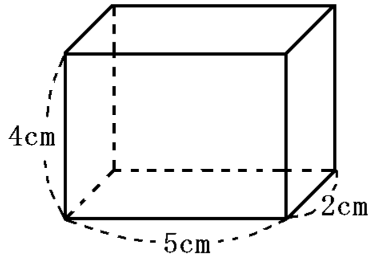
【】立体と対角線の長さ

[問題](3 学期)

右図のような直方体の対角線の長さを求めなさい。



[解答欄]

[解答] $3\sqrt{5}$ cm

[解説]

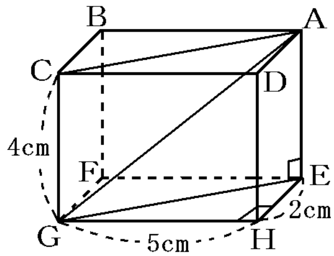
<Point> 2 点を通る平面で立体を切る→切断面で考える

まず，底面の直角三角形EGHについて，三平方の定理より，$EG^2 = GH^2 + EH^2 = 5^2 + 2^2 = 29$

次に，直角三角形 AEG について，

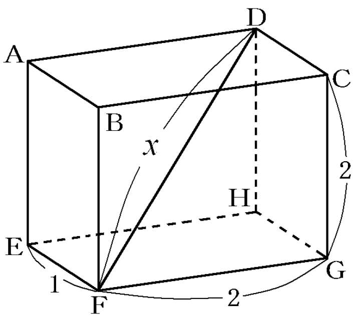
$AG^2 = AE^2 + EG^2 = 4^2 + 29 = 45$

ゆえに AG＝ $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$ (cm)



[問題](3 学期)

次の図の x を求めなさい。



[解答欄] (ABCD-EFGHは直方体)

[解答] $x = 3$

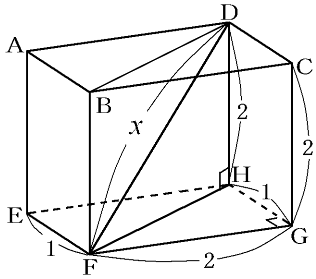
[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る→切断面で考える

△FGHで三平方の定理より，$FH^2＝FG^2＋GH^2＝4+1=5$

次に，△DFH で三平方の定理より，

$x^2 ＝FH^2＋DH^2＝5+4=9$　よって，$x=3$



[問題](3 学期)

3 辺の長さが 3cm，4cm，5cm である直方体の対角線の長さを求めなさい。

[解答欄]

[解答] $5\sqrt{2}$ cm

[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る→切断面で考える

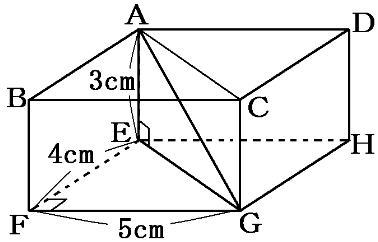
右図の△EFG は直角三角形なので，三平方の定理より，

$EG^2＝EF^2＋FG^2＝4^2＋5^2＝16＋25＝41$

次に，△AEG も直角三角形なので，三平方の定理より，

$AG^2＝AE^2＋EG^2＝9＋41＝50$

よって，$AG=\sqrt{50}=\sqrt{25\times2}=5\sqrt{2}$ (cm)



[問題](2 学期期末)

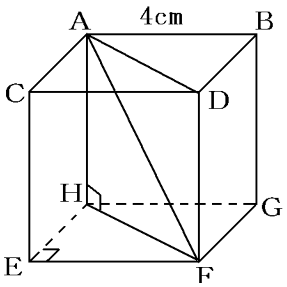
1 辺が 4cm の立方体の対角線の長さを求めなさい。

[解答欄]

[解答] $4\sqrt{3}$ cm

[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る→切断面で考える



まず，直角三角形 HFE について，三平方の定理より，

$HF^2=HE^2+EF^2=4^2+4^2=32$

次に，直角三角形 AFH について，三平方の定理より，

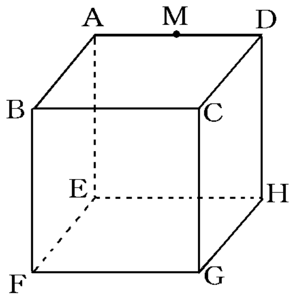
$AF^2=AH^2+HF^2=4^2+32=48$

ゆえに $AF=\sqrt{48}=\sqrt{16\times3}=4\sqrt{3}$ (cm)

【】立体上の 2 点の長さ

[問題](補充問題)

次の図のように，1 辺の長さが 4cm の立方体 ABCD－EFGH があり，辺 AD の中点を M とする。MF の長さを求めよ。

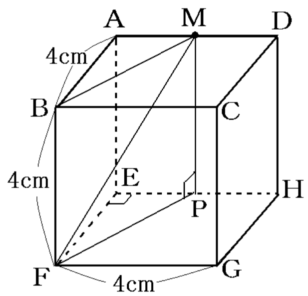


[解答欄]

[解答]6cm

[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る→切断面で考える



右図のように，M と F を通り底面に垂直な断面 MBFP を考える。このとき，∠MPF＝90° で P は EH の中点になる。

MP＝4cm なので, FP の長さがわかれば, 三平方の定理より，MF の長さが計算できる。

そこで，直角三角形 FPE に注目する。

EF＝4cm，P は EH の中点なので，EP＝2cm

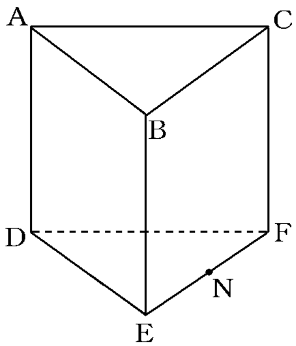
三平方の定理より，FP＝$\sqrt{EF^2+EP^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$

次に，△MFP で，三平方の定理より，

MF＝$\sqrt{FP^2+PM^2}=\sqrt{20+4^2}=\sqrt{36}=6$(cm)

[問題](入試問題)

次の図の立体は底面が直角二等辺三角形で，側面はすべて長方形の三角柱であり，∠ABC＝90°，AB＝BC＝4cm，AD＝5cm とする。また，辺 EF の中点を N とする。A，N を結ぶとき，線分 AN の長さを求めよ。(佐賀県)



[解答欄]

[解答]$3\sqrt{5}$cm

[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る→切断面で考える

図1

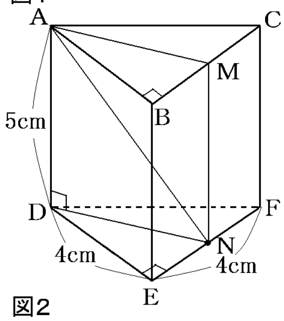
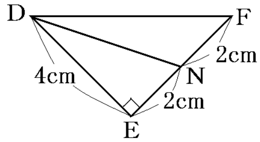


図2



右の図 1 のように，A と N を通り底面に垂直な断面 ADNM を考える。

AD は底面に垂直なので，∠ADN＝90° である。したがって，直角三角形 AND で，

AD＝5cm なので，あと DN の長さがわかれば，三平方の定理より AN の長さを求めることができる。

そこで，図 2 のように底面 DFE を平面に書き表してみる。

図 2 の直角三角形 DNE で，三平方の定理より，

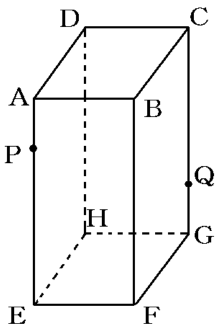
DN＝$\sqrt{DE^2+EN^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$ (cm)

図 1 の直角三角形 AND で，三平方の定理より，

AN＝$\sqrt{AD^2+DN^2}=\sqrt{25+20}=\sqrt{45}=\sqrt{9\times 5}=3\sqrt{5}$ (cm)

[問題](補充問題)

次の図の立体は，8 つの点 A，B，C，D，E，F，G，H を頂点とする直方体であり，AB＝4cm，AD＝6cm，AE＝8cm である。辺 AE，CG 上にそれぞれ点 P，Q を，AP＝2cm，CQ＝6cm となるようにとるとき，PQ の長さを求めよ。



[解答欄]

[解答] $2\sqrt{17}$ cm

[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る
→切断面で考える

図1

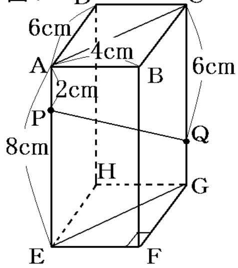
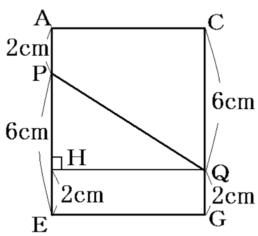


図2



右図のように，2 点 P，Q を通り底面に垂直な断面 AEGC を考える。

図 2 は切断面 AEGC の部分を平面にしたものである。Q から EG と平行に QH の線分を引

くと，∠PHQ＝90° になる。

△PQH で，PH＝6－2＝4(cm)なので，

QH(＝EG)の長さがわかれば，三平方の定理より PQ の長さを求めることができる。

そこで，図 1 の直角三角形 EGF に注目する。EF＝4cm，GF＝6cm なので，三平方の定理

より，EG＝$\sqrt{EF^2+GF^2}=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}$ (cm)　よって，QH＝EG＝$\sqrt{52}$

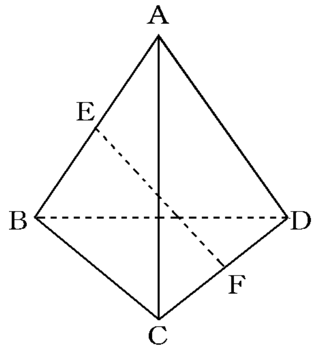
図 2 の直角三角形 PQH で，三平方の定理より，

PQ＝$\sqrt{PH^2+QH^2}=\sqrt{4^2+52}=\sqrt{68}=\sqrt{4\times17}=2\sqrt{17}$ (cm)

[問題](入試問題)

1 辺 10cm の正四面体 ABCD で，辺 AB の中点を E，辺 CD の中点を F とする。線分 EF の長さを求めよ。

(名古屋女大高)



[解答欄]

[解答] $5\sqrt{2}$ cm

[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る→切断面で考える

右図のように，2 点 E，F を通り底面に垂直な断面 ABF を考える。右の図 2 はその断面を表している。△FAB は FA＝FB の二等辺三角形で，E は AB の中点なので，∠BEF＝90° になる。△BEF で，BE＝10÷2＝5(cm)なので，BF の長さがわかれば，三平方の定理より，EF の長さが求まる。

図1

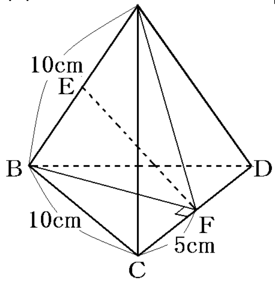


図2

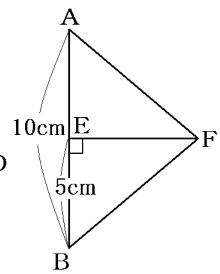


図 1 の△BCF で，∠BFC＝90° なので，三平方の定理より，

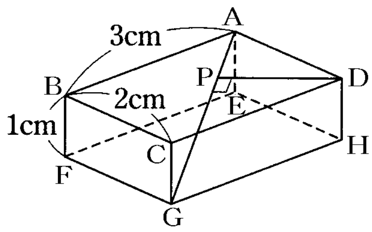
BF＝$\sqrt{BC^2-CF^2}=\sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{75}$ (cm)

したがって，図 2 の△BEF で，EF＝$\sqrt{BF^2-BE^2}=\sqrt{75-5^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ (cm)

【】立体→切断面の平面図形

[問題](入試問題)

右の図のように，AB＝3cm，BC＝2cm，BF＝1cm の直方体がある。この直方体の対角線 AG に頂点 D から垂線 DP を下ろす。このとき，DP の長さを求めなさい。



(成蹊高)

[解答欄]

[解答] $\dfrac{2\sqrt{35}}{7}$ cm

[解説]

<Point>AD⊥面 CGHD

△AGD の面積→高さ DP

DG を結び，△AGD に注目する。

図の立体は直方体なので，

AD⊥面 CGHD

GD は面 CGHD 上にあるので，

AD⊥GD となる。

図1

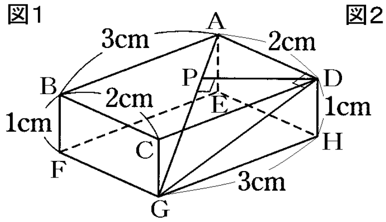
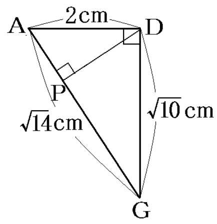


図2



したがって，△AGD は直角三角形になる。

そこで，右の図 2 のように，△AGD を取り出して考える。まず，△AGD の 3 辺を求める。

AD＝BC＝2cm　GD を求めるために，図 1 の直角三角形 GDH で，三平方の定理より，

GD＝$\sqrt{GH^2+DH^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ (cm)

図 2 の直角三角形 AGD で，

AG＝$\sqrt{AD^2+GD^2}=\sqrt{2^2+\left(\sqrt{10}\right)^2}=\sqrt{14}$ (cm)

△AGD で，面積を使って DP の長さを求める。

AD を底辺にすると，GD が高さになるので，

(△AGDの面積)＝(底辺AD)×(高さGD)÷2＝ $2\times\sqrt{10}\div 2=\sqrt{10}$ (cm²)･･･①

AG を底辺とすると，DP が高さになるので，

$(\triangle AGD$ の面積$)=($底辺 $AG)\times($高さ $DP)\div 2=\sqrt{14}\times DP\div 2=\dfrac{\sqrt{14}}{2}DP\cdots$②

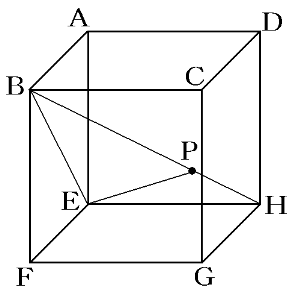
①，②より，$\dfrac{\sqrt{14}}{2}DP=\sqrt{10}$

よって，$DP=\sqrt{10}\times\dfrac{2}{\sqrt{14}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{14}}=\dfrac{2\sqrt{10}\times\sqrt{14}}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=\dfrac{2\sqrt{140}}{14}=\dfrac{4\sqrt{35}}{14}=\dfrac{2\sqrt{35}}{7}$ (cm)

[問題](入試問題)

右の図のように，1 辺の長さが 4cm の立方体 ABCD－EFGH がある。対角線 BH 上に BP：PH＝3：1 となる点 P をとる。△PBE の面積を求めよ。

(新潟県改)



[解答欄]

[解答] $6\sqrt{2}$ (cm²)

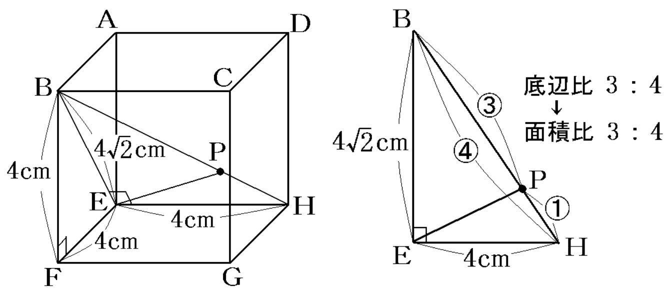
[解説]

<Point> HE⊥BE

まず，△BHE の面積を求める。

HE⊥面 ABFE なので，HE⊥BE

よって，△BHE は直角三角形である。



直角三角形 BEF で，

三平方の定理より，

$BE=\sqrt{BF^2+EF^2}=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{4^2\times 2}=4\sqrt{2}$ (cm)

よって，$(\triangle BEH$の面積$)=($底辺$EH)\times($高さ$BE)\div 2=4\times 4\sqrt{2}\div 2=8\sqrt{2}$ (cm²)

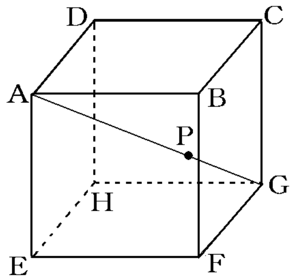
△PBE の底辺を BP，△BEH の底辺を BH とすると高さは共通なので，

面積は底辺の比 BP：BH＝3：4 になる。

したがって，$(\triangle PBE$の面積$)=(\triangle BEH$の面積$)\times\dfrac{3}{4}=8\sqrt{2}\times\dfrac{3}{4}=6\sqrt{2}$ (cm²)

[問題](補充問題)

次の図は，1 辺の長さが 6cm の立方体 ABCD－EFGH において，線分 AG 上に点 P をとり，AP：PG＝2：1 となるようにしたものである。線分 PF の長さは何 cm か。



[解答欄]

[解答] $2\sqrt{6}$ cm

[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る
→切断面で考える

図1

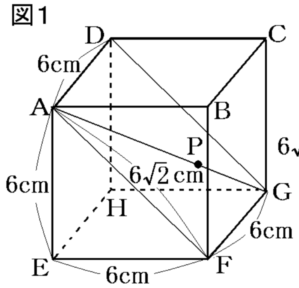
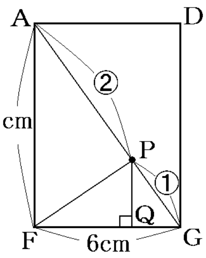


図2



2 点 P，F，および線分 AG を含む断面 AFGD で考える。

図 2 の△PFQ で，FQ と PQ の長さがわかれば，三平方の定理で PF の長さを計算できる。

そこで，まず AF の長さを求める。

図 1 の直角三角形 AFE で，三平方の定理より，

AF＝$\sqrt{AE^2+EF^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{6^2\times 2}=6\sqrt{2}$ (cm)

図 2 で，PQ：AF＝GP：GA＝1：(1＋2)，よって，PQ：$6\sqrt{2}$＝1：3

外項の積は内項の積に等しいので，PQ×3＝$6\sqrt{2}$×1

よって，PQ＝$6\sqrt{2}\div 3=2\sqrt{2}$ (cm)･･･①

次に，GF＝6(cm)なので，

GQ：GF＝GP：GA＝1：(1＋2)，よって，GQ：6＝1：3

外項の積は内項の積に等しいので，

GQ×3＝6×1，GQ＝6÷3＝2(cm)

FQ＝FG－GQ＝6－2＝4(cm)･･･②

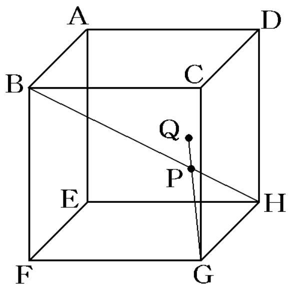
①，②より，PQ＝$2\sqrt{2}$ cm，FQ＝4cm なので，

直角三角形 PFQ で，三平方の定理より，

PF＝$\sqrt{PQ^2+FQ^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+4^2}=\sqrt{8+16}=\sqrt{24}=\sqrt{4\times 6}=2\sqrt{6}$ (cm)

[問題](入試問題)

　右の図のように，1 辺の長さが 9cm の立方体 ABCD−EFGH がある。対角線 BH 上に BP : PH＝3 : 1 となる点 P をとり，線分 GP の延長と平面 AEHD との交点を Q とする。このとき，線分 GQ の長さを求めよ。



(新潟県)

[解答欄]

[解答] $3\sqrt{11}$ cm

[解説]

<Point> 切断面で考える

BPH，GPQ を含むこの立方体の切断面は，右の図 1 のように，ABGH になる。

GH⊥面 AEHD なので，GH⊥AH

同様に BA⊥AH

よって，切断面 ABGH は図 2 のような長方形になる。図 2 の△GQH は直角三角形なので，GH と QH がわかれば GQ を求めることができる。GH＝9cm なので，あとは QH である。

図1

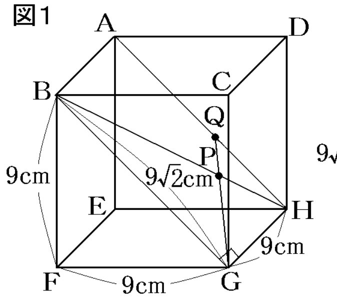
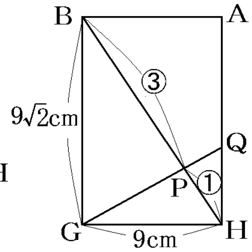


図2



BG // QH なので，QH : BG＝PH : BP＝1 : 3･･･①

図 1 で，三角形 BGF は直角三角形なので，三平方の定理より，

BG＝$\sqrt{BF^2+GF^2}=\sqrt{9^2+9^2}=\sqrt{9^2\times 2}=9\sqrt{2}$ (cm)

①の QH : BG＝1 : 3 より，QH : $9\sqrt{2}$ ＝1 : 3

比の外項の積は内項の積に等しいので，QH×3＝$9\sqrt{2}\times 1$

よって QH＝$9\sqrt{2}\div 3=3\sqrt{2}$ (cm)

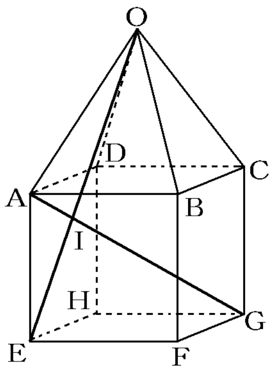
図 2 の直角三角形 GQH で，三平方の定理より，

GQ＝$\sqrt{QH^2+GH^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+9^2}=\sqrt{18+81}=\sqrt{99}=\sqrt{9\times 11}=3\sqrt{11}$ (cm)

[問題](入試問題)

　右の図のように，1 辺が$\sqrt{2}$ cm の立方体 ABCDEFGH と，OA＝OB＝OC＝OD＝$\sqrt{3}$ cm である四角すい OABCD を合わせた立体 OABCDEFGH がある。線分 OE と線分 AG との交点を I とする。このとき，線分 AI の長さを求めなさい。

(茨城県)



[解答欄]

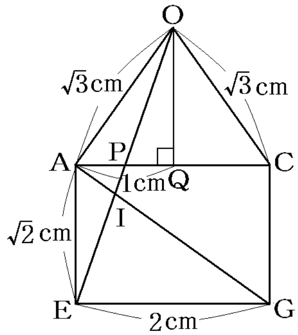
[解答]$\dfrac{\sqrt{6}}{5}$ cm

[解説]

この立体を，O，A，E，G，C を通る平面で切ったときの断面は右図のようになる。

底面 EFGH は 1 辺$\sqrt{2}$ cm の正方形であるので，

対角線 EG の長さは，三平方の定理より，



EG＝$\sqrt{EF^2+FG^2}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}$＝2(cm)

直角三角形 AGE で，三平方の定理より，

AG＝$\sqrt{AE^2+GE^2}=\sqrt{2+4}=\sqrt{6}$ (cm)･･･①

AI：GI がわかれば，AI の長さを計算できる。

そこで，△API と△GEI が相似であることに注目する。AP の長さがわかれば，2 つの三角形の相似比がわかるはずである。･･･②

ここで, 視点を変えて, 二等辺三角形 OAC の頂点 O から AC へ垂線 OQ をおろしてみる。

Q は AC の中点なので，AQ＝2÷2＝1(cm)になる。

直角三角形 OAQ で，三平方の定理より，

OQ＝$\sqrt{OA^2-AQ^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$ (cm)

AE＝$\sqrt{2}$ cm なので，OQ＝AE となることに気づく。

AE // OQ なので，△AEP∽△QOP。OQ＝AE なので，相似比は 1：1 である。

したがって，AP：QP＝1：1 で，P は AQ の中点になることがわかる。

したがって，AP＝1÷2＝0.5 である。

ここで，②に戻る。

△API と△GEI が相似で，相似比は AP：EG＝0.5：2＝1：4 になる。

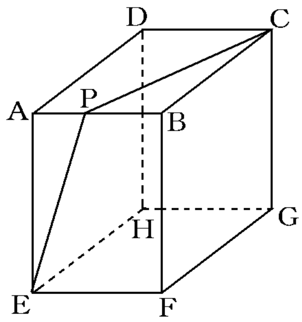
したがって，AI：IG＝1：4 で，①より，AG＝$\sqrt{6}$ cm なので，

AI＝AG×$\frac{1}{1+4}$＝$\sqrt{6}\times\frac{1}{5}=\frac{\sqrt{6}}{5}$ (cm) となる。

【】最短距離

[問題](補充問題)

　次の図は，直方体 ABCD－EFGH で，AD＝6cm，AE＝4cm，EF＝3cm である。AB 上に点 P をとって，EP＋PC が最小になるようにした。



(1) EP＋PC の長さを求めよ。

(2) AP の長さを求めよ。

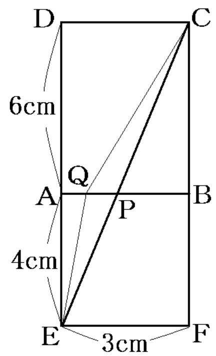
[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $\sqrt{109}$ cm　(2) 1.2cm

[解説]

<Point> 最短距離の線が通る部分の展開図をかく



右図で，E と C を結んだ線 EPC が最短距離になるが，

その理由をまず説明する。

AB 上に P 以外の点 Q をとる。

△QEC で，三角形の 2 辺の和は他の 1 辺より長いので，

EQ＋QC＞EC で，EQ＋QC＞EP＋PC となる。

点 Q が BC 上のどこにあっても，この不等式は成り立つ。

したがって，EP＋PC が最短距離になる。

(1) △CEF で，三平方の定理より，

EC＝$\sqrt{EF^2+CF^2}=\sqrt{3^2+(4+6)^2}=\sqrt{9+100}=\sqrt{109}$ (cm)

(2) △ECD で AP // DC なので，

AP : DC＝EA : ED

AP : 3＝4 : 10

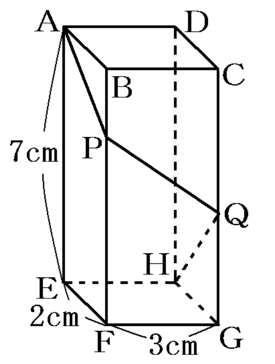
比の外項の積は内項の積に等しいので，

AP×10＝3×4

AP＝12÷10＝1.2(cm)

[問題](3 学期)

右の図のような直方体がある。辺 BF，CG 上にそれぞれ点 P，Q を AP＋PQ＋QH の長さが最短になるようにとる。その最短の長さを求めなさい。



[解答欄]

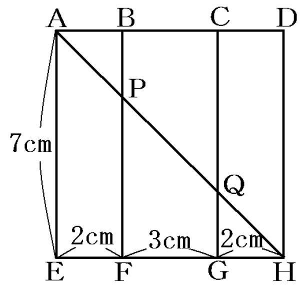
[解答] $7\sqrt{2}$ cm

[解説]

<Point> 最短距離の線が通る部分の展開図をかく

展開図をかいたとき，A，P，Q，H が一直線上にあるとき，AP＋PQ＋QH の長さが最短になる。AP＋PQ＋QH＝AH

△AEH で，三平方の定理より，

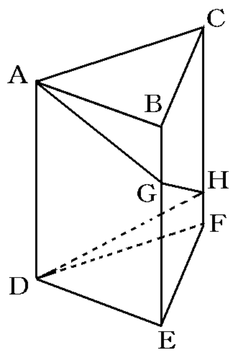


AH＝$\sqrt{AE^2+EH^2}=\sqrt{7^2+(2+3+2)^2}=\sqrt{7^2+7^2}$

＝$\sqrt{7^2\times 2}=7\sqrt{2}$ (cm)

[問題](入試問題)

次の図は，底面の 1 辺が 4cm，高さが 5cm の正三角柱の見取り図である。図のように，辺 BE 上の任意の点を G，辺 CF 上の任意の点を H として，A から G，H を通って D まで糸を巻きつけた。この巻きつけた A から D までの糸が，最も短くなるときの長さを求めよ。(宮城県)



[解答欄]

[解答]13 cm

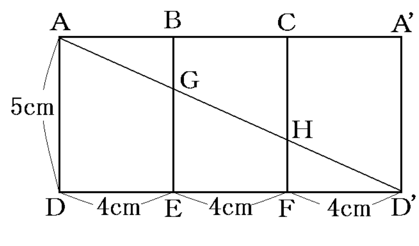
[解説]

<Point> 最短距離の線が通る部分の展開図をかく

右図の△ADD’で，三平方の定理より，

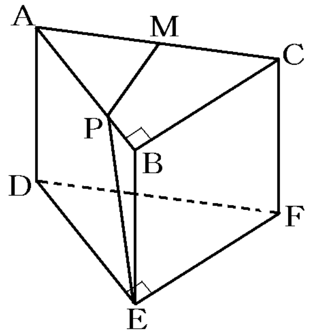
AD’＝$\sqrt{AD^2+DD'^2}=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{25+144}$

＝$\sqrt{169}=13$ (cm)



[問題](3 学期)

図のような，底面が DE＝EF＝6m の直角二等辺三角形で，高さが 6cm の三角柱がある。辺 AC の中点を M とし，辺 AB 上に，MP＋PE の長さがもっとも短くなるように点 P をとる。このとき，MP＋PE の長さを求めなさい。



[解答欄]

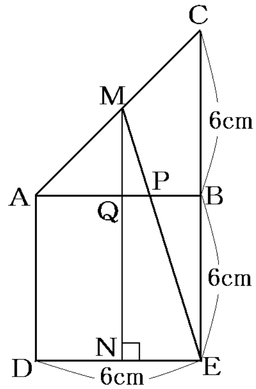
[解答] $3\sqrt{10}$ cm

[解説]

<Point> 最短距離の線が通る部分の展開図をかく

右図のような展開図の直角三角形 MEN において，

MN と NE がわかれば，三平方の定理より ME の長さを求めることができる。



M は AC の中点なので，N も DE の中点になり，

NE＝6÷2＝3(cm)

MQ＝BC÷2＝6÷2＝3(cm)

したがって，MN＝3＋6＝9(cm)

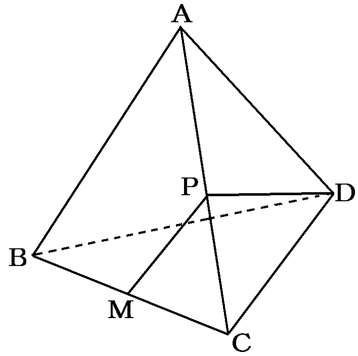
直角三角形 MEN で，三平方の定理より，

$$\mathrm{ME}=\sqrt{MN^2+NE^2}=\sqrt{9^2+3^2}=\sqrt{81+9}=\sqrt{90}$$

$$=\sqrt{9\times10}=3\sqrt{10}\ (\mathrm{cm})$$

[問題](3 学期)

右の図のような，1 辺が 4cm の正四面体がある。辺 BC の中点 M から AC 上の点 P を通って頂点 D まで線分で結んだとき, MP+PD の長さがもっとも短くなるときの長さを求めなさい。

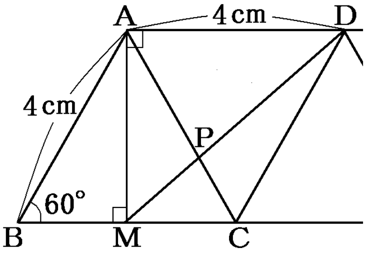


[解答欄]

[解答] $2\sqrt{7}$ cm

[解説]

<Point> 最短距離の線が通る部分の展開図をかく



M は BC の中点なので，AM⊥BC，BM＝2

直角三角形 ABM で，三平方の定理より，

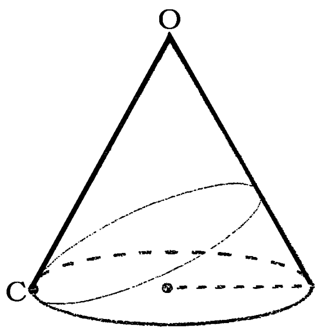
AM＝$\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}$

また，△ADM で，三平方の定理より，

DM＝$\sqrt{AM^2+AD^2}=\sqrt{12+4^2}=\sqrt{28}=\sqrt{4\times7}=2\sqrt{7}$ (cm)

[問題](3 学期)

右の図のように O を頂点とし，底面の半径が 1cm，高さが $2\sqrt{2}$ cm の円すいがある。点 C を底面の円周上の点とする。点 C を出発し円すいの側面を 1 周してもとの点に戻ってくる最短経路を考える。このとき，最短経路の長さを求めなさい。



[解答欄]

[解答] $3\sqrt{3}$ cm

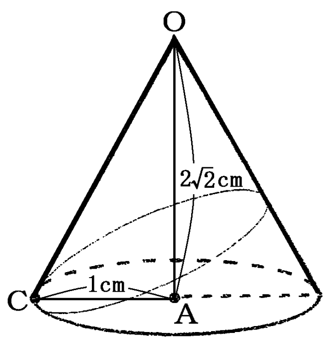
[解説]

<Point> 最短距離の線が通る部分の展開図をかく

展開図をかくと，側面はおうぎ形になる。まず，そのおうぎ形の半径 OC を求める。

右図の直角三角形 OCA で，三平方の定理より，

OC＝$\sqrt{OA^2+CA^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{9}=3$(cm)



次に，右下図のように展開図をかく。

図の展開図において，CC'が最短経路の長さになる。

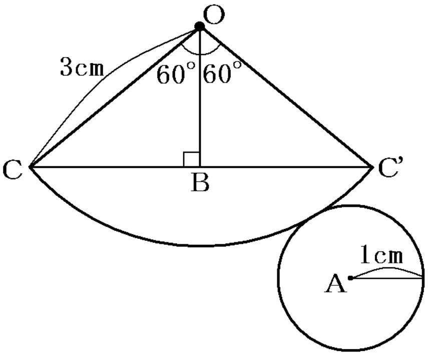
そこで，まず，この円すいを展開したときの側面のおうぎ形の中心角を求める。

底面の円の円周は，2×1×π＝2π(cm)なので，弧 CC'の長さも 2π(cm)になる。

側面の円 O の円周は，$2\times3\times\pi=6\pi$(cm)である。

したがって，中心角の大きさは，

$360° \times \dfrac{2\pi}{6\pi}=120°$ になる。



図のように，O から CC'に垂線 OB をおろすと，

OB は∠COC'を二等分するので，

∠BOC＝60° となる。

△BOC は 30° 60° 90° の直角三角形なので，

BC：OC＝$\sqrt{3}$ ：2

よって，BC：3＝$\sqrt{3}$ ：2

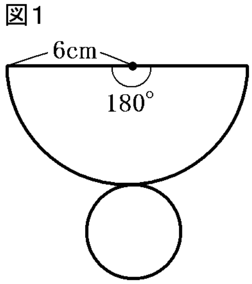
比の外項の積は内項の積に等しいので，

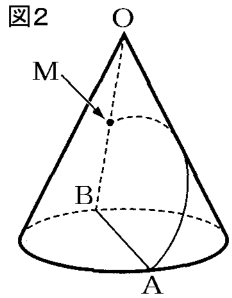
$BC\times2=3\times\sqrt{3}$　よって，$BC=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

ゆえに CC'＝ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times2=3\sqrt{3}$ (cm)

[問題](入試問題)

図 1 は，円すいの展開図である。側面の展開図のおうぎ形は，半径 6cm，中心角 180° になっている。このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。(栃木県)





(1) 底面の円の半径を求めなさい。

(2) 図1の展開図を組み立てた円すいの頂点をO，底面の円の直径をAB，OBの中点をMとする。図2のように，側面上にAとMを最短の長さで結ぶ線をひくとき，その線の長さを求めなさい。

[解答欄]

(1)	(2)

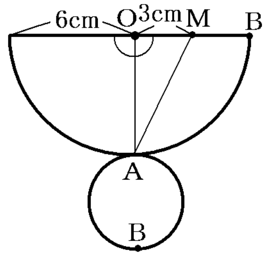
[解答](1) 3cm　(2) $3\sqrt{5}$ cm

[解説]

(1) 図1の側面部分のおうぎ形の半円周の長さと底面の円の円周の長さは等しい。

したがって，底面の半径を x cm とすると，

$2\pi \times x = 6 \times 2 \times \pi \div 2$，よって，$x = 3$(cm)



(2) 点Aが右図のような位置にあるとき，ABは底面の円を半周した位置にあるので，BとMの位置は右図のようになる。

AとMを最短の長さで結ぶ線は右図のAMになる。

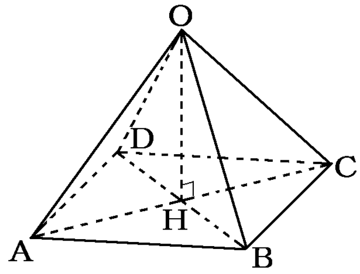
直角三角形AMOで，三平方の定理より，

$$\mathrm{AM} = \sqrt{OA^2 + OM^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}\ \text{(cm)}$$

【】体積①：四角すい・円すい

[問題](3 学期)

次のような正四角すいがある。底面が 1 辺 8cm の正方形で，OA が 10cm であるとき，この正四角すいの体積を求めよ。

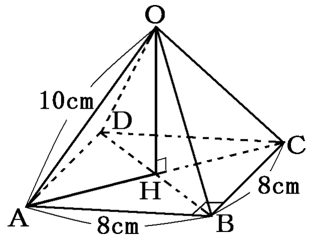


[解答欄]

[解答] $\dfrac{128\sqrt{17}}{3}$ cm³

[解説]

△ABC は直角三角形なので，三平方の定理より，



AC＝$\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{8^2+8^2}=\sqrt{8^2\times 2}=8\sqrt{2}$ (cm)

H は線分 AC の中点なので，AH＝$8\sqrt{2}\div 2=4\sqrt{2}$ (cm)

次に，△OAH も直角三角形なので，三平方の定理より，

OH＝$\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{10^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{100-32}=\sqrt{68}=\sqrt{4\times 17}=2\sqrt{17}$ (cm)

(すいの体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(ABCD の底面積)×(高さ OH)

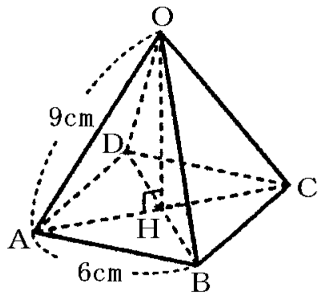
＝$\dfrac{1}{3}\times 8\times 8\times 2\sqrt{17}=\dfrac{128\sqrt{17}}{3}$ (cm³)

[問題](3 学期)

右の図のように底面が 1 辺 6cm の正方形で，他の辺が 9cm の正四角すいがある。次の問いに答えなさい。

(1) 高さ OH の長さを求めなさい。

(2) 体積を求めなさい。



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $3\sqrt{7}$ cm　(2) $36\sqrt{7}$ cm³

[解説]

(1) まず，直角三角形 ABC について，

AC＝$\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{6^2\times 2}=6\sqrt{2}$ (cm)

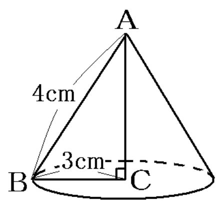
H は AC の中点なので，AH＝$6\sqrt{2}\div 2=3\sqrt{2}$ (cm)
次に直角三角形 OAH について，三平方の定理より，

OH＝$\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{9^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{81-18}=\sqrt{63}=\sqrt{9\times 7}=3\sqrt{7}$ (cm)

(2) (体積)＝$\dfrac{1}{3}\times$(底面積ABCD)$\times$(高さOH)＝$\dfrac{1}{3}\times 6^2\times 3\sqrt{7}=36\sqrt{7}$ (cm³)

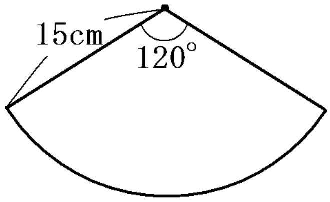
[問題](2 学期期末)
　底面の半径が 3cm，母線の長さが 4cm の円すいの高さを求めなさい。
[解答欄]

[解答] $\sqrt{7}$ cm
[解説]
右図の直角三角形 ABC について，三平方の定理より，



AC＝$\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$ (cm)

[問題](3 学期)
　右の図のおうぎ形を側面の展開図とする円すいについて次の長さを求めなさい。



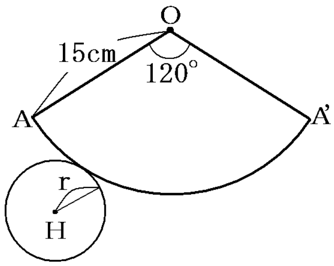
(1)　底面の半径
(2)　円すいの高さ
[解答欄]

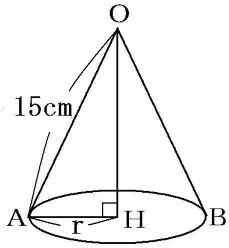
(1)	(2)

[解答](1) 5cm　(2)　$10\sqrt{2}$ cm
[解説]

(1) 右図で，底面の円 H の円周の長さと弧 AA'の長さは等しい。

(弧 AA')$=2\times\pi\times15\times\dfrac{120}{360}=10\pi$(cm)





底面の円 H の半径を rcm とすると，

$2\times\pi\times r=10\pi$ なので，r＝5cm

(2) 図の△OAH で三平方の定理より，

$$\mathrm{OH}=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{15^2-5^2}$$

$$=\sqrt{225-25}=\sqrt{200}=\sqrt{100\times2}=10\sqrt{2}\,(\mathrm{cm})$$

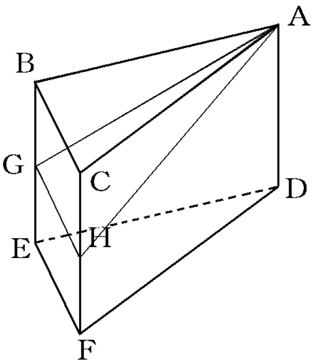
【】体積②：高さの発見

[問題](入試問題)

次の図のような三角柱がある。△DEF は二等辺三角形で，DE＝DF＝7cm，EF＝4cm である。また，この三角柱の高さは AD＝6cm である。

辺 BE，CF の中点をそれぞれ G，H とし，3 点 A，G，H を通る平面で切って，この三角柱を 2 つに分けるとき，点 B を含む立体の体積を求めよ。

(香川県)



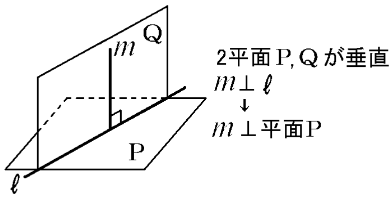
[解答欄]

[解答] $12\sqrt{5}$ cm³

[解説]

右図のように，BC の中点を M とすると，

△ABC は AB＝AC の二等辺三角形なので，AM⊥BC となる。



ところで，三角柱の底面 ABC と側面 BEFC は垂直なので，AM は面 BEFC に垂直になる。

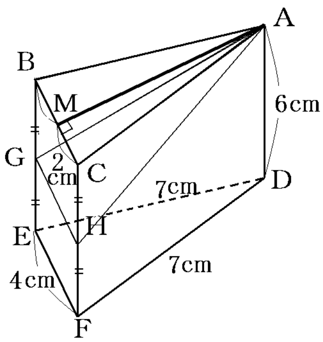
したがって，四角すい A－BGHC の底面を BGHC とすると，高さは AM になる。

この四角すいの体積を求めるために，まず，AM を求める。

CM＝CB÷2＝EF÷2＝4÷2＝2(cm)，AC＝DF＝7(cm)

直角三角形 ACM で，

三平方の定理より，



AM＝$\sqrt{AC^2 - CM^2} = \sqrt{7^2 - 2^2} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$ (cm)

次に，(底面BCHGの面積)＝BC×CH＝4×3＝12(cm²)

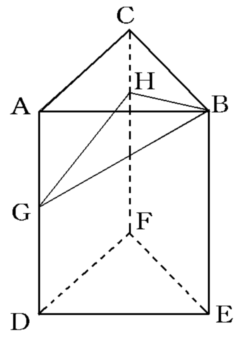
よって，(四角すい A－BGHC の体積)＝$\frac{1}{3}$×(底面積 BCHG)×(高さ AM)

$= \frac{1}{3} \times 12 \times 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$ (cm³)

[問題](入試問題)

次の図のように，1 辺の長さが 6cm の正三角形を底面とし，AD＝BE＝CF＝10cm の正三角柱 ABC－DEF がある。

辺 AD，CF 上に，それぞれ点 G，H を，AG＝5cm，CH＝3cm であるようにとり，さらに，3 点 G，B，H を通る平面で切り，2 つの部分に分けたとき，次の問いに答えよ。(山梨県)



(1) 平面 GBH より上の部分の頂点 A を含む方の立体図形の名前を書け。

(2) 平面 GBH より下の部分の頂点 E を含む方の立体の体積を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 四角すい (2) $66\sqrt{3}$ cm³

[解説]

まず，四角すい B－AGHC の体積を求める。

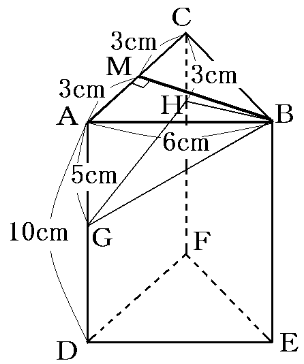
高さを求めるのがポイントである。

もとの四角柱で底面 ABC と側面 ADFC が垂直であるので，B から AC に引いた垂線 BM は，面 ADFC とも垂直になる。

したがって，四角すい B－AGHC の高さは BM になる。

高さ BM を求める。

△BAC は正三角形なので，BM⊥AC となるとき，M は AC の中点になる。直角三角形 ABM で，三平方の定理より，BM＝$\sqrt{AB^2-AM^2}=\sqrt{6^2-3^2}=\sqrt{27}=\sqrt{9\times 3}=3\sqrt{3}$ (cm)



底面 AGHC は AG // CH の台形なので，

(底面積AGHC)＝(CH＋AG)×CA÷2＝(3＋5)×6÷2＝24(cm²)

(四角すいB－AGHCの体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\dfrac{1}{3}\times 24\times 3\sqrt{3}=24\sqrt{3}$ (cm³)

次に，正三角柱 ABC－DEF の体積を求める。

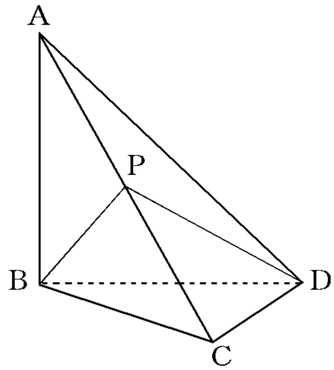
(底面の△ABCの面積)＝AC×BM÷2＝6×$3\sqrt{3}$÷2＝$9\sqrt{3}$ (cm²)

よって，(正三角柱ABC－DEFの体積)＝(底面積)×(高さAD)＝$9\sqrt{3}\times 10=90\sqrt{3}$ (cm³)

したがって，求める体積は，$90\sqrt{3}-24\sqrt{3}=66\sqrt{3}$ (cm³)

[問題](入試問題)

次の図のような三角すい ABCD があり，$\angle ABC=\angle ABD=\angle BCD=90°$，AB＝6cm，BC＝5cm，CD＝4cm である。また，点 P は辺 AC の中点である。4 点 P，B，C，D を頂点とする三角すいの体積を求めよ。(静岡県)



[解答欄]

[解答]10cm³

[解説]

高さを求めるのがポイントである。

P から線分 BC に垂線 PM を引くと，

$\angle PMC=\angle ABC=90°$ で，同位角が等しいので PM // AB

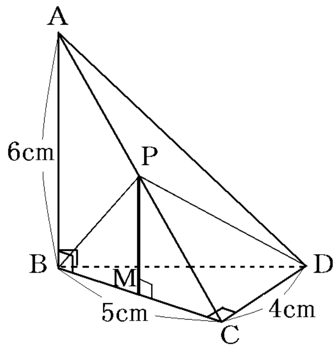
ところで, AB⊥BC, AB⊥BD なので, AB⊥面 BCD になる。

よって，PM⊥面 BCD となる。

したがって, △BCD を底面としたとき, 高さは PM になる。

点 P は辺 AC の中点なので，PM＝AB÷2＝6÷2＝3(cm)

(△BCDの面積)＝BC×CD÷2＝5×4÷2＝10(cm²)



よって，(三角すいP－BCDの体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(△BCDの面積)×PM＝$\dfrac{1}{3}$×10×3＝10(cm³)

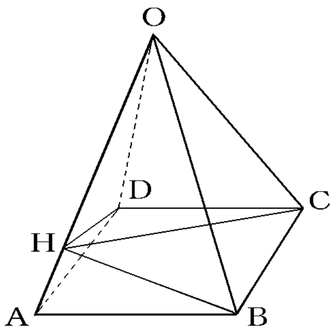
[問題](入試問題)

次の図は, 底面の 1 辺が 6cm の正四角すい O－ABCD で, 側面の二等辺三角形の等しい辺はいずれも 9cm である。

頂点 B から辺 OA にひいた垂線と OA との交点を H としたとき，(福島県)

(1) BH の長さを求めよ。

(2) 四角すい H－ABCD の体積を求めよ。



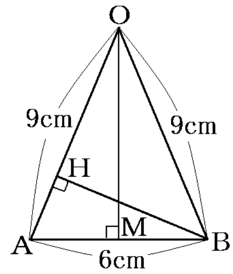
[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) $4\sqrt{2}\,cm$　(2) $8\sqrt{7}\,cm^3$

[解説]

(1) 右図のように，側面の△OAB を取り出して考える。



底辺を OA とすると，BH は高さになる。

そこで，別の方法で△OAB の面積を求める。

O から底辺 AB に垂線 OM を引くと，△OAB は二等辺三角形なので，M は AB の中点になる。したがって，AM＝6÷2＝3(cm)

直角三角形 OAM で，三平方の定理より，

OM＝$\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{9^2-3^2}=\sqrt{72}=\sqrt{36\times 2}=6\sqrt{2}$ (cm)

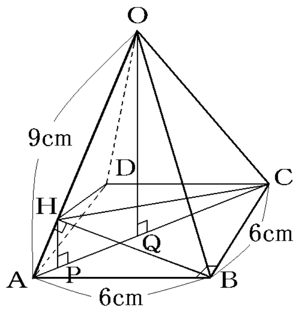
よって，(△OAB)＝AB×OM÷2＝6×$6\sqrt{2}$÷2＝$18\sqrt{2}$ (cm²)

底辺を OA とすると，BH を高さとすると，

(△OABの面積)＝OA×BH÷2＝$18\sqrt{2}$ (cm²)

9×BH÷2＝$18\sqrt{2}$，BH＝$18\sqrt{2}$÷9×2＝$4\sqrt{2}$ (cm)

(2) 右図のように対角線 AC に，垂線 HP，OQ を引く。



四角すい H－ABCD で，ABCD を底面とすると，高さは HP となる。

そこで，HP の長さを求める。

直角三角形 ABC で，三平方の定理より，

AC＝$\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{6^2\times 2}=6\sqrt{2}$ (cm)

Q は AC の中点になるので，

AQ＝$6\sqrt{2}\div 2=3\sqrt{2}$ (cm)

直角三角形 OAQ で，三平方の定理より，

OQ＝$\sqrt{OA^2-AQ^2}=\sqrt{9^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{81-18}=\sqrt{63}=\sqrt{9\times 7}=3\sqrt{7}$ (cm)

△OAQ で，HP // OQ なので，HP：OQ＝AH：AO，HP：$3\sqrt{7}$＝AH：9

AH の長さが求まれば，HP が計算できる。

直角三角形 ABH で，AH＝$\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{6^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{36-32}=\sqrt{4}=2$ (cm)

よって，HP：$3\sqrt{7}$＝2：9　比の外項の積は内項の積に等しいので，HP×9＝$3\sqrt{7}$×2

よって，HP＝$3\sqrt{7}$×2÷9＝$\dfrac{3\sqrt{7}\times 2}{9}=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$ (cm)

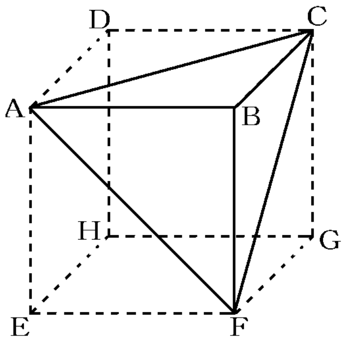
(四角すい H－ABCD の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面 ABCD の面積)$\times$(高さ HP)

$$=\frac{1}{3}\times 6^2\times\frac{2\sqrt{7}}{3}=\frac{1\times6\times6\times2\sqrt{7}}{3\times3}=8\sqrt{7}\ (\mathrm{cm}^3)$$

【】体積③：体積・底面積→高さ

[問題](3 学期)

右の図は, 1 辺の長さが 6cm の立方体 ABCD－EFGH で, A, B, C, F を頂点とする三角すいについて考えたものである。これについて, 次の各問いに答えよ。



(1) この立体の体積を求めよ。

(2) 頂点 B から, 面 ACF におろした垂線の長さ, すなわち面 ACF を底面としたときの点 B の高さを求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 36cm³ (2) $2\sqrt{3}$ cm

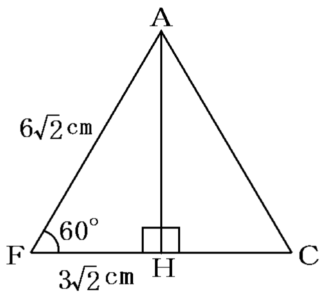
[解説]

<Point> 体積・底面積→高さ

(1) (すいの体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)

△ABCを底面とすると, (体積)＝$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times6\times6\times6=36$ cm³

(2) まず, 正三角形 AFC の面積を計算する。



直角三角形 ABF で, 三平方の定理より,

AF＝$\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{6^2\times2}=6\sqrt{2}$ (cm)

同様にして, AC, CF の長さも $6\sqrt{2}$ cm

右図の△AFH は 30° 60° 90° の直角三角形なので,

FH：AF：AH＝1：2：$\sqrt{3}$

AF＝$6\sqrt{2}$ cm なので, FH＝$3\sqrt{2}$ cm, AH＝$3\sqrt{2}\times\sqrt{3}=3\sqrt{6}$ (cm)

ゆえに(△ACFの面積)＝$\dfrac{1}{2}$×FC×AH＝$\dfrac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times3\sqrt{6}=9\sqrt{12}=18\sqrt{3}$ (cm²)

点 B の高さを x cm とすると, A, B, C, F を頂点とする三角すいの体積について

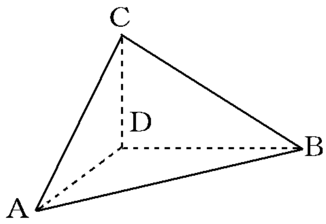
(体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(△ACF の面積)×(高さ x)＝36

$\frac{1}{3}\times 18\sqrt{3}\times x = 36$ ， $6\sqrt{3}x = 36,\ \sqrt{3}x = 6,\ x = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

ゆえに高さは$2\sqrt{3}$cm

[問題](補充問題)

次の図の三角すいにおいて，CD は底面 ABD に垂直である。AD＝CD＝6cm，DB＝8cm，∠ADB＝90°のとき，D から平面 ABC におろした垂線の長さを求めよ。



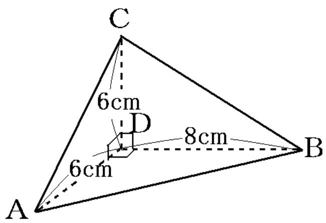
[解答欄]

[解答]$\frac{24\sqrt{41}}{41}cm$

[解説]

<Point> 体積・底面積→高さ

まず，△ABD を底面，CD を高さとして体積を求める。



(体積)＝$\frac{1}{3}$×(△ABD の面積)×(高さ CD)

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 6\times 8\right)\times 6$ ＝48(cm³)

D から平面 ABC におろした垂線の長さを x cm とすると，

(体積)＝$\frac{1}{3}$×(△ABCの面積)×(高さ x)＝48(cm³)･･･① となる。

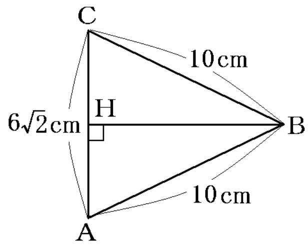
そこで，△ABC の面積を求める。まず，3 つの直角三角形(△ACD，△BCD，△ABD)で，三平方の定理より，

AC＝$\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{6^2\times 2}=6\sqrt{2}$(cm)

BC＝$\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$(cm)

AB＝$\sqrt{BD^2+AD^2}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$(cm)

よって，△ABC は右図のような二等辺三角形になる。
B から CA に垂線 BH を引くと，H は CA の中点となる。
直角三角形 BCH で，三平方の定理より，



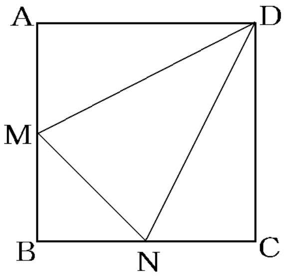
BH＝$\sqrt{BC^2-CH^2}=\sqrt{10^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{100-18}=\sqrt{82}$ (cm)

よって，(△ABC の面積)＝AC×BH÷2＝$6\sqrt{2}\times\sqrt{82}\div 2$
＝$3\sqrt{164}=3\sqrt{4\times 41}=6\sqrt{41}$ (cm²)
①に，(△ABCの面積)＝$6\sqrt{41}$ (cm²)を代入すると，

$\frac{1}{3}\times 6\sqrt{41}\times x=48$，$2\sqrt{41}x=48$，$x=\frac{48}{2\sqrt{41}}=\frac{24\times\sqrt{41}}{\sqrt{41}\times\sqrt{41}}=\frac{24\sqrt{41}}{41}$ (cm)

[問題](入試問題)

1 辺 6cm の正方形 ABCD の，辺 AB，BC の中点を M，N とし，DM，MN，DN を折り目として，頂点 A，B，C を 1 点に重ねて，立体を組み立てる。頂点 A，B，C が重なった点を E として，E から面 DMN に下した垂線の長さを求めなさい。(長崎県)



[解答欄]

[解答]2 cm

[解説]

<Point> 体積・底面積→高さ
組み立てた立体は右の図 1 のようになる。
まず，△MNE を底面として，この立体の体積を求める。
このときの，ポイントは DE が高さになることである。
ここで，直線が平面と垂直になるための条件について説明しておこう。右の図 2 のように, 直線 PQ が平面 T 上の 2 つの直線 QR, QS とそれぞれ垂直である(PQ⊥QS，PQ⊥QR)とき，PQ は平面 T に垂直になる。
図 1 で，∠DEN＝∠DCN＝90°，∠DEM＝∠DAM＝90° なので，

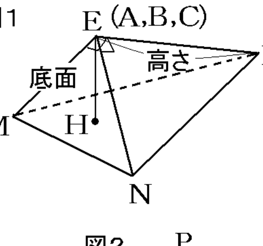
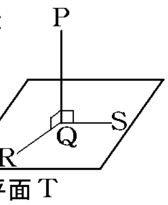
図1


図2


DE は底面 MNE 上の EN と EM にそれぞれ垂直になる。

よって，DE⊥△MNE となる。

(△MNEの面積)＝(△MNBの面積)＝3×3÷2＝$\frac{9}{2}$ (cm²)

DE＝DA＝6(cm)

したがって，(体積)＝$\frac{1}{3}$×(△MNEの面積)×(高さDE)＝$\frac{1}{3}\times\frac{9}{2}\times 6$ ＝9(cm³)

次に, 図 1 の△MND を底面としたとき, E から△MND へおろした垂線 EH が高さになる。

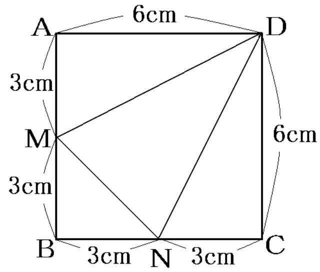
このとき，(体積)＝$\frac{1}{3}$×(△MNDの面積)×(高さEH)＝9(cm³)・・・①

そこで，△MND の面積を求める。右図から，

(△MND)＝(正方形 ABCD)－(△MDA)－(△NDC)－(△MNB)

＝6×6－6×3÷2－6×3÷2－3×3÷2

＝36－9－9－$\frac{9}{2}$＝$\frac{27}{2}$ (cm²)



①に(△MND)＝$\frac{27}{2}$ を代入すると，

$\frac{1}{3}\times\frac{27}{2}$ ×(高さ EH)＝9

よって，(高さ EH)＝$9\div\frac{1}{3}\div\frac{27}{2}=9\times 3\times\frac{2}{27}$ ＝2(cm)

【】体積④：四面体

[問題](補充問題)

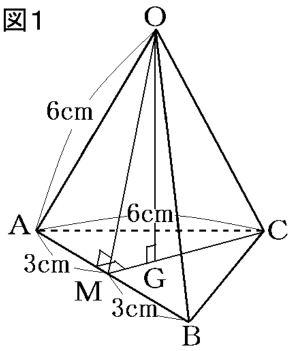
1 辺が 6cm の正四面体の体積を求めよ。

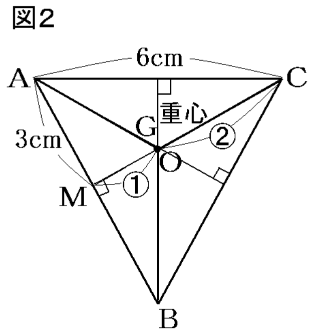
[解答欄]

[解答]$18\sqrt{2}$ cm³

[解説]

図 2 は図 1 の正四面体を上から見た図である。





まず，底面の△ABC の面積を求める。

図 2 の直角三角形 ACM で, 三平方の定理より，

$$CM=\sqrt{AC^2-AM^2}=\sqrt{6^2-3^2}$$

$$=\sqrt{27}=\sqrt{9\times3}=3\sqrt{3}\ (\text{cm})\cdots①$$

よって，(△ABCの面積)＝AB×CM÷2＝$6\times3\sqrt{3}\div2=9\sqrt{3}$ (cm²)･･･②

次に，△ABC を底面にしたときの高さを求める。

図 1 の頂点 O から底面 ABC に垂線 OG を引く。

図 1 の△OMG で，OM と MG の長さがわかれば，三平方の定理で OG を求めることができる。

OM＝CM なので，①より OM＝CM＝$3\sqrt{3}$ (cm)

図 2 で点 G(点 O)は△ABC の重心になっているので，CG：GM＝2：1

したがって，GM＝CM×$\dfrac{1}{3}=3\sqrt{3}\times\dfrac{1}{3}=\sqrt{3}$ (cm)

図 1 の△OMG で，三平方の定理より，

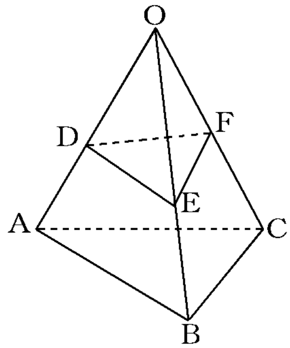
$$OG=\sqrt{OM^2-GM^2}=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{27-3}=\sqrt{24}=\sqrt{4\times6}=2\sqrt{6}\ (\text{cm})\cdots③$$

②，③より，(体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(△ABC の面積)×(高さ OG)

$$=\frac{1}{3}\times9\sqrt{3}\times2\sqrt{6}=6\sqrt{18}=6\sqrt{9\times2}=18\sqrt{2}\ (\text{cm}^3)$$

[問題](入試問題)

次の図のように，1 辺 6cm，高さが $2\sqrt{6}$ cm の正四面体 OABC があり，辺 OA，OB，OC 上に，OD＝4cm，OE＝4cm，OF＝3cm となるような点 D，E，F をそれぞれとる。このとき四面体 ODEF の体積を求めよ。(京都府)



[解答欄]

[解答] $4\sqrt{2}\ cm^3$

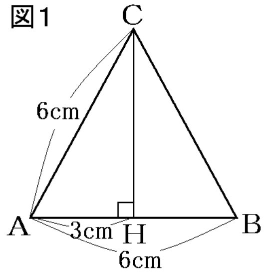
[解説]

まず，正四面体 OABC の体積を求める。

図 1 は底面の△ABC である。C から AB に垂線 CH をおろすと，H は AB の中点になる。したがって，AH＝3cm である。

直角三角形 ACH で，三平方の定理より，

図1



CH$=\sqrt{AC^2-AH^2}=\sqrt{6^2-3^2}=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}$

$=\sqrt{9\times3}=3\sqrt{3}$ (cm)

したがって，(△ABCの面積)＝AB×CH÷2＝$6\times3\sqrt{3}\div2=9\sqrt{3}$ (cm²)

(正四面体 OABC の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(△ABC の面積)×(高さ)

$=\dfrac{1}{3}\times9\sqrt{3}\times2\sqrt{6}=6\sqrt{18}=6\sqrt{9\times2}=18\sqrt{2}$ (cm³)

<Point> 高さが共通な三角すい→(体積比)＝(底面積の比)

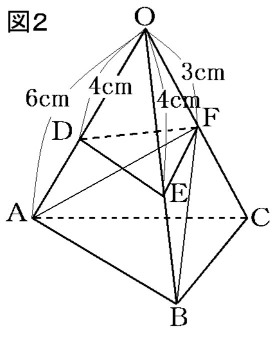
次に，図 2 のように平面 ABF でこの立体を，A－OBF と A－CBF の 2 つの三角すいに分ける。F は OC の中点なので，底面の三角形 OBF と CBF は面積が同じである。A から OBC におろした高さは共通なので，この 2 つの立体の体積は等しい。

よって，A－OBF の体積はもとの正四面体の体積の半分で，

$18\sqrt{2}\div2=9\sqrt{2}$ (cm³)となる。

A－OBF の三角すいは，F を頂点とし△OAB を底面とする三角すい F－OAB と考えることもできる。

図2



明らかに，△ODEと△OAB相似であり，相似比は 4：6＝2：3 である。したがって，面積比は，$2^2：3^2$＝4：9 となる。

したがって，△ODE の面積は△OAB の $\dfrac{4}{9}$ 倍になる。

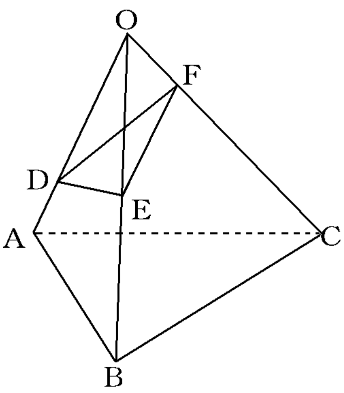
F－ODE の三角すいは，F－OAB の三角すいと高さが共通なので，底面積の比は体積比と等しくなる。よって，F－ODE の体積は F－OAB の体積の $\dfrac{4}{9}$ 倍になる。

したがって，(F－ODEの体積)＝(F－OABの体積)×$\dfrac{4}{9}=9\sqrt{2}\times\dfrac{4}{9}=4\sqrt{2}$ (cm^3)

[問題](入試問題)

次の図のように，体積が a cm^{3}の正四面体O－ABCがある。いま，辺OAを 3：1 に分ける点をD，辺OBの中点をE，辺OCを 1:3 に分ける点をFとして，点D, E, Fを通る平面で，この正四面体を切る。

このとき，三角すい O－DEF の体積を求めよ。(岩手県改)



[解答欄]

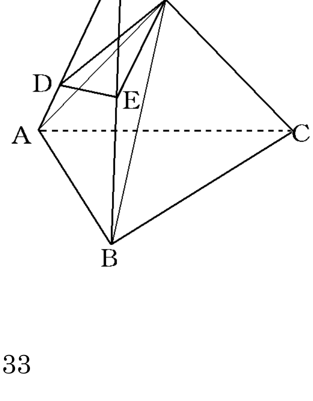
[解答] $\dfrac{3}{32}a$ cm^3

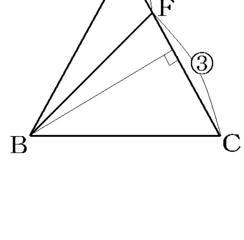
[解説]

<Point> 高さが共通な三角すい→(体積比)＝(底面積の比)

図 1 のように，O－ABC を平面 FAB で 2 つの三角すい A－OBF と A－CBF に分ける。頂点 A から面 OBC におろした垂線の長さが，この 2 つの三角すいの共通の高さになるので，底面積の比(△BOF：△BCF)は体積比と等しくなる。･･･①

図 2 のように，B を頂点とし，OF，CF を底辺と考えると，B から CO におろし





た垂線が共通の高さになるので，面積比は底辺の比に等しくなる。

よって，△BOF：△BCF＝OF：CF＝1：3･･･②

①，②より，(A－OBF の体積)：(A－CBF の体積)＝1：3 となり，

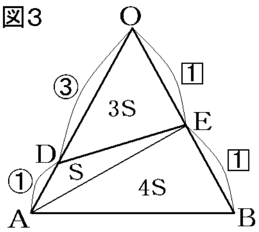
(A－OBFの体積)＝(A－OBCの体積)×$\dfrac{1}{1+3}$＝$a\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}a$ (cm³)･･･③

三角すい A－OBF は F を頂点とすると，三角すい F－OAB ととらえることができる。

ここで，三角すい F－OAB を平面 FDE で切断する。

切断してできた三角すい F－ODE と，もとの三角すい F－OAB の高さは，ともに頂点 F から平面 OAB におろした垂線の長さになるので，2 つの三角すいの体積比は，底面積の比 (△ODE：△OAB)と等しくなる。･･･④

図3



右の図 3 を使って，△ODE：△OAB を求める。

△EAD の面積を S とすると, △EAD と△EOD は高さが共通で，

底辺の比が，AD：OD＝1；3 なので，面積比も 1：3 となる。

したがって，△EOD の面積は 3S となる。

次に，△ABE と△AOE は，BE＝OE なので面積も等しくなる。

よって，△ABE＝S＋3S＝4S となる。

したがって，△OAB＝3S＋S＋4S＝8S となり，

△ODE：△OAB＝3S：8S＝3：8 となる。

④より，(F－ODE の体積)：(F－OAB の体積)＝3：8

③より，(F－OABの体積)＝(A－OBFの体積)＝$\dfrac{1}{4}a$ (cm³)なので，

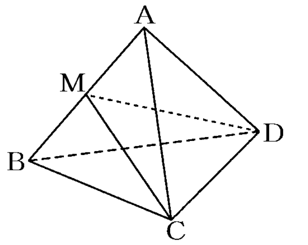
(F－ODEの体積)＝$\dfrac{1}{4}a\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{32}a$ (cm³)

【】立体の切断面の面積

[問題](入試問題)

右の図のような1辺の長さが4cmの正四面体ABCDがある。辺ABの中点をMとするとき，△MCDの面積を求めなさい。

(佐賀県)



[解答欄]

[解答] $4\sqrt{2}$ cm²

[解説]

<Point> 二等辺三角形の高さ：頂点から垂線をおろす。

図1で，△ABCは正三角形で，Mは

ABの中点なので，CM⊥ABとなる。

△BCMは30° 60° 90° の直角三角形なので，BM : BC : CM＝1 : 2 : $\sqrt{3}$

BC＝4cmなので，

BM＝2cm，CM＝$2\sqrt{3}$ cmとなる。

同様に，DM＝$2\sqrt{3}$ cmで，DM＝CM

図1

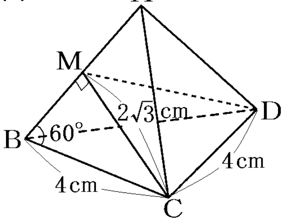
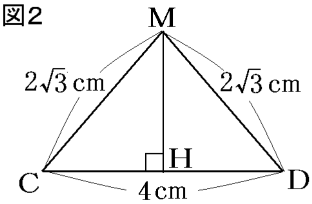


図2



したがって，図2の△MCDは二等辺三角形である。

Mから辺CDに垂線MHをおろすと，HはCDの中点になる。

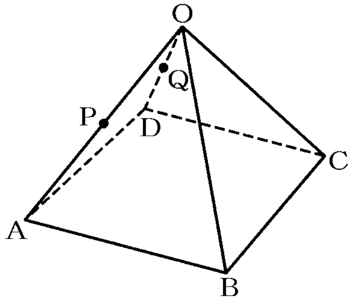
したがって，CH＝2cm　直角三角形MCHで，三平方の定理より，

MH＝$\sqrt{MC^2-CH^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-2^2}=\sqrt{12-4}=\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=2\sqrt{2}$ (cm)

よって，(△MCDの面積)＝(底辺CD)×(高さMH)÷2＝4× $2\sqrt{2}$ ÷2＝ $4\sqrt{2}$ (cm²)

[問題](入試問題)

右の図のように，底面が正方形，側面が正三角形で，AB＝4cmの正四角すいがOABCDがある。また，辺OA，ODの中点をそれぞれP, Qとする。このとき，四角形PBCQの面積を求めよ。(京都府)



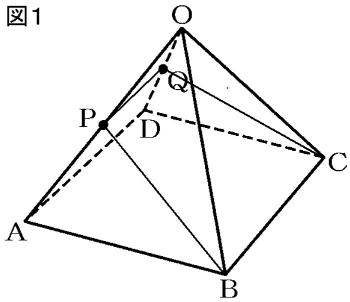
[解答欄]

[解答] $3\sqrt{11}$ cm²

[解説]

四角形 PBCQ は等脚台形になる。その面積は 4 つの辺の長さがわかれば計算できる。

図1



まず，PQ について図 2 で考える。

P，Q はそれぞれ OA，OD の中点なので，中点連結定理より，PQ＝$\frac{1}{2}$AD＝2(cm)，PQ // AD となる。

AD // BC なので，PQ // BC となる。

次に，BP について図 3 で考える。

図2

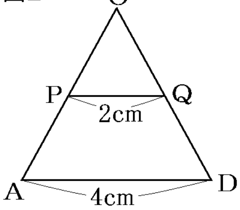
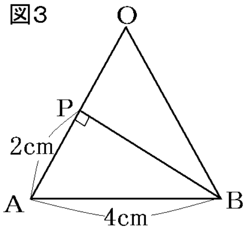


図3



△OAB は正三角形で, P は OA の中点なので,

BP⊥OA となる。

直角三角形 ABP で，三平方の定理より，

BP＝$\sqrt{AB^2-AP^2}=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}$

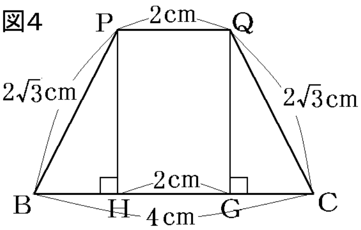
＝$\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{3}$ (cm)

CQ もまったく同様にして，CQ＝$2\sqrt{3}$ cm となる。

<Point> 等脚台形の高さ：垂線を 2 つおろす。

台形 PBCQ は右の図 4 のようになる。

図4



P，Q から辺 BC に垂線 PH，QG をおろす。

HG＝PQ＝2cm なので，BH＝CG＝(4－2)÷2＝1(cm)

直角三角形 PBH で，三平方の定理より，

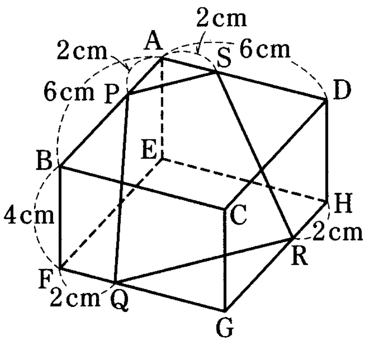
PH＝$\sqrt{PB^2-BH^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\sqrt{11}$ (cm)

よって，(台形PBCQの面積)＝(PQ＋BC)×PH÷2＝(2＋4)×$\sqrt{11}$÷2＝$3\sqrt{11}$ (cm²)

[問題](入試問題)

右の図は, AB＝AD＝6cm, BF＝4cm の直方体である。この直方体の辺 AB，FG，HG，AD 上に，それぞれ 4 点 P，Q，R，S を，AP＝FQ＝HR＝AS＝2cm となるようにとり，四角形 PQRS をつくる。四角形 PQRS の面積を求めよ。

(岩手県改)

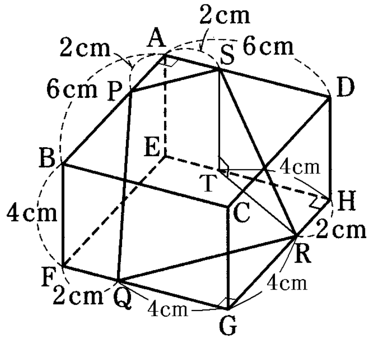


[解答欄]

[解答] $6\sqrt{17}$ (cm²)

[解説]

四角形 PQRS は等脚台形になる。その面積は 4 辺の長さがわかれば計算できる。



直角三角形 PSA で，三平方の定理より，

PS＝$\sqrt{AP^2+AS^2}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2^2\times 2}=2\sqrt{2}$ (cm)

直角三角形 QRG で，三平方の定理より，

QR＝$\sqrt{QG^2+RG^2}=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{4^2\times 2}=4\sqrt{2}$ (cm)

次に，S から辺 EH に垂線 ST をおろす。ST は底面に垂直なので，∠STR＝90° になる。

直角三角形 TRH で，三平方の定理より，

TR＝$\sqrt{TH^2+RH^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}=2\sqrt{5}$ (cm)

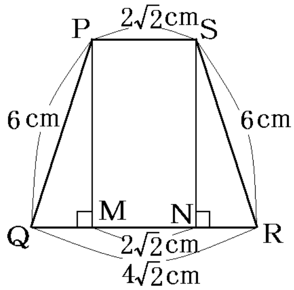
直角三角形 SRT で，三平方の定理より，

SR＝$\sqrt{ST^2+TR^2}=\sqrt{4^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{16+20}=\sqrt{36}=6$ (cm)

PQ もまったく同様なので，PQ＝6 cm

<Point> 等脚台形の高さ：垂線を 2 つおろす。

以上より，台形 PQRS は右図のようになる。



P，S から辺 QR に垂線 PM，SN をおろすと，

MN＝$2\sqrt{2}$ cm なので，QM＝RN＝$\left(4\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)\div 2=\sqrt{2}$ (cm)

直角三角形 PQM で，三平方の定理より，

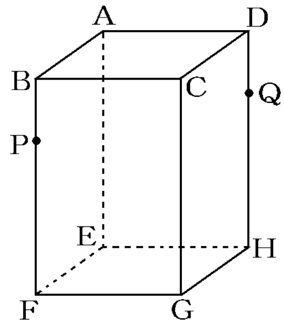
PM＝$\sqrt{PQ^2-QM^2}=\sqrt{6^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{36-2}=\sqrt{34}$ (cm)

したがって，(台形 PQRS の面積)=(PS＋QR)×PM÷2＝$\left(2\sqrt{2}+4\sqrt{2}\right)\times\sqrt{34}\div 2$

＝$6\sqrt{2}\times\sqrt{34}\div 2=3\sqrt{68}=3\sqrt{4\times 17}=6\sqrt{17}$ (cm²)

[問題](入試問題)

右の図の直方体 ABCD－EFGH において，AB＝AD＝4cm，AE＝6cm である。辺 BF，DH 上に，それぞれ点 P，Q を BP＝DQ＝2cm となるようにとり，この直方体を 3 点 A，P，Q を通る平面で切って 2 つに分けるとき，切り口としてできる図形の面積を求めよ。(群馬県)

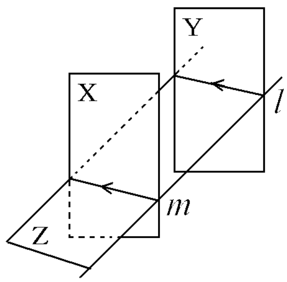


[解答欄]

[解答] $8\sqrt{6}$ cm²

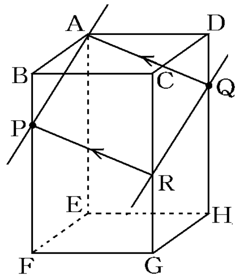
[解説]

まず，3 点 A，P，Q を通る平面が側面 BCGF と交わってできる直線がどのようになるかについて考える。



右図のように平行な 2 つの平面 X，Y に平面 Z が交わるとき，X と Z が交わってできる直線を m，Y と Z が交わってできる直線を l とすると，$l // m$ となる。

したがって，3 点 A，P，Q を通る平面が側面 BCGF と交わってできる直線を PR とすると，PR // AQ となる。･･･①

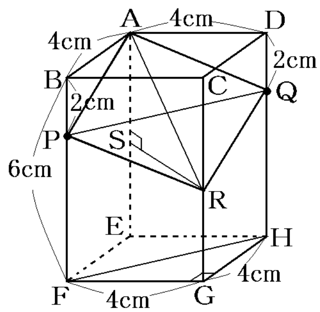


同様に 3 点 A，P，Q を通る平面が側面 CDHG と交わってできる直線を QR とすると，QR // AP となる。･･･②

①，②より，四角形 APRQ は平行四辺形になる。

直角三角形 AQD において，三平方の定理より，

$$\mathrm{AQ}=\sqrt{AD^2+QD^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=2\sqrt{5}\ (\mathrm{cm})$$



直角三角形 APB において，三平方の定理より，

$$\mathrm{AP}=\sqrt{AB^2+PB^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=2\sqrt{5}\ (\mathrm{cm})$$

したがって，平行四辺形 APRQ は隣り合う辺の長さが等しいので，ひし形になる。

平行四辺形やひし形は 4 辺の長さが決まっても，形は一意的に決まらない(押しつぶせば形が変わるから)。

そこで，対角線に注目する。ひし形の対角線は互いに垂直に交わるので，2 つの対角線の

長さがわかれば，その面積を求めることができる。

図で，BP＝DQ なので，PQ // FH，PQ＝FH になる。

直角三角形 FHG で，三平方の定理より，

FH＝$\sqrt{FG^2+HG^2}=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{4^2\times 2}=4\sqrt{2}$ (cm)

したがって，PQ＝$4\sqrt{2}$ cm となる。･･･③

次に，AR の長さを求める。

図のように，R から辺 AE に垂線 RS をひく。

ところで，AQ // PR なので，P と R の高さの差は D と Q の高さの差と同じ 2cm になる。

したがって，CR＝2＋2＝4(cm)になる。

よって，AS＝CR＝4(cm)

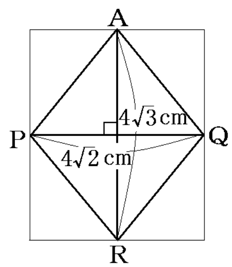
次に，SR＝EG＝FH＝$4\sqrt{2}$ (cm)になる。

直角三角形 ARS で，三平方の定理より，

AR＝$\sqrt{AS^2+SR^2}=\sqrt{4^2+\left(4\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{16+32}=\sqrt{48}=\sqrt{16\times 3}=4\sqrt{3}$ (cm)･･･④

③,④より，ひし形 APRQ の 2 つの対角線の長さは，$4\sqrt{2}$ cm，$4\sqrt{3}$ cm である。したがって，

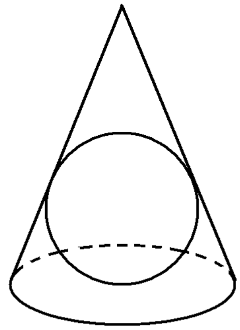
(ひし形APRQの面積)＝AR×PQ÷2＝$4\sqrt{3}\times 4\sqrt{2}\div 2=8\sqrt{6}$ (cm²)



【】球の内接・外接

[問題](3 学期)

右の図のように, 円すいの中に球がすきまのない状態で入っている。円すいの底面の半径は 3cm, 母線の長さは 9cm である。次の問いに答えなさい。



(1) 円すいの体積を求めなさい。

(2) 円すいの中に入っている球の半径を求めなさい。

[解答欄]

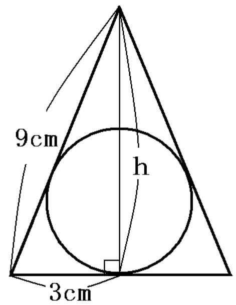
(1)	(2)

[解答](1) $18\sqrt{2}\pi$ cm³　(2) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ cm

[解説]

<Point> 接点を含む断面で考える。

(1) 高さを h とすると三平方の定理より,



$$h=\sqrt{9^2-3^2}=\sqrt{81-9}=\sqrt{72}=\sqrt{36\times2}=6\sqrt{2}\ \text{(cm)}$$

(円すいの体積) $=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\dfrac{1}{3}\times\pi\times3^2\times6\sqrt{2}$

$=18\sqrt{2}\pi$ (cm³)

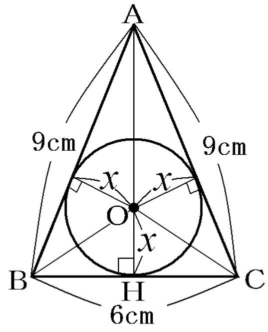
(2) 球の半径を x cm とする。

<Point> 内接円の半径：面積利用で計算

右図の△ABC の面積に注目すると,

(△OBC の面積)+(△OAB の面積)+(△OAC の面積)＝(△ABC の面積)なので,

$$\frac{1}{2}\times6\times x+\frac{1}{2}\times9\times x+\frac{1}{2}\times9\times x=\frac{1}{2}\times6\times6\sqrt{2}$$



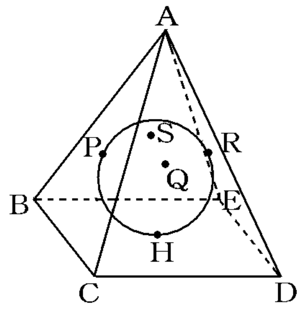
両辺を 2 倍すると, $6x+9x+9x=36\sqrt{2}$, $24x=36\sqrt{2}$

$$x=36\sqrt{2}\div24=\frac{36\sqrt{2}}{24}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\ \text{(cm)}$$

よって球の半径は, $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ cm

[問題](入試問題)

底面の 1 辺が 6cm で, 高さが 4cm の正四角すい ABCDE と，その四角すいの底面および 4 つの側面に，右図のように，それぞれ点 H，P，Q，R，S で接する球 O があるとき，球 O の半径を求めよ。(沖縄県)



[解答欄]

[解答] $\frac{3}{2}$ cm

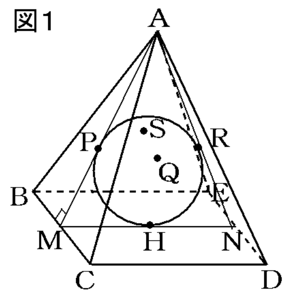
[解説]

<Point> 接点を含む断面で考える。

右の図 1 のように，辺 BC の中点を M，辺 ED の中点を N とすると，図 2 のように，点 P，点 R，球の中心 O は△AMN 上にある。

図 2 の△AMN の面積に注目する。

図1



まず，MN を底辺とすると，高さは AH なので,

(△AMNの面積)＝6×4÷2＝12(cm²)

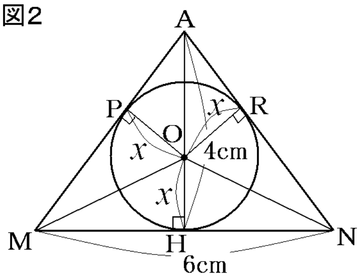
また，△AMN は，△OMN と△OAM と△OAN の和に等しい。

<Point> 内接円の半径：面積利用で計算

球の半径を x cm とすると,

(△OMNの面積)＝MN×OH÷2＝6× x ÷2＝ $3x$ (cm²)

図2



直角三角形 AMH で，三平方の定理より,

AM＝$\sqrt{MH^2+AH^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ (cm)

同様に，AN＝5cm

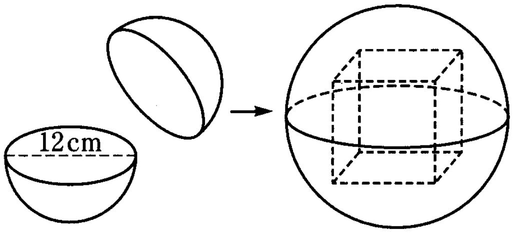
(△OAM の面積)＝AM×OP÷2＝5× x ÷2＝ $\frac{5}{2}x$

(△OAN の面積)＝AN×OR÷2＝5× x ÷2＝ $\frac{5}{2}x$

よって， $3x+\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}x=12,\ 8x=12,\ x=12\div 8,\ x=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ (cm)

[問題](入試問題)

右の図のように，直径が 12cm の球の形をしたプラスチックの容器がある。この容器の中にちょうど入る立方体の 1 辺の長さを求めよ。ただし，プラスチックの容器の厚さは考えないものとする。(埼玉県)



[解答欄]

[解答] $4\sqrt{3}$ cm

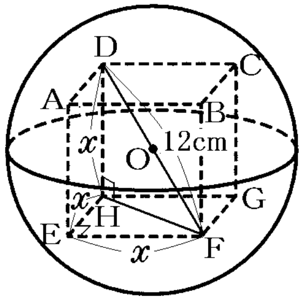
[解説]

立方体の 8 つの頂点が，球に内接している。

右図のように，立方体の対角線 DF の中点に球の中心 O があり，DF は球の直径になる。

この立方体の 1 辺を x cm とする。

右図の直角三角形 HFE で，三平方の定理より，



HF＝$\sqrt{HE^2+FE^2}=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{x^2\times 2}=\sqrt{2}x$ (cm)

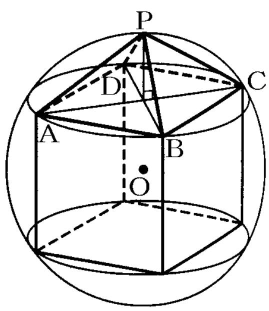
直角三角形 DFH で，三平方の定理より，

DF＝$\sqrt{DH^2+HF^2}=\sqrt{x^2+(\sqrt{2}x)^2}=\sqrt{x^2+2x^2}=\sqrt{x^2\times 3}=\sqrt{3}x$ (cm)

DF は球の直径なので，$\sqrt{3}x=12$，$x=12\div\sqrt{3}=\dfrac{12}{\sqrt{3}}=\dfrac{12\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{12\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$ (cm)

[問題](入試問題)

右の図のように，1 辺が 2cm の立方体が球に内接している。この立方体の 1 つの面 ABCD を底面とする正四角すい P－ABCD で，その 5 つの頂点は，球にぴったりとくっついている。このとき，正四角すい P－ABCD の体積を求めよ。(沖縄県)



[解答欄]

[解答] $\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$ cm³

[解説]

右図の PT(高さ)がわかれば，正四角すい P－ABCD の体積を求めることができる。PT＝PO－TO で，TO＝AE÷2＝2÷2＝1(cm)なので，球の半径(PO)を求めればよい。

右の図 1 の直角三角形 EGF で，三平方の定理より，

図1

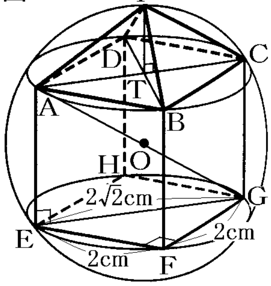
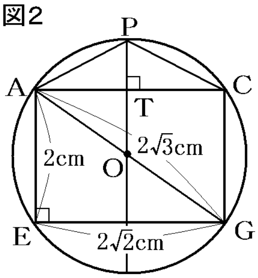


図2



EG＝$\sqrt{EF^2+GF^2}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2^2\times 2}=2\sqrt{2}$ (cm)

直角三角形 AGE で，三平方の定理より，

AG＝$\sqrt{AE^2+GE^2}=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4+8}=\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{3}$ (cm)

AG は球の直径なので，球の半径は $2\sqrt{3}\div 2=\sqrt{3}$ (cm)になる。

したがって，PO＝$\sqrt{3}$ cm

よって，PT＝PO－TO＝$\sqrt{3}-1$(cm)

(正四角すい P－ABCD の体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積 ABCD)×(高さ PT)

＝$\dfrac{1}{3}\times(2\times 2)\times\left(\sqrt{3}-1\right)=\dfrac{4\left(\sqrt{3}-1\right)}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$ (cm³)

[印刷／他のPDFファイルについて]

※ このファイルは，FdData 中間期末数学 3 年(7,800 円)の一部を PDF 形式に変換したサンプルで，印刷はできないようになっています。製品版の FdData 中間期末数学 3 年は Word の文書ファイルで，印刷・編集を自由に行うことができます。

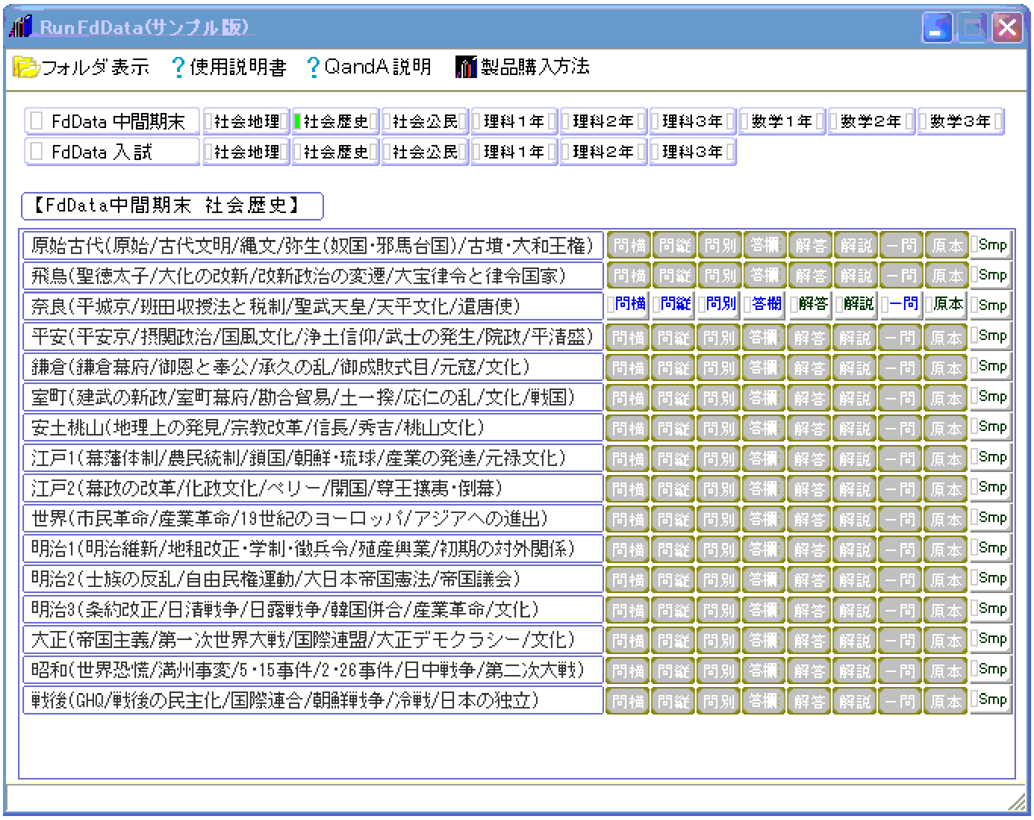
※FdData中間期末(社会･理科･数学)全分野のPDFファイル，および製品版の購入方法は http://www.fdtext.com/dat/ に掲載しております。

下図のような，[FdData 無料閲覧ソフト(RunFdData2)]を，Windows のデスクトップ上にインストールすれば， FdData 中間期末･FdData 入試の全 PDF ファイル(各教科約 1800 ページ以上)を自由に閲覧できます。次のリンクを左クリックするとインストールが開始されます。

RunFdData 【 http://fddata.deci.jp/lnk/instRunFdDataWDs.exe 】

※ダイアログが表示されたら，【実行】ボタンを左クリックしてください。インストール中，いくつかの警告が出ますが，[実行][許可する][次へ]等を選択します。

【イメージ画像】



【Fd教材開発】(092) 404-2266
http://www.fdtext.com/dat/