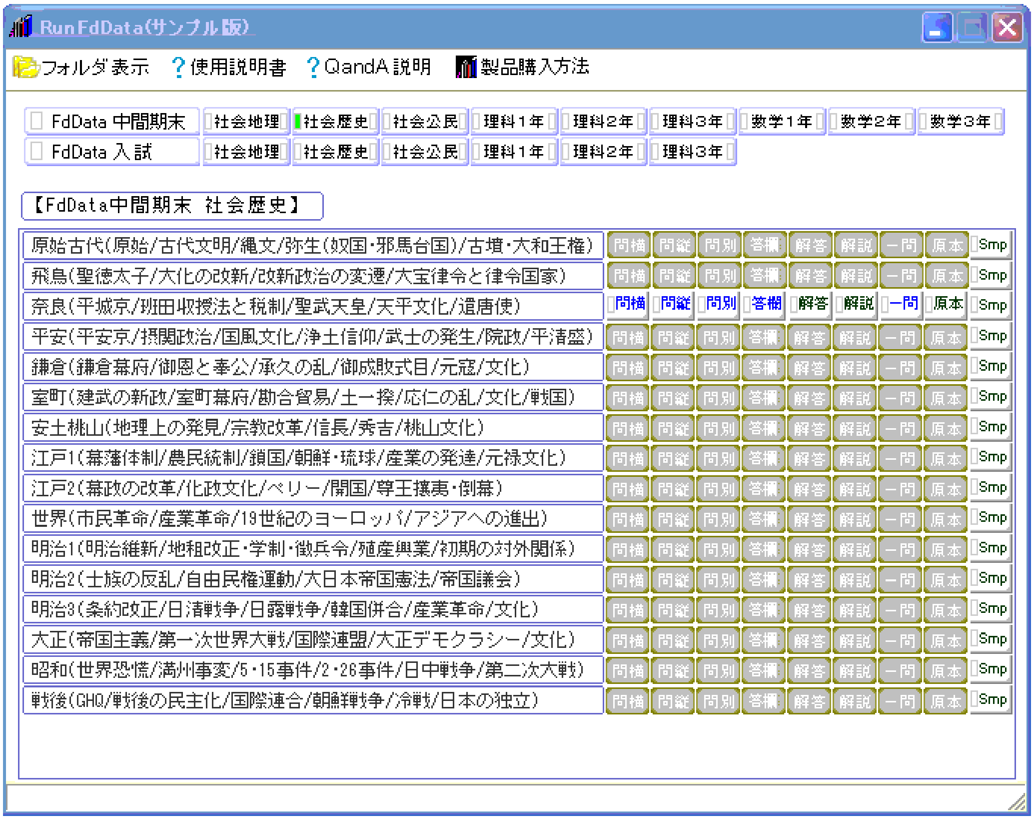
※FdData中間期末(社会･理科･数学)全分野のPDFファイル，および製品版の購入方法は http://www.fdtext.com/dat/ に掲載しております。

下図のような，[FdData 無料閲覧ソフト(RunFdData2)]を，Windows のデスクトップ上にインストールすれば， FdData 中間期末･FdData 入試の全 PDF ファイル(各教科約 1800 ページ以上)を自由に閲覧できます。次のリンクを左クリックするとインストールが開始されます。

RunFdData 【 http://fddata.deci.jp/lnk/instRunFdDataWDs.exe 】

※ダイアログが表示されたら，【実行】ボタンを左クリックしてください。インストール中，いくつかの警告が出ますが，[実行][許可する][次へ]等を選択します。

【イメージ画像】



【Fd教材開発】(092) 404-2266
http://www.fdtext.com/dat/