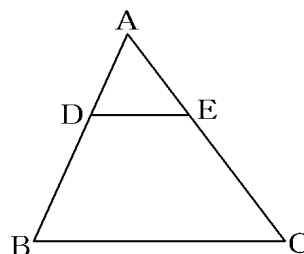


【】相似比と面積比：平行線と三角形

[問題](増補10)(補充問題)

右の図で、 $AD : AB = 2 : 5$ 、 $DE \parallel BC$ である。これについて、次の問いに答えなさい。

- (1)  $ADE$  と  $ABC$  の面積の比を求めなさい。
- (2)  $ADE$  の面積が  $24\text{cm}^2$  のとき、 $ABC$  の面積を求めなさい。



[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

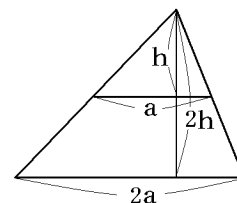
[解答](1)  $4 : 25$  (2)  $150\text{cm}^2$

[解説]

<Point>相似比  $a : b$     面積比  $a^2 : b^2$

右図のように、相似比が  $1 : 2$  である2つの相似な三角形があるとする。

小さい三角形の底辺を  $a$ 、高さを  $h$  とすると、  
大きい三角形の底辺は  $2a$ 、高さは  $2h$  になる。



$$(\text{小さい三角形の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{2} \times a \times h = \frac{1}{2} ah$$

$$(\text{大きい三角形の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{2} \times 2a \times 2h = \frac{4}{2} ah$$

したがって、大きい三角形の面積は、小さい三角形の  $4 = 2^2$  倍となり、  
面積比は、 $1^2 : 2^2$  となる。

一般に、2つの相似な図形の相似比が  $a : b$  のとき、面積比は  $a^2 : b^2$  となる。

- (1)  $DE \parallel BC$  なので  $ADE \sim ABC$  で、相似比は  
 $AD : AB = 2 : 5$

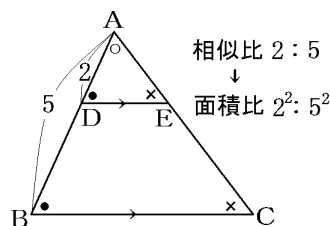
面積比は相似比の2乗になるので、

$$(\text{ADEの面積}) : (\text{ABCの面積}) = 2^2 : 5^2 = 4 : 25$$

- (2)  $ADE$  の面積が  $24\text{cm}^2$  なので、 $24 : (\text{ABCの面積}) = 4 : 25$

比の内項の積は外項の積に等しいので、 $(\text{ABCの面積}) \times 4 = 24 \times 25$

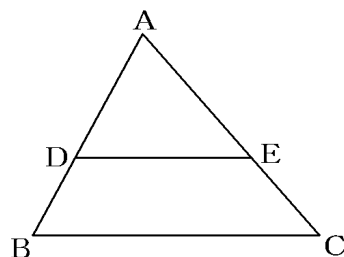
よって、 $(\text{ABCの面積}) = 24 \times 25 \div 4 = 150(\text{cm}^2)$



[問題](増補 10)(補充問題)

右図で、 $DE \parallel BC$  で、 $AD : DB = 3 : 2$  のとき、次の問いに答えなさい。

- (1)  $ADE$  と  $ABC$  の面積の比を求めなさい。
- (2)  $ABC$  の面積が  $50\text{cm}^2$  のとき、台形  $DBCE$  の面積を求めなさい。



[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[解答](1)  $9 : 25$  (2)  $32\text{cm}^2$

[解説]

<Point>相似比  $a : b$     面積比  $a^2 : b^2$

(1)  $DE \parallel BC$  なので  $ADE \sim ABC$  で、

相似比は  $AD : AB = 3 : (3 + 2) = 3 : 5$

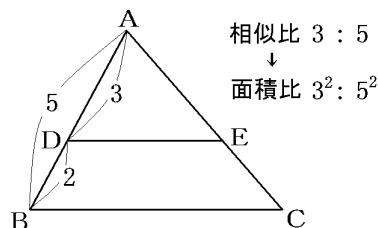
面積比は相似比の 2 乗になるので、

(  $ADE$  の面積 ) : (  $ABC$  の面積 ) =  $3^2 : 5^2 = 9 : 25$

(2) (  $ADE$  の面積 ) : (  $ABC$  の面積 ) =  $9 : 25$  で、  $ABC$  の面積が  $50\text{cm}^2$  なので、

(  $ADE$  の面積 ) :  $50 = 9 : 25$  , よって、(  $ADE$  の面積 ) =  $18\text{cm}^2$

(台形  $DBCE$  の面積) = (  $ABC$  の面積 ) - (  $ADE$  の面積 ) =  $50 - 18 = 32(\text{cm}^2)$



[問題](増補 10)(補充問題)

$ABC$  の辺  $AB$  を  $5 : 2$  に分ける点  $D$  を通る平行線  $DE$  をひく。  $ABC$  の面積が  $10\text{cm}^2$  ならば、台形  $DBCE$  の面積はいくらか。

[解答欄]

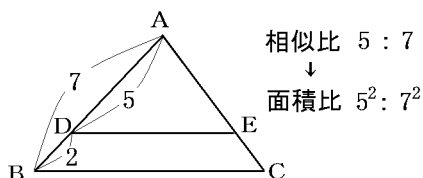
[解答]  $\frac{240}{49} (\text{cm}^2)$

[解説]

<Point>相似比  $a : b$     面積比  $a^2 : b^2$

$AD : DB = 5 : 2$  なので、

$AD : AB = 5 : (5 + 2) = 5 : 7$



したがって、 $ADE$  と  $ABC$  の相似比は  $5 : 7$  で、  
面積比は  $5^2 : 7^2 = 25 : 49$

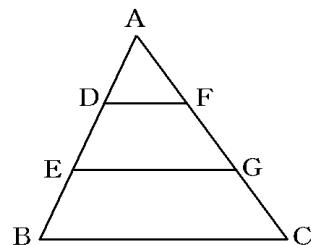
$$(\text{ABC の面積}) = 10\text{cm}^2 \text{ なので, } (\text{ADE の面積}) = 10 \times \frac{25}{49} = \frac{250}{49} (\text{cm}^2)$$

$$\text{したがって, (台形 DBCE の面積)} = 10 - \frac{250}{49} = \frac{490 - 250}{49} = \frac{240}{49} (\text{cm}^2)$$

[問題](増補 10)(補充問題)

次の図において  $DF, EG, BC$  は互いに平行で、  
 $AD = DE = BE$  である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $ADF$  と  $AEG$  の面積比を求めよ。
- (2)  $ABC$  の面積が  $54\text{cm}^2$  のとき、 $ADF$ 、台形  $DEGF$ 、  
台形  $EBCG$  の面積を求めよ。



[解答欄]

(1)	(2) $ADF$ :	台形 $DEGF$ :
台形 $EBCG$ :		

[解答](1)  $1 : 4$  (2)  $ADF : 6\text{cm}^2$  台形  $DEGF : 18\text{cm}^2$  台形  $EBCG : 30\text{cm}^2$

[解説]

<Point>相似比  $a : b : c$  面積比  $a^2 : b^2 : c^2$

$DF \parallel EG \parallel BC$  なので、

$ADF$  と  $AEG$  と  $ABC$  は互いに相似で、  
相似比(長さの比)は  $1 : 2 : 3$  である。

面積比は相似比の 2 乗になるので、

$ADF$  と  $AEG$  と  $ABC$  の面積比は、

$$1^2 : 2^2 : 3^2 = 1 : 4 : 9 \text{ となる。}$$

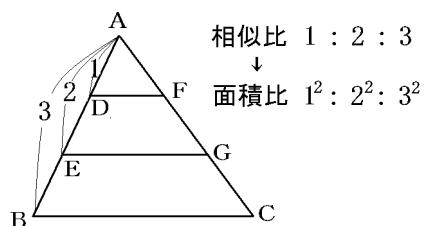
$ABC$  の面積が  $54\text{cm}^2$  のとき、

$$(\text{ADF の面積}) = 54 \div 9 = 6(\text{cm}^2),$$

$$(\text{AEG の面積}) = 6 \times 4 = 24(\text{cm}^2) \text{ となる。}$$

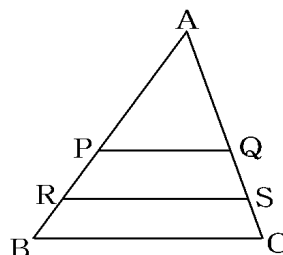
$$\text{したがって, (台形 DEGF の面積)} = 24 - 6 = 18(\text{cm}^2),$$

$$(\text{台形 EBCG の面積}) = 54 - 24 = 30(\text{cm}^2) \text{ となる。}$$



[問題](増補 10)(補充問題)

右図のような  $ABC$  において  $PQ \parallel RS \parallel BC$  であり,  $APQ$ , 四角形  $PRSQ$ , 四角形  $RBCS$  の面積がみな等しい。  $AP = 1$  のとき,  $RB$  の長さを求めなさい。(巣鴨高)



[解答欄]

[解答]  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

[解説]

右図のように  $AR = a$ ,  $AB = b$  とすると  $AP : AR : AB = 1 : a : b$

$PQ \parallel RS \parallel BC$  なので,  $APQ$ ,  $ARS$ ,  $ABC$

は互いに相似で, 相似比は  $1 : a : b$  となる。

面積比は相似比の 2 乗になるので,

$$APQ : ARS : ABC = 1^2 : a^2 : b^2 \dots$$

ところで,  $APQ$ , 四角形  $PRSQ$ , 四角形  $RBCS$  の面積がみな等しいので,  $APQ$  の面積を  $S$  とすると,

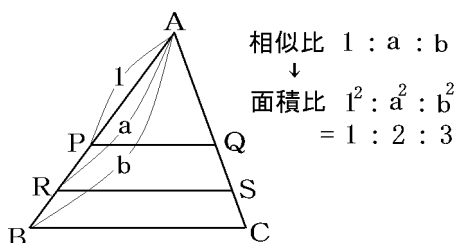
$$ARS = APQ + \text{四角形 } PRSQ = S + S = 2S$$

$$ABC = ARS + \text{四角形 } RBCS = 2S + S = 3S$$

よって,  $APQ : ARS : ABC = S : 2S : 3S = 1 : 2 : 3 \dots$

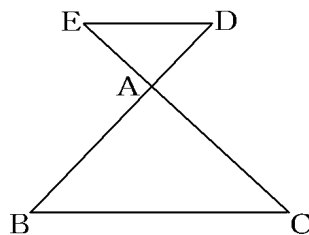
, より,  $1 : a^2 : b^2 = 1 : 2 : 3$  よって,  $a^2 = 2$ ,  $b^2 = 3$

$a > 0$ ,  $b > 0$  なので,  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt{3}$  ゆえに,  $RB = b - a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$



[問題](増補 10)(補充問題)

右の図のように,  $ABC$  の辺  $BA$ ,  $CA$  の延長上に  $BC \parallel DE$  となるように, それぞれ点  $D$ ,  $E$  をとる。  $AE = 4\text{cm}$ ,  $AC = 8\text{cm}$  であるとき,  $ADE$  と  $ABC$  の面積の比を求めよ。(栃木県)



[解答欄]

[解答]  $1 : 4$

[解説]

<Point>相似比  $a : b$  面積比  $a^2 : b^2$

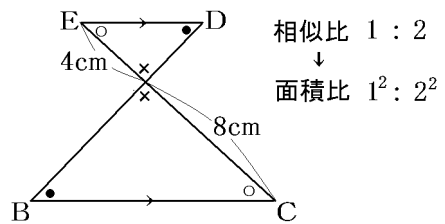
$BC \parallel DE$  なので  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$  で、

$AE$  と  $AC$  は対応する辺なので、

相似比は、 $AE : AC = 4 : 8 = 1 : 2$

面積比は相似比の 2 乗になるので、

(  $\triangle ADE$  の面積 ) : (  $\triangle ABC$  の面積 ) =  $1^2 : 2^2 = 1 : 4$

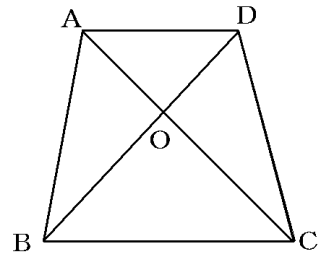


【】相似比と面積比 : 台形

[問題](増補 10)(補充問題)

AD と BC が平行である台形 ABCD の対角線の交点を O とする。AD = 4cm , BC = 6cm , ODA = 4cm<sup>2</sup> のとき ,

- (1) OBC の面積を求めよ。
- (2) 台形 ABCD の面積を求めよ。



[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

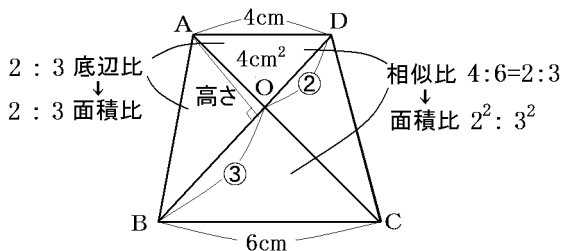
[解答](1) 9cm<sup>2</sup> (2) 25cm<sup>2</sup>

[解説]

<Point>

ODA OBC 相似比 2 : 3 面積比 2<sup>2</sup> : 3<sup>2</sup>

ODA と OBA 高さ共通 , 底辺比 2 : 3 面積比 2 : 3



(1) AD // BC なので , ODA OBC で ,

相似比は , AD : BC = 4 : 6 = 2 : 3

したがって , 面積比は , ODA : OBC = 2<sup>2</sup> : 3<sup>2</sup> = 4 : 9

ODA = 4cm<sup>2</sup> なので , OBC = 9cm<sup>2</sup>

(2) ODA と OBA は , OD , OB を底辺とすると , 高さは共通なので , 面積比は底辺の比と同じになる。よって , ODA : OBA = 2 : 3

ODA = 4cm<sup>2</sup> なので , 4 : OBA = 2 : 3

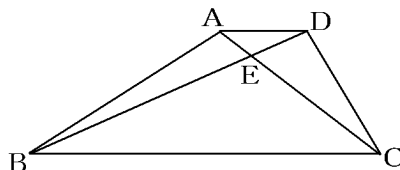
内項の積は外項の積に等しいので , OBA × 2 = 4 × 3 , OBA = 4 × 3 ÷ 2 = 6(cm<sup>2</sup>)

ODA と ODC についても , 同様に ODA : ODC = 2 : 3 なので , ODC = 6(cm<sup>2</sup>) となる。よって , (台形 ABCD の面積) = ODA + OBA + ODC + OBC

= 4 + 6 + 6 + 9 = 25(cm<sup>2</sup>)

[問題](増補 10)(補充問題)

図のような  $AD \parallel BC$  の台形  $ABCD$  において、対角線  $AC$  と  $BD$  の交点を  $E$  とする。 $DE : EB = 1 : 4$  とし、 $AED$  の面積を  $5$  とするとき、台形  $ABCD$  の面積を求めなさい。(日本大豊山高)



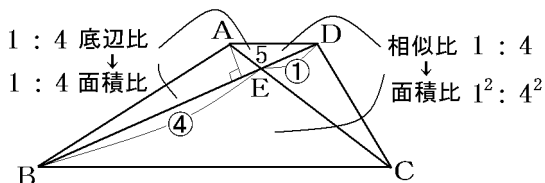
[解答欄]

[解答]125

[解説]

<Point>  $AED$   $CEB$  相似比  $1 : 4$  面積比  $1^2 : 4^2$

$AED$  と  $ABE$  高さ共通、底辺比  $1 : 4$  面積比  $1 : 4$



$AD \parallel BC$  なので、 $AED$   $CEB$  で、

相似比は、 $ED : EB = 1 : 4$

面積比は相似比の 2 乗になるので、

(  $AED$  の面積 ) : (  $CEB$  の面積 ) =  $1^2 : 4^2 = 1 : 16$

(  $AED$  の面積 ) =  $5$  なので、(  $CEB$  の面積 ) =  $5 \times 16 = 80 \dots$

次に、 $AED$  と  $ABE$  の面積比を求める。

2 つの三角形の底辺をそれぞれ  $DE$ 、 $BE$  とすると、高さは共通なので、面積比は底辺の比と同じになる。

したがって、(  $AED$  の面積 ) : (  $ABE$  の面積 ) =  $DE : BE = 1 : 4$

(  $AED$  の面積 ) =  $5$  なので、(  $ABE$  の面積 ) =  $5 \times 4 = 20 \dots$

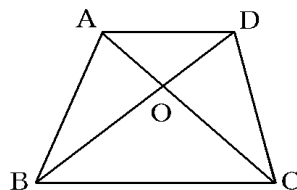
$AED$  と  $DCE$  についても、まったく同様に計算すると、

(  $DCE$  の面積 ) =  $5 \times 4 = 20 \dots$

、 、 より、(台形  $ABCD$  の面積) = (  $AED$  の面積 ) + (  $CEB$  の面積 ) + (  $ABE$  の面積 ) + (  $DCE$  の面積 ) =  $5 + 80 + 20 + 20 = 125$

[問題](増補 10)(補充問題)

ADとBCが平行である台形ABCDの対角線の交点をOとする。  
ADOの面積が $18\text{cm}^2$ 、BCOの面積が $50\text{cm}^2$ であるとき、  
台形ABCDの面積は、ADOの面積の何倍か。

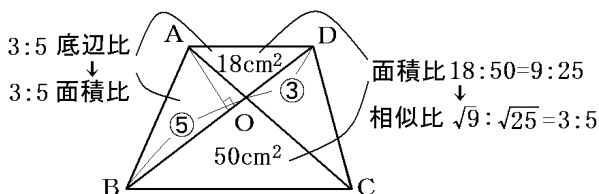


[解答欄]

[解答]  $\frac{64}{9}$  倍

[解説]

<Point> ADO BCO 面積比  $18 : 50 = 9 : 25$  相似比  $\sqrt{9} : \sqrt{25} = 3 : 5$   
ADOと ABO 高さ共通, 底辺比  $3 : 5$  面積比  $3 : 5$



AD // BC なので、ADO BCO

2つの三角形の面積比が  $18 : 50 = 9 : 25$  なので、相似比は、 $\sqrt{9} : \sqrt{25} = 3 : 5$

よって、 $OD : OB = 3 : 5$

ADOと ABOで、OD、OBをそれぞれの三角形の底辺とすると高さは共通なので、  
面積比は底辺の比と等しくなる。

よって、(ADOの面積) : (ABOの面積) =  $3 : 5$

ゆえに、 $18 : (\text{ABOの面積}) = 3 : 5$

比の内項の積は外項の積に等しいので、

$(\text{ABOの面積}) \times 3 = 18 \times 5$ 、 $(\text{ABOの面積}) = 18 \times 5 \div 3 = 30(\text{cm}^2)$

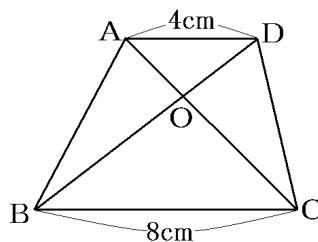
ADOと DCOについても、まったく同様に計算すると、(DCOの面積) =  $30(\text{cm}^2)$

よって、(台形ABCDの面積) =  $18 + 50 + 30 + 30 = 128(\text{cm}^2)$

したがって、(台形ABCDの面積)  $\div$  (ADOの面積) =  $128 \div 18 = \frac{128}{18} = \frac{64}{9}$  (倍)

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図で、台形 ABCD は  $AD \parallel BC$  ,  $AD = 4\text{cm}$  ,  $BC = 8\text{cm}$  であり、点 O は対角線の交点である。  $\triangle OAB$  の面積が  $7\text{cm}^2$  のとき、  $\triangle OBC$  の面積を求めよ。



(大分県)

[解答欄]

[解答]  $14\text{cm}^2$

[解説]

$\triangle OAB$  と  $\triangle OBC$  は、 $OA$ 、 $OC$  を底辺とすると、高さは共通なので、面積比は底辺の比と同じになる。よって、 $\triangle OAB : \triangle OBC = OA : OC \cdots$

ところで、 $AD \parallel BC$  なので、 $\triangle ODA \sim \triangle OBC$  で、相似比は、 $AD : BC = 4 : 8 = 1 : 2$  となる。したがって、 $OA : OC = 1 : 2$  となる。...

よって、 $\triangle OAB : \triangle OBC = 1 : 2$

$\triangle OAB$  の面積は  $7\text{cm}^2$  なので、

$7 : \triangle OBC = 1 : 2$

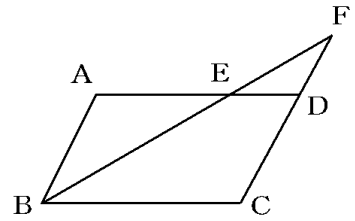
内項の積は外項の積に等しいので、 $\triangle OBC \times 1 = 7 \times 2$

よって、 $\triangle OBC = 14(\text{cm}^2)$

【】相似比と面積比：平行四辺形

[問題](増補 10)(補充問題)

次の図の平行四辺形において、AD を 3 : 2 に分ける点を E とする。BE、CD を延長し、その交点を F とするとき、次の問いに答えよ。



- (1) ABE と DFE の面積比を求めよ。
- (2) DFE と台形 EBCD の面積比を求めよ。

[解答欄]

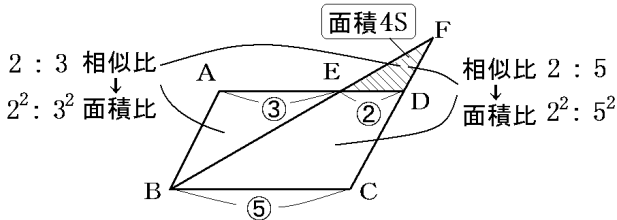
(1)	(2)
-----	-----

[解答](1) 9 : 4 (2) 4 : 21

[解説]

<Point>

平行四辺形 相似な三角形の相似比 面積比  
 最小の三角形の面積を S とか 4S とかおく



- (1)  $AB \parallel DF$  なので、 $\triangle ABE \sim \triangle DFE$  である。  
 AE と DE は対応する辺なので、2 つの三角形の相似比は、  
 $AE : DE = 3 : 2$  になる。  
 したがって、面積比は、 $3^2 : 2^2 = 9 : 4$  になる。
- (2)  $ED \parallel BC$  なので、 $\triangle DFE \sim \triangle CFB$  である。  
 ED と BC は対応する辺なので、2 つの三角形の相似比は、  
 $ED : BC = 2 : (2 + 3) = 2 : 5$  となる。  
 したがって、面積比は  $2^2 : 5^2 = 4 : 25$  となる。  
 よって、 $\triangle DFE$  の面積を  $4S$  とすると、 $\triangle CFB$  の面積は  $25S$  で、  
 台形  $EBCD$  の面積は  $25S - 4S = 21S$  となる。  
 したがって、 $\triangle DFE$  と台形  $EBCD$  の面積比は  $4S : 21S = 4 : 21$  となる。

[問題](増補 10)(補充問題)

右図において，四角形 ABCD は平行四辺形である。

AED : PEC = 9 : 4 のとき，平行四辺形 ABCD と台形 ABCE の面積比を求めよ。(香川県)

[解答欄]

[解答] 10 : 7

[解説]

AD // CP なので， AED    PEC

面積比が 9 : 4 なので，

相似比は  $\sqrt{9} : \sqrt{4} = 3 : 2$

よって，DE : CE = 3 : 2

AB = CD = DE + CE なので，

DE : CE : AB = 3 : 2 : (3 + 2) = 3 : 2 : 5

ここで，PEC の面積を 4S とおく。

(S とおいてもよいが，分数で計算が少し面倒になる)

AED : PEC = 9 : 4 なので，AED = 9S

EC // AB なので，PEC    PAB

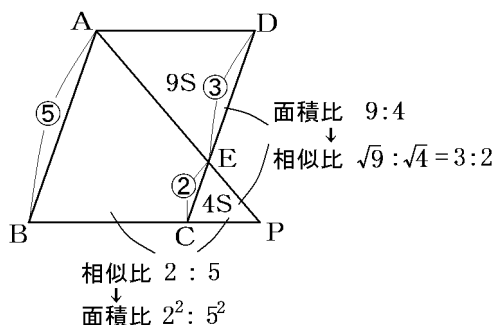
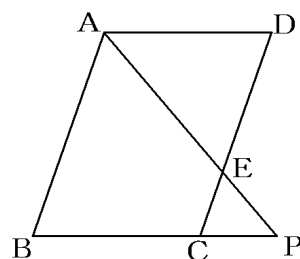
相似比は EC : AB = 2 : 5 なので，面積比は  $2^2 : 5^2 = 4 : 25$

(PEC の面積) = 4S なので，(PAB の面積) = 25S

よって，(台形 ABCE の面積) = 25S - 4S = 21S

(平行四辺形 ABCD の面積) = (AED の面積) + (台形 ABCE の面積) = 9S + 21S = 30S

以上より，(平行四辺形 ABCD の面積) : (台形 ABCE の面積) = 30S : 21S = 10 : 7

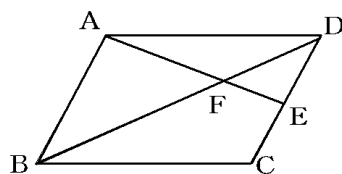


[問題](増補 10)(補充問題)

次の図の平行四辺形 ABCD において，E は CD の中点である。AE と BD の交点を F とする。AB = 4cm，

FAB = 12cm<sup>2</sup> のとき，次の問いに答えよ。

- (1) FED の面積を求めよ。
- (2) AFD の面積を求めよ。
- (3) 四角形 FBCE の面積を求めよ。



[解答欄]

(1)	(2)	(3)
-----	-----	-----

[解答](1)  $3\text{cm}^2$  (2)  $6\text{cm}^2$  (3)  $15\text{cm}^2$

[解説]

(1) E は CD の中点なので、 $DC : DE = 2 : 1$

$DC = AB$  なので、 $AB : DE = 2 : 1$

よって、 $FAB$  と  $FED$  の相似比は  $2 : 1$  で、

面積比は  $2^2 : 1^2 = 4 : 1$  である。

$FAB = 12\text{cm}^2$  なので、(  $FED$  の面積 )  $= 12 \div 4 = 3(\text{cm}^2)$

(2)  $ABF$  と  $AFD$  は高さ(h)が共通なので、

底辺の比( $BF : FD$ )が面積比になる。

$FAB$  と  $FED$  の相似比は  $2 : 1$  なので、 $BF : FD = 2 : 1$

したがって、(  $ABF$  の面積 ) : (  $AFD$  の面積 )  $= 2 : 1$

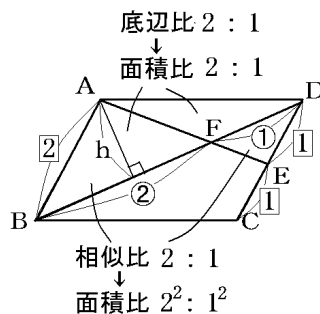
$FAB = 12\text{cm}^2$  なので、(  $AFD$  の面積 )  $= 12 \div 2 = 6(\text{cm}^2)$

(3) (  $ABD$  の面積 )  $=$  (  $ABF$  の面積 )  $+$  (  $AFD$  の面積 )  $= 12 + 6 = 18(\text{cm}^2)$

四角形  $ABCD$  は平行四辺形なので、

(  $CBD$  の面積 )  $=$  (  $ABD$  の面積 )  $= 18(\text{cm}^2)$

よって、( 四角形  $FBCE$  の面積 )  $=$  (  $CBD$  の面積 )  $-$  (  $FED$  の面積 )  $= 18 - 3 = 15(\text{cm}^2)$



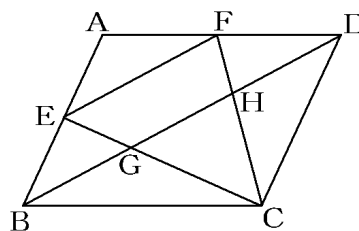
[問題](増補 10)(補充問題)

図で、四角形  $ABCD$  は平行四辺形で、 $E, F$  はそれぞれ辺  $AB, AD$  の中点である。 $BD$  と  $CE$  の交点を  $G, BD$  と  $CF$  の交点を  $H$  とするとき 四角形  $EGHF$  の面積は、 $ABD$  の面積の何倍か。

(愛知県)

[解答欄]

[解答]  $\frac{5}{12}$  倍



[解説]

ABC で O は AC の中点, E は AB の中点なので, G は ABC の重心になる。

したがって,  $BG : GO = 2 : 1$

同様にして,  $DH : HO = 2 : 1$

さらに,  $BO = DO$  なので,  $BG = GH = HD$  となる。

CBG, CGH, CHD の底辺をそれぞれ BG, GH, HD とすると, 高さは共通になるので, この 3 つの三角形の面積は等しくなる。

CGH の面積を S とすると, CBD の面積は,  $S + S + S = 3S$  となる。

よって, ( ABD の面積) = ( CBD の面積) =  $3S \cdots$

次に, 四角形 EGHF の面積を S で表す。

E, F はそれぞれ AB, AD の中点なので, 中点連結定理より  $EF \parallel BD$

$GH \parallel EF$  となるので, CGH と CEF は相似になる。

G は ABC の重心なので,  $CG : GE = 2 : 1$  よって,  $CG : CE = 2 : (2 + 1) = 2 : 3$

したがって, CGH と CEF の相似比は  $2 : 3$  で, 面積比は  $2^2 : 3^2 = 4 : 9$

よって, ( CGH の面積) : ( CEF の面積) =  $4 : 9$

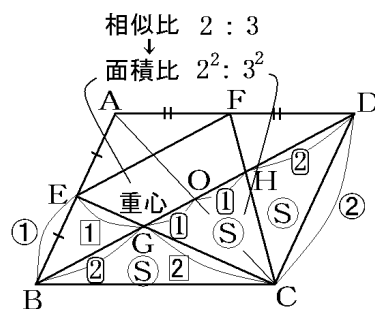
ゆえに,  $S : ( CEF \text{ の面積}) = 4 : 9$

比の内項の積は外項の積に等しいので,  $( CEF \text{ の面積}) \times 4 = S \times 9$

$$( CEF \text{ の面積}) = S \times 9 \div 4 = \frac{9}{4} S$$

$$\text{よって, (四角形 EGHF の面積)} = ( CEF \text{ の面積}) - ( CGH \text{ の面積}) = \frac{9}{4} S - S = \frac{5}{4} S \cdots$$

$$\text{よって, (四角形 EGHF の面積)} \div ( ABD \text{ の面積}) = \frac{5}{4} S \div 3S = \frac{5}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12} \text{ (倍)}$$



【】相似比と面積比 : いろいろな三角形

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図において,  $\triangle ABC$  と  $\triangle HBA$  と  $\triangle HAC$  の面積比を求めなさい。

[解答欄]

[解答]25 : 9 : 16

[解説]

<Point> 等しい角の印を記入すると相似な三角形の対応関係がつかみやすい。

B を「 $\bullet$ 」, C を「 $\times$ 」と表すと,  
と  $\times$  の和は  $90^\circ$

$\triangle HBA$  で,  $\angle B + \angle BAH = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$  なので,  
 $\angle BAH$  は「 $\times$ 」と表すことができる。

同様に,  $\triangle HAC$  で,  $\angle CAH$  は「 $\bullet$ 」とあらわすことができる。

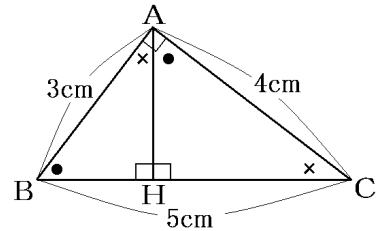
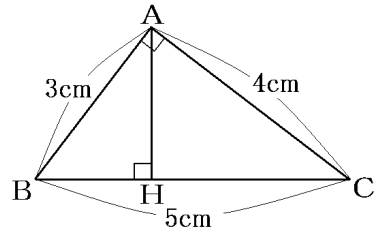
角の印をつけた図をみれば明らかなように,  $\triangle ABC$  と  $\triangle HBA$  と  $\triangle HAC$  は対応する角がそれぞれ等しくなるので相似であることがわかる。

$\triangle ABC$  と  $\triangle HBA$  と  $\triangle HAC$  の斜辺  $BC, AB, AC$  に注目すると, 相似比は

$$BC : AB : AC = 5 : 3 : 4$$

面積比は相似比の 2 乗になるので,

$$(\triangle ABC \text{ の面積}) : (\triangle HBA \text{ の面積}) : (\triangle HAC \text{ の面積}) = 5^2 : 3^2 : 4^2 = 25 : 9 : 16$$



$$\begin{aligned} &\triangle ABC, \triangle HBA, \triangle HAC \\ &\text{相似比 } 5 : 3 : 4 \\ &\downarrow \\ &\text{面積比 } 5^2 : 3^2 : 4^2 \end{aligned}$$

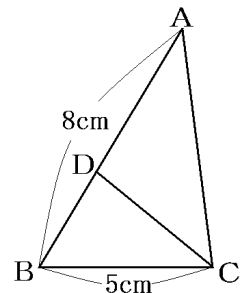
[問題](増補 10)(補充問題)

右の図の  $\triangle ABC$  で,  $\angle BCD = \angle CAD$  のとき,  $\triangle ADC$  と  $\triangle DBC$  の面積比を, 最も簡単な整数の比で答えなさい。

(駿台甲府高)

[解答欄]

[解答]39 : 25



[解説]

右図のように等しい角の印を記入すると相似な三角形の対応関係がつかみやすい。

ABC と CBD において、

B は共通で、仮定より  $\angle CAB = \angle BCD$  なので、  
2組の角がそれぞれ等しくなり、 $\triangle ABC \sim \triangle CBD$

右図からわかるように、BA と BC は対応する辺なので、

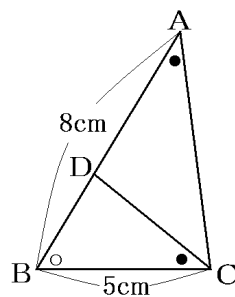
ABC と CBD の相似比は、 $BA : BC = 8 : 5$

面積比は相似比の2乗になるので、

$$(\triangle ABC \text{ の面積}) : (\triangle CBD \text{ の面積}) = 8^2 : 5^2 = 64 : 25$$

( $\triangle ADC$  の面積) = ( $\triangle ABC$  の面積) - ( $\triangle CBD$  の面積)なので、

$$(\triangle ADC \text{ の面積}) : (\triangle CBD \text{ の面積}) = (64 - 25) : 25 = 39 : 25$$

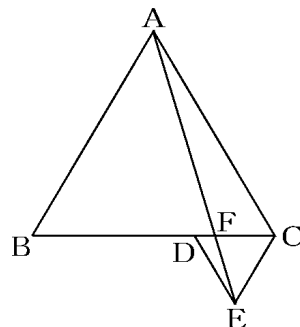


$\triangle ABC \sim \triangle CBD$   
相似比 8 : 5  
↓  
面積比  $8^2 : 5^2$

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図のように、1辺 6cm の正三角形 ABC と 1辺 2cm の正三角形 CDE がある。ただし、頂点 D は辺 BC 上にある。このとき、次の問いに答えなさい。(京都府改)

- (1) 頂点 A, E を結ぶ線分と辺 BC との交点を F とするとき、  
DF : FC を最も簡単な整数の比で表しなさい。
- (2) ABC の面積は、DEF の面積の何倍であるか答えなさい。



[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[解答](1) 1 : 3 (2) 36 倍

[解説]

(1) ABC, CDE は正三角形なので、

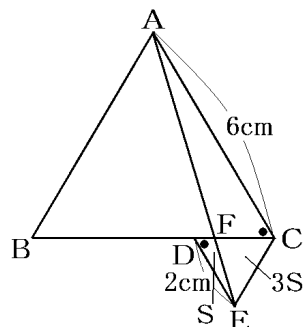
$\angle ACB = \angle CDE = 60^\circ$  で錯角が等しいので、 $AC \parallel DE$

よって、 $DF : FC = DE : AC = 2 : 6 = 1 : 3$

(2) <Point>最小の部分の面積を S とおく

DEF の面積を S とする。

DEF と CEF で、それぞれの底辺を DF, FC とすると、



高さは共通になるので、面積の比は底辺の比  $DF : FC = 1 : 3$  と等しくなる。

よって、( CEF の面積) =  $3S$  となる。

したがって、( CDE の面積) =  $S + 3S = 4S$

次に、 CDE と ABC の面積を比較する。

2つの三角形は正三角形なので相似である。相似比は  $DE : AC = 2 : 6 = 1 : 3$

面積比は相似比の2乗になるので、

$$( \text{CDE の面積} ) : ( \text{ABC の面積} ) = 1^2 : 3^2 = 1 : 9$$

$$( \text{CDE の面積} ) = 4S \text{ なので, } ( \text{ABC の面積} ) = 4S \times 9 = 36S$$

$$\text{よって, } ( \text{ABC の面積} ) \div ( \text{DEF の面積} ) = 36S \div S = 36(\text{倍})$$

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図で、ABC PQR であり、点 Q は辺 BC の中点で、点 R は辺 BC の延長上にある。また、点 D は辺 AC と辺 PQ との交点である。PQ = 2AB のとき、四角形 DCRP の面積は、四角形 ABQD の面積の何倍か。

(香川県)

[解答欄]

[解答]5 倍

[解説]

<Point>最小の部分の面積を S とおく

DQC の面積を S として、残りの部分の面積を S で表すことを考える。まず、四角形 ABQD について考える。

ABC PQR なので  $AB \parallel DQ$  となり、CDQ CAB

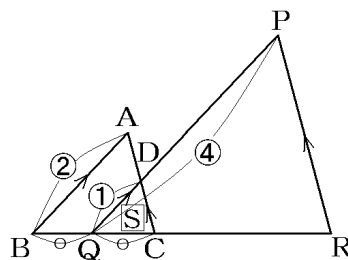
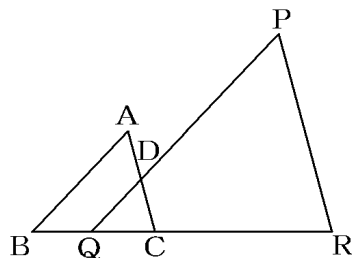
Q が CB の中点なので相似比は  $CQ : CB = 1 : 2$

面積比は相似比の2乗になるので、

$$( \text{CDQ の面積} ) : ( \text{CAB の面積} ) = 1^2 : 2^2 = 1 : 4$$

$$( \text{CDQ の面積} ) = S \text{ なので, } ( \text{CAB の面積} ) = 4S$$

$$\text{よって, } ( \text{四角形 ABQD の面積} ) = 4S - S = 3S \dots$$



次に、四角形 DCRP について考える。

$ABC \sim PQR$  なので  $DC \parallel PR$  となり、 $QCD \sim QRP$

$DQ : AB = 1 : 2$ ,  $AB : PQ = 1 : 2$  なので、 $DQ : PQ = 1 : 4$

よって、 $QCD$  と  $QRP$  の相似比は  $1 : 4$

面積比は相似比の 2 乗になるので、

(  $QCD$  の面積 ) : (  $QRP$  の面積 ) =  $1^2 : 4^2 = 1 : 16$

(  $QCD$  の面積 ) =  $S$  なので、(  $QRP$  の面積 ) =  $16S$

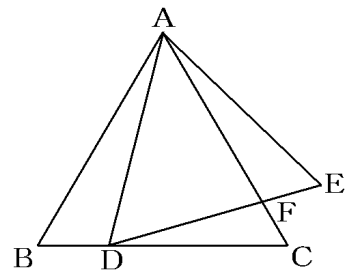
よって、(四角形 DCRP の面積) = (  $QRP$  の面積 ) - (  $QCD$  の面積 ) =  $16S - S = 15S \cdots$

よって、(四角形 DCRP の面積)  $\div$  (四角形 ABQD の面積) =  $15S \div 3S = 5$ (倍)

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図のように、正三角形  $ABC$  の辺  $BC$  上に点  $D$  をとり、  
 $AD$  を 1 辺とする正三角形  $ADE$  をつくり、 $AC$  と  $DE$  の交  
 点を  $F$  とする。  $BD : DC = 1 : 2$  のとき、  $DCF$  の面積は

$ABC$  の面積の何倍か。(和歌山県)



[解答欄]

[解答]  $\frac{4}{27}$  倍

[解説]

$ABD$  と  $DCF$  について調べてみる。

まず、等しい角を図の中に記入する。

$60^\circ$  を [ ] で表すと、 $ABC$ 、 $ADE$  が正三角形なので、  
 右図のように 3 つの角を [ ] で表す。

次に、 $CDF$  を [  $\times$  ]、 $ADB$  を [ ] と表す。

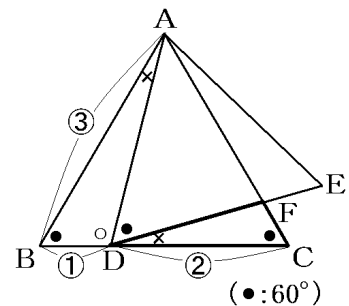
$CDF + ADE + ADB = 180^\circ$  なので、

[  $\times$  ] + [ ] + [ ] =  $180^\circ$

ところで、 $ABD$  で、 $BAD + [ ] + [ ] = 180^\circ$  なので、 $BAD = [ \times ]$  となる。

よって、 $ABD$  と  $DCF$  は 2 組の角がそれぞれ等しい([  $\times$  ] と [ ] ) ので相似になる。

$AB = BC = BD + DC$  なので、 $AB : DC = (1 + 2) : 2 = 3 : 2$



AB と DC は対応する辺なので， ABD と DCF の相似比は 3 : 2  
面積比は相似比の 2 乗になるので，

$$(\text{ABD の面積}) : (\text{DCF の面積}) = 3^2 : 2^2 = 9 : 4$$

したがって，( DCF の面積) = 4S とすると，( ABD の面積) = 9S

次に， ABD と ABC の面積比を求める。

BD, BC をそれぞれの三角形の底辺とすると，高さは共通なので，底辺の長さの比と面積比は等しくなる。

$$\text{よって，} (\text{ABD の面積}) : (\text{ABC の面積}) = \text{BD} : \text{BC} = 1 : (1 + 2) = 1 : 3$$

$$(\text{ABD の面積}) = 9S \text{ なので，} (\text{ABC の面積}) = 9S \times 3 = 27S$$

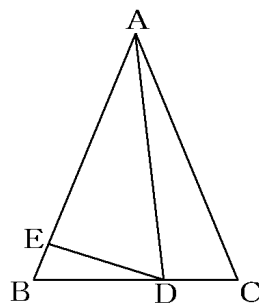
$$\text{したがって，} (\text{DCF の面積}) \div (\text{ABC の面積}) = 4S \div 27S = \frac{4S}{27S} = \frac{4}{27} \text{ (倍)}$$

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図で， ABC は AB = AC の二等辺三角形で， AB = 14cm，  
BC = 11cm である。また，点 D, E はそれぞれ辺 BC, AB 上にあり，  
ADE = ACD である。次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

(千葉県)

- (1) DEB ADC であることを証明しなさい。
- (2) ADC の面積と DEB の面積の比が 4 : 1 であるとき， ABC の面積は AED の面積の何倍か求めなさい。



[解答欄]

(1)

(2)

[解答]

(1) DEB と ADC において,

ABC は  $AB = AC$  の二等辺三角形なので,

$\angle DBE = \angle ACD \dots$

$\angle DBE = \angle ACD = a$  とおくと, 仮定より  $\angle ADE = \angle ACD = a$

$\angle ADC + \angle ADE + \angle BDE = 180^\circ$

$\angle ADC + a + \angle BDE = 180^\circ \dots$

ADC で, 三角形の内角の和は  $180^\circ$  なので,

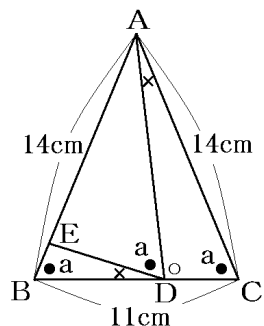
$\angle ADC + \angle ACD + \angle CAD = 180^\circ$

$\angle ADC + a + \angle CAD = 180^\circ \dots$

, より,  $\angle BDE = \angle CAD \dots$

, より, 2組の角がそれぞれ等しいので,

DEB ≅ ADC



(2)  $\frac{11}{6}$  倍

[解説]

(2) ADC と DEB の面積比が 4 : 1 であるので,

( DEB の面積) = S とおくと, ( ADC の面積) = 4S

面積比は相似比の 2 乗なので,

ADC と DEB の相似比は,  $\sqrt{4} : \sqrt{1} = 2 : 1$  となる。

したがって, ADC と DEB の対応する辺の比は 2 : 1 なので,

$AC : DB = 2 : 1$

$AC = 14\text{cm}$  なので,  $DB = 14 \div 2 = 7(\text{cm})$

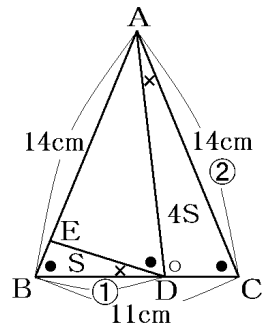
ADC と ABC の底辺をそれぞれ, CD, CB とすると, 高さは共通なので, 面積比は底辺の長さの比と等しくなる。

したがって, ( ADC の面積) : ( ABC の面積) =  $CD : CB = (11 - 7) : 11 = 4 : 11$

( ADC の面積) = 4S なので, ( ABC の面積) = 11S

( AED の面積) = ( ABC の面積) - ( DEB の面積) - ( ADC の面積) =  $11S - S - 4S = 6S$

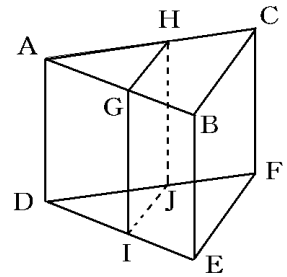
よって, ( ABC の面積)  $\div$  ( AED の面積) =  $11S \div 6S = \frac{11S}{6S} = \frac{11}{6}$  (倍)



【】底面積比

[問題](増補 10)(補充問題)

次の図の三角柱  $ABC - DEF$  の体積は  $64\text{cm}^3$  である。 $AB, AC, DE, DF$  の中点をそれぞれ  $G, H, I, J$  とする。 $G, H, I, J$  を通る平面でこの三角柱を切ったときにできる四角柱  $GBCH - IEFJ$  の体積を求めよ。



[解答欄]

[解答]  $48\text{cm}^3$

[解説]

三角柱  $ABC - DEF$  と三角柱  $AGH - DIJ$  の高さは同じなので、2つの三角柱の体積比は底面積の比と等しくなる。

$I$  は  $DE$  の中点で、 $J$  は  $DF$  の中点なので、中点連結定理より、 $IJ \parallel EF$ 、 $IJ = \frac{1}{2}EF$  となる。

したがって、 $DIJ$  と  $DEF$  は相似で、相似比は  $1 : 2$  になる。

相似比が  $1 : 2$  なので、面積比は  $1^2 : 2^2 = 1 : 4$  になる。

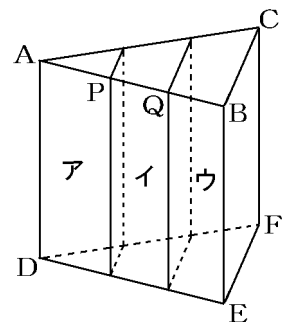
よって、2つの三角柱の体積比は  $1 : 4$  となる。

三角柱  $ABC - DEF$  の体積は  $64\text{cm}^3$  なので、三角柱  $AGH - DIJ$  の体積は、 $64 \div 4 = 16(\text{cm}^3)$  となる。

よって、四角柱  $GBCH - IEFJ$  の体積は  $64 - 16 = 48(\text{cm}^3)$  になる。

[問題](増補 10)(補充問題)

点  $A, B, C, D, E, F$  を頂点とする三角柱がある。図のように、辺  $AB$  を 3 等分する点を、それぞれ、 $P, Q$  とし、点  $P, Q$  を通って、側面  $BEFC$  に平行な面で切って、3つの角柱ア、イ、ウをつくる。このとき、角柱アの体積と角柱ウの体積の比を求めよ。(佐賀県)



[解答欄]

[解答]  $1 : 5$

[解説]

アの三角柱，ア+イの三角柱，ア+イ+ウの三角柱の底面の三角形は，それぞれ相似で，相似比は  $1 : 2 : 3$  である。したがって，底面積の比は  $1^2 : 2^2 : 3^2 = 1 : 4 : 9$  になる。

3つの三角柱の高さは同じであるので，体積比も  $1 : 4 : 9$  になる。

(アの三角柱の体積) : (ア+イの三角柱の体積) : (ア+イ+ウの三角柱の体積) =  $1 : 4 : 9$  になるので，(アの体積) : (イの体積) : (ウの体積) =  $1 : (4 - 1) : (9 - 4) = 1 : 3 : 5$  になる。

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図は体積が  $60\text{cm}^3$  の三角柱である。辺  $DE$ ， $DF$  の中点をそれぞれ  $P$ ， $Q$  とするとき，三角すい  $ADPQ$  の体積を求めよ。

(長野県)

[解答欄]

[解答]  $5\text{cm}^3$

[解説]

$DPQ$  の面積を  $S\text{cm}^2$ ，高さ  $AD$  を  $h\text{cm}$  とすると，

$$(\text{三角すい } ADPQ \text{ の体積}) = \frac{1}{3} Sh(\text{cm}^3)$$

$P$  は  $DE$  の中点， $Q$  は  $DF$  の中点なので，中点連結定理より，

$$PQ \parallel EF, PQ = \frac{1}{2} EF$$

よって， $DPQ$  と  $DEF$  は相似で，相似比は  $1 : 2$  となる。

したがって，面積比は  $1^2 : 2^2 = 1 : 4$  となる。

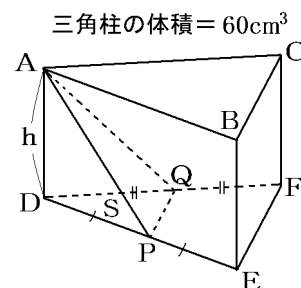
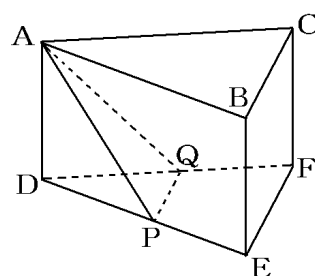
よって，( $DEF$  の面積) =  $4S(\text{cm}^2)$

ゆえに，(三角柱の体積) =  $4Sh(\text{cm}^3)$

$$(\text{三角すい } ADPQ \text{ の体積}) : (\text{三角柱の体積}) = \frac{1}{3} Sh : 4Sh = 1 : 12$$

(三角柱の体積) =  $60(\text{cm}^3)$  なので，

$$(\text{三角すい } ADPQ \text{ の体積}) = 60 \div 12 = 5(\text{cm}^3)$$

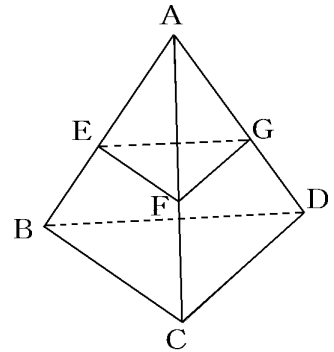


【】相似比と体積比 : 円すい角すい

[問題](増補 10)(補充問題)

右の図のような正四面体 ABCD で、辺 AB 上の点 E を通り、底面 BCD に平行な平面が、AC、AD と交わる点を、それぞれ F、G とする。AB = 12cm、AE : EB = 2 : 1 のとき、

- (1) EF の長さを求めよ。
- (2) 正四面体 AEFG の体積と正四面体 ABCD の体積の比を求めよ。



[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[解答](1) 8cm (2) 8 : 27

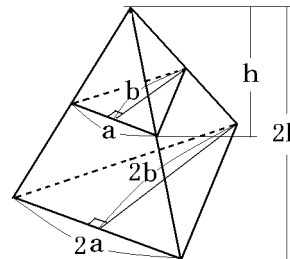
[解説]

<Point> 相似比 a : b 体積比 a<sup>3</sup> : b<sup>3</sup>

右図のように、2つの相似な三角すいがあり、相似比は 1 : 2 であるとする。

小さい三角すいの底面の三角形の底辺を a、高さを b とすると、大きい三角すいの底面の三角形の底辺は 2a、高さは 2b となる。

また、小さい三角すいの頂点から底面におろした高さを h とすると、大きい三角すいの高さは 2h になる。



相似比 1 : 2  
↓  
体積比 1<sup>3</sup> : 2<sup>3</sup>

$$(\text{小さい三角すいの体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times a \times b\right) \times h = \frac{1}{6} abh$$

$$(\text{大きい三角すいの体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2a \times 2b\right) \times 2h = \frac{8}{6} abh$$

すなわち、大きい三角すいの体積は、小さい三角すいの 2<sup>3</sup> = 8(倍)になり、体積比は、1<sup>3</sup> : 2<sup>3</sup> となる。

一般に、2つの相似な立体があり、相似比が a : b なら、体積比は a<sup>3</sup> : b<sup>3</sup> となる。

(1) EF // BC なので、EF : BC = AE : AB...

立体 ABCD は正四面体なので、BC = AB = 12cm

AE : EB = 2 : 1 なので、AE : AB = 2 : (2 + 1) = 2 : 3

より、 $EF : 12 = 2 : 3$

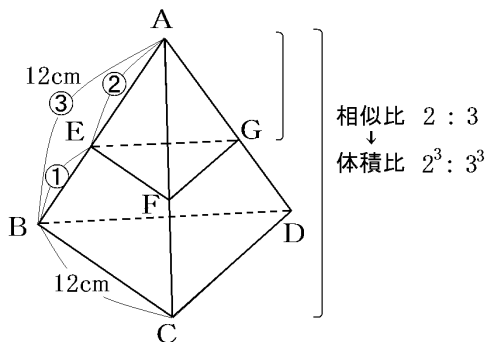
比の外項の積は内項の積に等しいので、

$$EF \times 3 = 12 \times 2, EF = 12 \times 2 \div 3 = 8(\text{cm})$$

(2) 正四面体 A EFG と正四面体 ABCD は相似で、

相似比は  $AE : AB = 2 : 3$

よって、体積比は、 $2^3 : 3^3 = 8 : 27$



[問題](増補 10)(補充問題)

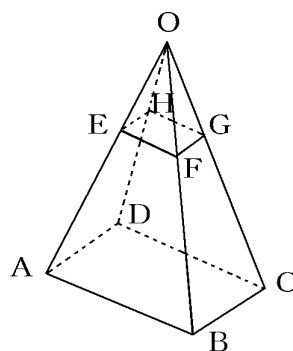
次の図のような四角すい O - ABCD がある。底面 ABCD は長方形で、切り口 EFGH は底面に平行である。AB = 8cm, BC = 6cm, 高さ 15cm, EF = 2cm である。

(1) 四角すい O - ABCD と O - EFGH の体積比を求めよ。

(2) 切り取った残りの四角すい台の体積を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----



[解答](1)  $64 : 1$  (2)  $\frac{945}{4} \text{cm}^3$

[解説]

<Point> 相似比  $a : b$  体積比  $a^3 : b^3$

(1) 2 つの四角すいは相似で、

相似比は  $AB : EF = 8 : 2 = 4 : 1$

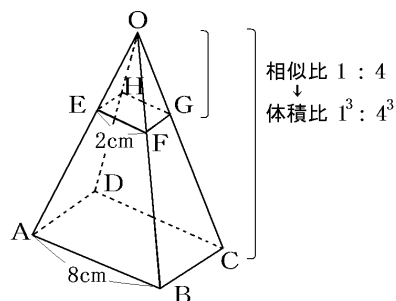
したがって、体積比は  $4^3 : 1^3 = 64 : 1$

(2) (四角すい O - ABCD の体積) =  $\frac{1}{3} \times AB \times BC \times (\text{高さ})$

$$= \frac{1}{3} \times 8 \times 6 \times 15 = 240(\text{cm}^3)$$

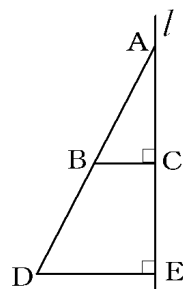
(四角すい O - ABCD の体積) = (四角すい O - EFGH の体積)  $\times \frac{1}{64} = 240 \times \frac{1}{64} = \frac{15}{4}(\text{cm}^3)$

よって、(四角すい台の体積) =  $240 - \frac{15}{4} = \frac{960 - 15}{4} = \frac{945}{4}(\text{cm}^3)$



[問題](増補 10)(補充問題)

直角三角形  $ABC$ ,  $ADE$  を  $l$  を軸として回転し、立体を作る。このとき、 $ABC$  を回転してできる立体と、台形  $BDEC$  を回転してできる立体の体積比を求めよ。ただし、 $AC = CE$  である。



[解答欄]

[解答] 1 : 7

[解説]

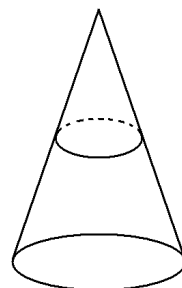
<Point> 相似比  $a : b$  体積比  $a^3 : b^3$

直角三角形  $ABC$ ,  $ADE$  を  $l$  を軸として回転したできる 2 つの円すいは相似で、相似比は  $AC : AE = 1 : 2$  である。したがって、体積比は、 $1^3 : 2^3 = 1 : 8$  である。

台形  $BDEC$  を回転してできる円すい台は大きい円すいから小さい円すいをひいたものなので、(小さい円すいの体積) : (円すい台の体積) =  $1 : (8 - 1) = 1 : 7$

[問題](増補 10)(補充問題)

次の図のような、高さが  $60\text{cm}$  の円すいの容器に、底面から  $30\text{cm}$  の高さまで水を入れた。入れた水の量は、この円すいの容積の何分のいくつか。



[解答欄]

[解答]  $\frac{7}{8}$

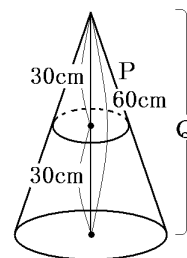
[解説]

2 つの円すい  $P$ ,  $Q$  は相似である。 $P$  の円すいの高さは  $30\text{cm}$  で、 $Q$  の円すいの高さは  $60\text{cm}$  なので、相似比は  $30 : 60 = 1 : 2$  になる。

したがって、体積比は  $1^3 : 2^3 = 1 : 8$

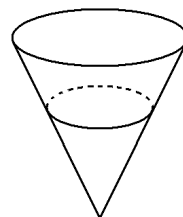
よって、 $Q$  から  $P$  を除いた円すい台の部分の体積の割合は  $8 - 1 = 7$  なの

で、円すい  $Q$  の  $7 \div 8 = \frac{7}{8}$  (倍) になる。



[問題](増補 10)(補充問題)

次のような、底面の半径が 15cm、高さが 30cm の円すいの容器がある。この容器に 20cm の高さまで水を入れたとき、この水の体積は、容器の容積の何分のいくつか。



[解答欄]

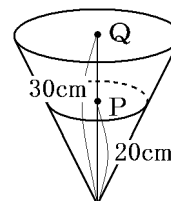
[解答]  $\frac{8}{27}$

[解説]

2つの円すい P, Q は相似である。P の円すいの高さは 20cm で、Q の円すいの高さは 30cm なので、相似比は  $20 : 30 = 2 : 3$  になる。

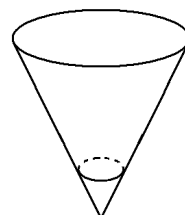
したがって、体積比は  $2^3 : 3^3 = 8 : 27$

よって、(P の体積) ÷ (Q の体積) =  $8 \div 27 = \frac{8}{27}$



[問題](増補 10)(補充問題)

次の図のような円すい形の容器に、 $200\text{cm}^3$  の水を入れたら深さが 4cm になった。さらに水を入れて、深さを 2 倍にしたい。何  $\text{cm}^3$  の水を入れればよいか。



[解答欄]

[解答]  $1400\text{cm}^3$

[解説]

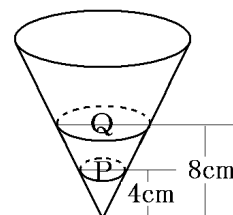
2つの円すい P, Q は相似である。Q の円すいの高さは P の円すいの高さの 2 倍なので、相似比は  $1 : 2$  になる。

したがって、体積比は  $1^3 : 2^3 = 1 : 8$  になる。

P の部分の体積は  $200\text{cm}^3$  であるので、

(Q の体積) =  $200(\text{cm}^3) \times 8 = 1600(\text{cm}^3)$

よって、加える水の量は、(Q の体積) - (P の体積) =  $1600 - 200 = 1400(\text{cm}^3)$



[問題](増補 10)(補充問題)

右の図の立体は、底面の半径 HA が 4cm、高さ OH が 10cm の円すいを、OH の中点 K を通り底面に平行な平面で切り、小さな円すいを取り除いたものである。このとき、立体の体積はいくらか。

(岡山県)

[解答欄]

[解答]  $\frac{140}{3} \pi \text{ cm}^3$

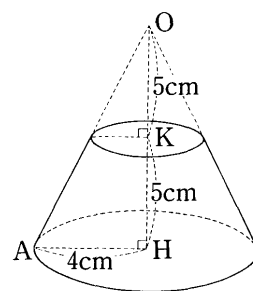
[解説]

(もとの円すいの体積) =  $\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 10 = \frac{160\pi}{3} (\text{cm}^3)$

もとの円すいの高さは 10cm、切り取った円すいの高さは 5cm なので、  
2つの円すいの相似比は 2 : 1 になる。したがって、体積比は  $2^3 : 1^3 = 8 : 1$  なので、

(切り取った円すい) =  $\frac{160\pi}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{20\pi}{3} (\text{cm}^3)$

よって、(切り取った後の円すい台の体積) =  $\frac{160\pi}{3} - \frac{20\pi}{3} = \frac{140\pi}{3} (\text{cm}^3)$



[問題](増補 10)(補充問題)

上底面の半径 3cm、下底面の半径 5cm、高さ 4cm の円すい台の体積を求めよ。

[解答欄]

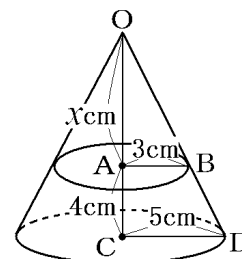
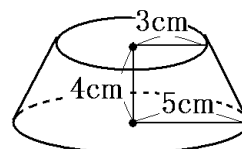
[解答]  $\frac{196\pi}{3} \text{ cm}^3$

[解説]

この円すい台は右図のような円すいを切り取ってつくったものである。まず、OA の長さを求める。

OAB ~ OCD なので、OA : OC = AB : CD

よって、 $x : (x+4) = 3 : 5$



比の外項の積は内項の積に等しいので、

$$x \times 5 = (x + 4) \times 3, \quad 5x = 3x + 12, \quad 5x - 3x = 12, \quad 2x = 12, \quad x = 6$$

$$\text{よって、(小さい方の円すいの体積)} = \frac{1}{3} \times 3 \times 3 \times \quad \times 6 = 18 \quad (\text{cm}^3)$$

大きい円すいと小さい円すいの相似比は、 $CD : AB = 5 : 3$

したがって、体積比は  $5^3 : 3^3 = 125 : 27$

$$\text{よって、(大きい方の円すいの体積)} = 18 \quad \times \frac{125}{27} = \frac{250\pi}{3} \quad (\text{cm}^3)$$

したがって、(円すい台の体積) = (大きい方の円すいの体積) - (小さい方の円すいの体積)

$$= \frac{250\pi}{3} - 18\pi = \frac{250\pi - 54\pi}{3} = \frac{196\pi}{3} \quad (\text{cm}^3)$$

【】相似比と体積比 : 立体の切断

[問題](増補 10)(補充問題)

図のように底面が  $AB = 6\text{cm}$  ,  $BC = 8\text{cm}$  ,  $\angle ABC = 90^\circ$  の直角三角形で、高さが  $4\text{cm}$  の三角柱がある。辺  $DE$  ,  $DF$  の中点をそれぞれ  $P$  ,  $Q$  とする。平面  $PBCQ$  で三角柱を切るとき、 $A$  を含む側の体積を求めよ。

(新田高)

[解答欄]

[解答]  $56\text{cm}^3$

[解説]

<Point>  $AD$  ,  $BP$  ,  $CQ$  の延長線 1 点で交わる。

右図のように、この三角柱を上方向にのばした図形を考える。同時に  $AD$  ,  $BP$  ,  $CQ$  を延長すると、3 直線は 1 点  $O$  で交わる。

$DP \parallel AB$  ,  $DP : AB = 1 : 2$  なので、

$OD : OA = 1 : 2$  となる。

したがって、 $OD = DA = 4(\text{cm})$  ,  $OA = 4 + 4 = 8(\text{cm})$

まず、三角すい  $O - ABC$  の体積を求める。

(底面  $ABC$  の面積)  $= AB \times BC \div 2 = 6 \times 8 \div 2 = 24(\text{cm}^2)$

( $O - ABC$  の体積)  $= \frac{1}{3} \times (\text{底面 } ABC \text{ の面積}) \times (\text{高さ } OA)$

$$= \frac{1}{3} \times 24 \times 8 = 64(\text{cm}^3)$$

次に、三角すい  $O - DPQ$  の体積を求める。

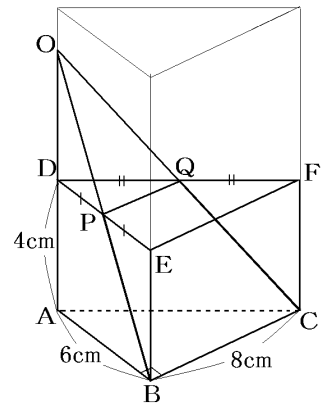
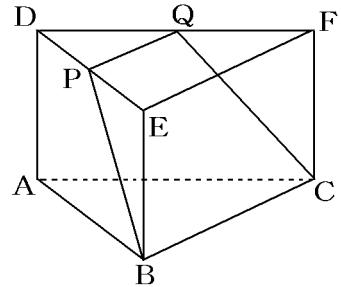
三角すい  $O - DPQ$  と三角すい  $O - ABC$  は相似で、

相似比は  $OD : OA = 4 : 8 = 1 : 2$

したがって、体積比は  $1^3 : 2^3 = 1 : 8$

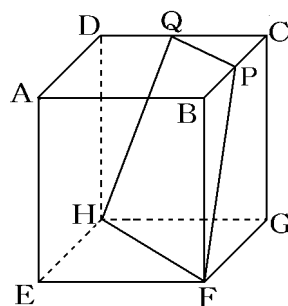
よって、( $O - DPQ$  の体積)  $= (O - ABC \text{ の体積}) \times \frac{1}{8} = 64 \times \frac{1}{8} = 8(\text{cm}^3)$

よって、( $O - ABC$  の体積)  $- (O - DPQ \text{ の体積}) = 64 - 8 = 56(\text{cm}^3)$



[問題](増補 10)(補充問題)

右の図のように、1辺4cmの立方体において、辺BC, CD上にそれぞれ中点P, Qをとり、4点P, Q, H, Fを通る平面でこの直方体を切った。このとき、立体PCQ-FGHの体積を求めなさい。(長崎県)



[解答欄]

[解答]  $\frac{56}{3} \text{ cm}^3$

[解説]

<Point> 右図のように、GC, FP, HQを延長して考える。

$$OC : OG = PC : FG = 2 : 4 = 1 : 2$$

よって、 $OC = CG = 4\text{cm}$  ,  $OG = 8\text{cm}$

$$(\text{O} - \text{HFGの体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

$$= \frac{1}{3} \times (4 \times 4 \div 2) \times 8 = \frac{64}{3} (\text{cm}^3)$$

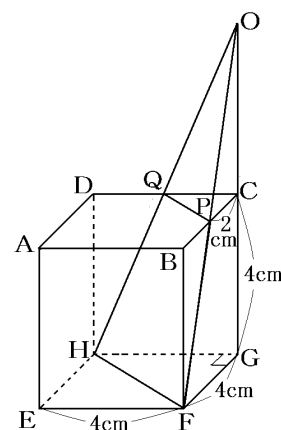
三角すいO-QPCと三角すいO-HFGは相似で、

相似比は、 $PC : FG = 1 : 2$ なので、体積比は $1^3 : 2^3 = 1 : 8$

$$\text{よって、} (\text{O} - \text{QPCの体積}) = (\text{O} - \text{HFGの体積}) \times \frac{1}{8} = \frac{64}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{8}{3} (\text{cm}^3)$$

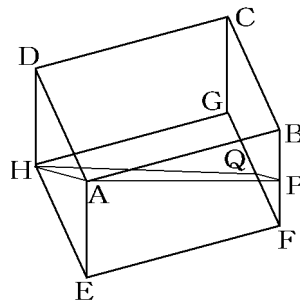
よって、(立体PCQ-FGHの体積) = (O-HFGの体積) - (O-QPCの体積)

$$= \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3} (\text{cm}^3)$$



[問題](増補 10)(補充問題)

右の図は、 $AD = AE = 8\text{cm}$  ,  $AB = 12\text{cm}$  の直方体の容器 ABCD-EFGH に水がいっぱい入っていたものを傾けて、水面が四角形 APQH になるところまで水を流し出したものである。点 P, Q がそれぞれ辺 BF, FG の中点であるとき、容器に残っている水の体積を求めなさい。(高知県)



[解答欄]

--

[解答]224cm<sup>3</sup>

[解説]

<Point> EF, AP, HQ を延長して考える。

$$OF : OE = PF : AE = 4 : 8 = 1 : 2$$

よって, OF = FE = 12cm, OE = 24cm

三角すい O - AHE の底面を AHE とすると,

高さは OE = 24cm

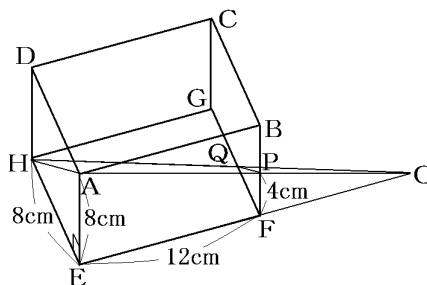
$$(\text{底面積}) = HE \times AE \div 2 = 8 \times 8 \div 2 = 32(\text{cm}^2)$$

$$(\text{三角すい O - AHE の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times 32 \times 24 = 256(\text{cm}^3)$$

三角すい O - PQF と三角すい O - AHE は相似で, 相似比は PF : AE = 1 : 2 なので, 体積比は, 1<sup>3</sup> : 2<sup>3</sup> = 1 : 8

$$\text{よって, } (\text{三角すい O - PQF の体積}) = 256 \times \frac{1}{8} = 32(\text{cm}^3)$$

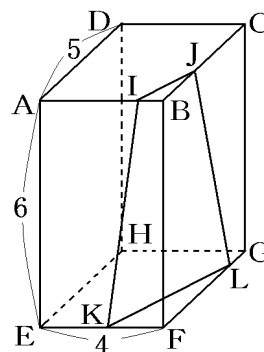
$$\text{ゆえに, } (\text{三角すい O - AHE の体積}) - (\text{三角すい O - PQF の体積}) = 256 - 32 = 224(\text{cm}^3)$$



[問題](増補 10)(補充問題)

右の図のように辺の長さが与えられた直方体 ABCD - EFGH がある。いま, BI = 1, BJ = 2, FK = 2 となるように辺 AB, BC, EF 上に点 I, J, K をとり, 3 点 I, J, K を通る平面と辺 FG との交点を L とする。このとき, 次の問いに答えよ。(郁文館高)

- (1) 線分 FL の長さを求めよ。
- (2) この直方体は, 3 点 I, J, K を通る平面によって 2 つの立体に分けられる。このとき, 小さいほうの立体の体積を求めよ。



[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[解答](1) 4 (2) 14

[解説]

(1) <Point> KI, FB, LJ を延長して考える。

IB // KF, IB : KF = 1 : 2 なので, OB : OF = 1 : 2

BJ // FL なので, BJ : FL = OB : OF

よって, 2 : FL = 1 : 2 ゆえに, FL = 2 × 2 = 4

(2) OF = 6 × 2 = 12, (O - KFL の体積) =  $\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$

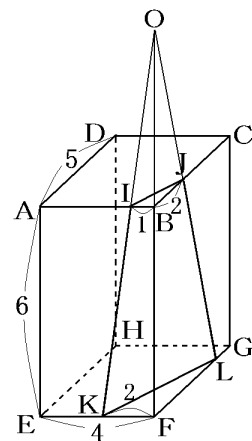
$$= \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times KF \times FL \right) \times OF = \frac{1}{6} \times 2 \times 4 \times 12 = 16$$

三角すい O - IBJ と三角すい O - KFL は相似で, 相似比は,

IB : KF = 1 : 2 なので, 体積比は  $1^3 : 2^3 = 1 : 8$

よって, (O - IBJ の体積) = (O - KFL の体積) ×  $\frac{1}{8} = 16 \times \frac{1}{8} = 2$

ゆえに, (O - KFL の体積) - (O - IBJ の体積) = 16 - 2 = 14



[問題](増補 10)(補充問題)

右の図の立体 ABCD - EFGH は, 1 辺の長さが  $a$  cm の立方体である。点 P は, 辺 AD 上の点で, AP : PD = 2 : 1 とする。今, 3 点 F, C, P を通る平面でこの立方体を切った。2 つに分けられた立体のうち, 頂点 B がある方の立体の体積を求めなさい。

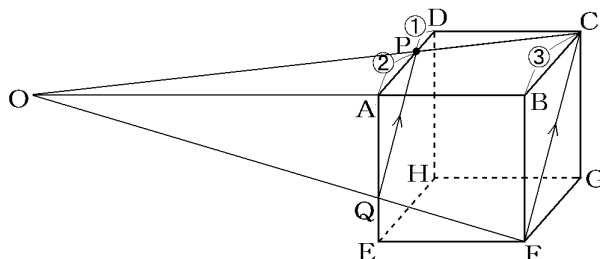
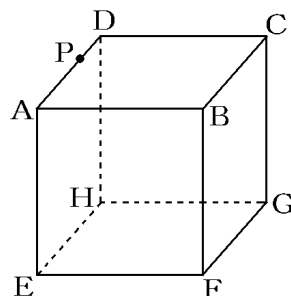
(山形県)

[解答欄]

[解答]  $\frac{19}{54} a^3 \text{ cm}^3$

[解説]

3 点 F, C, P を通る平面が AEHD の面と交わってできる直線は CF と平行になるので, 右図の PQ のようになる。したがって, この平面によって切り取られ頂点 B をふくむ立体は, 右



図の APQ - BCF になる。

CP, BA, FQ を延長すると, 3 直線は 1 点で交わる。

AP : PD = 2 : 1, AD = BC なので, AP : BC = 2 : (2 + 1) = 2 : 3

したがって, OA : OB = AP : BC = 2 : 3, OA : AB = 2 : 1

AB = a cm なので, OA = 2a cm, OB = 3a cm

$$(O - BCF \text{ の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積 BCF}) \times (\text{高さ OB}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times a \times a \times 3a = \frac{1}{2} a^3 \text{ (cm}^3\text{)}$$

三角すい O - APQ と三角すい O - BCF は相似で, 相似比は AP : BC = 2 : 3 なので,

体積比は  $2^3 : 3^3 = 8 : 27$

$$\text{よって, (O - APQ の体積)} = (\text{O - BCF の体積}) \times \frac{8}{27} = \frac{1}{2} a^3 \times \frac{8}{27} = \frac{4}{27} a^3 \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\text{ゆえに, (O - BCF の体積)} - (\text{O - APQ の体積}) = \frac{1}{2} a^3 - \frac{4}{27} a^3 = \frac{27}{54} a^3 - \frac{8}{54} a^3$$

$$= \frac{19}{54} a^3 \text{ (cm}^3\text{)}$$

[印刷 / 他の PDF ファイルについて]

このファイルは、FdData 中間期末数学 3 年(7,200 円)の一部を PDF 形式に変換したサンプルで、印刷はできないようになっています。製品版の FdData 中間期末数学 3 年は Word(または一太郎)の文書ファイルで、印刷・編集を自由に行うことができます。FdData 中間期末(社会・理科・数学)全分野の PDF ファイル、および製品版の購入方法は <http://www.fdtex.com/dat/> に掲載しております。

下図のような、[FdData 無料閲覧ソフト(RunFdData)]を、Windows のデスクトップ上にインストールすれば、FdData 中間期末・FdData 入試の全 PDF ファイル(各教科約 1500 ページ)を自由に閲覧できます。次のリンクを左クリックするとインストールが開始されます。

RunFdData(Word 版) 【 <http://www.fdtex.com/lnk/instRunFdDataWDs.exe> 】

RunFdData(一太郎版) 【 <http://www.fdtex.com/lnk/instRunFdDataTAs.exe> 】

ダイアログが表示されたら、【実行】ボタンを左クリックしてください。インストール中、いくつかの警告が出ますが、[実行][許可する][次へ]等を選択します。

【イメージ画像】



【Fd 教材開発 : URL <http://www.fdtex.com/dat/> Tel (092) 404-2266】