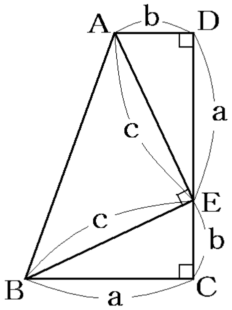
【】三平方の定理

[問題](3 学期)

直角をはさむ２辺が a, b，斜辺が c の２つの直角三角形を，右図のように組み合わせて台形 ABCD を作った。この図を使って，三平方の定理を次のように証明した。(　　)にあてはまる面積の式を最も簡単な式で表せ。



(証明)

台形 ABCD＝(　ア　)

△ADE＋△ECB＝(　イ　)

△ABE＝(　ウ　)

ここで，(ア)－(イ)＝(ウ)であるから，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つ。

[解答欄]

ア	イ	ウ

[解答]ア $\frac{1}{2}(a+b)^2$　イ ab　ウ $\frac{1}{2}c^2$

[解説]

(台形 ABCD の面積)＝$\frac{1}{2}$((上底)＋(下底))×(高さ)＝$\frac{1}{2}(b+a)\times(a+b)=\frac{1}{2}(a+b)^2$

(△ADE の面積)＝$\frac{1}{2}ab$，(△ECB の面積)＝$\frac{1}{2}ab$ なので，

(△ADE の面積＋△ECB の面積)＝$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab=ab$

(△ABE の面積)＝$\frac{1}{2}\times c\times c=\frac{1}{2}c^2$

(台形 ABCD の面積)－(△ADE の面積＋△ECB の面積)＝(△ABE の面積)なので，

$\frac{1}{2}(a+b)^2-ab=\frac{1}{2}c^2$

両辺を２倍すると，$(a+b)^2-2ab=c^2$，$a^2+2ab+b^2-2ab=c^2$

よって，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つ。

[問題](3 学期)

次の問いに答えなさい。

(1) 直角三角形の直角をはさむ 2 辺をa, b, 斜辺の長さをcとすると，a, b, cの間にはどんな関係が成り立ちますか。式で答えなさい。

(2) (1)の定理の名前を 2 通りで答えなさい。

[解答欄]

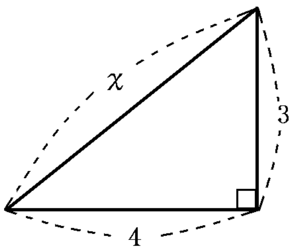
(1)	(2)

[解答](1) $a^2+b^2=c^2$ (2) 三平方の定理，ピタゴラスの定理

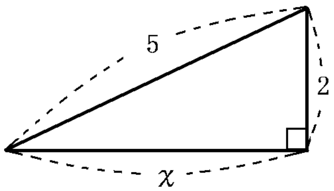
[問題](2 学期期末)

次の図のxの値を求めなさい。

(1)



(2)



[解答欄]

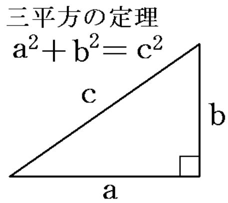
(1)	(2)

[解答](1) 5 (2) $\sqrt{21}$

[解説]

(1) $x^2=4^2+3^2=16+9=25$， $x=5$

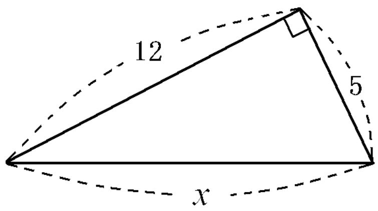
(2) $x^2+2^2=5^2$， $x^2=25-4=21$， $x=\sqrt{21}$



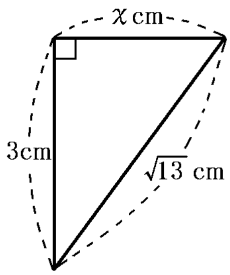
[問題](2 学期期末)

次の図のxの値を求めなさい。

(1)



(2)

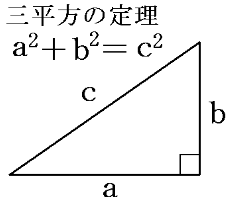


[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 13　(2) 2

[解説]



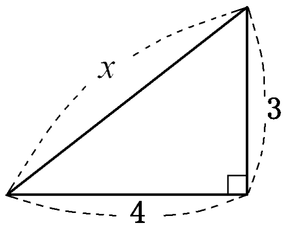
(1)　$x^2=12^2+5^2=144+25=169$，ゆえに $x=\sqrt{169}=13$

(2)　$x^2+3^2=\left(\sqrt{13}\right)^2$，$x^2=4$，$x=2$

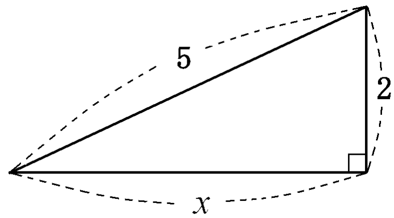
[問題](3 学期)

　次の図の x の値を求めなさい。

(1)



(2)



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1)　5　(2)　$\sqrt{21}$

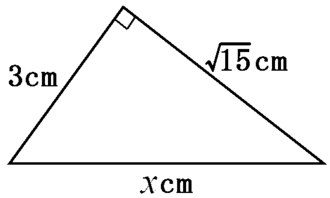
[解説]

(1)　$x^2=3^2+4^2=25$，　$x=5$

(2)　$x^2+2^2=5^2$，$x^2=21$，　$x=\sqrt{21}$

[問題](3 学期)

　右の図で，x の値を求めなさい。



[解答欄]

[解答] $2\sqrt{6}$

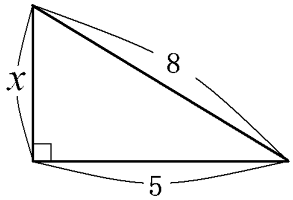
[解説]

$$x^2=3^2+\left(\sqrt{15}\right)^2=9+15=24,\quad x=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

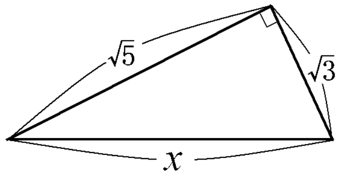
[問題](3 学期)

下の図で，x の値を求めなさい。

(1)



(2)



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $\sqrt{39}$　(2) $\sqrt{2}$

[解説]

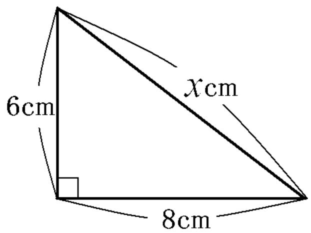
(1) $x^2+5^2=8^2$，$x^2=64-25=39$　よって，$x=\sqrt{39}$

(2) $x^2=\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=8$，よって，$x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

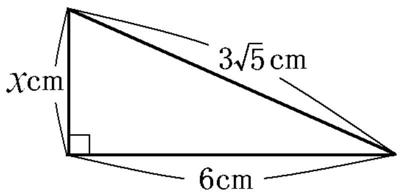
[問題](3 学期)

下の図で x の値を求めなさい。

(1)



(2)



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 10　(2) 3

[解説]

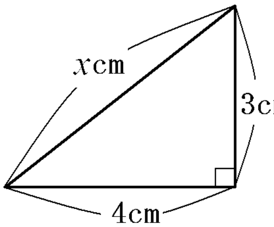
(1) $x^2=6^2+8^2=36+64=100$　よって，$x=10$

(2) $x^2+6^2=\left(3\sqrt{5}\right)^2$，$x^2=45-36=9$　よって，$x=3$

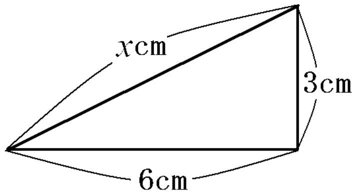
[問題](3 学期)

次の各図で x の値を求めなさい。

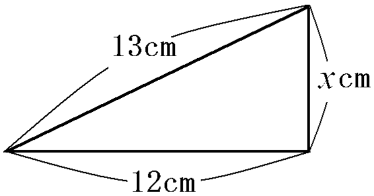
(1)



(2)



(3)



[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[解答](1) 5　(2) $3\sqrt{5}$　(3) 5

[解説]

(1) $x^2 = 4^2 + 3^2 = 25$，よって，$x = 5$

(2) $x^2 = 6^2 + 3^2 = 45$，$x = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

(3) $x^2 + 12^2 = 13^2$，$x^2 + 144 = 169$，$x^2 = 25$，よって，$x = 5$

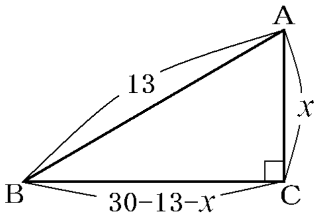
[問題](3 学期)

周の長さが 30cm で，斜辺の長さが 13cm の直角三角形がある。この直角三角形の残りの 2 辺の長さを求めなさい。(2 辺のうち 1 辺の長さを x cm として，方程式をたて，解きなさい。)

[解答欄]

[解答]5cm と 12cm

[解説]



右の図のような直角三角形で，斜辺 AB＝13cm，AC＝ x cm とすると，周の長さが 30cm なので，

BC＝30－13－ x ＝17－ x (cm)となる。

三平方の定理より，

$x^2+(17-x)^2=13^2$, $x^2+x^2-34x+17^2=13^2$,

$2x^2-34x+289-169=0$

$2x^2-34x+120=0$, $x^2-17x+60=0$, $(x-5)(x-12)=0$　よって， $x=5,\ 12$

$x=5$ のとき $17-x=12$ ， $x=12$ のとき $17-12=5$　これは問題にあてはまる。

よって，2 辺の長さは 5cm と 12cm

【】三平方の定理の逆

[問題](2 学期期末)

次の長さを 3 辺とする三角形のうち，直角三角形となるのはどれですか。

ア 4cm，5cm，6cm　　イ $\sqrt{2}$ cm，2cm，$\sqrt{5}$ cm　　ウ 6cm，8cm，10cm

[解答欄]

[解答]ウ

[解説]

(1 番長い辺)^2＝(他の 1 辺)^2＋(他の 1 辺)^2 が成り立つとき直角三角形になる。

ア $6^2=36,\ 5^2+4^2=41$，$6^2\neq5^2+4^2$ なので直角三角形ではない。

イ $\left(\sqrt{5}\right)^2=5,\ 2^2+\left(\sqrt{2}\right)^2=6$，$\left(\sqrt{5}\right)^2\neq2^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$ なので直角三角形ではない。

ウ $10^2=100,\ 6^2+8^2=100$，$10^2=6^2+8^2$ なので直角三角形である。

[問題](2 学期期末)

次の長さを 3 辺とする三角形のうち，直角三角形はどれか。

ア 5cm，6cm，8cm　　イ 5cm，12cm，13cm

ウ 2cm，$\sqrt{5}$ cm，3cm　　エ 1.5cm，2.5cm，3.5cm

[解答欄]

[解答]イ，ウ

[解説]

(1 番長い辺)^2＝(他の 1 辺)^2＋(他の 1 辺)^2 が成り立つとき直角三角形になる。

ア $8^2=64,\ 5^2+6^2=61$，$8^2\neq5^2+6^2$ なので直角三角形ではない。

イ $13^2=169,\ 5^2+12^2=169$，$13^2=5^2+12^2$ なので直角三角形である。

ウ $3^2=9,\ 2^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=9$，$3^2=2^2+\left(\sqrt{5}\right)^2$ なので直角三角形である。

エ $3.5^2=12.25,\ 1.5^2+2.5^2=8.5$，$3.5^2\neq1.5^2+2.5^2$ なので直角三角形ではない。

[問題](2 学期期末)

次の長さを 3 辺とする三角形のうち，直角三角形であるものをすべて記号で答えなさい。

ア 4cm，5cm，6cm　　イ 7cm，24cm，25cm

ウ $\sqrt{6}$ cm，2cm，$\sqrt{10}$ cm　　エ 6m，8m，10m

[解答欄]

[解答]イ，ウ，エ

[解説]

(1 番長い辺)²＝(他の 1 辺)²＋(他の 1 辺)² が成り立つとき直角三角形になる。

ア $6^2=36,\ 4^2+5^2=41$，$6^2\neq 4^2+5^2$ なので直角三角形ではない。

イ $25^2=625,\ 7^2+24^2=625$，$25^2=7^2+24^2$ なので直角三角形である。

ウ $\left(\sqrt{10}\right)^2=10,\ \left(\sqrt{6}\right)^2+2^2=10$，$\left(\sqrt{10}\right)^2=\left(\sqrt{6}\right)^2+2^2$ なので直角三角形である。

エ $10^2=100,\ 6^2+8^2=100$，$10^2=6^2+8^2$ なので直角三角形である。

【】座標平面上の長さ

[問題](3 学期)

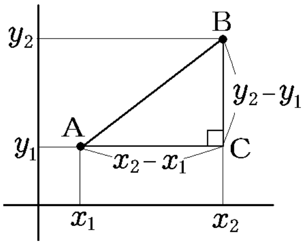
次の座標をもつ 2 点間の距離を求めなさい。

A(4，4)，　B(1，2)

[解答欄]

[解答] $\sqrt{13}$

[解説]



右図のように，座標上の 2 点 A$\left(x_1,\ y_1\right)$，B$\left(x_2,\ y_2\right)$がある。

このとき，AC＝x_2-x_1，BC＝y_2-y_1

△ABC は直角三角形なので，三平方の定理より，

AB²＝AC²＋BC²＝$\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2$

よって，AB＝$\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$

この問題では，AB＝$\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

※A，B の x 座標(y 座標)のどちらからどちらを引くかは自由である。例えば，

AB＝$\sqrt{(1-4)^2+(2-4)^2}=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

と計算することもできる。

また，x 座標(y 座標)がマイナスであっても，$\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$ の公式を使うことができる。例えば，C(－1，－5)，D(－3，2)のとき，

CD＝$\sqrt{(-1-(-3))^2+(-5-2)^2}=\sqrt{2^2+(-7)^2}=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}$ となる。

[問題](3 学期)

次の 2 点間の距離を求めなさい。

(1) (1，1)，(4，5)　　　(2) (－2，3)，(1，5)

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 5　(2) $\sqrt{13}$

[解説]

座標上の 2 点 A$\left(x_1,\ y_1\right)$，B$\left(x_2,\ y_2\right)$の距離は

(2 点間の距離)＝$\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$ の式で求めることができる。

(1) (2 点間の距離)＝$\sqrt{\left(4-1\right)^2+\left(5-1\right)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

(2) (2 点間の距離)＝$\sqrt{\left(1-\left(-2\right)\right)^2+\left(5-3\right)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

[問題](3 学期)

座標平面において 3 点 A(4，3)，B(−2，5)，C(2，−3)を頂点とする△ABC について，次の各問いに答えなさい。

(1) 3 つの辺の長さをそれぞれ求めなさい。

(2) ABC はどんな三角形か答えなさい。

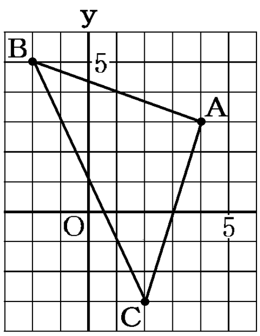
[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) AB＝$2\sqrt{10}$，BC＝$4\sqrt{5}$，CA＝$2\sqrt{10}$　(2) ∠A が直角である直角二等辺三角形

[解説]

(1) (2 点間の距離)＝$\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$ の式で求めることができる。



AB＝$\sqrt{\left(4-\left(-2\right)\right)^2+\left(3-5\right)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

BC＝$\sqrt{\left(-2-2\right)^2+\left(5-\left(-3\right)\right)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

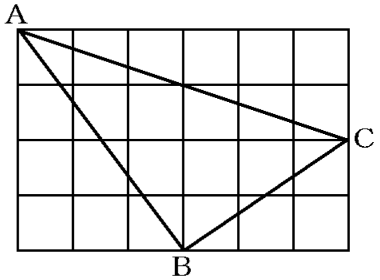
CA＝$\sqrt{\left(4-2\right)^2+\left(3-\left(-3\right)\right)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

(2) (1 番長い辺)^2＝(他の 1 辺)^2＋(他の 1 辺)^2 が成り立つとき直角三角形になる。
BC^2＝80，AB^2＋CA^2＝40＋40＝80 なので，BC^2＝AB^2＋CA^2 となり，△ABC は∠A が直角の直角三角形。また，AB＝AC なので，△ABC は直角二等辺三角形である。

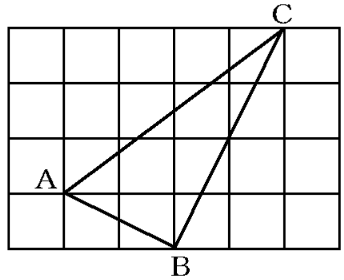
[問題](2 学期期末)

下の図のように，方眼紙に書かれた△ABC がある。 △ABC は直再三角形といえますか。○，×で答えなさい。

(1)



(2)



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) ×　(2) ○

[解説]

(1 番長い辺)^2＝(他の 1 辺)^2＋(他の 1 辺)^2 が成り立つとき直角三角形になる。

(1) 1 番長い辺は AC，図より AC^2＝$2^2+6^2=40$

AB^2＝$4^2+3^2=25$，BC^2＝$2^2+3^2=13$ なので AB^2＋BC^2＝38

ゆえに AC^2≠AB^2＋BC^2　よって，直角三角形ではない。

(2) 1 番長い辺は AC，図より AC^2＝$3^2+4^2=25$

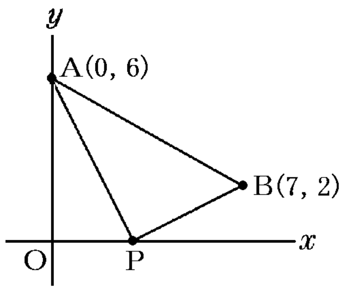
AB^2＝$1^2+2^2=5$，BC^2＝$4^2+2^2=20$ なので AB^2＋BC^2＝25

ゆえに AC^2＝AB^2＋BC^2　よって，直角三角形である。

[問題](入試問題)

右の図のように，x 軸上の点 P と 2 点 A(0，6)，B(7，2)を結んで△ABP をつくる。このとき，△ABP が，∠APB＝90°の直角三角形となるような点 P の x 座標をすべて求めなさい。ただし，点 P の x 座標は正とする。

(三重県)



[解答欄]

[解答]3，4

[解説]

点Pの座標を$(a, 0)$とおく。

△ABPが∠APB＝90°の直角三角形となることより，$AP^2+BP^2=AB^2$

$AP^2=(a-0)^2+(0-6)^2=a^2+36$

$BP^2=(a-7)^2+(0-2)^2=a^2-14a+49+4=a^2-14a+53$

$AB^2=(7-0)^2+(2-6)^2=49+16=65$

よって，$a^2+36+a^2-14a+53=65$

$2a^2-14a+24=0,\ a^2-7a+12=0,\ (a-3)(a-4)=0$

よって，$a=3,\ 4$

[問題](2学期期末)

座標軸において，2点A，Bの間の距離が$5\sqrt{2}$であり，Aの座標が(－2，－1)のときBの座標を求めなさい。ただし，Bは，x座標，y座標とも，自然数である。

[解答欄]

[解答](3，4)

[解説]

座標上の2点$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$の距離は

AB＝$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$の式で求めることができる。

点Aの座標は(－2，－1)，点Bの座標を$(a,\ b)$とおくと，

AB＝$\sqrt{(a-(-2))^2+(b-(-1))^2}=5\sqrt{2}$

ゆえに$(a+2)^2+(b+1)^2=50$

$(b+1)^2=50-(a+2)^2$

$a,\ b$ともに自然数なので，$(b+1)^2 \geqq 4$

$a=1$のとき，$(b+1)^2=50-3^2=41$　41は平方数ではないので不適

$a=2$のとき，$(b+1)^2=50-4^2=34$　34は平方数ではないので不適

$a=3$のとき，$(b+1)^2=50-5^2=25$　$b+1=5,\ b=4$　適する

$a=4$のとき，$(b+1)^2=50-6^2=14$　14は平方数ではないので不適

$a=5$ のとき，$(b+1)^2=50-7^2=1$　$(b+1)^2 \geqq 4$ なので不適

$a \geqq 6$ のとき，$(b+1)^2=50-(a+2)^2<0$ となり不適

ゆえに $a=3,\ b=4$

[問題](2 学期期末)

$a^2+b^2=c^2$ が成り立つような，20 までの数 $a,\ b,\ c$ の組み合わせを 2 つ答えなさい。

ただし，$a<b$ とする。

[解答欄]

[解答](a，b，c)＝(3，4，5)，(5，12，13)

[解説]

三平方の定理が成り立つ整数の組み合わせでよく出てくるのは，(3，4，5)

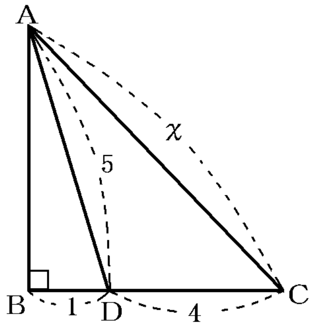
そのほかに，(5，12，13)，(7，24，25)などがある。

【】三平方と三角形・四角形

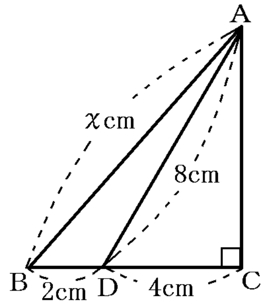
[問題](3 学期)

下の図で x の値を求めなさい。

(1)



(2)



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 7　(2) $2\sqrt{21}$

[解説]

(1) △ABD で，三平方の定理より，AB²＋$1^2=5^2$，AB²＝24

△ABC で，三平方の定理より，AC²＝AB²＋BC²，$x^2=24+25=49$，$x=7$

(2) △ADC で，三平方の定理より，AC²＋$4^2=8^2$，AC²＝64－16＝48

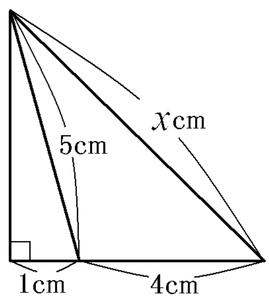
次に，△ABC で，三平方の定理より，AB²＝BC²＋AC²，$x^2=(2+4)^2+48=84$

$x=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$

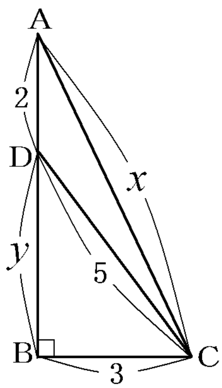
[問題](3 学期)

下の図で x の値を求めなさい。

(1)



(2)



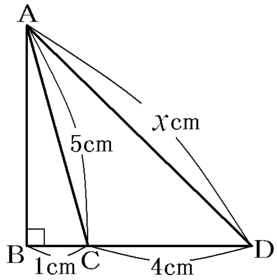
[解答欄]

(1) $x=$	(2) $x=$	$y=$

[解答](1)　$x=7$　(2)　$x=3\sqrt{5}$，$y=4$

[解説]

(1)　右図の△ABC で，三平方の定理より，



$AB^2+1^2=5^2$，$AB^2=25-1=24$

△ABD で，三平方の定理より，

$x^2=AB^2+BD^2=24+25=49$　よって，$x=7$

(2)　△BCD で，三平方の定理より，

$y^2+3^2=5^2$，$y^2=25-9=16$

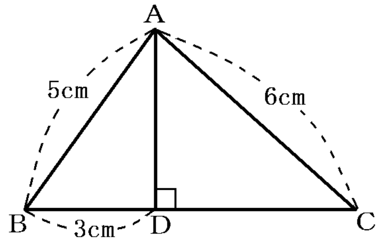
よって，$y=4$

△ABC で，三平方の定理より，$x^2=(2+y)^2+3^2$

$y=4$ を代入すると，$x^2=6^2+3^2=36+9=45$　よって，$x=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

[問題](2 学期期末)

右の図は△ABC の頂点 A から辺 BC に垂線 AD をひいたものである。このとき，DC の長さを求めよ。



[解答欄]

[解答] $2\sqrt{5}$ cm

[解説]

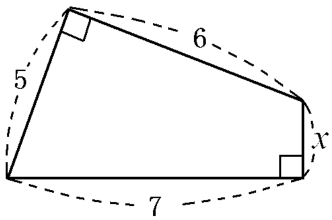
△ABD で，三平方の定理より，$AD^2+BD^2=AB^2$，$AD^2+9=25$，$AD^2=16$,

次に，△ADC で，三平方の定理より，$AD^2+DC^2=AC^2$，$16+DC^2=36$

ゆえに $DC^2=20$，$DC=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ (cm)

[問題](2 学期期末)

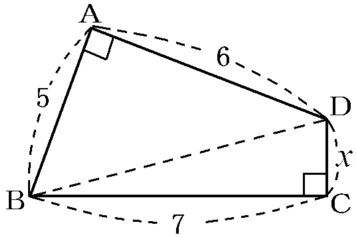
次の図の x の値を求めなさい。



[解答欄]

[解答] $2\sqrt{3}$

[解説]



右図のように，対角線 BD を引いて考える

△ABD で，三平方の定理より，$BD^2=5^2+6^2=61$

△BCD で，三平方の定理より，$BD^2=x^2+7^2$

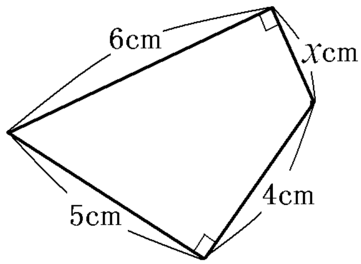
ゆえに $x^2+7^2=61$， $x^2=12$

ゆえに $x=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

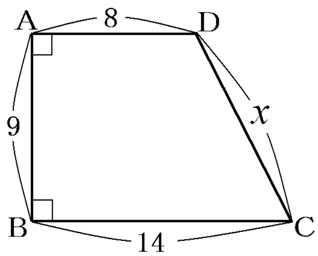
[問題](3 学期)

下の図で， x の値を求めなさい。

(1)



(2)

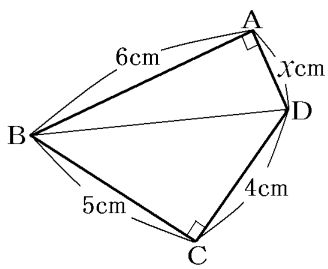


[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $\sqrt{5}$ (2) $3\sqrt{13}$

[解説]



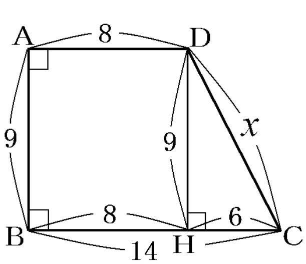
(1) 右図の△BCD で，三平方の定理より，

$BD^2=5^2+4^2=25+16=41$

△ABD で，三平方の定理より，

$x^2+AB^2=BD^2$

$x^2+36=41$， $x^2=41-36=5$ よって， $x=\sqrt{5}$



(2) 右図のように，D から BC に垂線 DH を引くと，

四角形 ABHD は長方形になるので，

DH＝AB＝9，BH＝AD＝8

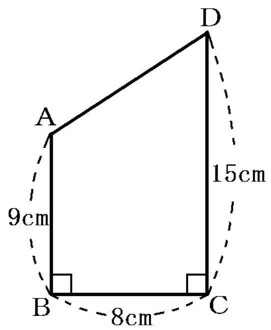
CH＝BC－BH＝14－8＝6

△CDH は直角三角形なので，三平方の定理より，

$x^2=9^2+6^2=81+36=117$ よって， $x=\sqrt{117}=3\sqrt{13}$

[問題](3 学期)

　図は，AB＝9cm，BC＝8cm，CD＝15cm，∠B＝∠C＝90°の台形である。辺 AD の長さを求めなさい。

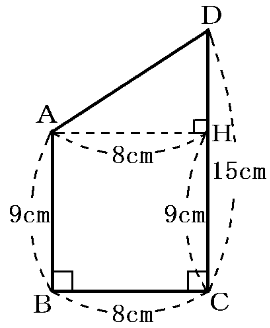


[解答欄]

[解答]10cm

[解説]

右図のように，補助線 AH を引く。



△ADH で，三平方の定理より，

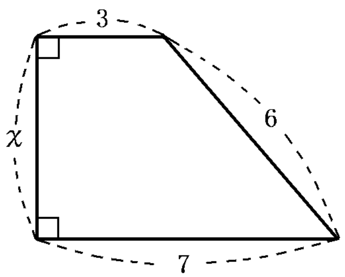
$AD^2=AH^2+DH^2=8^2+(15-9)^2=64+36=100$

ゆえに $AD=\sqrt{100}=10$ (cm)

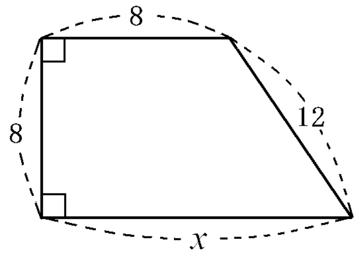
[問題](2 学期期末)

　次の図の x の値を求めなさい。

(1)



(2)

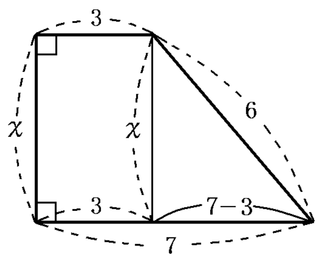


[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $2\sqrt{5}$　(2) $8+4\sqrt{5}$

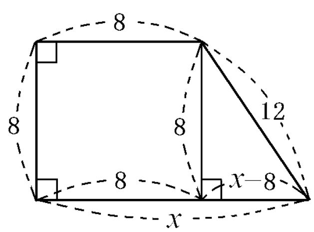
[解説]



(1) 右図で，三平方の定理より，$x^2+4^2=6^2$

$x^2=36-16=20$，$x=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

(2) 右図で，三平方の定理より，



$(x-8)^2+8^2=12^2$

$(x-8)^2=144-64=80$

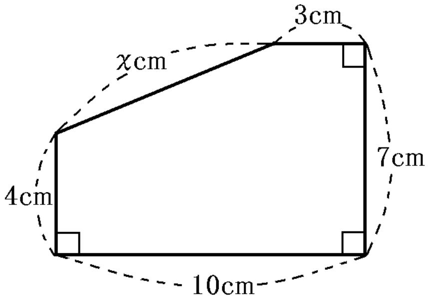
$x-8=\pm\sqrt{80}$，$x=8\pm4\sqrt{5}$

図より $x>8$　ゆえに $x=8+4\sqrt{5}$

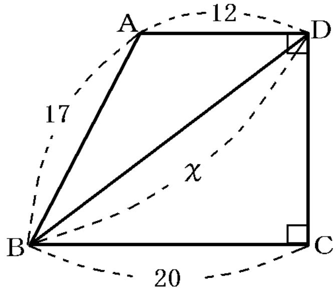
[問題](3 学期)

次の x の値をそれぞれ求めなさい。

(1)



(2)

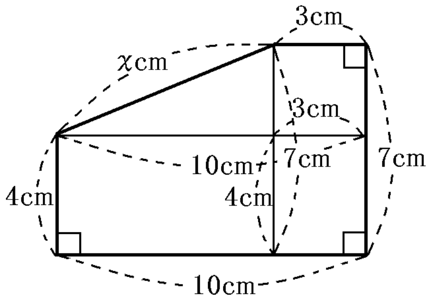


[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $\sqrt{58}$　(2) 25

[解説]

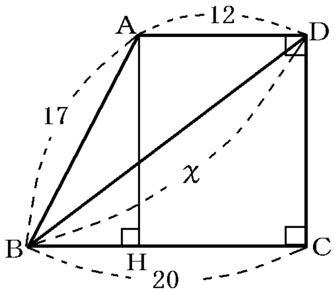


(1) 右図で，三平方の定理より，

$x^2 = (10-3)^2 + (7-4)^2 = 58$

ゆえに $x = \sqrt{58}$

(2) A から BC に垂線 AH を引く。



BH＝$20-12=8$

直角三角形 ABH で，BH＝$20-12=8$

三平方の定理より，

$AH^2+BH^2=AB^2$，$AH^2+8^2=17^2$，$AH^2=225$

次に，直角三角形 BCD で，$CD^2=AH^2=225$

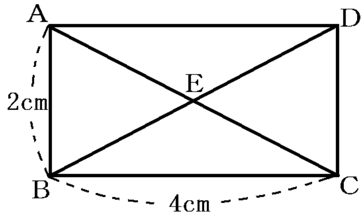
三平方の定理より，

$BC^2+CD^2=BD^2$，$20^2+225=x^2$

$x^2=625$　ゆえに $x=\sqrt{625}=25$

[問題](3 学期)

図の長方形 ABCD で，対角線の交点を E とするとき，AE の長さを求めなさい。



[解答欄]

[解答] $\sqrt{5}$ cm

[解説]

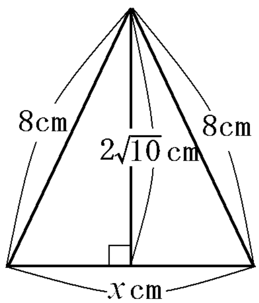
△ABC で，三平方の定理より，$AC^2 = 2^2 + 4^2 = 20$　ゆえに $AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

E は AC の中点なので，$AE = AC \div 2 = \sqrt{5}$ (cm)

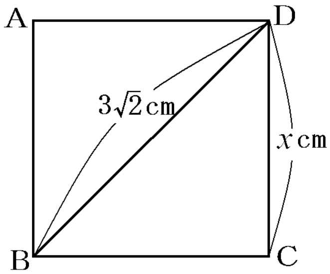
[問題](3 学期)

次の各図で x の値を求めなさい。

(1)

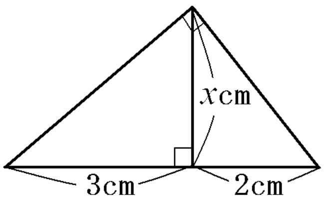


(2)

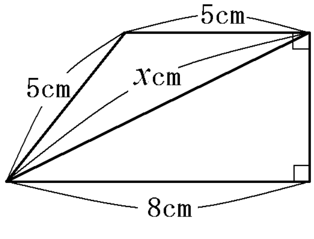


四角形ABCDは正方形

(3)



(4)

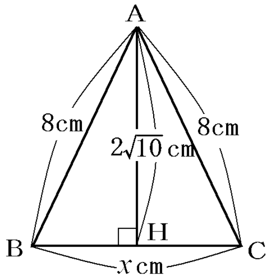


[解答欄]

(1)	(2)	(3
(4)		

[解答](1)　$4\sqrt{6}$　(2)　3　(3)　$\sqrt{6}$　(4)　$4\sqrt{5}$

[解説]



(1) 右図の△ABH で，三平方の定理より，BH²＋$\left(2\sqrt{10}\right)^2=8^2$

BH²＝$64-40=24$，よって，BH＝$\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

二等辺三角形の頂点からおろした垂線は底辺を二等分するので，

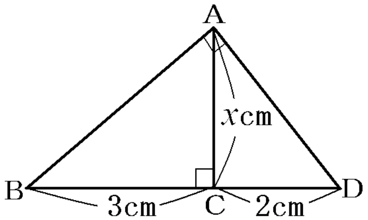
$x=$BC＝2BH＝$4\sqrt{6}$

(2) 四角形 ABCD は正方形なので，BC＝x

三平方の定理より，BC²＋CD²＝BD²,

$x^2+x^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2$，$2x^2=18$，$x^2=9$　よって，$x=3$

(3) △ABC で，三平方の定理より，



AB²＝BC²＋AC²＝$9+x^2$

また，△ACD で，三平方の定理より，

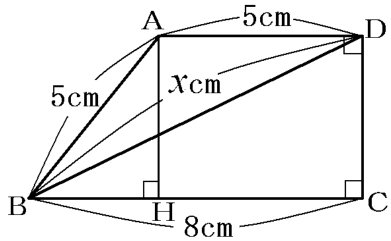
AD²＝CD²＋AC²＝$4+x^2$

次に，△ABD で，三平方の定理より，

AB²＋AD²＝BD² なので，

$9+x^2+4+x^2=5^2$，$2x^2+13=25$，$2x^2=12$，$x^2=6$

よって，$x=\sqrt{6}$



(4) 右図のようにAから辺 BC に垂線 AH をおろすと，

AHCD は長方形になるので，HC＝5cm

よって，BH＝8－5＝3cm

△ABH で，三平方の定理より，

AH²＋BH²＝AB²，AH²＋9＝25，AH²＝16

ゆえに，AH＝4cm，CD＝AH なので，CD＝4cm

△BCD で，三平方の定理より，

BD²＝BC²＋CD²

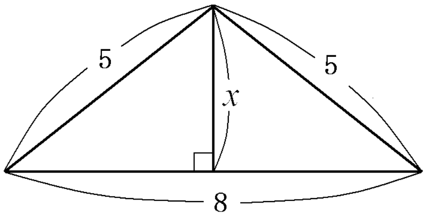
よって，x^2＝64＋16＝80,

ゆえに，$x=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

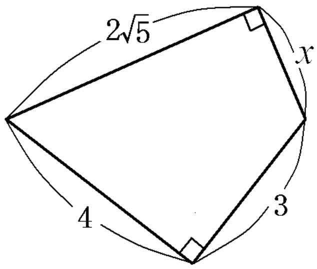
[問題](3 学期)

　次の図で，x の値を求めなさい。

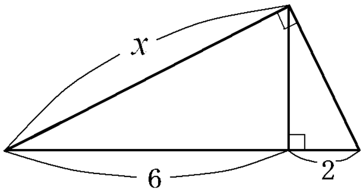
(1)



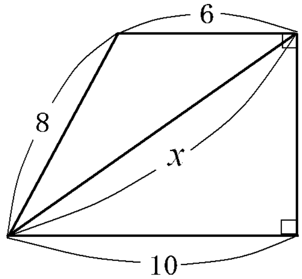
(2)



(3)



(4)



[解答欄]

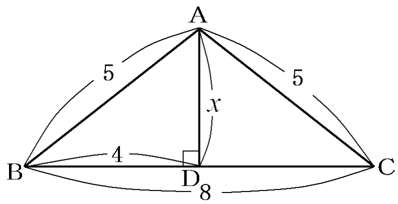
(1)	(2)	(3)
(4)		

[解答](1)　3　(2)　$\sqrt{5}$　(3)　$4\sqrt{3}$　(4)　$2\sqrt{37}$

[解説]

(1) 右図の△ABD は AB＝AC の二等辺三角形なので，BC に垂直な AD は BC を二等分し，BD＝8÷2＝4 となる。△ABD で，三平方の定理より，

$x^2+4^2=5^2$，$x^2+16=25$，$x^2=9$，$x=3$

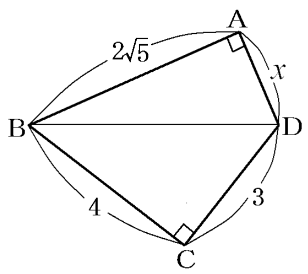


(2) 右図の△BCD は直角三角形なので，三平方の定理より，

BD²＝$4^2+3^2=16+9=25$　よって，BD＝5

次に，△ABD も直角三角形なので，三平方の定理より，

$x^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2=$BD²，$x^2+20=25$，$x^2=5$，$x=\sqrt{5}$

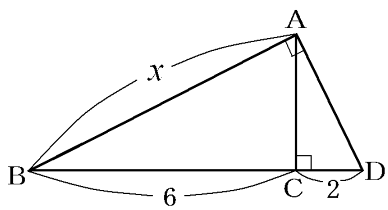


(3) 右図の△ABC は直角三角形なので，

三平方の定理より，AC²＝$x^2-6^2=x^2-36$ ･･･①

△ABD も直角三角形なので，三平方の定理より，

AD²＝$8^2-x^2=64-x^2$ ･･･②



次に，△ACD も直角三角形なので，三平方の定理より，

$AD^2=AC^2+CD^2$,

①，②より，$64-x^2=x^2-36+2^2$

$-2x^2=-36+4-64,\ -2x^2=-96,\ x^2=48$　よって，$x=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

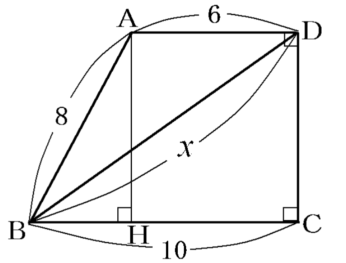
(4) 右図の△ABH で，$BH=10-6=4$

三平方の定理より，$AH^2=AB^2-BH^2=64-16=48$

よって，$CD^2=AH^2=48$

次に，△BCD で，三平方の定理より，

$x^2=BC^2+CD^2=100+48=148$　$x=\sqrt{148}=2\sqrt{37}$

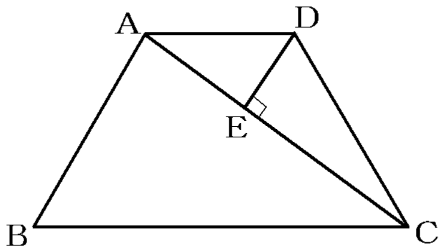


[問題](3 学期)

右の図で，四角形 ABCD は AD // BC であり，AB＝DC＝6cm，AD＝4cm，BC＝10cm である。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) AC の長さを求めなさい。

(2) 頂点 D から AC に垂線 DE をひくとき，DE の長さを求めなさい。



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $2\sqrt{19}$ cm　(2) $\dfrac{6\sqrt{57}}{19}$ cm

[解説]

(1) A から BC に垂線 AE を，D から BC に垂線 DF を引くと，四角形 AEFD は長方形になるので，

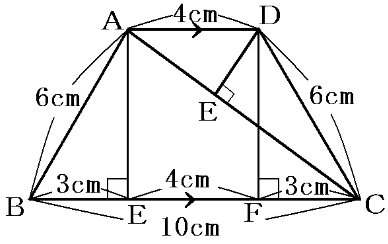
EF＝AD＝4cm となる。

また，△ABE≡△DCF なので，BE＝CF

よって，BE＝CF＝(10－4)÷2＝3cm

△ABE は直角三角形なので，三平方の定理より，

$AE^2+3^2=6^2$，$AE^2=36-9=27$，$AE=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ cm



次に，△ACE も直角三角形なので，三平方の定理より，

$AC^2=AE^2+CE^2=27+(3+4)^2=27+49=76$　よって，AC$=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$ cm

(2) △ACD の面積に注目する。

AD を底辺とすると，高さは EA と等しくなるので，

(△ACD の面積)$=\dfrac{1}{2}\times$(底辺 AD)$\times$(高さ AE)$=\dfrac{1}{2}\times 4\times 3\sqrt{3}=6\sqrt{3}$ (cm²)･･･①

AC を△ACD の底辺と考えると，高さは DE となる。

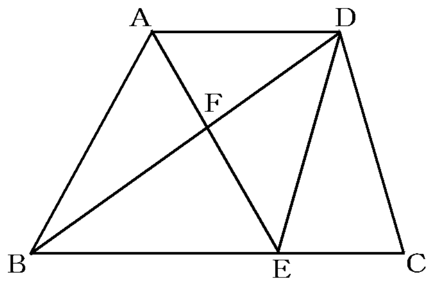
(△ACD の面積)$=\dfrac{1}{2}\times$(底辺 AC)$\times$(高さ DE)$=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{19}\times$DE･･･②

①，②より，$\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{19}\times$DE$=6\sqrt{3}$

$\sqrt{19}\times$DE$=6\sqrt{3}$，DE$=6\sqrt{3}\div\sqrt{19}=\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{19}}=\dfrac{6\sqrt{3}\times\sqrt{19}}{\sqrt{19}\times\sqrt{19}}=\dfrac{6\sqrt{57}}{19}$ cm

[問題](2 学期期末)

右の図で，四角形 ABCD は AD // BC の台形，E は辺 BC 上の点で BE=2EC，F は線分 AE と DB との交点である。また，△ABE は正三角形，△DEC は DE＝DC の二等辺三角形である。BC＝12cm のとき，次の問いに答えなさい。



(1) 線分 DE の長さを求めなさい。

(2) △FBE の面積は，△DEC の面積の何倍になりますか。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $2\sqrt{13}$ cm　(2) $\dfrac{8}{7}$ 倍

[解説]

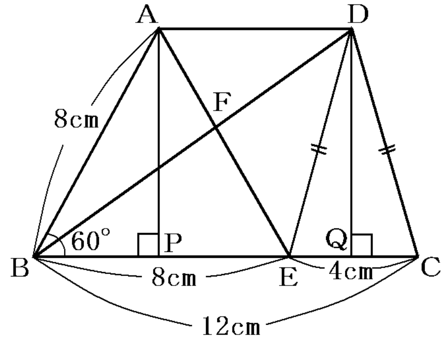
(1) A，D から BC に垂線 AP，DQ をおろす。

BE=2EC，BC＝12cm なので，BE＝8cm

△ABE は正三角形なので，AB＝8cm

∠ABP＝60°

△ABP は 30° 60° 90° の直角三角形なので，



AP：AB＝$\sqrt{3}:2$

AP：$8=\sqrt{3}:2$

比の外項の積は内項の積に等しいので，

AP$\times 2=8\times\sqrt{3}$，AP＝$4\sqrt{3}$ cm

AD // BC なので DQ＝AP＝$4\sqrt{3}$ cm

BC＝12cm，BE＝2EC なので EC＝4cm

△DEC は二等辺三角形なので，EQ＝$\frac{1}{2}$×EC＝2cm

直角三角形 DEQ に注目すると，三平方の定理より，

$DE^2=DQ^2+EQ^2=\left(4\sqrt{3}\right)^2+2^2=52$

ゆえに DE＝$\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ cm

(2) (△DEC の面積)＝$\frac{1}{2}$×EC×DQ＝$\frac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ (cm^2)

(△ABE の面積)＝$\frac{1}{2}$×BE×AP＝$\frac{1}{2}\times 8\times 4\sqrt{3}=16\sqrt{3}$ (cm^2)

ところで，AD＝PQ＝PE＋EQ＝$4+2=6$ cm

AD＝6cm，BE＝8cm なので，AF：EF＝AD：BE＝3：4

△FBE と△ABE の底辺をそれぞれ，FE，AE とすると，高さは共通で等しいので

面積比は底辺の比と等しく，4：(3+4)＝4：7 になる。

ゆえに，(△FBE の面積)＝(△ABE の面積)×$\frac{4}{7}$＝$16\sqrt{3}\times\frac{4}{7}=\frac{64\sqrt{3}}{7}$ (cm^2)

(△FBE の面積)÷(△DEC の面積)＝$\frac{64\sqrt{3}}{7}\div 8\sqrt{3}=\frac{8}{7}$

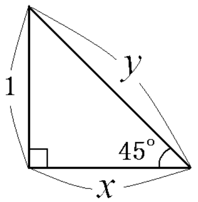
ゆえに△FBE の面積は，△DEC の面積の$\frac{8}{7}$倍になる

【】特殊な直角三角形

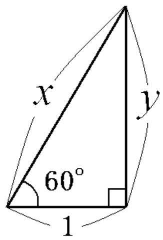
[問題](補充問題)

次の x y を求めよ。

(1)



(2)



[解答欄]

(1) $x=$	$y=$	(2) $x=$
$y=$		

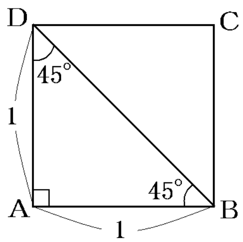
[解答](1) $x=1$, $y=\sqrt{2}$ (2) $x=2$, $y=\sqrt{3}$

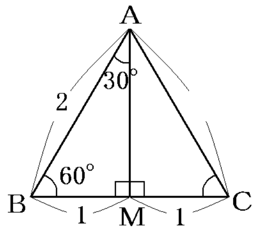
[解説]

(1) 右図のように，1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD があったとする。このとき，

BD$=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ である。

一般に，45°，45°，90° の直角三角形の 3 辺の比は，$1:1:\sqrt{2}$ となる。

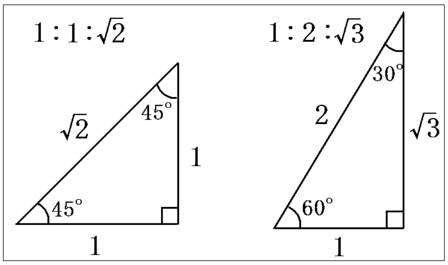




(2) 右上図のように，1 辺の長さが 2 の正三角形があったとする。頂点 A から辺 BC に垂線 AM をひくと，M は BC の中点となる。

したがって，BM＝1 となる。

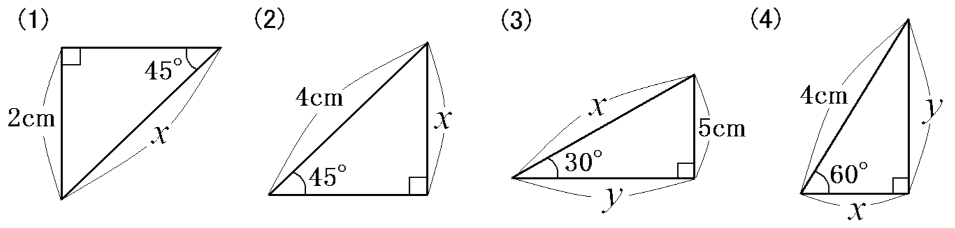
このとき，AM$=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ となる。



一般に，30°，60°，90° の直角三角形の 3 辺の比は，$1:2\sqrt{3}$ となる。

[問題](補充問題)

次の x を求めよ。

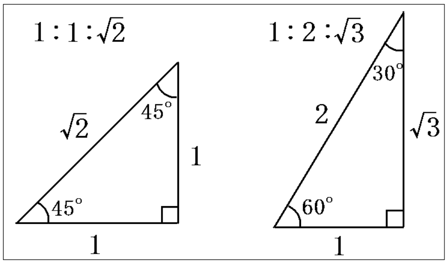


[解答欄]

(1) $x=$	(2) $x=$	(3) $x=$
$y=$	(4) $x=$	$y=$

[解答](1)　$x=2\sqrt{2}$ cm　(2)　$x=2\sqrt{2}$ cm　(3)　$x=$10cm，$y=5\sqrt{3}$ cm　(4)　$x=$2cm，$y=2\sqrt{3}$ cm

[解説]



(1) この直角三角形は 45°　45°　90°　の直角二等辺三角形なので，2 : x =1 : $\sqrt{2}$

内項の積は外項の積に等しいので，

$x\times 1=2\times\sqrt{2}$，$x=2\sqrt{2}$ (cm)

(2) この直角三角形は 45°　45°　90°　の直角二等辺三角形なので，x : 4=1 : $\sqrt{2}$

外項の積は外項の積に等しいので，$x\times\sqrt{2}=4\times 1$

$$x=4\div\sqrt{2}=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}\ \text{(cm)}$$

(3) この直角三角形は 30°　60°　90°　の直角三角形なので，5 : x =1 : 2

比の内項の積は外項の積に等しいので，$x\times 1=5\times 2$，x=10(cm)

5 : y =1 : $\sqrt{3}$　比の内項の積は外項の積に等しいので，

$y\times 1=5\times\sqrt{3}$，$y=5\sqrt{3}$ (cm)

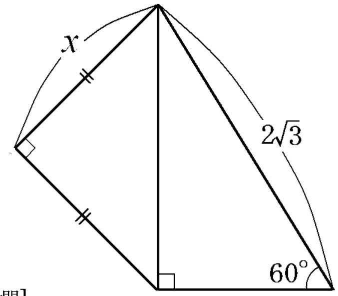
(4) 30°　60°　90°　の直角三角形なので，x : 4=1 : 2

比の外項の積は外項の積に等しいので，$x\times 2=4\times 1$，x=2(cm)

y : 4= $\sqrt{3}$: 2　比の外項の積は外項の積に等しいので，

$y\times 2=4\times\sqrt{3}$，$y=2\sqrt{3}$ (cm)

[問題](3 学期)



[解答欄]

[解答] $x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

[解説]

右図の△ACD は 90° 60° 30° の直角三角形なので，AC : AD＝$\sqrt{3}$: 2

AD＝$2\sqrt{3}$ なので，AC : $2\sqrt{3}$ ＝ $\sqrt{3}$: 2

比で，外項の積 AC× 2 と内項の積 $2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$

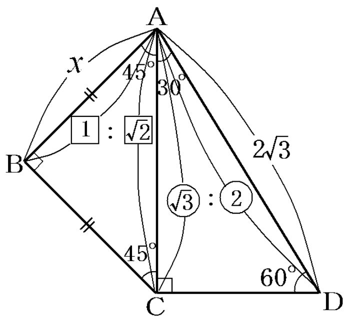
は等しいので，AC× 2 ＝ 6　よって，AC＝ 3

次に, △ABC は 90° 45° 45° の直角二等辺三角形なので,

AB : AC＝1 : $\sqrt{2}$， $x:3=1:\sqrt{2}$

外項の積 $x\times\sqrt{2}$ は内項の積 3×1 に等しいので,

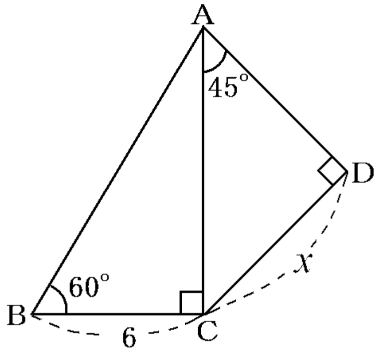
$\sqrt{2}x=3,\ x=3\div\sqrt{2}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$



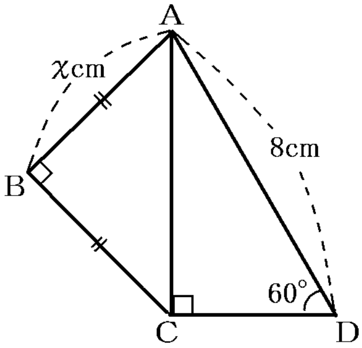
[問題](3 学期)

下の図の x の値を求めなさい。

(1)



(2)



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $3\sqrt{6}$　(2) $2\sqrt{6}$

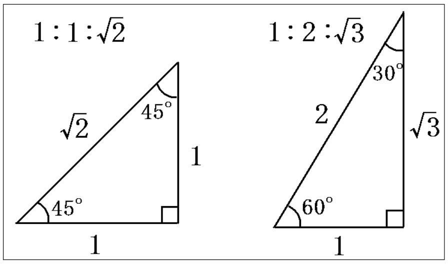
[解説]

(1) △ABC は 30° 60° 90° の直角三角形なので,

BC : AC＝$1:\sqrt{3}$，6 : AC＝$1:\sqrt{3}$，AC＝$6\sqrt{3}$

次に，△ACD は 45° 45° 90° の直角二等辺三角形

なので，AC : CD＝$\sqrt{2}:1$，$6\sqrt{3}$: $x=\sqrt{2}:1$



比の内項の積は外項の積に等しいので,

ゆえに，$x\times\sqrt{2}=6\sqrt{3}\times1$，$\sqrt{2}x=6\sqrt{3}$

よって，$x=6\sqrt{3}\div\sqrt{2}=\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{6\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{6\sqrt{6}}{2}=3\sqrt{6}$

(2) △ACD は 30° 60° 90° の直角三角形なので,

AC : AD＝$\sqrt{3}:2$，AC : $8=\sqrt{3}:2$

比の外項の積は内項の積と等しいので,

2 AC＝$8\sqrt{3}$，AC＝$8\sqrt{3}\div2=4\sqrt{3}$ (cm)･･･①

△ABC は 45° 45° 90° の直角二等辺三角形なので,

AB : AC＝$1:\sqrt{2}$　AB＝x，①より AC＝$4\sqrt{3}$ を代入すると，$x:4\sqrt{3}=1:\sqrt{2}$

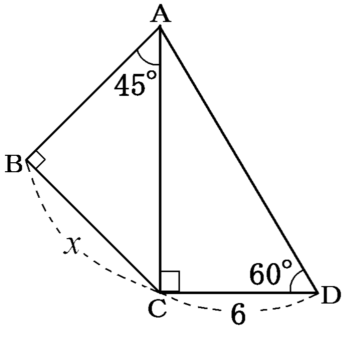
比の外項の積は内項の積に等しいので，$x\times\sqrt{2}=4\sqrt{3}\times1$

$\sqrt{2}x=4\sqrt{3}$，$x=4\sqrt{3}\div\sqrt{2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{2}=2\sqrt{6}$

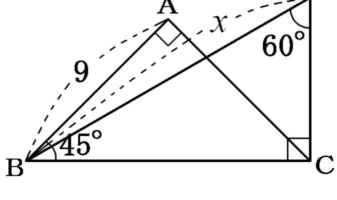
[問題](2 学期期末)

次の図で x の値を求めなさい。

(1)



(2)



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $3\sqrt{6}$　(2) $6\sqrt{6}$

[解説]

(1) △ACD は 30°60°90° の直角三角形なので，AC : CD＝$\sqrt{3}:1$

CD＝6 なので，AC : 6＝$\sqrt{3}:1$，

比の外項の積は内項の積に等しいので,

$AC\times 1=6\times\sqrt{3}$，$AC=6\sqrt{3}$

次に，△ABC は 45°45°90° の直角二等辺三角形なので，BC : AC＝$1:\sqrt{2}$，

$x:6\sqrt{3}=1:\sqrt{2}$

比の外項の積は内項の積に等しいので,

$x\times\sqrt{2}=6\sqrt{3}\times 1$，$\sqrt{2}x=6\sqrt{3}$，$x=6\sqrt{3}\div\sqrt{2}=\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{6\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{6\sqrt{6}}{2}=3\sqrt{6}$

(2) △ABC は 45°45°90° の直角二等辺三角形なので,

AB : BC＝$1:\sqrt{2}$，9 : BC＝$1:\sqrt{2}$，

比の内項の積は外項の積に等しいので，$BC\times 1=9\times\sqrt{2}$，BC＝$9\sqrt{2}$

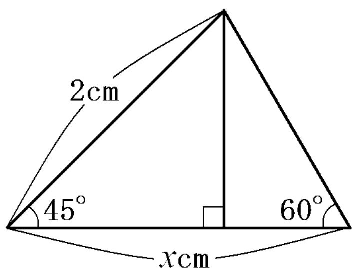
次に, △BCD は 30°60°90° の直角三角形なので, BD:BC＝$2:\sqrt{3}$, BD: $9\sqrt{2}=2:\sqrt{3}$

比の外項の積は内項の積に等しいので，$BD\times\sqrt{3}=9\sqrt{2}\times 2$，$\sqrt{3}$ BD＝$18\sqrt{2}$

よって，BD＝$18\sqrt{2}\div\sqrt{3}=\dfrac{18\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{18\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{18\sqrt{6}}{3}=6\sqrt{6}$

[問題](3 学期)

次の図で x の値を求めなさい。



[解答欄]

[解答] $\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

△ABC は 45° 45° 90° の直角三角形なので,

AC：AB＝1：$\sqrt{2}$，AC：2＝1：$\sqrt{2}$

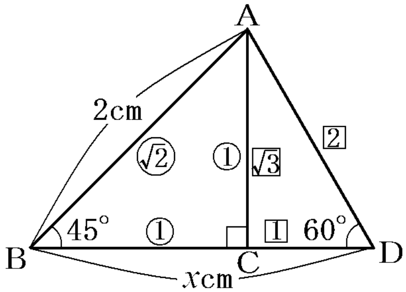
比の外項の積は内項の積に等しいので,

AC×$\sqrt{2}$＝2×1，AC＝$2\div\sqrt{2}=\sqrt{2}$ (cm)

また，BC＝AC＝$\sqrt{2}$ (cm)・・・①

次に，△ACD は 60° 30° 90° の直角三角形なので,

AC：CD＝$\sqrt{3}$：1，$\sqrt{2}$：CD＝$\sqrt{3}$：1



比の内項の積は外項の積に等しいので,

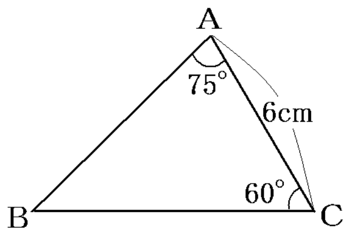
CD×$\sqrt{3}=\sqrt{2}$×1，CD＝$\sqrt{2}\div\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (cm)・・・②

①，②より，x＝BC＋CD＝$\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

[問題](入試問題)

右の図のような△ABC がある。∠A＝75°，∠C＝60° で，AC の長さは 6cm である。AB の長さと BC の長さを求めなさい。

(大阪桐蔭高)



[解答欄]

AB：	BC：

[解答]AB：$3\sqrt{6}$ cm　BC：$3\sqrt{3}+3$ (cm)

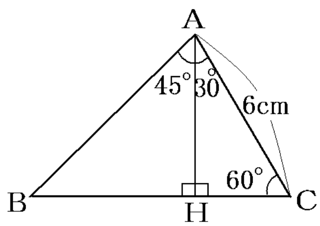
[解説]

A から BC に垂線 AH をおろす。

△ACH は 30° 60° 90° の直角三角形なので,

CH：AC：AH＝1：2：$\sqrt{3}$

AC＝6cm なので，CH＝3cm，AH＝$3\sqrt{3}$ cm



次に，△ABH は 45° 45° 90° の直角三角形なので,

AH：BH：AB＝1：1：$\sqrt{2}$

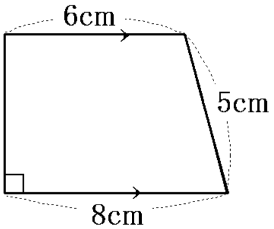
AH＝$3\sqrt{3}$ cm なので，BH＝$3\sqrt{3}$ cm，AB＝$3\sqrt{3}\times\sqrt{2}=3\sqrt{6}$ (cm)

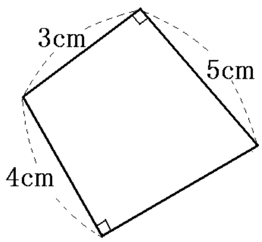
BC＝BH＋CH＝$3\sqrt{3}+3$ (cm)

【】三平方と面積

[問題](3 学期)

次の四角形の面積をそれぞれ求めよ。

(1) 

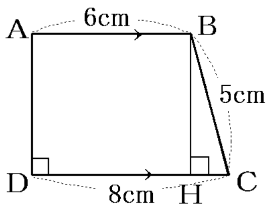
(2) 

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $7\sqrt{21}$ cm^2　(2) $\dfrac{15}{2}+6\sqrt{2}$ (cm^2)

[解説]



(1) 右図の台形 ABCD で，B から CD に垂線 BH を引く。

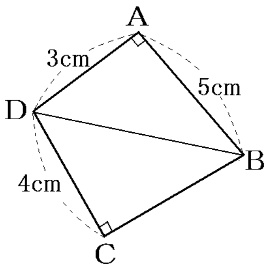
CH＝8－6＝2(cm)

直角三角形 BCH で，三平方の定理より，

BH＝$\sqrt{BC^2-CH^2}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$ (cm)

(台形 ABCD の面積)＝(上底＋下底)×(高さ)÷2＝$(6+8)\times\sqrt{21}\div 2=7\sqrt{21}$ (cm^2)

(2) 右図のように，補助線 BD を引く。



△ABD は直角三角形なので，

BD＝$\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$ (cm)

△CBD は直角三角形なので，

BC＝$\sqrt{BD^2-CD^2}=\sqrt{34-16}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

(△ABD の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times5\times3=\dfrac{15}{2}$ (cm^2)

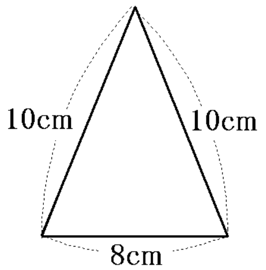
(△CBD の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times4=6\sqrt{2}$ (cm^2)

よって，(四角形 ABCD の面積)＝$\dfrac{15}{2}+6\sqrt{2}$ (cm^2)

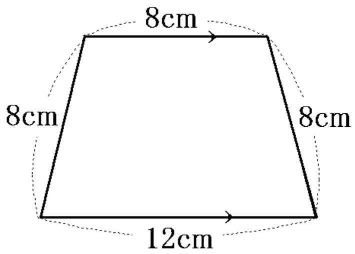
[問題](前期期末)

次の三角形，台形の面積を求めよ。

(1)



(2)



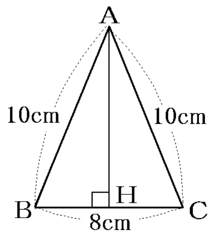
[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $8\sqrt{21}$ cm² (2) $20\sqrt{15}$ cm²

[解説]

<Point> 補助線を引いて直角三角形を作り，高さを求める。



(1) 右図の△ABC で，頂点 A から BC に垂線 AH を引く。

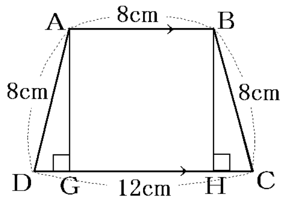
△ABC は AB＝BC の二等辺三角形なので，H は BC の中点になる。

よって，BH＝8÷2＝4(cm)

直角三角形 ABH で，三平方の定理より，

AH＝$\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{10^2-4^2}=\sqrt{84}=\sqrt{4\times21}=2\sqrt{21}$ (cm)

(△ABC の面積)＝BC×AH÷2＝$8\times2\sqrt{21}\div2=8\sqrt{21}$ (cm²)



(2) 右図の台形 ABCD で，A，B から CD にそれぞれ垂線 AG，BH を引くと，CH＝DG＝(12－8)÷2＝2(cm)

直角三角形 BCH で，三平方の定理より，

BH＝$\sqrt{BC^2-CH^2}=\sqrt{8^2-2^2}=\sqrt{60}=\sqrt{4\times15}=2\sqrt{15}$ (cm)

(台形 ABCD の面積)＝(上底＋下底)×(高さ)÷2＝$(8+12)\times2\sqrt{15}\div2=20\sqrt{15}$ (cm²)

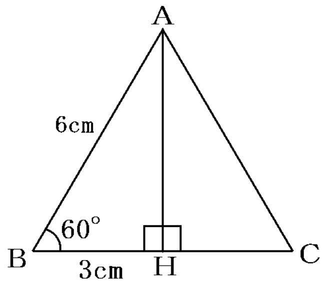
[問題](2 学期期末)

1 辺が 6cm の正三角形の面積を求めなさい。

[解答欄]

[解答] $9\sqrt{3}$ cm²

[解説]



右図の正三角形ABCで,

△ABHは30°60°90°の直角三角形になるので,

AH：BH＝$\sqrt{3}$：1

BH＝3なので，AH：3＝$\sqrt{3}$：1

比の外項の積は内項の積に等しいので,

AH×1＝3×$\sqrt{3}$，AH＝$3\sqrt{3}$ (cm)

(△ABCの面積)＝BC×AH÷2＝$6\times3\sqrt{3}\div2=9\sqrt{3}$ (cm^2)

[問題](入試問題)

(1) 1辺が4cmの正四面体の表面積を求めよ。

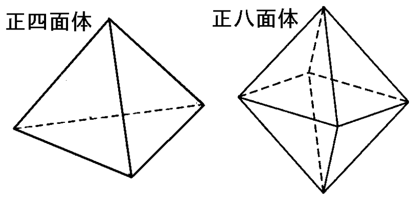
(2) 1辺が4cmの正八面体の表面積を求めよ。(青森県改)

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $16\sqrt{3}$ cm^2　(2) $32\sqrt{3}$ cm^2

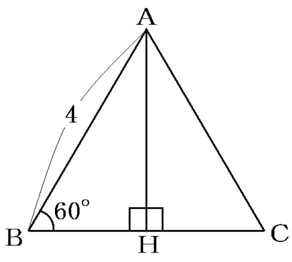
[解説]



(1) 右図のように，正四面体は，4つの合同な正三角形からなる立体である。

したがって，1辺が4cmの正四面体の表面積は,

1辺が4cmの正三角形の面積を4倍したものになる。



右図で，△ABHは30°60°90°の直角三角形

になるので，BH：AB：AH＝1：2：$\sqrt{3}$

AB＝4cmなので，BH＝2cm，AH＝$2\sqrt{3}$ cm

(△ABCの面積)＝(底辺BC)×(高さAH)÷2

＝$4\times2\sqrt{3}\div2=4\sqrt{3}$ (cm^2)

したがって，(表面積)＝$4\sqrt{3}\times4=16\sqrt{3}$ (cm^2)

(2) 正八面体は，8つの合同な正三角形からなる立体である。

したがって，1辺が4cmの正八面体の表面積は，1辺が4cmの正三角形の面積を8倍したものになる。よって，(表面積)＝$4\sqrt{3}\times8=32\sqrt{3}$ (cm^2)

[問題](前期期末)

1 辺の長さが 10cm である正六角形の面積を求めなさい。

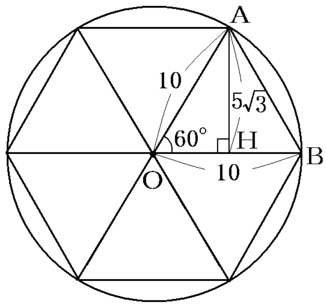
[解答欄]

[解答] $150\sqrt{3}$ cm²

[解説]

<Point> 正六角形は対角線によって 6 つの正三角形になる。

右図のように，正六角形は対角線によって 6 個の正三角形に分けることができる。そのうちの正三角形 OAB の底辺を OB とすると高さは AH になる。



△OAH は 30° 60° 90° の直角三角形なので，

AO：OH：AH＝2：1：$\sqrt{3}$

AO＝10cm なので，OH＝5cm，AH＝$5\sqrt{3}$ cm

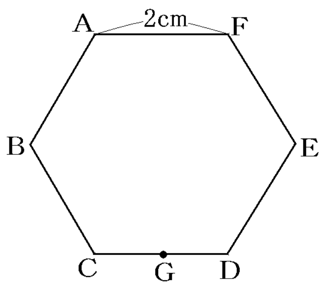
よって，(△OAB の面積)＝OB×AH÷2＝$10\times5\sqrt{3}\div2=25\sqrt{3}$ (cm²)

したがって，(正六角形の面積)＝$25\sqrt{3}\times6=150\sqrt{3}$ (cm²)

[問題](入試問題)

右の図のような，1辺の長さが2cmの正六角形ABCDEFがあり，点Gは，辺CDの中点である。点Aと点Gを結ぶとき，四角形ABCGの面積は何cm²か。

(香川県)



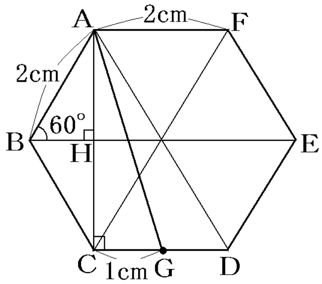
[解答欄]

[解答] $2\sqrt{3}$ cm²

[解説]

<Point> 正六角形は対角線によって 6 つの正三角形になる。

四角形 ABCG を△ABC と△ACG に分け，それぞれの面積を求める。



△ABH は 30° 60° 90° の直角三角形なので，

BH : AB : AH＝1 : 2 : $\sqrt{3}$

AB＝2cm なので，BH＝1cm，AH＝$\sqrt{3}$ cm

AC＝AH×2＝$2\sqrt{3}$ cm

よって，(△ABC の面積)＝(底辺 AC)×(高さ BH)÷2＝$2\sqrt{3}\times1\div2=\sqrt{3}$ (cm²)

次に，△ACG で，∠ACG＝90° なので，

(△ACG の面積)＝(底辺 CG)×(高さ AC)÷2＝1×$2\sqrt{3}\div2=\sqrt{3}$ (cm²)

(四角形 ABCG の面積)＝(△ABC の面積)＋(△ACG の面積)＝$\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ (cm²)

[問題](前期期末)

　半径が 2cm の円に内接する正八角形の面積を求めなさい。

[解答欄]

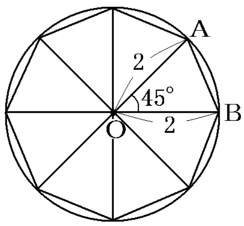
[解答]$8\sqrt{2}$ cm²

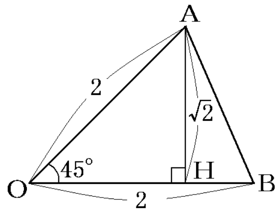
[解説]

右図のように，正八角形は対角線によって

8 個の二等辺三角形に分けることができる。

そのうちの△OAB をとって考える。





∠AOB＝360° ÷8＝45°

したがって，△OAB は頂角が 45° ，

OA＝OB＝2cm の二等辺三角形である。

A から OB に垂線 AH をおろす。OB を底辺とすると，AH が高さになる。

△AOH は 45° 45° 90° の直角三角形なので，AH : OH : AO＝1 : 1 : $\sqrt{2}$ である。

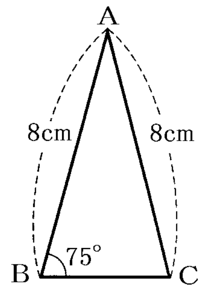
AO＝2 なので，AH＝$2\div\sqrt{2}=\sqrt{2}$ (cm)である。

よって，(△AOH の面積)＝OB×AH÷2＝$2\times\sqrt{2}\div2=\sqrt{2}$ (cm²)

したがって，(正八角形の面積)＝$\sqrt{2}\times8=8\sqrt{2}$ (cm²)

[問題](入試問題)

右の図の△ABC は，AB＝AC＝8cm，∠B＝75°である。△ABC の面積を求めよ。



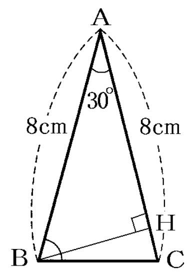
(青森県)

[解答欄]

[解答]16cm²

[解説]

75°は辺の比がわかる特殊な角(30° 60° 45°)ではないので，A から BC に垂線をおろしても，うまくいかない。



そこで，∠A を計算すると，180°－75°×2＝30°となる。

B から辺 AC に垂線 BH をひいて，直角三角形 ABH をつくる。

<Point> 75°を分割するように補助線を引く。

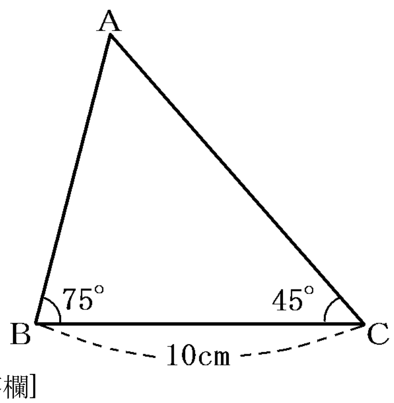
△ABH は，30° 60° 90°の直角三角形なので，

AB：BH：AH＝2：1：$\sqrt{3}$　AB＝8cm なので，BH＝4cm

(△ABC の面積)＝(底辺 AC)×(高さ BH)÷2＝8×4÷2＝16(cm²)

[問題](2 学期期末)

下図の△ABC の面積を求めなさい。



[解答欄]

[解答]$\dfrac{25\sqrt{3}}{3}+25$(cm²)

[解説]

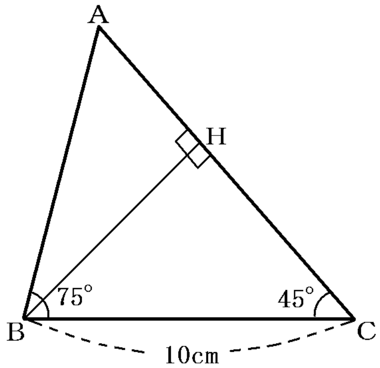
A から BC に垂線をひいてもうまくいかない。75°が処理できないからである。

<Point> 75°を分割するように補助線を引く。

B から AC に垂線 BH を引く。

∠CBH＝180°－90°－45°＝45°なので

△BCH は 45° 45° 90°の直角二等辺三角形である。



ゆえに CH：CB＝$1:\sqrt{2}$，CH：$10=1:\sqrt{2}$

比の外項の積は内項の積に等しいので，

$CH\times\sqrt{2}=10\times1$，$\sqrt{2}\,CH=10$，

$CH=\dfrac{10}{\sqrt{2}}=\dfrac{10\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{10\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$ (cm)

HB＝CH＝$5\sqrt{2}$ (cm)･･･①

次に△ABH に注目する。

∠ABH＝75°－45°＝30°なので

△ABH は 30° 60° 90°の直角三角形である。

ゆえに AH：HB＝$1:\sqrt{3}$，AH：$5\sqrt{2}=1:\sqrt{3}$

比の外項の積は内項の積に等しいので。

$AH\times\sqrt{3}=5\sqrt{2}\times1$

$\sqrt{3}\,AH=5\sqrt{2}$

ゆえに，$AH=\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$ (cm)･･･②

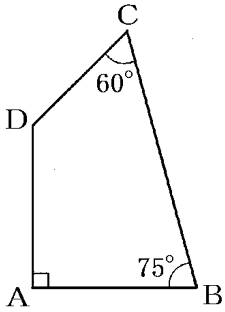
①，②より，(△ABC の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times AC\times HB=\dfrac{1}{2}\times(AH+CH)\times HB$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{5\sqrt{6}}{3}+5\sqrt{2}\right)\times5\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times\frac{5\sqrt{6}}{3}\times5\sqrt{2}+\frac{1}{2}\times5\sqrt{2}\times5\sqrt{2}$$

$$=\frac{25\sqrt{12}}{6}+\frac{25\times2}{2}=\frac{50\sqrt{3}}{6}+25=\frac{25\sqrt{3}}{3}+25\ (\mathrm{cm}^2)$$

[問題](入試問題)

右の図の四角形 ABCD で，∠A＝90°，∠B＝75°，∠C＝60° である。AB＝AD＝6cm のとき，四角形 ABCD の面積を求めなさい。



(長野県)

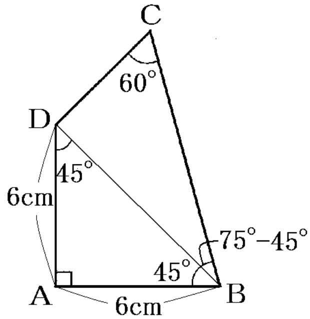
[解答欄]

[解答]$18+12\sqrt{3}$ (cm²)

[解説]

<Point> 75° を分割するように補助線を引く。

BD を結んで 2 つの三角形に分ける。



仮定より AB＝AD なので, △BDA は直角二等辺三角形になり,

∠DBA＝∠BDA＝45° になる。

△BCD で，∠CBD＝75° −45° ＝30° と計算できる。

→△BCD は 30° 60° 90° の直角三角形になることがわかる。

△BDA は 45° 45° 90° の直角三角形なので,

AB：AD：BD＝1：1：$\sqrt{2}$

AB＝AD＝6cm なので，BD＝$6\sqrt{2}$ cm

次に，△BCD は 30° 60° 90° の直角三角形なので，CD：BD＝1：$\sqrt{3}$

よって，CD：$6\sqrt{2}$ ＝1：$\sqrt{3}$

比の外項の積は内項の積に等しいので,

CD×$\sqrt{3}$ ＝$6\sqrt{2}$ ×1，CD＝$6\sqrt{2}\div\sqrt{3}=\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{6}}{3}=2\sqrt{6}$ (cm)

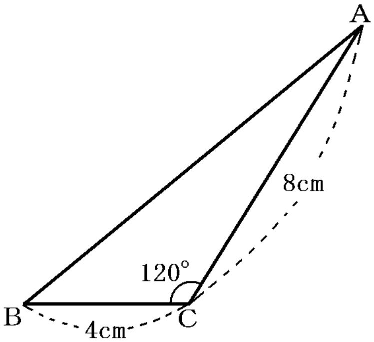
以上より,

(四角形 ABCD の面積)＝(△BDA の面積)＋(△BCD の面積)＝AB×AD÷2＋BD×CD÷2

$=6\times6\div2+6\sqrt{2}\times2\sqrt{6}\div2=18+6\sqrt{12}=18+12\sqrt{3}$ (cm²)

[問題](2 学期期末)

下の図の△ABC の面積を求めなさい。

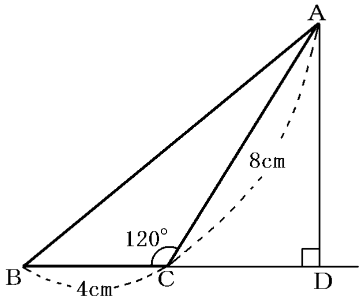


[解答欄]

[解答] $8\sqrt{3}$ cm²

[解説]

右図のように補助線を引く。



△ABC で BC を底辺とすると，高さは AD になる。

∠ACD＝180°－120°＝60° なので

△ACD は 30° 60° 90° の直角三角形。

AC：AD＝$2:\sqrt{3}$，8：AD＝$2:\sqrt{3}$

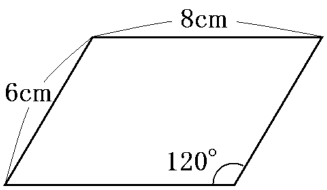
比の内項の積は外項の積に等しいので，

AD×$2=8\times\sqrt{3}$，2 AD＝$8\sqrt{3}$，AD＝$4\sqrt{3}$(cm)

ゆえに(△ABC の面積)＝BC×AD÷2＝$4\times4\sqrt{3}\div2=8\sqrt{3}$(cm²)

[問題](入試問題)

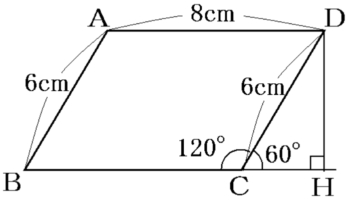
次の平行四辺形の面積を求めなさい。(青森県)



[解答欄]

[解答] $24\sqrt{3}$ cm²

[解説]



右図のように，D から BC の延長線上に垂線 DH をおろすと，△DCH は 30° 60° 90° の直角三角形なので，

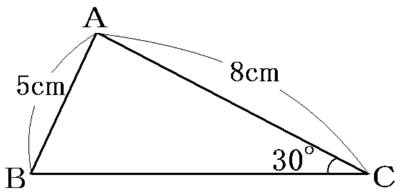
CH：CD；DH＝1：2：$\sqrt{3}$

CD＝6cm なので，CH＝3cm，DH＝$3\sqrt{3}$ cm

(平行四辺形 ABCD の面積)＝(底辺 BC)×(高さ DH)＝8×$3\sqrt{3}=24\sqrt{3}$ (cm²)

[問題](3 学期)

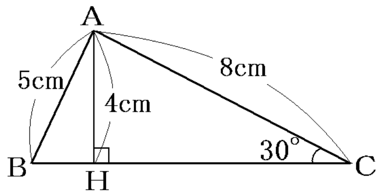
次の△ABC の面積を求めよ。(注：∠A は 90° ではない)



[解答欄]

[解答] $6+8\sqrt{3}$ (cm²)

[解説]



頂点 A から辺 BC に垂線 AH を引く。

△ACH は 30° 60° 90° の直角三角形なので，

AH：AC；CH＝1：2：$\sqrt{3}$ になる。

AC＝8cm なので，

AH＝8÷2＝4(cm)，CH＝$\sqrt{3}\times 4=4\sqrt{3}$ (cm)

よって，(△ACH の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×CH×AH＝$\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 4=8\sqrt{3}$ (cm²)

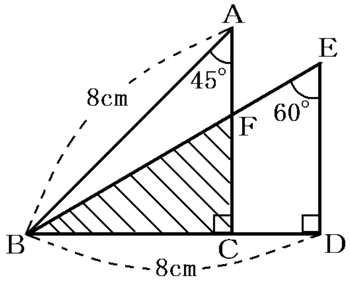
△ABH は直角三角形なので，BH＝$\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$ (cm)

(△ABH の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×BH×AH＝$\dfrac{1}{2}$×3×4＝6(cm²)

以上より，(△ABC の面積)＝(△ABH の面積)＋(△ACH の面積)＝$6+8\sqrt{3}$ (cm²)

[問題](2 学期期末)

右の図のように 1 組の三角定規を重ねて置くとき，斜線で示した重なりの部分の面積を求めよ。



[解答欄]

[解答] $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ (cm²)

[解説]

△ABC は 45° 45° 90° の直角二等辺三角形なので，BC : AB＝$1:\sqrt{2}$，BC : 8 ＝$1:\sqrt{2}$，

比の外項の積は内項の積に等しいので，

BC×$\sqrt{2}=8\times1$，$\sqrt{2}$ BC＝8，

BC＝$8\div\sqrt{2}=\dfrac{8}{\sqrt{2}}=\dfrac{8\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{8\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$ (cm)

次に，∠FBC＝180° －90° －60° ＝30° なので，

△FBC は 30° 60° 90° の直角三角形になる。

ゆえに，FC : BC＝$1:\sqrt{3}$，FC : $4\sqrt{2}=1:\sqrt{3}$

比の外項の積は内項の積に等しいので，FC×$\sqrt{3}=4\sqrt{2}\times1$

$\sqrt{3}$ FC＝$4\sqrt{2}$，FC＝$4\sqrt{2}\div\sqrt{3}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$ (cm)

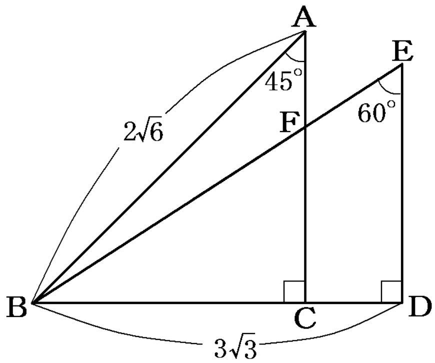
よって(△FBC の面積)＝BC×FC÷2＝$4\sqrt{2}\times\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{16\sqrt{12}}{6}=\dfrac{32\sqrt{3}}{6}=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ (cm²)

[問題](3 学期)

次の図のように 1 組の三角定規を重ねて置くとき，次の問いに答えなさい。

(1) AF の長さを求めなさい。

(2) 四角形 CDEF の面積を求めなさい。



[解答欄]

(1)
(2)

[解答](1) $2\sqrt{3}-2$　(2) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

[解説]

(1) △ABC は 45° 45° 90° の直角三角形なので，

AC : AB＝1 : $\sqrt{2}$，AC : $2\sqrt{6}$ ＝1 : $\sqrt{2}$

比の外項の積は内項の積と等しいので，AC× $\sqrt{2}=2\sqrt{6}\times 1$

よって，AC＝ $2\sqrt{6}\div\sqrt{2}=2\sqrt{3}$ ･･･①

次に，△BCF は 30° 60° 90° の直角三角形なので，CF : BC＝1 : $\sqrt{3}$

BC＝AC＝ $2\sqrt{3}$ なので，CF : $2\sqrt{3}$ ＝1 : $\sqrt{3}$

比の外項の積は内項の積と等しいので，CF× $\sqrt{3}=2\sqrt{3}\times 1$，CF＝ $2\sqrt{3}\div\sqrt{3}=2$ ･･･②

①，②より，AF＝AC－CF＝ $2\sqrt{3}-2$

(2) (四角形 CDEF の面積)＝(△BDE の面積)－(△BCF の面積)

△BDE は 30° 60° 90° の直角三角形なので，ED : BD＝1 : $\sqrt{3}$，ED : $3\sqrt{3}$ ＝1 : $\sqrt{3}$

比の外項の積は内項の積と等しいので，

ED× $\sqrt{3}=3\sqrt{3}\times 1$，ED＝ $3\sqrt{3}\div\sqrt{3}=3$

よって，(△BDE の面積)＝BD×ED÷2＝ $3\sqrt{3}\times 3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

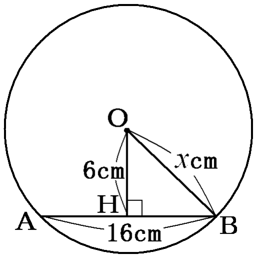
また，(△BCF の面積)＝BC×CF÷2＝ $2\sqrt{3}\times 2\times\dfrac{1}{2}=2\sqrt{3}$

よって，(四角形 CDEF の面積)＝ $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

【】三平方と円の弦

[問題](3 学期)

右の図で，x の値を求めなさい。



[解答欄]

[解答]10

[解説]

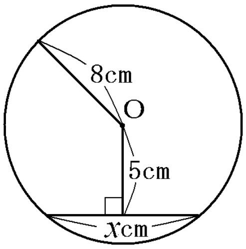
円の中心から弦 AB におろした垂線 OH は線分 AB を二等分するので，BH＝8cm

△OBH で，三平方の定理より，

$OB^2=OH^2+HB^2$，$x^2=36+64=100$　よって，$x=10$

[問題](3 学期)

右の図で，x の値を求めなさい。

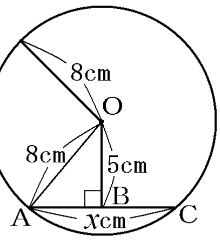


[解答欄]

[解答]$2\sqrt{39}$

[解説]

右の△OAB で，三平方の定理より，



$AB^2+BO^2=OA^2$，$AB^2+25=64$，$AB^2=64-25=39$

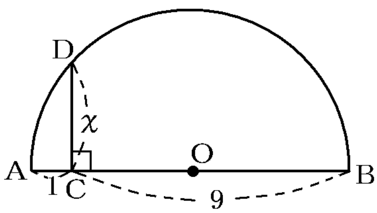
よって，AB＝$\sqrt{39}$ cm

B は AC の中点になるので，x＝AC＝2AB＝$2\sqrt{39}$

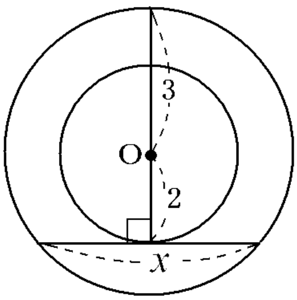
[問題](3 学期)

下の図の x の値を求めなさい。

(1)



(2)



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 3　(2) $2\sqrt{5}$

[解説]

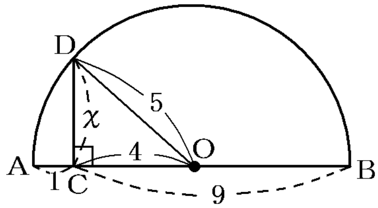
(1) OD を結んで，直角三角形 OCD に注目する。

この円の半径は$(1+9)\div 2=5$なので，OD＝5

OC＝$5-1=4$

△OCD で，三平方の定理より，$CD^2+CO^2=OD^2$

$x^2+4^2=5^2$，$x^2=25-16=9$，$x=3$



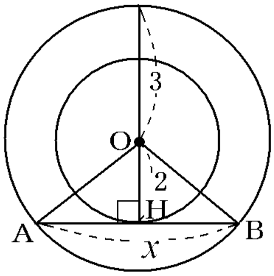
(2) 右図の直角三角形 OAH に注目する。

△OAB は二等辺三角形で OH⊥AB なので H は AB の中点

ゆえに AH＝$\frac{1}{2}x$　OA は半径なので OA＝3

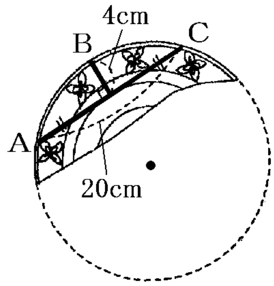
$AH^2+OH^2=OA^2$，$\left(\frac{1}{2}x\right)^2+2^2=3^2$

$\frac{1}{4}x^2+4=9$，$x^2+16=36$，$x^2=36-16=20$　よって，$x=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$



[問題](3 学期)

ある遺跡の発掘現場から，右の図のような円形の皿の破片が見つかった。この皿のもとの形は，図の ABC を弧とする円である。もとの形の円の直径を求めよ。



[解答欄]

[解答]29cm

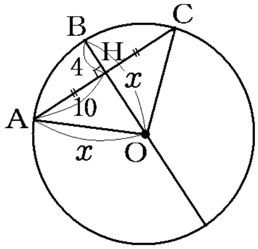
[解説]

右図で, BH は弦 AC の垂直二等分線なので, 円の中心 O を通る。

この円の半径を x cm とする。

△AOH で，AH＝20÷2＝10(cm)，OH＝x －4(cm)である。

三平方の定理より，$OA^2=AH^2+OH^2$



よって，$x^2=10^2+(x-4)^2$

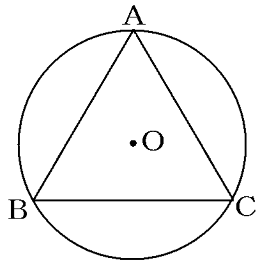
$x^2=100+x^2-8x+16$, $8x=116$, $x=116\div 8=14.5$

したがって，円の直径は，14.5×2＝29(cm)である。

[問題](入試問題)

　右の図のように，正三角形 ABC とその 3 つの頂点を通る円 O がある。この円の半径が 6cm のとき，辺 BC の長さを求めなさい。

(佐賀県)

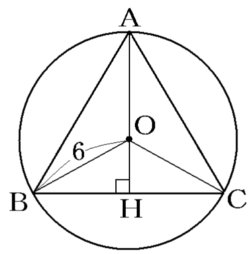


[解答欄]

[解答] $6\sqrt{3}$ cm

[解説]

右図のように AO を結んだ直線が BC と交わる点を H とすると，AH⊥BC となる。



中心角は円周角の 2 倍であるので，

∠BOC＝∠BAC×2＝60°×2＝120°

∠BOH＝∠BOC÷2＝120°÷2＝60°

したがって，△OBH は 30° 60° 90° の直角三角形なので，

OH：OB：BH＝1：2：$\sqrt{3}$

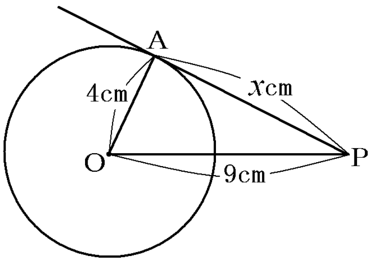
OB＝6cm なので，OH＝3cm，BH＝$3\sqrt{3}$ cm

BC＝BH×2＝$3\sqrt{3}\times 2=6\sqrt{3}$ (cm)

【】三平方と円の接線

[問題](3 学期)

次の図で，x の値を求めなさい。



[解答欄]

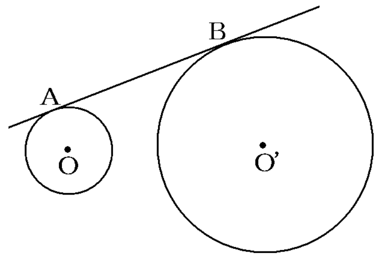
[解答] $\sqrt{65}$

[解説]

円の中心と接点を結んだ線分は接線に垂直になるので，∠OAP＝90° よって，△OAP で三平方の定理より，OA²＋AP²＝OP²，16＋x^2＝81，x^2＝81－16＝65，$x=\sqrt{65}$

[問題](補充問題)

半径 3cm の円 O と，半径 8cm の円 O'があり，OO'間の距離は 13cm である。図のように共通接線をひき，接点を A, B とする。このとき, 線分 AB の長さを求めよ。



[解答欄]

[解答]12cm

[解説]

<Point> 中心と接点を結ぶ→90°

右図のように，OA，OB をひくと，∠OBA＝90°

また，OO’// AC となる C を OB 上にとる。

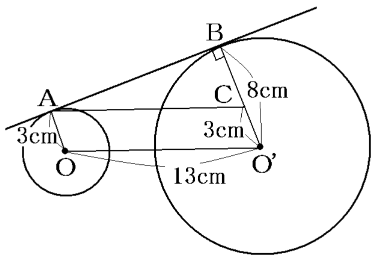
△ABC は直角三角形になり，

AC＝OO’＝13cm，BC＝8－3＝5cm

三平方の定理より，AB²＋BC²＝AC²

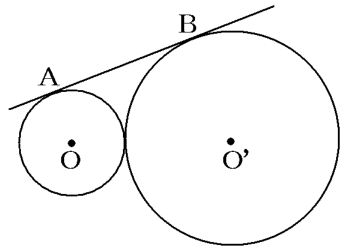
AB²＋5²＝13²，AB²＝169－25＝144＝12²

よって，AB＝12cm



[問題](補充問題)

　半径 4cm の円 O と，半径 8cm の円 O'があり，OO'は外接している。図のように共通接線をひき，接点を A，B とする。このとき，線分 AB の長さを求めよ。



[解答欄]

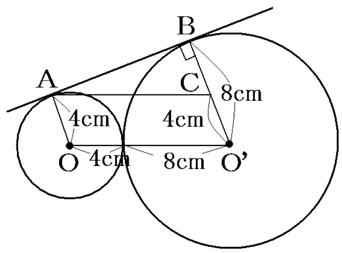
[解答] $8\sqrt{2}$ cm

[解説]

<Point> 中心と接点を結ぶ→90°

右図のように，OA，OB をひくと，∠OBA＝90°

また，OO'∥AC となる C を OB 上にとる。



△ABC は直角三角形になり，

AC＝OO'＝4＋8＝12(cm)

BC＝8－4＝4(cm)

三平方の定理より，$AB^2+BC^2=AC^2$

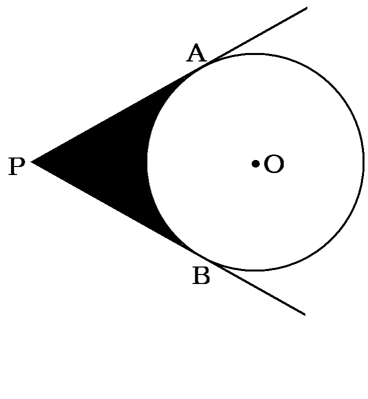
$AB^2+4^2=12^2$

$AB^2=12^2-4^2=144-16=128$

よって，AB＝$\sqrt{128}=\sqrt{64\times 2}=8\sqrt{2}$ (cm)

[問題](3 学期)

右の図で，円Oの半径は 1cm，∠APB＝60° であるとき，影をつけた部分の面積を求めよ。



[解答欄]

[解答] $\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$ (cm²)

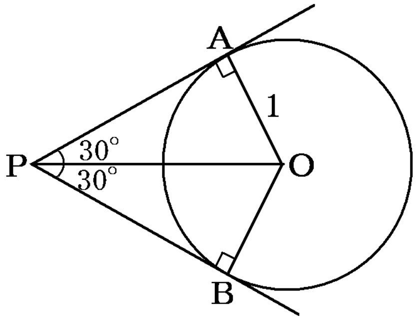
[解説]

∠APB＝60°でOPは∠APBを二等分するので，

∠APO＝30° また，∠OAP＝90°

よって, △APOは30° 60° 90° の直角三角形なので,

OA : AP＝$1:\sqrt{3}$，OA＝1なのでAP＝$\sqrt{3}$ cm



ゆえに(△OAPの面積)＝$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (cm²)

同様に(△OBPの面積)＝$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (cm²)

よって，(四角形OAPBの面積)＝$\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ (cm²)･･･①

次に，扇形OABについて，

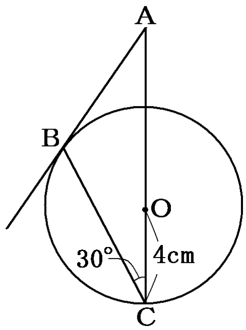
∠AOP＝∠BOP＝60°なので，中心角∠AOB＝120°

ゆえに(扇形OABの面積)＝$\pi\times1^2\times\dfrac{120}{360}=\dfrac{\pi}{3}$ (cm²)･･･②

①，②より，(影をつけた部分の面積)＝$\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$ (cm²)

[問題](3学期)

右の図で，直線ABは円の接線である。線分ABの長さを求めなさい。



[解答欄]

[解答] $4\sqrt{3}$ cm

[解説]

OBを結ぶと，∠ABO＝90°

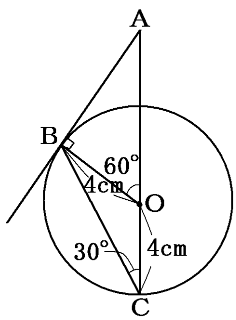
(中心角)＝(円周角)×2なので，∠AOB＝30°×2＝60°

よって，△ABOは30° 60° 90° の直角三角形なので,

AB : OB＝$\sqrt{3}$: 1，OB＝4なので，AB : 4＝$\sqrt{3}$: 1

比の外項の積は内項の積に等しいので,

AB×1＝4×$\sqrt{3}$　よって，AB＝$4\sqrt{3}$ (cm)



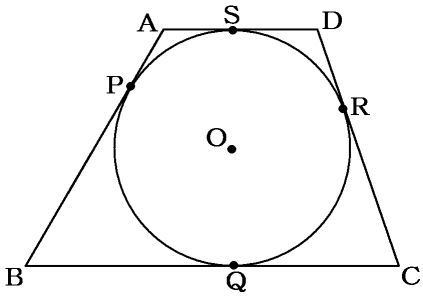
[問題](2 学期期末)

AD // BC である台形 ABCD に，半径 3cm の円 O が内接している。円 O と辺 AB，BC，CD，DA との接点をそれぞれ，P，Q，R，S とする。

OB＝6cm のとき，次の問いに答えなさい。

(1) ∠PBQ は何度ですか。

(2) AB の長さを求めなさい。



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 60°　(2) $4\sqrt{3}$ cm

[解説]

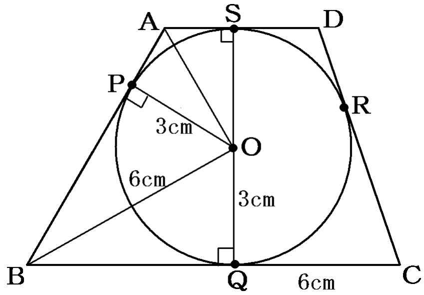
(1) 点 Q は接点なので OQ⊥BC

直角三角形 OBQ で，OB：OQ＝6：3＝2：1 なので

△OBQ は 30° 60° 90° の直角三角形になる。

したがって，∠OBQ＝30° になる。

∠OBP＝∠OBQ なので，∠PBQ＝60°



(2) △OBP は 30° 60° 90° の直角三角形なので，

PB：PO＝$\sqrt{3}:1$，PB：3＝$\sqrt{3}:1$

比の外項の積は内項の積と等しいので，

PB×1＝3×$\sqrt{3}$，PB＝$3\sqrt{3}$ (cm)･･･①

AD // BC なので

∠BAD＝180°－∠PBQ＝180°－60°＝120°

∠PAO＝$\frac{1}{2}$∠BAD＝60°

∠APO＝90° なので，△APO は 30° 60° 90° の直角三角形になる。

ゆえに，AP：PO＝$1:\sqrt{3}$，AP：3＝$1:\sqrt{3}$

比の外項の積は内項の積と等しいので，

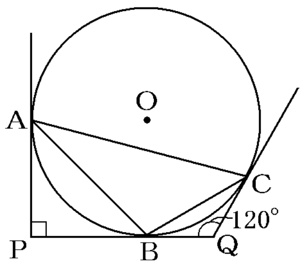
AP×$\sqrt{3}$＝3×1

よって，AP＝$3\div\sqrt{3}=\sqrt{3}$ (cm)･･･②

①，②より，AB＝$3\sqrt{3}+\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ (cm)

[問題](入試問題)

右の図のように，半径 6cm の円 O の周上に 3 点 A，B，C がある。点 B における円 O の接線と，点 A，C における円 O の接線との交点をそれぞれ P，Q とする。
∠APB＝90°，∠BQC＝120°であるとき，次の問いに答えなさい。



(成城高改)

(1) 弦 AB の長さを求めなさい。

(2) ∠ACB を求めなさい。

(3) ∠BAC を求めなさい。

(4) △ABC の面積を求めなさい。

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
(4)		

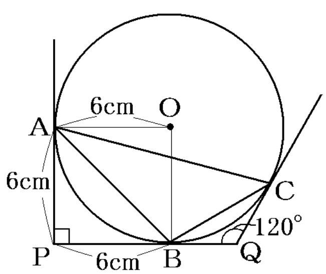
[解答](1) $6\sqrt{2}$ cm (2) 45° (3) 30° (4) $9\sqrt{3}+9$ (cm²)

[解説]

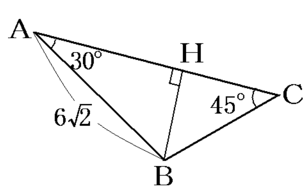
(1) AP，BP は円 O の接線なので∠OAP＝∠OBP＝90°である。よって，四角形 OABP の 4 つの角はすべて 90 度になる。さらに OA＝OB＝6cm なので, 四角形 OABP は 1 辺が 6cm の正方形になる。したがって，AP＝BP＝6cm になる。

三平方の定理より，AB＝$\sqrt{AP^2+BP^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{6^2\times2}=6\sqrt{2}$ (cm)

(2) PB は円 O の接線なので，接弦定理より，
∠PBA＝∠ACB
(1)より，△ABP は直角二等辺三角形なので，∠PBA＝45°
よって，∠ACB＝45°



(3) QB は円 O の接線なので，接弦定理より，∠QBC＝∠BAC
BQ＝CQ なので△BCQ は二等辺三角形で，∠QBC＝∠QCB
よって，∠QBC＝(180°－120°)÷2＝30°
ゆえに，∠BAC＝30°



(4) 右図のように，△ABC の頂点 B から AC に垂線 BH をおろす。

△ABH は 30°60°90° の直角三角形なので,

BH：AB；AH＝1：2：$\sqrt{3}$

AB＝$6\sqrt{2}$ cm なので，BH＝$6\sqrt{2} \div 2 = 3\sqrt{2}$ (cm)

AH＝$3\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{6}$ (cm)

また，△BCH は 45°45°90° の直角三角形なので，BH：CH：BC＝1：1：$\sqrt{2}$

BH＝$3\sqrt{2}$ cm なので，CH＝$3\sqrt{2}$ cm,

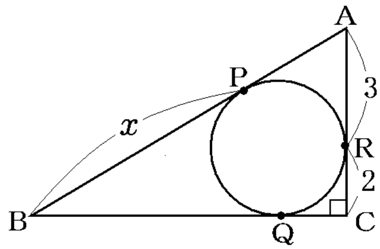
よって，AC＝AH＋CH＝$3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$ (cm)

ゆえに，(△ABC の面積)＝(底辺 AC)×(高さ BH)÷2＝$\left(3\sqrt{6}+3\sqrt{2}\right) \times 3\sqrt{2} \div 2$

$= \left(9\sqrt{12}+18\right) \div 2 = \left(18\sqrt{3}+18\right) \div 2 = 9\sqrt{3}+9$ (cm²)

[問題](3 学期)

右の図のように，△ABC に円が内接している。
P，Q，R を接点とするとき，x の大きさを求めよ。



[解答欄]

[解答]10

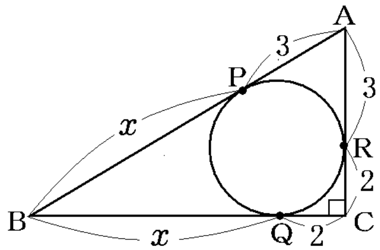
[解説]

右図のように，円外の点 A から 2 本の接線 AP，AR を引くと，AP＝AR が成り立つ。

同様に，CQ＝CR，BP＝BQ

ところで，△ABC は直角三角形なので,

AC²＋BC²＝AB² が成り立つ。



右図より，AC＝5，BC＝$x+2$，AB＝$x+3$

よって，$5^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2$

$25 + x^2 + 4x + 4 = x^2 + 6x + 9$,

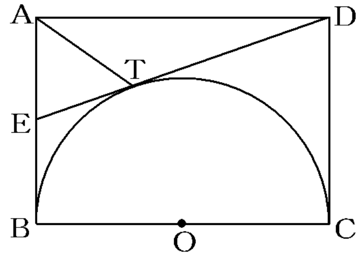
$4x - 6x = 9 - 25 - 4$，$-2x = -20$,

$x = 10$

$x = 10$ は問題にあてはまる。

[問題](3 学期)

右の図の長方形 ABCD で，E は辺 AB の中点である。直線 DE は辺 BC を直径とする半円 O の接線で，その接点を T とする。AE＝3cm のとき，次の各問いに答えよ。



(1) AD の長さを求めよ。

(2) AT の長さを求めよ。

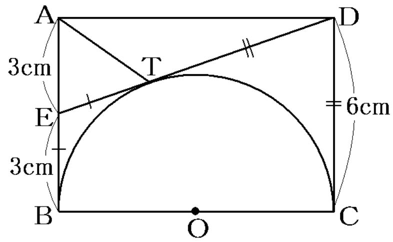
[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $6\sqrt{2}$ cm　(2) $2\sqrt{3}$ cm

[解説]

(1) EB，ET は円外の点 E から円に引いた 2 本の接線になっているので，EB＝ET が成り立つ。



よって，ET＝3cm である。

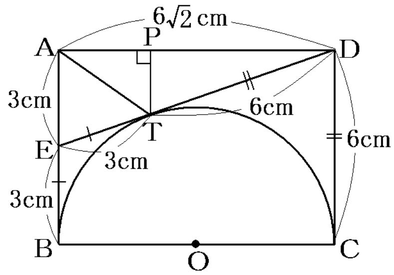
同様にして，DT＝DC＝AB＝6cm

したがって，DE＝DT＋ET＝6＋3＝9(cm)

△ADE は直角三角形なので，三平方の定理より，

AD＝$\sqrt{DE^2-AE^2}=\sqrt{9^2-3^2}=\sqrt{81-9}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$ (cm)

(2) 右図のように, 点 T から辺 AD に垂線 TP を引く。



△DAE で PT // AE なので,

PT : AE＝DT : DE,

PT : 3＝6 : (6＋3)

比で，外項の積は内項の積に等しいので,

9PT＝3×6，PT＝18÷9＝2(cm)

また，DP : PA＝DT : TE＝6 : 3＝2 : 1

DA＝$6\sqrt{2}$ (cm)なので，PA＝$6\sqrt{2}\times\dfrac{1}{3}=2\sqrt{2}$ (cm)

△ATP は直角三角形なので,

AT＝$\sqrt{PA^2+PT^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+2^2}=\sqrt{8+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ (cm)

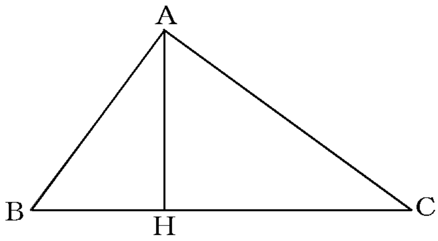
【】三平方と相似

[問題](入試問題)

　次の図で，△ABC は∠A＝90°の直角三角形で，点 H は辺 BC 上の点で，∠AHC＝90°である。

AB＝3cm，AC＝4cm のとき，線分 AH の長さを求めよ。

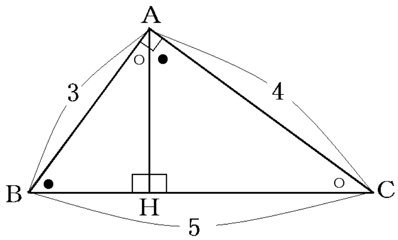
(千葉県)



[解答欄]

[解答] $\frac{12}{5}$ cm

[解説]



∠ABH を●，∠BAH を○で表して等しい角を調べる。

△ABH で，●＋○＝90°である。

∠BAH＋∠CAH＝90°で，∠BAH は○なので，

∠CAH は●になる。さらに，∠ACH は○になる。

したがって，△ABC，△HBA，△HAC は，対応する角が等しく互いに相似になるが，ここでは，△HBA と△ABC を使う。

相似な図形の対応する辺の比は等しいので，小(△HBA)：大(△ABC)をとると，

AH：CA＝AB：CB となる。(小の AH は○と直角→大の○と直角は CA)

AH：4＝3：CB

直角三角形 ABC で，三平方の定理より，

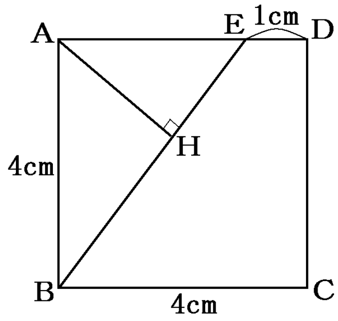
CB＝$\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ (cm)

よって，AH：4＝3：5　比の外項の積は内項の積に等しいので，AH×5＝4×3

よって，AH＝4×3÷5＝$\frac{12}{5}$ (cm)

[問題](3 学期)

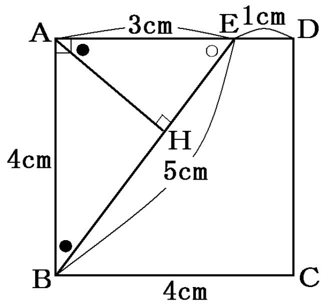
右の図のように，1 辺の長さが 4cm の正方形 ABCD があり，AD 上に DE＝1cm となる点 E をとります。A から BE に垂線をひき，BE との交点を H とするとき，EH の長さを求めなさい。



[解答欄]

[解答] $\dfrac{9}{5}$cm

[解説]



△AEH と△BEA において，

∠AHE＝∠BAE＝90°・・・①

∠AEH＋∠EAH＝90°，∠AEH＋∠ABE＝90° なので，

∠EAH＝∠ABE・・・②

①，②より 2 角が等しいので，△AEH∽△BEA

相似な三角形の対応する辺の比は等しいので，

AE：BE＝EH：EA・・・③

△BEA は直角三角形なので，三平方の定理より，$BE^2=4^2+3^2=25$ で BE＝5

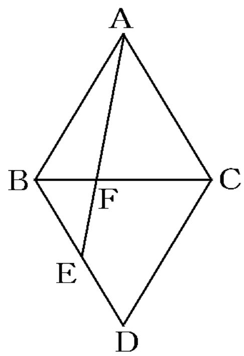
③より，3：5＝EH：3

内項の積は外項の積に等しいので，5×EH＝3×3　よって，EH＝3×3÷5＝$\dfrac{9}{5}$(cm)

[問題](入試問題)

右の図のように，1 辺が 6cm の 2 つの正三角形 ABC と BDC がある。BD の中点を E，AE と BC の交点を F とする。線分 AF の長さを求めなさい。

(日大習志野高)

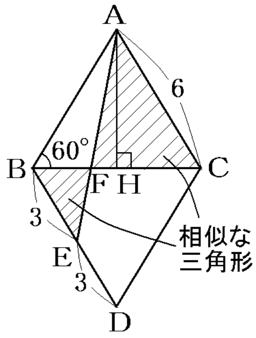


[解答欄]

[解答] $2\sqrt{7}$ cm

[解説]

右図のように，A から BC に垂線 AH をおろす。



直角三角形 AFH で，AH，FH がわかれば，三平方の定理を使って AF を求めることができる。

そこで，△BEF と△CAF に注目する。

∠BFE＝∠CFA(対頂角は等しいので)

∠EBF＝∠ACF＝60°（正三角形の内角なので)

2 角がそれぞれ等しいので，△BEF∽△CAF

相似な図形の対応する辺の比は等しいので，

BF : CF＝BE : CA＝3 : 6＝1 : 2

BF : CF＝1 : 2 で，BF＋CF＝BC＝6cm なので，BF＝$6\times\frac{1}{1+2}=6\times\frac{1}{3}$＝2(cm)

BH＝6÷2＝3cm なので，FH＝BH－BF＝3－2＝1(cm)･･･①

次に，AH を求める。

△ABH は，30° 60° 90° の直角三角形なので，

BH : AB : AH＝1 : 2 : $\sqrt{3}$

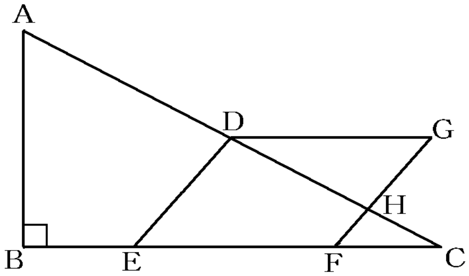
AB＝6cm なので，BH＝3cm，AH＝$3\sqrt{3}$ cm となる。･･･②

①，②より，直角三角形 AFH で，三平方の定理より，

AF＝$\sqrt{AH^2+FH^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{27+1}=\sqrt{28}=\sqrt{4\times7}=2\sqrt{7}$ cm

[問題](3 学期)

右の図で△ABC は，∠ABC＝90° の直角三角形, D は辺 AC の中点, E, F は辺 BC 上の点で，BE＝$\frac{1}{2}$EF＝FC の関係が成り立っている。また，四角形 DEFG は平行四辺形であり， H は AC と GF の交点である。



AB＝2cm，BC＝4cm のとき次の問いに答えなさい。

(1) 線分 DE の長さを求めなさい。

(2) 四角形 ABED の面積は，△DHG の面積の何倍ですか。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $\sqrt{2}$ cm　(2) $\dfrac{15}{4}$ 倍

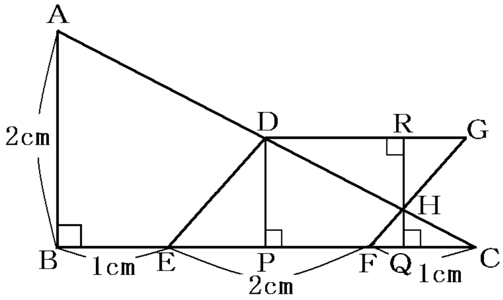
[解説]

(1) D から BC に垂線 DP をひく。

D は AC の中点で，AB // DP なので中点連結定理より，　DP＝$\dfrac{1}{2}$AB＝1cm

また，P は BC の中点で，BC＝4cm，BE＝1cm なので，EP＝1cm

∴DE＝$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ cm



(2) まず△DHG の面積を求める。

DG＝EF＝2cm

△DHG と△CHF は相似で，相似比は

DG：CF＝2：1 なので RH：QH＝2：1

RQ＝DP＝1cm なので，RH＝$\dfrac{2}{3}$RQ＝$\dfrac{2}{3}$ cm

∴(△DHG の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×DG×RH＝$\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$ (cm²)

次に，(△ABC の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times 4\times 2=4$ (cm²)

(△DEC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×EC×DP＝$\dfrac{1}{2}\times 3\times 1=\dfrac{3}{2}$ (cm²)

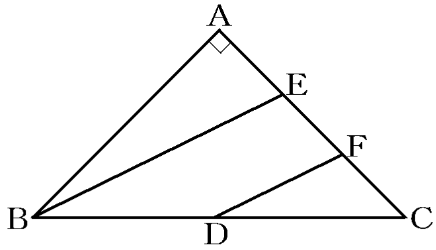
∴(四角形 ABED の面積)＝(△ABC の面積)－(△DEC の面積)＝$4-\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$ (cm²)

$\dfrac{5}{2}\div\dfrac{2}{3}=\dfrac{15}{4}$ なので四角形 ABED は△DHG の $\dfrac{15}{4}$ 倍

【】三平方と中点連結

[問題](3 学期)

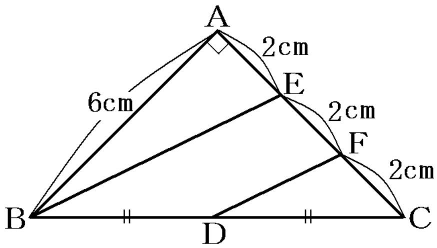
右の図で，△ABC は∠A＝90°の直角二等辺三角形で，D は辺 BC の中点である。また，E，F は辺 AC 上の点で，AE＝EF＝FC である。
AB＝6cm のとき，線分 DF の長さを求めなさい。



[解答欄]

[解答] $\sqrt{10}$ cm

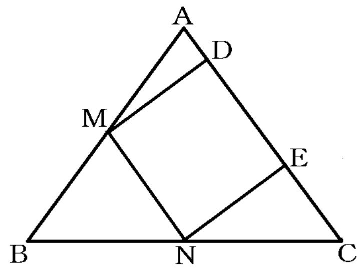
[解説]



AC＝AB＝6cm で，AE＝EF＝FC なので，
AE＝EF＝FC＝2cm
△ABE は直角三角形なので，三平方の定理より，
$BE^2＝AB^2＋AE^2＝36＋4＝40$
よって，BE＝$\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ cm
次に，△CBE で D は CB の中点で，F は CE の中点なので，中点連結定理より，
DF＝$\dfrac{1}{2}$BE　よって，DF＝$\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{10}=\sqrt{10}$ cm

[問題](2 学期期末)

右の図のような AB＝AC＝10cm，BC＝12cm の△ABC において，辺 AB，BC の中点をそれぞれ M，N とします。2 点 M，N から辺 AC にひいた垂線と辺 AC との交点をそれぞれ D，E とします。このとき長方形 MNED の面積を求めなさい。



[解答欄]

[解答] $24cm^2$

[解説]

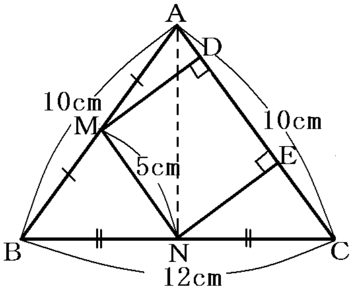
△BAC で，M は BA の中点で，N は BC の中点なので中点連結定理より，

MN＝$\frac{1}{2}$AC＝$\frac{1}{2}$×10＝5(cm)

△CAN と△CNE において

△ABC は二等辺三角形なので AN⊥BC　ゆえに∠ANC＝90°

また，仮定より∠NEC＝90°



ゆえに∠ANC＝∠NEC･･･①

∠C は共通･･･②

①，②より 2 角が等しいので，△CAN∽△CNE

相似な図形の対応する辺の比は等しいので，

NE：AN＝NC：AC

NE：AN＝6：10＝3：5･･･③

ところで，△CAN は直角三角形なので，三平方の定理より

$AN^2+NC^2=AC^2$，$AN^2+36=100$，$AN^2=64$，AN＝8

③より NE：8＝3：5

比の外項の積は内項の積に等しいので，

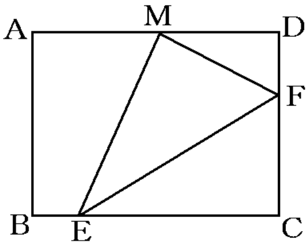
NE×5＝8×3，NE＝8×3÷5＝$\frac{24}{5}$(cm)

ゆえに，(長方形 MNED の面積)＝NE×MN＝$\frac{24}{5}\times 5 = 24$(cm²)

【】方程式，折り返し

[問題](3 学期)

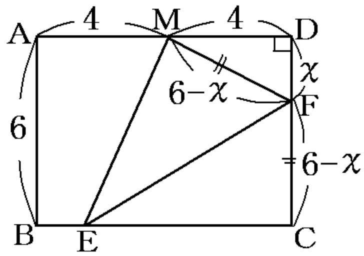
AB＝6cm，BC＝8cm の長方形 ABCD を右の図のように，頂点 C が辺 AD の中点 M と重なるように折る。このとき，DF の長さを求めなさい。



[解答欄]

[解答] $\frac{5}{3}$ cm

[解説]



DF＝ x cm とおくと，FC= $6-x$ (cm)

EF を折り目として FC が FM に重なるので，

MF＝FC，ゆえに MF＝ $6-x$ (cm)

M は AD の中点なので MD＝8÷2＝4(cm)

△FDM は直角三角形なので，三平方の定理より

$FD^2+DM^2=FM^2$

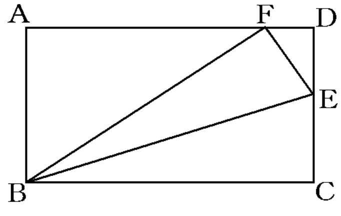
ゆえに $x^2+16=(6-x)^2$

$x^2+16=x^2-12x+36$，$12x=20$

$x=20\div 12=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$ (cm)

[問題](補充問題)

次の図は，長方形 ABCD を，BE を折り目として折り返したとき，頂点 C が辺 AD 上の点 F に移ったところを示したものである。AB＝3cm，BC＝5cm のとき，△DFE の面積を求めよ。

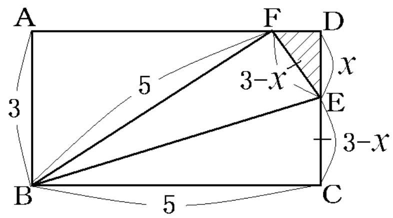


[解答欄]

[解答] $\frac{2}{3}$ (cm²)

[解説]

DF と DE の長さがわかれば，△DFE の面積を求めることができる。そこで，まず DF を求める。



BE を折り目として△BEC を△BEF に折り返しているので，BF＝BC＝5(cm)

直角三角形 BFA で，三平方の定理より，

AF＝$\sqrt{BF^2-BA^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$(cm)　よって，DF＝AD－AF＝5－4＝1(cm)

次に，DE の長さを求めるために，DE＝x cm とおく。

BE を折り目として△BEC を△BEF に折り返しているので，EF＝EC となる。

EC＝DC－DE＝3－x(cm)　よって，EF＝3－x(cm)

直角三角形 DEF で，三平方の定理より，$DE^2+DF^2=EF^2$　よって，$x^2+1^2=(3-x)^2$

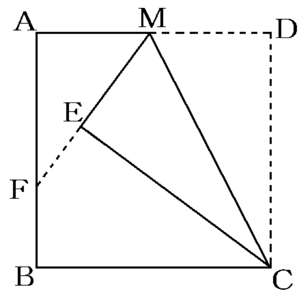
$x^2+1=9-6x+x^2$，$x^2+6x-x^2=9-1$, $6x=8$，$x=8\div6=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$(cm)

よって，(△DEF の面積)＝DF× x ÷2＝$1\times\frac{4}{3}\div2=\frac{2}{3}$(cm²)

[問題](入試問題)

　右の図のように，正方形 ABCD を，AD の中点 M と頂点 C を結ぶ直線を折り目として折り返し，頂点 D が移る点を E，ME の延長と AB との交点を F とすし，AD＝2cm とする。

(石川県)



(1)　FE＝FB であることを証明しなさい。

(2)　FE の長さを求めなさい。

[解答欄]

(1)	
(2)	

[解答]

(1) 補助線 CF を引く。

△CFE と△CFB において，

MC で折り返しているので，∠MEC＝∠MDC＝90°

よって，∠FEC＝90° また，∠FBC＝90° ･･･①

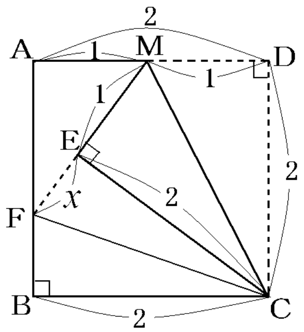
MC で折り返しているので，CE＝CD＝2cm

CB＝2cm なので，CE＝CB･･･②

CF は共通･･･③

①，②，③より，斜辺と他の一辺が等しいので，

△CFE≡△CFB　よって，FE＝FB



(2) $\dfrac{2}{3}$cm

[解説]

(2) 直角三角形 FMA に注目する。

M は AD の中点なので，AM＝DM＝1cm

MD で折り返しているので，EM＝DM＝1cm

EF＝$x$cm とおくと，FM＝x＋1(cm)

ところで，(1)より FB＝FE＝$x$cm　よって，AF＝AB－FB＝2－x(cm)

直角三角形 FMA において，三平方の定理より，AF²＋AM²＝FM²

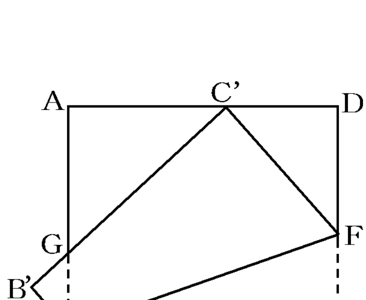
したがって，$(2-x)^2+1^2=(x+1)^2$

$4-4x+x^2+1=x^2+2x+1,\ -4x+x^2-x^2-2x=1-4-1$

$-6x=-4,\ x=(-4)\div(-6)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$(cm)

[問題](3 学期)

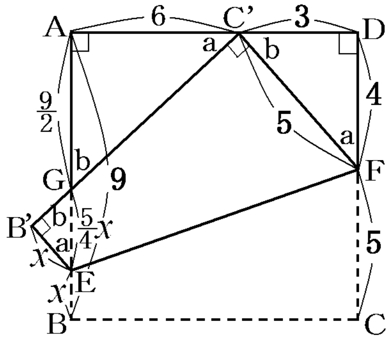
右の図のように，正方形 ABCD を，点 C が辺 AD 上にくるように折り返す。点 B，C が移る点をそれぞれ B'，C'とし，折り目を EF とする。また，B'C'と辺 AB の交点を G とする。AB＝9cm，C'D＝3cm，DF＝4cm のとき，線分 B'E の長さを求めなさい。



[解答欄]

[解答]2cm

[解説]



△C’DF の∠C’FD＝a，∠FC’D＝b とすると，

a＋b＝90°

次に，∠B’C’F＝90°なので，∠AC’G＋∠DC’F＝90°

∠AC’G＋b＝90°　よって∠AC’G＝90°－b＝a

△AC’G について，∠C’AG＝90°で，

∠AGC’＋∠AC’G＝90°なので，

∠AGC’＋a＝90°で，∠AGC’＝90°－a＝b

同様に，△B’EG の 90°以外の角の大きさも右図のように a，b となる。

以上のことから，2 角が等しいので，△C’DF，△AC’G，△B’EG は互いに相似になる。

EF を折り目に折り返しているので，C’F＝CF，CF＝9－4＝5cm なので，C’F＝5cm

△C’DF は直角三角形なので，三平方の定理より，

$C'D^2=5^2-4^2=9$　よって C’D＝3cm

次に，△AC’G について，AC’＝AD－C’D＝9－3＝6cm

△AC’G∽△C’DF なので，対応する辺の比は等しくなり，AG：C’D＝AC’：FD

(角 a，b で辺の対応関係をつかむことができる)

よって，AG：3＝6：4　外項の積は内項の積に等しいので，AG×4＝3×6

ゆえに，AG＝$\frac{9}{2}$cm

次に，BE＝B’E＝x とおく。△B’EG∽△C’DF なので，対応する辺の比は等しくなり，

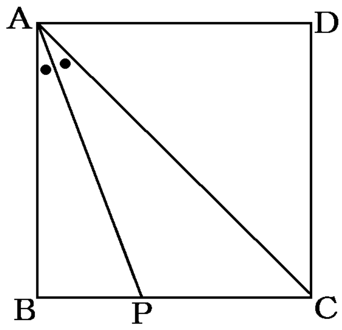
GE：C’F＝B’E：FD，GE：5＝x：4

外項の積は内項の積に等しいので，GE×4＝5×x　よって，GE＝$\frac{5}{4}x$ cm

BE＋EG＋GA＝AB なので，$x+\frac{5}{4}x+\frac{9}{2}=9$　両辺に 4 をかけると，

$4x+5x+18=36,\ 9x=18,\ x=2$　よって，B’E＝2cm

[問題](3 学期)



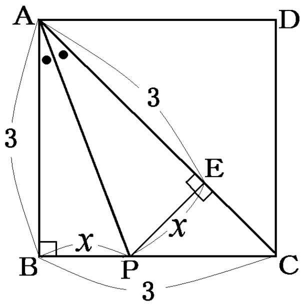
右の図のように 1 辺の長さが 3cm の正方形がある。

∠BAC の二等分線と辺 BC との交点を P とするとき線分 BP の長さを求めなさい。

[解答欄]

[解答] $3\sqrt{2}-3$ (cm)

[解説]



右図のように，P から AC に垂線 PE を引く。

△APB と△APE の 2 つの直角三角形は，

斜辺 AP が共通で，∠PAB＝∠PAE なので，合同になる。

したがって，AE＝AB＝3cm

また，BP＝ x cm とすると，EP＝BP＝ x cm

ここで，直角三角形 PCE に注目する。

PE＝ x cm

PC＝BC－BP＝3－ x (cm)

EC＝AC－3(cm)

直角三角形 ABC で，三平方の定理より，

AC＝ $\sqrt{AB^2+CB^2}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2}$ (cm)

よって，EC＝AC－3＝ $3\sqrt{2}-3$ (cm)

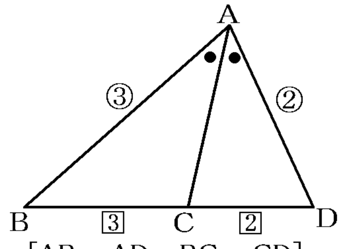
直角三角形 PCE で，三平方の定理より，PE²＋CE²＝PC²

したがって， $x^2+\left(3\sqrt{2}-3\right)^2=\left(3-x\right)^2$

$x^2+18-18\sqrt{2}+9=9-6x+x^2$， $x^2+6x-x^2=9-18+18\sqrt{2}-9$

$6x=18\sqrt{2}-18$， $x=\left(18\sqrt{2}-18\right)\div 6=3\sqrt{2}-3$ (cm)

(別解)



[AB : AD＝BC : CD]

△ABC は直角三角形なので，三平方の定理より，

AC＝ $\sqrt{AB^2+CB^2}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2}$ (cm)

次に，AP は∠BAC の二等分線なので，

AB：AC＝BP：PC，3：$3\sqrt{2}$＝BP：PC

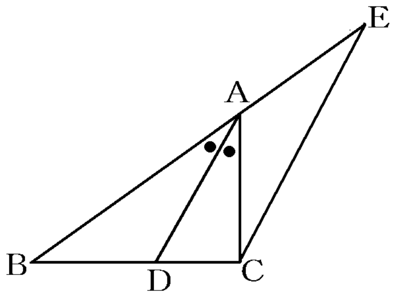
外項の積は内項の積に等しいので，3×PC＝BP×$3\sqrt{2}$，PC＝$3\sqrt{2}$ BP÷3＝$\sqrt{2}$ BP

ところで，BP＋PC＝3 なので，BP＋$\sqrt{2}$ BP＝3

$\left(\sqrt{2}+1\right)$BP＝3，よって，BP＝$\dfrac{3}{\left(\sqrt{2}+1\right)}=\dfrac{3\times\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\dfrac{3\sqrt{2}-3}{2-1}=3\sqrt{2}-3$(cm)

[問題](3 学期)

右の図のように，∠C＝90°の直角三角形 ABC の∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とする。また，点 C を通り, AD に平行な直線と辺 BA の延長との交点を E とする。AC＝3cm，AB＝5cm のとき，次の問いに答えなさい。



(1) AE の長さを求めなさい。

(2) BD の長さを求めなさい。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 3cm　(2) $\dfrac{5}{2}$ cm

[解説]

(1) 仮定より，AD // EC

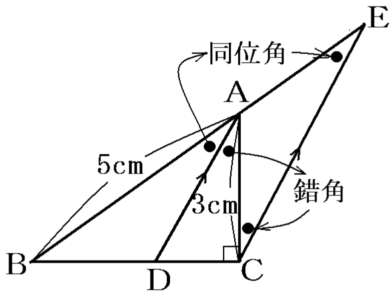
平行線の同位角は等しいので，∠BAD＝∠AEC

平行線の錯角は等しいので，∠DAC＝∠ACE

∠BAD＝∠DAC なので，∠AEC＝∠ACE

よって，△ACE は二等辺三角形となり，

AE＝AC＝3cm



(2) △ABC は直角三角形なので，三平方の定理より，

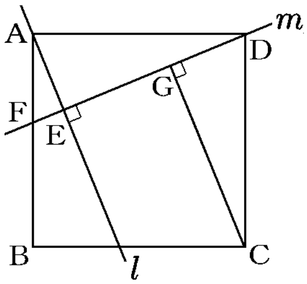
$BC^2+CA^2=AB^2$，$BC^2+9=25$，$BC^2=25-9=16$，BC＝4cm

AD // EC なので，平行線の性質より，BD：DC＝BA：AE　よって，BD：DC＝5：3

BC＝4cm なので，BD＝$4\times\dfrac{5}{5+3}=\dfrac{5}{2}$ cm

[問題](入試問題)

右の図のように，正方形ABCDと，点Aを通る直線lがある。点Dを通り，lに垂直な直線mをひき，lとの交点をE，辺ABとの交点をFとする。また，点Cからmに垂線CGをひく。次の(1)，(2)に答えなさい。(山口県改)



(1) △ADE≡△DCGを証明しなさい。

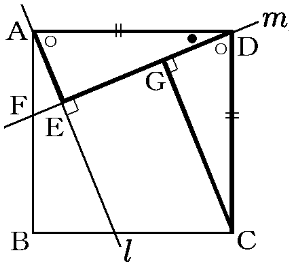
(2) AD＝13cm，EG＝7cmのとき，AEの長さを求めなさい。

[解答欄]

(1)
(2)

[解答]

(1) △ADEと△DCGにおいて，



仮定より，∠AED＝∠DGC＝90°　･･･①

四角形ABCDは正方形なので，AD＝DC･･･②

∠EAD＋∠ADE＝180°－∠AED＝180°－90°＝90°　･･･③

∠CDG＋∠ADE＝∠ADC＝90°　･･･④

③，④より，∠EAD＝∠CDG･･･⑤

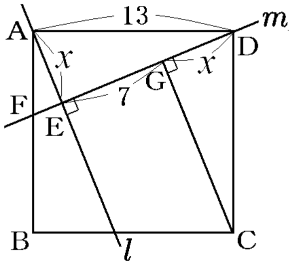
①，②，⑤より，2つの直角三角形の斜辺と1つの鋭角がそれぞれ等しいので，

△ADE≡△DCG

(2) 5cm

[解説]

(2) 右図のように，AE＝x cmとする。



△ADE≡△DCGなので，GD＝AE＝x cm

右図の直角三角形ADEにおいて，三平方の定理より，

AE²＋DE²＝AD²

$x^2+(7+x)^2=13^2$，　$x^2+49+14x+x^2=169$

$2x^2+14x-120=0$,　$x^2+7x-60=0$

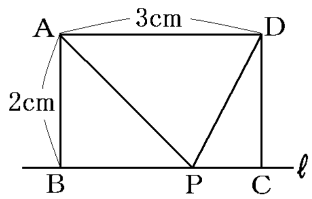
$(x-5)(x+12)=0$，　$x=5,\ -12$

$x>0$ なので，　$x=5$

【】平面図形上の最短距離

[問題](入試問題)

図のように，AB＝2cm，AD＝3cm の長方形 ABCD を辺 BC が直線 l 上にくるようにおく。また，点 P は l 上を動く点とする。2 つの線分 AP，PD の長さの和 AP＋PD が最小となるとき，AP＋PD の長さは何 cm か。(長崎県)



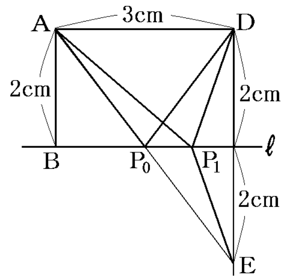
[解答欄]

[解答]5cm

[解説]

右図のように l について D と対称な点 E をとる。

A と E を結んだ直線が l と交わる点を P_0 とすると，P_0 が AP＋PD を最小にする点になる。まず，その理由を説明しよう。



$AP_0+P_0D=AP_0+P_0E=AE$

l 上に点 P_1 をとると，$AP_1+P_1D=AP_1+P_1E$

三角形 A P_1E で，1 辺は他の 2 辺の和よりも小さいので，

$AE<AP_1+P_1E$ となるので，$AP_0+P_0D<AP_1+P_1D$

したがって，P が P_0 の位置にあるとき，P が l 上の他の位置にあるときより AP＋PD は小さくなる。すなわち，P が P_0 の位置にあるとき，AP＋PD は最小になる。

次に，　直角三角形 AED において，三平方の定理より，

AE＝$\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ (cm)

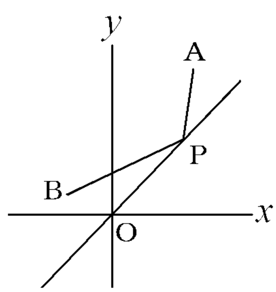
$AP_0+P_0D=AP_0+P_0E=AE=5$(cm)である。

[問題](入試問題)

直線　$y=x$ 上を動く点 P がある。2 点 A(4，7)，B(−2，1)とするとき，次の問いに答えよ。(名古屋女子大高)

(1) AP＋BP のもっとも小さくなるときの値を求めよ。

(2) (1)のときの点 P の座標を求めよ。



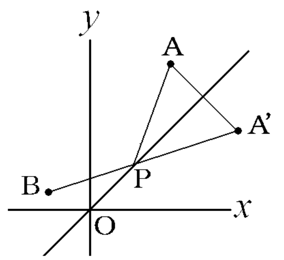
[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1)　$3\sqrt{10}$　(2)　$\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$

[解説]

(1)　右図のように，$y=x$ と対称な位置に A’をとる。



B と A’を結んだ直線が $y=x$ と交わる点が AP＋BP を最小にする点 P である。

$y=x$ について，A(4，7)と対称な点 A’の座標は，A の x 座標と y 座標を反対にした，A’(7，4)である。

このとき，AP＋BP＝A’P＋BP＝A’B である。

2 点 A’(7，4)と B(－2，1)の距離は

A’B＝$\sqrt{\left(7-(-2)\right)^2+(4-1)^2}=\sqrt{81+9}=\sqrt{90}=\sqrt{9\times10}=3\sqrt{10}$　である。

(2)　まず，A’B の直線の式を $y=ax+b$ とおく。

$y=ax+b$ は A’(7，4)を通るので，$y=ax+b$ に $x=7$，$y=4$ を代入して，

$4=7a+b,\ 7a+b=4\cdots$①

$y=ax+b$ は B(－2，1)を通るので，$y=ax+b$ に $x=-2$，$y=1$ を代入して，

$1=-2a+b,\ -2a+b=1\cdots$②

①－②より，

$$7a+b-(-2a+b)=4-1,\ 7a+b+2a-b=3,\ 9a=3,\ a=3\div9,\ a=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$a=\frac{1}{3}$ を②に代入すると，$-2\times\frac{1}{3}+b=1,\ b=1+\frac{2}{3},\ b=\frac{5}{3}$

よって A’B の直線の式は，$y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}\cdots$③となる。

$y=x\cdots$④と③の交点を求めるために，③，④を連立方程式として解く。

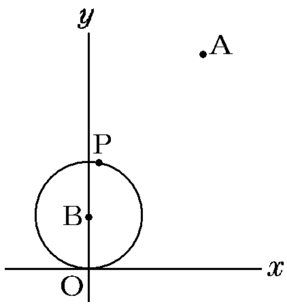
④を③に代入すると，$x=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3},\ 3x=x+5,\ 2x=5,\ x=\frac{5}{2}$

④に $x=\frac{5}{2}$ を代入すると，$y=\frac{5}{2}$

よって，点 P の座標は，$\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$　となる。

[問題](入試問題)

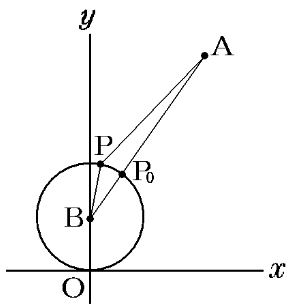
　座標平面上に 2 点 A(6，11)，B(0，3)をとり，点 B を中心として，x 軸に接する円を考える。この円周上を点 P が動くとき，AP の長さの最小値を求めなさい。(江戸川学園取手高)



[解答欄]

[解答]7

[解説]



右図のように，直線 AB と円の交点 P_0 の位置に点 P があるとき AP の長さは最小になる。まず，その理由を説明する。

三角形の 2 辺の長さの和は他の 1 辺より大きいので，

△APB で，AP＋PB＞AB

AB＝AP_0＋P_0B なので，AP＋PB＞AP_0＋P_0B

PB＝P_0B＝(円の半径)＝3 なので，AP＋3＞AP_0＋3,

AP＞AP_0

よって，P が P_0 の位置にあるとき，AP はもっとも小さくなる。

三平方の定理より，A(6，11)，B(0，3)間の距離は，

AB＝$\sqrt{(6-0)^2+(11-3)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$

円の半径は 3 なので，BP_0＝3

よって，AP_0＝AB－BP_0＝10－3＝7

[印刷／他のPDFファイルについて]

※ このファイルは，FdData 中間期末数学 3 年(7,800 円)の一部を PDF 形式に変換したサンプルで，印刷はできないようになっています。製品版の FdData 中間期末数学 3 年は Word の文書ファイルで，印刷・編集を自由に行うことができます。

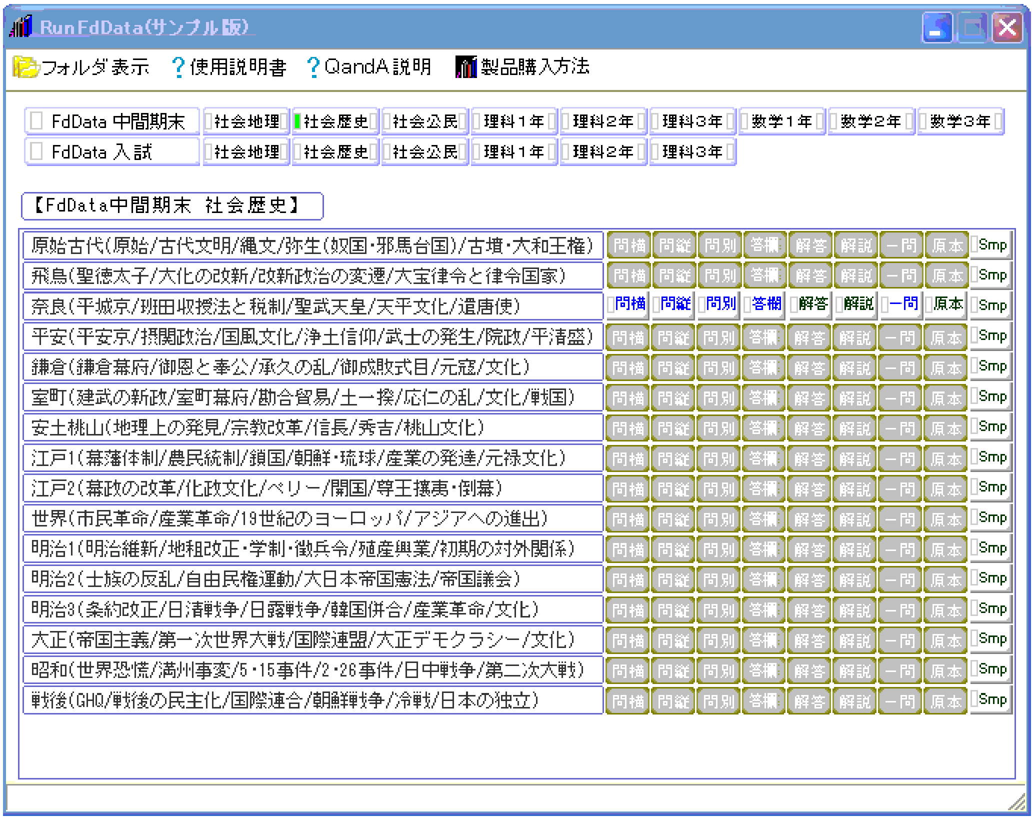
※FdData 中間期末(社会･理科･数学)全分野の PDF ファイル，および製品版の購入方法は http://www.fdtext.com/dat/ に掲載しております。

下図のような，[FdData 無料閲覧ソフト(RunFdData2)]を，Windows のデスクトップ上にインストールすれば， FdData 中間期末･FdData 入試の全 PDF ファイル(各教科約 1800 ページ以上)を自由に閲覧できます。次のリンクを左クリックするとインストールが開始されます。

RunFdData 【 http://fddata.deci.jp/lnk/instRunFdDataWDs.exe 】

※ダイアログが表示されたら，【実行】ボタンを左クリックしてください。インストール中，いくつかの警告が出ますが，[実行][許可する][次へ]等を選択します。

【イメージ画像】



【Fd 教材開発】(092) 404-2266
http://www.fdtext.com/dat/