【】相似比と面積比

[相似比と面積比①]

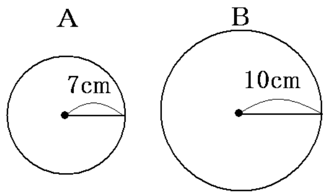
[問題](3 学期)

右の図の 2 つの円 A，B について，次の各問いに答えよ。

(1) A，B の円の相似比を求めよ。

(2) A，B の円の面積をそれぞれ求めよ。

(3) 面積の比を求めよ。



[解答欄]

(1)	(2)A	B
(3)		

[解答](1) 7：10　(2)A $49\pi\,\mathrm{cm}^2$　B $100\pi\,\mathrm{cm}^2$　(3) 49：100

[解説]

(1) 円 A，B の半径の比が 7：10 なので，相似比は 7：10 である。

(2) (A の円の面積)＝$\pi\times7^2=49\pi$ (cm^2)，

(B の円の面積)＝$\pi\times10^2=100\pi$ (cm^2)

(3) (A の円の面積)：(B の円の面積)＝$49\pi：100\pi$＝49：100

2 つの円の相似比が 7：10 のとき，面積比は $7^2：10^2$＝49：100 になる。

一般に，2 つの相似な図形の相似比が a：b のとき，面積比は $a^2：b^2$ となる。

<Point>
相似比 a：b → 面積比 $a^2：b^2$

[問題](2 学期期末)

相似比が 5：3 の相似な図形がある。これら 2 つの図形の面積の比を求めよ。

[解答欄]

[解答]25：9

[解説]

相似比が 5：3 のとき，面積比は $5^2：3^2$＝25：9 となる。

[問題](2 学期期末)

2 つの相似な図形で，相似比が 7：3 のとき，次の各問いに答えよ。

(1) 周の長さの比を求めよ。

(2) 面積比を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 7：3　(2) 49：9

[解説]

(1) 周の長さの比は相似比と等しくなるので，7：3

(2) 相似比が 7：3 のとき，面積比は $7^2：3^2＝49：9$ となる。

[問題](2 学期期末)

次の各問いに答えよ。

(1) 2 つの相似な三角形の相似比が 1：3 であるとき，面積比を求めよ。

(2) 相似比が 2：3 である 2 つの円 O，O'で，円 O の面積が 16πcm² のとき，円 O'の面積を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 1：9　(2) 36πcm²

[解説]

(1) 2 つの三角形の相似比が 1：3 であるので，面積比は $1^2：3^2＝1：9$ となる。

(2) 2 つの円 O，O'の相似比が 2：3 であるので，面積比は，

(円 O の面積)：(円 O'の面積)＝$2^2：3^2$＝4：9 となる。

円 O の面積が 16πcm² であるので，16π：(円 O'の面積)＝4：9

比で，内項の積は外項の積に等しいので，

(円 O'の面積)×4＝16π×9

よって，(円 O'の面積)＝16π×9÷4＝36π(cm²)

[問題](後期中間)

相似な 2 つの平面図形 A，B の相似比が 2：5 で，A の面積が 24cm² である。B の面積を求めよ。

[解答欄]

[解答]150cm²

[解説]

A，B の相似比が 2：5 であるので，面積比は，

(A の面積)：(B の面積)＝2^2：5^2＝4：25

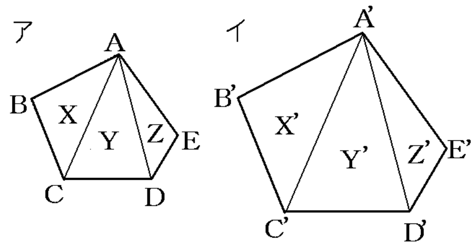
A の面積が 24cm² であるので，24：(B の面積)＝4：25

比で，内項の積は外項の積に等しいので，(B の面積)×4＝24×25

よって，(B の面積)＝24×25÷4＝150(cm²)

[問題](後期期末)

右の図のように，アとイの相似比が 1：k である 2 つの相似な五角形をそれぞれ 3 つの三角形に分け，各三角形の面積を X，Y，Z および，X’，Y’，Z’ とする。このとき，対応する三角形はそれぞれ相似で，相似比はすべて 1:k である。この相似な五角形の面積 S，S’ の比について説明した，次の文章中の①～⑤に適語を入れよ。



X’＝k^2X，Y’＝(　①　)，Z’＝(　②　)であるから，

X’＋Y’＋Z’＝ k^2X ＋(①)＋(②)

＝(　③　)×(X＋Y＋Z)

したがって，S’＝(　④　)

つまり，S：S’ ＝(　⑤　) が成り立つ。

[解答欄]

①	②	③
④	⑤	

[解答]① k^2Y　② k^2Z　③ k^2　④ k^2S　⑤ 1：k^2

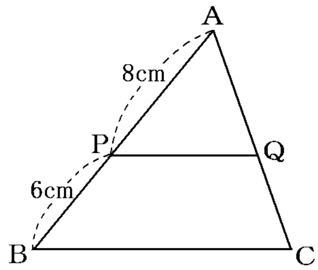
[相似比と面積比②]

[問題](2 学期期末)

右の図で，PQ // BC，AP＝8cm，PB＝6cm であるとき，次の各問いに答えよ。

(1) △ABC と△APQ の面積の比を求めよ。

(2) △APQ と台形 PBCQ の面積の比を求めよ。



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 49：16　(2) 16：33

[解説]

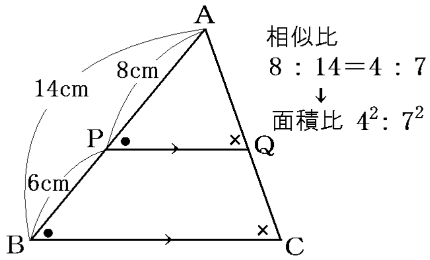
(1) PQ // BC なので，△ABC∽△APQ である。

△ABC と△APQ の相似比は，

AB：AP＝(8＋6)：8＝14：8＝7：4

面積比は相似比の 2 乗になるので，

(△ABC の面積)：(△APQ の面積)＝7^2：4^2＝49：16



(2) (△ABC の面積):(△APQ の面積)＝49:16 なので，

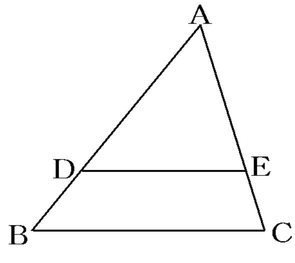
(△ABC の面積)＝49a とすると，(△APQ の面積)＝16a となる。

(台形 PBCQ の面積)＝(△ABC の面積)－(△APQ の面積)＝49a－16a＝33a

よって，(△APQ の面積)：(台形 PBCQ の面積)＝16a：33a＝16：33

[問題](2 学期期末)

右の図のように，△ABC の辺 BC に平行な直線が辺 AB，AC とそれぞれ点 D，E で交わっており，AD：DB＝3：1 である。△ADE の面積が 81cm^2 のとき四角形 DBCE の面積を求めよ。



[解答欄]

[解答]63cm^2

[解説]

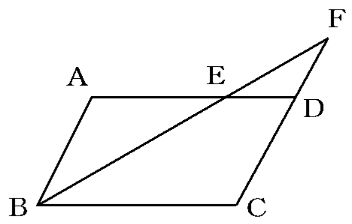
DE // BC なので，△ABC∽△ADE である。

AD：DB＝3：1 なので，△ABC と△ADE の相似比は，

AB：AD＝(3＋1)：3＝4：3 である。

面積比は相似比の 2 乗になるので，
(△ABC の面積)：(△ADE の面積)＝4^2：3^2＝16：9
(△ADE の面積)＝81cm^2 なので，
(△ABC の面積)：81＝16：9
比で，外項の積は内項の積に等しいので，
(△ABC の面積)×9＝81×16
よって，(△ABC の面積)＝81×16÷9＝144(cm^2)
したがって，
(四角形 DBCE の面積)＝(△ABC の面積)－(△ADE の面積)＝144－81＝63(cm^2)

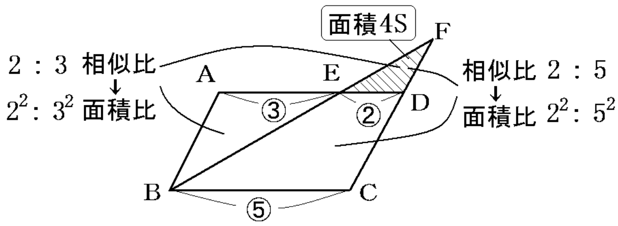
[問題](2 学期期末)
　右図の平行四辺形 ABCD において，AD を 3：2 に分ける点を E とする。BE，CD を延長し，その交点を F とするとき，次の各問いに答えよ。
(1) △ABE と△DFE の面積比を求めよ。
(2) △DFE と台形 EBCD の面積比を求めよ。



[解答欄]

(1)	(2)

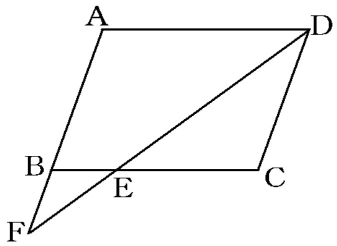
[解答](1) 9：4　(2) 4：21
[解説]
(1) AB // DF なので，
△ABE∽△DFE である。AE と DE は対応する辺なので，2 つの三角形の相似比は，
AE：DE＝3：2 になる。したがって，
面積比は，3^2：2^2＝9：4 になる。



(2) ED // BC なので，△DFE∽△CFB である。
ED と BC は対応する辺なので，2 つの三角形の相似比は，
ED：BC＝2：(2＋3)＝2：5 となる。
したがって，面積比は 2^2：5^2＝4：25 となる。
よって，△DFE の面積を 4S とすると，△CFB の面積は 25S で，
台形 EBCD の面積は，25S－4S＝21S となる。
したがって，△DFE と台形 EBCD の面積比は 4S：21S＝4：21 となる。

[問題](2 学期期末)

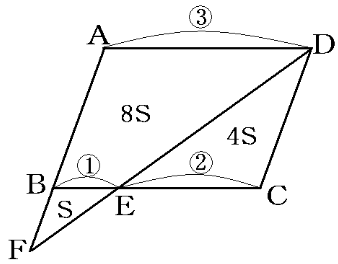
右の図の平行四辺形 ABCD で，辺 BC 上に点 E を，BE：EC＝1：2 となるようにとり，AB の延長と DE の延長との交点を F とする。平行四辺形 ABCD の面積が 72cm² のとき，△BFE の面積を求めよ。



[解答欄]

[解答]6cm²

[解説]



BE：EC＝1：2 で，AD＝BC＝BE＋EC なので，

BE：EC：AD＝1：2：3 である。

BE // AD なので，△BFE∽△AFD

相似比は，BE：AD＝1：3 なので，

(△BFE の面積)：(△AFD の面積)＝1^2：3^2＝1：9

よって，△BFE の面積を S とすると，

(△AFD の面積)＝9S　したがって，

(四角形 ABED の面積)＝(△AFD の面積)－(△BFE の面積)＝9S－S＝8S･･･①

同様にして，△BFE∽△CDE で，相似比は 1：2 なので，

(△BFE の面積)：(△CDE の面積)＝1^2：2^2＝1：4

よって，(△CDE の面積)＝(△BFE の面積)×4＝S×4＝4S･･･②

①，②より，(平行四辺形 ABCD の面積)＝8S＋4S＝12S

平行四辺形 ABCD の面積が 72cm² なので，12S＝72

したがって，S＝72÷12＝6(cm²)

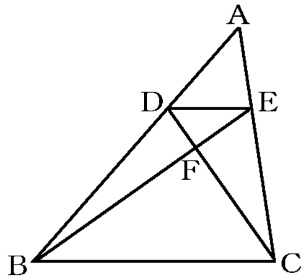
[面積比＋底辺比]

[問題](2 学期期末)

右の図で，DE // BC，AD：DB＝1：2 である。BE と CD の交点を F とするとき，次の各問いに答えよ。

(1) △EDF と△BCF の面積比を求めよ。

(2) △EDF の面積が 8cm² のとき，△ABC の面積を求めよ。



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 1：9　(2) 144cm²

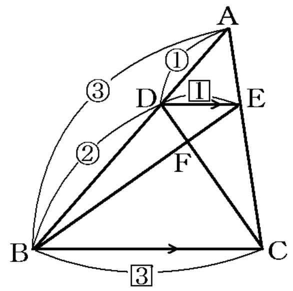
[解説]

(1) DE // BC なので，△EDF∽△BCF である。

DE // BC なので，DE : BC＝AD : AB＝1 : (1＋2)＝1 : 3

よって，△EDF と△BCF の相似比は 1 : 3 なので,

面積比は $1^2 : 3^2$＝1 : 9



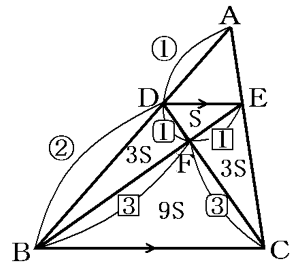
(2) △EDF の面積を S とおき, 各部分の面積を S を使って表す。

(1)より，(△BCF の面積)＝9S

△EDF と△ECF で，それぞれの底辺を DF，CF とすると高さは共通なので，△EDF と△ECF の面積比は底辺の比 1 : 3 と等しくなる。

△EDF の面積が S なので,

(△ECF の面積)＝3S となる。



△EDF と△BDF も同様に考えると,

(△BDF の面積)＝3S となる。

次に，△EAD と△EBD で，それぞれの底辺を AD，BD とすると高さは共通なので,

△EAD と△EBD の面積比は底辺の比 1 : 2 と等しくなる。

△EBD の面積は，S＋3S＝4S なので,

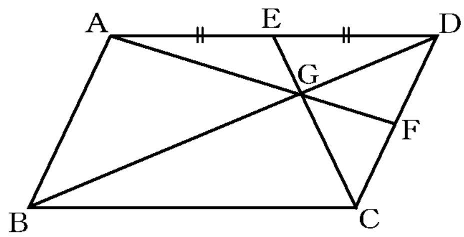
(△EAD の面積)＝4S÷2＝2S となる。

以上より，(△ABC の面積)＝2S＋S＋3S＋3S＋9S＝18S となる。

S＝8cm² なので，18S＝18×8＝144(cm²)

[問題](3 学期)

右の図は平行四辺形 ABCD で辺 AD の中点を E とする。線分 EC と対角線 BD との交点を G とし，A から点 G を通る直線を引き, 辺 CD との交点を F とする。このとき，平行四辺形 ABCD の面積は△GCF の面積の何倍か。

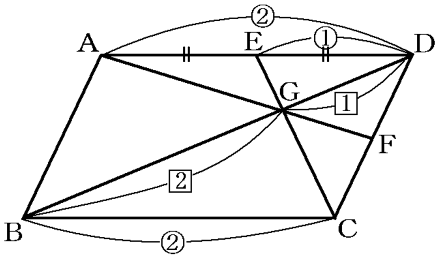


[解答欄]

[解答]12 倍

[解説]

ED // BC なので，△GDE∽△GBC である。



BC＝AD＝2DE なので，

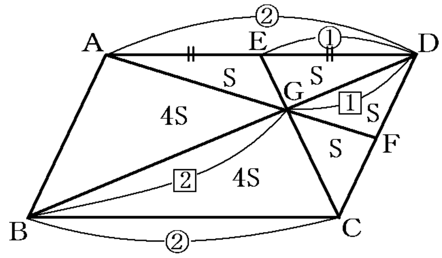
△GDE と△GBC の相似比は 1：2

したがって，GD：GB＝1：2

次に，AB // CD なので，△GFD∽△GAB で，

相似比は 1：2

よって，DF＝$\dfrac{1}{2}$AB＝$\dfrac{1}{2}$DC で，F は CD の中点になる。



次に，△GCF の面積を S とおいて，各部分の面積を S を使って表していく。△GCF と△GDF で，CF と DF をそれぞれの底辺とすると，F は CD の中点なので，底辺の長さが等しくなる。高さは共通なので，この 2 つの三角形の面積は等しくなる。

よって，(△GDF の面積)＝S

次に，△DEG と△DCG で，EG と CG をそれぞれの底辺とすると，高さは共通なので，底辺の比が面積の比と等しくなる。EG：CG＝1：2 なので，△DEG と DCG の面積比は 1：2 となる。(△DCG の面積)＝S＋S＝2S なので，(△DEG の面積)＝2S÷2＝S

次に，△DEG と△AEG で，AE＝DE なので，

(△AEG の面積)＝(△DEG の面積)＝S

次に，△GBA∽△GDF で，相似比が 2：1 なので，面積比は 2^2：1＝4：1 になる。

よって，(△GBA の面積)＝4S

次に，△BCG∽△DEG で，相似比が 2：1 なので，面積比は 2^2：1＝4：1 になる。

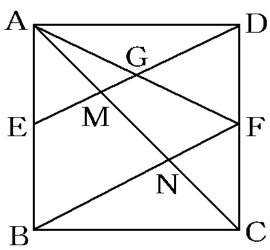
よって，(△BCG の面積)＝4S

以上より，(平行四辺形 ABCD の面積)＝S＋S＋S＋S＋4S＋4S＝12S

よって，平行四辺形 ABCD の面積は△GCF の面積の 12 倍になる。

[問題](後期中間)

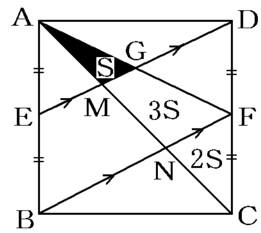
右の図の正方形 ABCD で，辺 AB，CD の中点をそれぞれ E，F，AF と ED の交点を G，対角線 AC と ED，BF の交点をそれぞれ M，N とする。このとき，四角形 GMNF の面積は正方形 ABCD の面積の何倍になるか求めよ。



[解答欄]

[解答]$\dfrac{1}{8}$倍

[解説]



まず，ED // BF，AM＝MN＝NC になることに注目する。

最初に，ED // BF，AM＝MN＝NC になる理由を説明する。

四角形 BFDE は，EB // DF で EB＝DF で平行四辺形なので，

ED // BF になる。△AEM と△ABN は EM // BN なので相似で，相似比 1：2 となり，AM＝MN となる。

また△ABN と△CFN も相似で相似比は 2：1 なので，AN：NC＝2：1

よって，AM＝MN＝NC になる。

次に，△AMG の面積を S として，四角形 GMNF の面積と正方形 ABCD の面積を S で表すことにする。<Point>最小の部分の面積を S とおく

MG // NF なので，△AMG と△ANF は相似で，相似比は AM：AN＝1：2 である。

相似な図形の面積比は相似比の 2 乗になるので，

(△AMG の面積)：(△ANF の面積)＝1：2^2＝1：4 なので，(△ANF の面積)＝4S

よって，(四角形 GMNF の面積)＝4S－S＝3S

次に，△FAC で AN：NC＝2：1 なので，

△FAN と△FNC は高さが共通で底辺の比が 2：1 なので，面積比は 2：1 になる。

△FAN の面積は 4S なので，△FNC の面積は 4S÷2＝2S となる。

以上より，(△FAC の面積)＝S＋3S＋2S＝6S

(△DAC の面積)＝(△FAC の面積)×2＝6S×2＝12S

(正方形 ABCD の面積)＝(△DAC の面積)×2＝12S×2＝24S

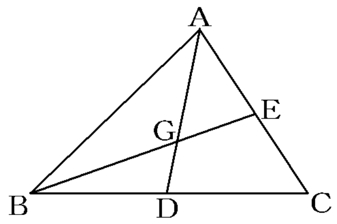
よって，四角形 GMNF の面積 3S は，正方形の面積 24S の，$\dfrac{3S}{24S}=\dfrac{1}{8}$倍になる。

【】重心と面積(発展学習)

[問題](補充問題)

右の図において，点 G は△ABC の 2 つの中線 AD，BE の交点である。△ABC の面積が 72cm² であるとき，△GBD の面積を求めよ。

(福島県)



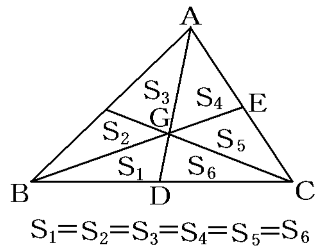
[解答欄]

[解答]12 cm²

[解説]

右図のように，三角形の重心を通る 3 つの中線で分けられる 6 つの部分の面積はすべて等しくなる。

したがって，1 個分の面積は，72÷6＝12(cm²)になる。



このことを右下の図で説明する。

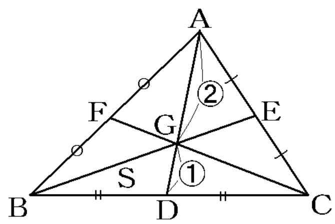
G は△ABC の重心なので，D，E，F は各辺の中点になる。

△GBD と△GDC で，BD，DC をそれぞれの底辺とすると，高さは共通になるので，2 つの三角形は面積が等しくなる。

よって，(△GDC の面積)＝S

次に，△GBD と△GAB の面積について考える。

G は△ABC の重心なので，AG：GD＝2：1



△GBD と△GAB で，DG，GA をそれぞれの底辺とすると，高さは共通になるので，2 つの三角形の面積は底辺の比と等しく 1：2 になる。

したがって，(△GAB の面積)＝2S

F は AB の中点なので，△GAB は GF によって面積が二等分される。

よって，(△GBF の面積)＝(△GAF の面積)＝S となる。

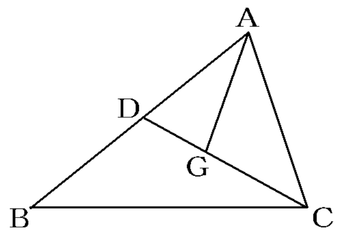
同様にして，(△GAC の面積)＝2S で，(△GCE の面積)＝(△GAE の面積)＝S となる。

以上より，6 つの三角形の面積はすべて等しくなる。

[問題](補充問題)

右の図で，点 G は△ABC の重心である。また，直線 CG と辺 AB の交点を D とする。△ABC の面積が 8cm² のとき，△ADG の面積を求めよ。

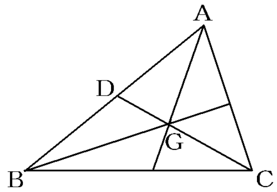
(佐賀県)



[解答欄]

[解答] $\frac{4}{3}$ cm²

[解説]

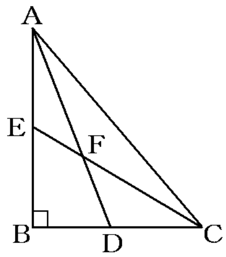


Gは△ABC の重心なので，

(△ADG の面積)＝(△ABC の面積)÷6＝8÷6＝$\frac{4}{3}$ (cm²)

[問題](後期期末)

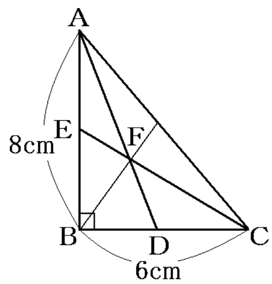
右の図のように，∠B＝90°，AB＝8cm，BC＝6cm の三角形 ABC がある。中線 AD，CE の交点を F とするとき，四角形 BDFE の面積を求めよ。



[解答欄]

[解答]8cm²

[解説]



(△ABC の面積)＝$\frac{1}{2}$ ×6×8＝24(cm²)

中線 AD，CE の交点 F は重心になるので，

右図のように, △ABC を 6 つの部分に分ける三角形の面積はすべて等しく，その 1 つ分の面積は，24÷6＝4(cm²)である。

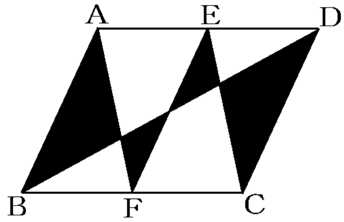
四角形 BDFE はこの三角形 2 個よりなるので，

面積は，4×2＝8(cm²)である。

[問題](補充問題)

右の図で，四角形 ABCD は平行四辺形で，E，F はそれぞれ辺 AD，BC の中点である。図の黒い部分の面積の和は，平行四辺形 ABCD の面積の何倍か。

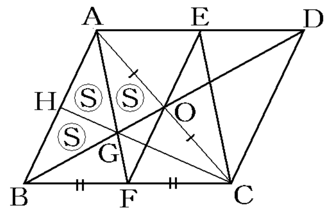
(愛知県)



[解答欄]

[解答] $\frac{5}{12}$倍

[解説]



右図の△ABC で，O は AC の中点，F は BC の中点なので，
G は△ABC の重心になる。

△AGO の面積を S とすると，△AGH，△BGH，△BGF，△CGF，△CGO の面積はすべて S となる。

したがって，(△ABC の面積)＝S×6＝6S

(平行四辺形 ABCD の面積)＝6S×2＝12S となる。

次に，△OGF の面積を求める。

△OAG と△OGF で，AG，GF をそれぞれの底辺とすると，高さは共通になるので，面積比は底辺の比と等しくなる。G は△ABC の重心なので，AG：GF＝2：1

したがって，(△OAG の面積)：(△OGF の面積)＝2：1

(△OAG の面積)＝S なので，(△OGF の面積)＝$\frac{1}{2}$S

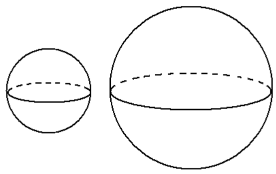
よって，(黒い部分の面積)＝(△ABG＋△OGF)×2＝(2S＋$\frac{1}{2}$S)×2＝5S

ゆえに，(黒い部分の面積)÷(平行四辺形 ABCD の面積)＝5S÷12S＝$\frac{5}{12}$(倍)

【】相似比と表面積比

[問題](3 学期)

右の図のような，2 つの球がある。2 つの球の半径は，2cm と 5cm である。小さい球の表面積を S，大きい球の表面積を S'とするとき，S ; S'を最も簡単な整数の比で求めよ。



[解答欄]

[解答]4：25

[解説]

(球の表面積)＝$4\pi\times$(半径)^2 なので，

S＝$4\pi\times2^2$＝16π(cm^2)，S'＝$4\pi\times5^2$＝100π(cm^2)

よって，S ; S'＝16π ：100π＝4：25

一般に，相似な立体の相似比が a：b のとき，表面積比は a^2：b^2 となる。

<Point>

立体の相似比 a：b → 表面積比 a^2：b^2

[問題](2 学期期末)

相似比が 2：7 である 2 つの相似な円柱の表面積の比を求めよ。

[解答欄]

[解答]4：49

[解説]

2 つの円柱の相似比が 2：7 のとき，表面積比は 2^2：7^2＝4：49 となる。

[問題](2 学期期末)

球の半径を $\frac{1}{2}$ 倍にすると，表面積はもとの球の何倍になるか。

[解答欄]

[解答]$\frac{1}{4}$ 倍

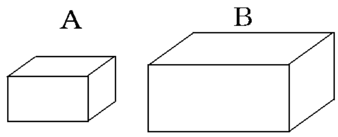
[解説]

立体の相似比 a：b → 表面積比 a^2：b^2 なので，

球の半径を$\frac{1}{2}$倍にすると，表面積は$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$倍になる。

[問題](2 学期期末)

　右の図の立体 A と B は相似で，相似比が 3：5 である。
A の表面積が 180cm² のとき B の表面積を求めよ。



[解答欄]

[解答]500cm²

[解説]

立体 A と B は相似で，相似比が 3：5 なので，表面積比は 3^2：5^2＝9：25 となる。

よって，(A の表面積)：(B の表面積)＝9：25

A の表面積は 180cm² なので，180：(B の表面積)＝9：25

比で，内項の積は外項の積に等しいので，

(B の表面積)×9＝180×25

よって，(B の表面積)＝180×25÷9＝500(cm²)

【】相似比と体積比

[相似比と体積比①]

[問題](2 学期期末)

相似比が a：b の相似な 2 つの三角錐がある。これらの三角錐の体積の比を求めよ。

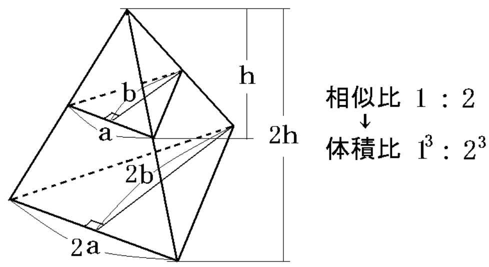
[解答欄]

[解答]$a^3:b^3$

[解説]

<Point> 相似比 a：b→体積比 $a^3:b^3$

たとえば，右図のように，2 つの相似な三角錐があり，相似比は 1：2 であるとする。



小さい三角錐の底面の三角形の底辺を a，高さを b とすると，大きい三角錐の底面の三角形の底辺は 2a，高さは 2b となる。

また，小さい三角錐の頂点から底面におろした高さを h とすると，大きい三角錐の高さは 2h になる。

(小さい三角錐の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times a\times b\right)\times h=\dfrac{1}{6}abh$

(大きい三角錐の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times 2a\times 2b\right)\times 2h=\dfrac{8}{6}abh$

すなわち，大きい三角錐の体積は，小さい三角錐の$\dfrac{8}{6}abh\div\dfrac{1}{6}abh=8=2^3$(倍)になり，体積比は，$1^3:2^3$となる。

一般に，2 つの相似な立体があり，相似比が a：b なら，体積比は $a^3:b^3$ となる。

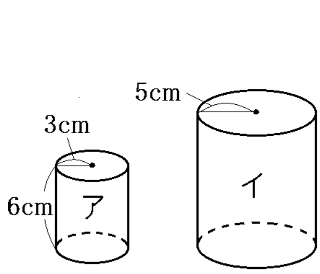
[問題](3 学期)

右の図のような相似である 2 つの円柱ア，イがある。

このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 円柱ア，イの表面積の比を求めよ。

(2) 円柱ア，イの体積の比を求めよ。



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 9：25　(2) 27：125

[解説]

(1) 相似比が a：b なら表面積比は a^2：b^2 である。

アとイの相似比は半径に注目すると，3：5 である。

したがって，(アの表面積)：(イの表面積)＝3^2：5^2＝9：25 である。

(2) 相似比が a：b なら体積比は a^3：b^3 である。

したがって，(アの体積)：(イの体積)＝3^3：5^3＝27：125 である。

[問題](2 学期期末)

相似な 2 つの円柱 F，G があり，底面の円の半径は，それぞれ，2cm，3cm である。次の各問いに答えよ。

(1) F と G の側面積の比を求めよ。

(2) F と G の体積の比を求めよ。

(3) F の高さが 4cm のとき，G の体積を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[解答](1) 4：9　(2) 8：27　(3) 54πcm^3

[解説]

(1) 相似比が a：b なら面積比は a^2：b^2 である。側面積比は面積比に等しい。

F と G の相似比は半径に注目すると，2：3 である。

したがって，(F の側面積)：(G の側面積)＝2^2：3^2＝4：9 である。

(2) 相似比が a：b なら体積比は a^3：b^3 である。

したがって，(F の体積)：(G の体積)＝2^3：3^3＝8：27 である。

(3) まず，F の体積を求める。円柱 F の底面の半径は 2cm，高さは 4cm なので，

(F の底面の面積)＝πr^2＝$\pi\times 2^2$＝4π(cm^2)

したがって，(F の体積)＝(底面積)×(高さ)＝4π(cm^2)×4(cm)＝16π(cm^3)

(2)より，(F の体積)：(G の体積)＝8：27 なので，16π：(G の体積)＝8：27

比の内項の積は外項の積に等しいので，(G の体積)×8＝$16\pi\times 27$

よって，(G の体積)＝$16\pi\times 27\div 8$＝54π(cm^3)

[問題](2 学期期末)

相似な 2 つの円柱 P，Q があり，相似比は 2：3 である。Q の体積が 135πcm^{3}のとき，P の体積を求めよ。

[解答欄]

[解答]40π cm^3

[解説]

相似比が a：b なら体積比は a^3：b^3 である。

したがって，(P の体積)：(Q の体積)＝2^3：3^3＝8：27 である。

Q の体積は 135π cm^3 なので，(P の体積)：135π＝8：27

比の外項の積は内項の積に等しいので，(P の体積)×27＝135π×8

よって，(P の体積)＝135π×8÷27＝40π(cm^3)

[問題](後期中間)

2 つの相似な三角錐 P，Q があり，その相似比は 3：5 である。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) P と Q の表面積の比を求めよ。

(2) P の体積が 54cm^3 のとき，Q の体積を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 9：25　(2) 250cm^3

[解説]

(1) 相似比が a：b なら表面積比は a^2：b^2 である。

P，Q の相似比は 3：5 なので，表面積の比は，3^2：5^2＝9：25 である。

(2) 相似比が a：b なら体積比は a^3：b^3 である。

したがって，(P の体積)：(Q の体積)＝3^3：5^3＝27：125 である。

P の体積は 54cm^3 なので，54：(Q の体積)＝27：125

比の内項の積は外項の積に等しいので，(Q の体積)×27＝54×125

よって，(Q の体積)＝54×125÷27＝250(cm^3)

[問題](2 学期期末)

表面積の比が 16：25 である相似な 2 つの正四角錐がある。この 2 つの正四角錐の①高さの比と，②体積の比をそれぞれ求めよ。

[解答欄]

①	②

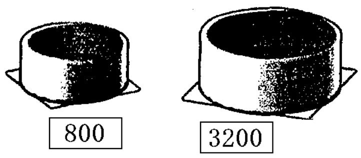
[解答]① 4：5　② 64：125

[解説]
相似比が a : b なら表面積の比は $a^2 : b^2$ である。
$4^2=16$, $5^2=25$ なので，表面積の比は $16 : 25=4^2 : 5^2$ である。
したがって，相似比は 4 : 5 で，高さの比は 4 : 5 となる。
相似比が a : b なら体積比は $a^3 : b^3$ であるので，体積の比は $4^3 : 5^3=64 : 125$ である。

[問題](後期中間)
2 つの球の表面積の比が 4 : 9 であるとき，体積の比を求めよ。
[解答欄]

[解答]8 : 27
[解説]
相似比が a : b なら表面積の比は $a^2 : b^2$ である。
$2^2=4$, $3^2=9$ なので，2 つの球の相似比は 2 : 3 である。
相似比が a : b なら体積比は $a^3 : b^3$ であるので，
2 つの球の体積比は，$2^3 : 3^3=8 : 27$ である。

[問題](後期期末)
ある店では，直径 15cm で 800 円と，25cm で 3200 円の大小 2 つのチーズケーキを売っている。どちらを買った方が得か。そう考えた根拠も書け。ただし，2 つのチーズケーキは相似な円柱であるとする。



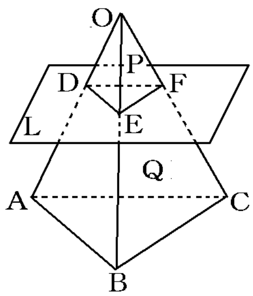
[解答欄]

[解答]
2 つのチーズケーキの相似比は，15 : 25＝3 : 5 であるので，体積比は，$3^3 : 5^3=27 : 125$ となる。したがって，大きいチーズケーキは小さいチーズケーキの 125÷27＝約 4.6(倍)の体積がある。値段については，大きいチーズケーキは小さいチーズケーキの 3200(円)÷800(円)＝4(倍)である。よっていチーズケーキの方が得である。

[相似比と体積比②：円錐・角錐]

[問題](後期中間)

右の図のように，三角錐 OABC の底面 ABC に平行な平面 L が，辺 OA を 2：3 の比に分けている。このとき，平面 L で分けられた三角錐の 2 つの部分を P，Q とする。次の各問いに答えよ。



(1) △DEF の面積は△ABC の面積の何倍か。

(2) P と Q の体積の比を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $\dfrac{4}{25}$ 倍　(2) 8：117

[解説]

平面 L は底面 ABC と平行なので，三角錐 ODEF と三角錐 OABC は相似である。

平面 L が辺 OA を 2：3 の比に分けているので，OD：DA＝2：3 である。

したがって，OD：OA＝2：(2＋3)＝2：5 で，

三角錐 ODEF と三角錐 OABC の相似比は，2：5 になる。

よって，(△DEF の面積)：(△ABC の面積)＝2^2：5^2＝4：25 なり，

△DEF の面積は△ABC の面積の $\dfrac{4}{25}$ 倍となる。

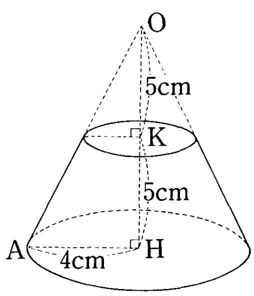
三角錐 ODEF と三角錐 OABC の相似比は，2：5 なので，

(三角錐 ODEF の体積)：(三角錐 OABC の体積)＝2^3：5^3＝8：125

よって，(P の体積)：(Q の体積)＝8：(125－8)＝8：117

[問題](2 学期期末)

右の図の立体は，底面の半径 HA が 4cm，高さ OH が 10cm の円錐を，OH の中点 K を通り底面に平行な平面で切り，小さな円錐を取り除いたものである。この立体の体積はいくらか。



[解答欄]

[解答] $\dfrac{140}{3}\pi$ cm^3

[解説]

(もとの円錐の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\dfrac{1}{3}\times 4\times 4\times \pi\times 10=\dfrac{160\pi}{3}$(cm³)

もとの円錐の高さは 10cm，切り取った円錐の高さは 5cm なので，

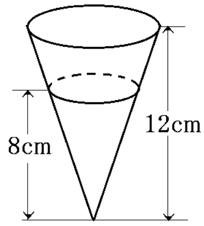
2 つの円錐の相似比は 2：1 になる。したがって，体積比は $2^3:1^3=8:1$ なので，

(切り取った円錐)$=\dfrac{160\pi}{3}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{20\pi}{3}$(cm³)

よって，(切り取った後の円錐台の体積)$=\dfrac{160\pi}{3}-\dfrac{20\pi}{3}=\dfrac{140\pi}{3}$(cm³)

[問題](後期中間)

右の図のように深さが 12cm の円錐形の容器に 72cm³ の水を入れると深さが 8cm になる。あと何 cm³ の水を入れると容器がいっぱいになるか。

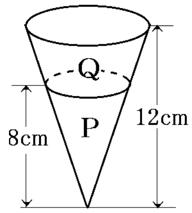


[解答欄]

[解答]171cm³

[解説]

右図の小さい円錐(P の部分)と大きい円錐(P＋Q の部分)は相似であり，



相似比は，8：12＝2：3 である。

相似比が a：b なら体積比は $a^3:b^3$ であるので，

(P の体積)：(P＋Q の体積)$=2^3:3^3=8:27$ である。

(P の体積)＝72cm³ なので，

72：(P＋Q の体積)＝8：27

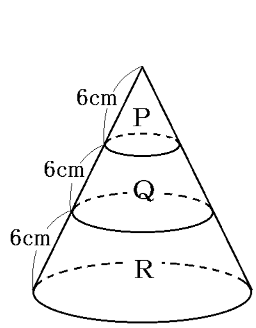
比の内項の積は外項の積に等しいので，(P＋Q の体積)×8＝72×27

よって，(P＋Q の体積)＝72×27÷8＝243(cm³)

したがって，(Q の体積)＝(P＋Q の体積)－(P の体積)＝243－72＝171(cm³)

[問題](後期中間)

右の図のように，体積が 270 cm³ の円錐を底面に平行な平面で切り，3 つの部分に分けるとき，R の体積を求めよ。



[解答欄]

[解答]190cm³

[解説]

P＋Q の部分の円錐と P＋Q＋R の部分の円錐は相似で，相似比は 12：18＝2：3 である。したがって，体積比は，(P＋Q の部分)：(P＋Q＋R の部分)＝2^3：3^3＝8：27 となる。(P＋Q＋R の部分)＝270 cm^3 なので，(P＋Q の部分)：270＝8：27

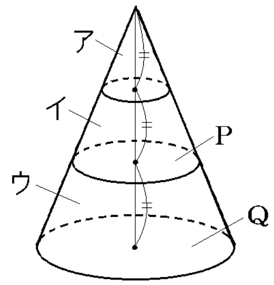
比で，外項の積は内項の積に等しいので，(P＋Q の部分)×27＝270×8

よって，(P＋Q の部分)＝270×8÷27＝80(cm^3)

したがって，(R の部分の体積)＝270－80＝190(cm^3)

[問題](2 学期期末)

右の図のように円錐を底面に平行で高さを 3 等分する平面で切り，3 つの部分をそれぞれア，イ，ウとする。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) 底面 P と Q の円周の長さの比を求めよ。

(2) 立体イとウの体積の比を求めよ。

(3) 立体イの体積が 126πcm^3 のとき，もとの円錐の体積を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[解答](1) 2：3　(2) 7：19　(3) 486πcm^3

[解説]

(1) アの円錐，ア＋イの円錐，ア＋イ＋ウの円錐は相似で，相似比は 1：2：3 である。

P はア＋イの円錐の底面で，Q はア＋イ＋ウの円錐の底面なので，円周の長さの比は，相似比と等しく，2：3 になる。

(2) アの円錐，ア＋イの円錐，ア＋イ＋ウの円錐の相似比は 1：2：3 であるので，

体積比は，(アの円錐)：(ア＋イの円錐)：(ア＋イ＋ウの円錐)＝1^3：2^3：3^3＝1：8：27

したがって，(アの体積)＝1 とすると，(ア＋イの体積)＝8，(ア＋イ＋ウの体積)＝27 である。

よって，(イの体積)＝8－1＝7，(ウの体積)＝27－8＝19 となり，

イとウの体積の比は 7：19 となる。

(3) (2)より，(イの体積)：(ア＋イ＋ウの体積)＝7：27 である。イの体積は 126πcm^3 なので，

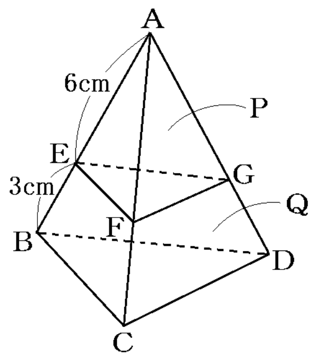
126π：(ア＋イ＋ウの体積)＝7：27

比で，内項の積は外項の積に等しいので，(ア＋イ＋ウの体積)×7＝126π×27

したがって，(ア＋イ＋ウの体積)＝126π×27÷7＝486π(cm^3)

[問題](2 学期期末)

右の図のように，三角錐を底面に平行な平面で切って，2 つの部分 P，Q に分けた。△EFG はそのときの切り口である。三角錐 P の体積が 24cm³ のとき，立体 Q の体積を求めよ。



[解答欄]

[解答]57cm³

[解説]

三角錐 AEFG(三角錐 P)と三角錐 ABCD は相似で，相似比は 6 : (6＋3)＝6 : 9＝2 : 3 である。

したがって，体積比は，(三角錐 AEFG) : (三角錐 ABCD)＝2^3 : 3^3＝8 : 27

(三角錐 AEFG)＝24cm³ なので，24 : (三角錐 ABCD)＝8 : 27

比で，内項の積は外項の積に等しいので，(三角錐 ABCD)×8＝24×27

よって，(三角錐 ABCD)＝24×27÷8＝81(cm³)

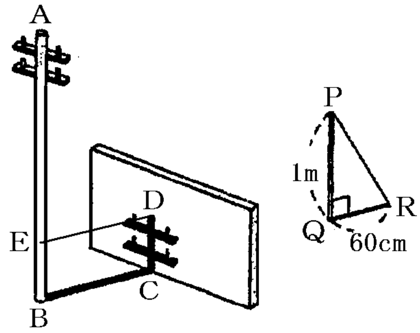
したがって，(立体 Q の体積)＝81－24＝57(cm³)

【】縮図

[測量]

[問題](2 学期期末)

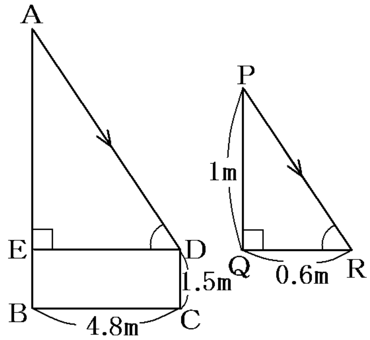
右の図のように, 1m の棒の影の長さが 60cm である。BC＝4.8m，CD＝1.5m のとき，この電柱の高さを求めよ。



[解答欄]

[解答]9.5m

[解説]



AB 上に点 E をとり，ED // BC となるようにする。

△AED と△PQR において，

∠AED＝∠PQR＝90°，∠ADE＝∠PRQ

2 組の角がそれぞれ等しいので，△AED∽△PQR

AE：PQ＝DE：RQ，AE：1＝4.8：0.6

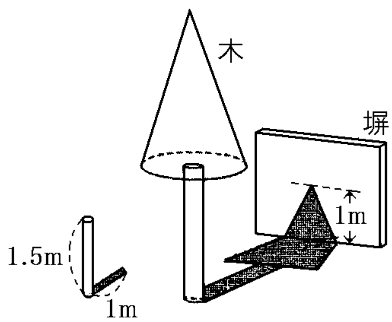
外項の積 AE×0.6 は，内項の積 1×4.8 と等しいので，

AE×0.6＝4.8

ゆえに AE＝4.8÷0.6＝8　よって AB＝AE＋EB＝8＋1.5＝9.5m

[問題](2 学期期末)

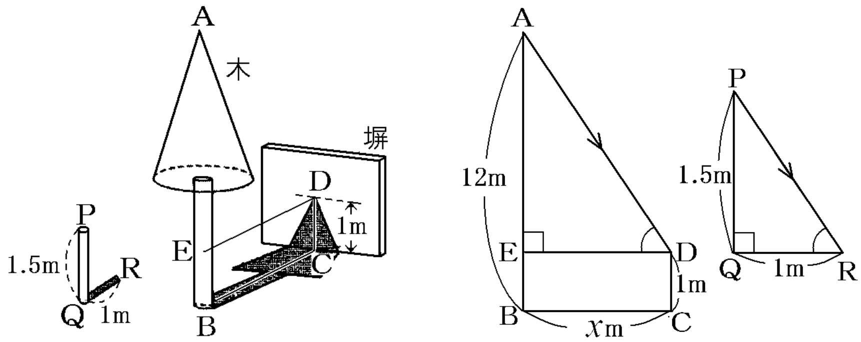
ある晴れた日に，長さ 1.5m の棒の影の長さをはかると lm であるとき，近くにある高さ 12m の木の影は右の図のように地面と塀にうつっていた。木と塀との塀との距離を求めよ。ただし，棒，木，塀は地面に対して垂直に立っているものとする。



[解答欄]

[解答]$\frac{22}{3}$ m

[解説]



上の図で，BC＝x m とおく。

△AED∽△PQR であるので，

AE：PQ＝ED：QR である。

AE＝12－1＝11(m)，ED＝BC＝x(m)なので，

11：1.5＝x：1

比で，内項の積は外項の積に等しいので，

$1.5x=11\times1$，$3x=22$，$x=\dfrac{22}{3}$

よって，木と塀との塀との距離は$\dfrac{22}{3}$ m である。

[印刷／他の PDF ファイルについて]
※このファイルは，FdData 中間期末数学 3 年(7,800 円)の一部を PDF 形式に変換したサンプルで，印刷はできないようになっています。製品版の FdData 中間期末数学 3 年は Word の文書ファイルで，印刷・編集を自由に行うことができます。
※FdData 中間期末(社会･理科･数学)全分野の PDF ファイル，および製品版の購入方法は http://www.fdtext.com/dat/ に掲載しております。

【Fd 教材開発】(092) 404－2266
Mail：info2@fdtext.com