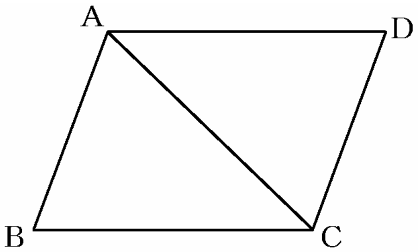
【】中学数学2年（四辺形）　　　[FdText：中学・塾用ワープロデータ教材]

【】平行四辺形の性質①(向かい合う辺が等しい)

[問題]

　次の図を使って，平行四辺形の2組の向かい合う辺はそれぞれ等しいことを証明せよ。



[解答]

△ABCと△CDAにおいて

ACは共通･･･①

AD//BCなので，錯角が等しく ∠BCA＝∠DAC･･･②

AB//DCなので，錯角が等しく ∠BAC＝∠DCA･･･③

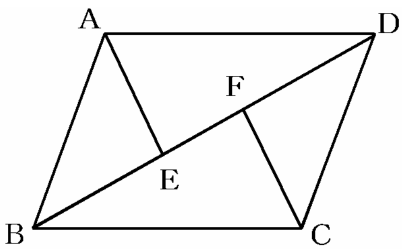
①，②，③より1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△ABC≡△CDA

∴AB＝CD，BC＝DA

[問題]

　平行四辺形ABCDの対角線BDに垂線AE，CFをひくと，AE＝CFとなることを証明せよ。



[解答]

△ABEと△CDFにおいて

四角形ABCDは平行四辺形なので AB＝CD･･･①

仮定より ∠AEB＝∠CFD＝90°･･･②

AB//DC なので，錯角が等しく ∠ABE＝∠CDF･･･③

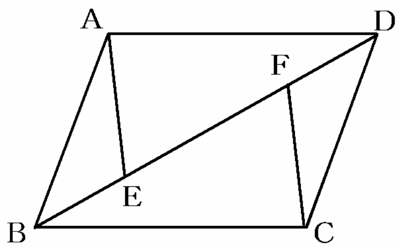
①，②，③より直角三角形の斜辺と他の1鋭角がそれぞれ等しいので

△ABE≡△CDF

∴AE＝CF

[問題]

平行四辺形ABCDの対角線BD上に，BE＝DFとなる点E，Fをとる。このとき，AE＝CFであることを証明せよ。



[解答]

△ABEと△CDFにおいて

四角形ABCDは平行四辺形なので，AB＝CD･･･①

仮定よりBE＝DF･･･②

AB//CD なので，錯角が等しく ∠ABE＝∠CDF･･･③

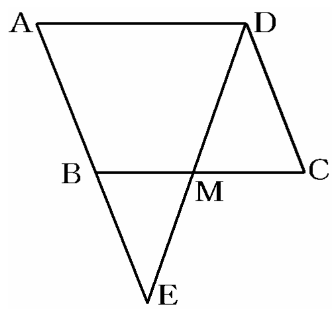
①，②，③より2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

△ABE≡△CDF

∴AE＝CF

[問題]

平行四辺形ABCDの辺BCの中点をMとし，DとMを結ぶ直線と辺ABの延長との交点をEとすると，AB＝BEとなることを証明せよ。



[解答]

△BEMと△CDMにおいて

仮定より BM＝CM･･･①

対頂角は等しいので ∠BME＝∠CMD･･･②

AE//CDなので，錯角が等しく ∠EBM＝∠DCM･･･③

①，②，③より1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△BEM≡△CDM

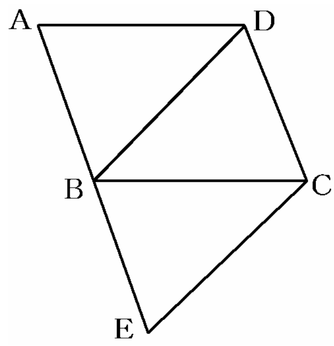
∴BE＝CD

また，四角形ABCDは平行四辺形なので CD＝AB

∴AB＝BE

[問題]

　平行四辺形ABCDの対角線DBに平行に，Cから直線をひいて，ABの延長との交点をEとすると，AB＝BEとなることを証明せよ。



[解答]

△DBCと△ECBにおいて

BCは共通･･･①

AE//DCなので，錯角が等しく ∠DCB＝∠EBC･･･②

また，BD//ECなので，錯角が等しく ∠CBD＝∠BCE･･･③

①，②，③より1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△DBC≡△ECB

∴BE＝CD

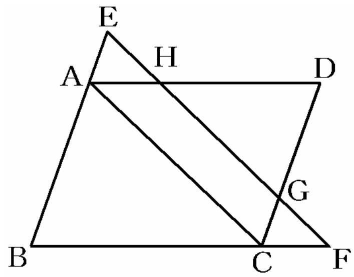
また，四角形ABCDは平行四辺形なので CD＝AB

∴AB＝BE

[問題]

　平行四辺形ABCDの対角線ACに平行な直線を図のようにかく。4辺AB，BC，CD，DAまたは，その延長と交わる点をそれぞれE，F，G，Hとすると，

EH＝GFである。これを証明せよ。



[解答]

△AEHと△CGFにおいて

仮定より AH//CF，AC//HFなので

四角形ACFHは平行四辺形となり，AH＝CF･･･①

AD//BFなので，同位角が等しく ∠AHE＝∠CFG･･･②

また，AD//BCなので 同位角が等しく ∠EAH＝∠ABC

AB//CDなので，同位角が等しく ∠ABC＝∠GCF

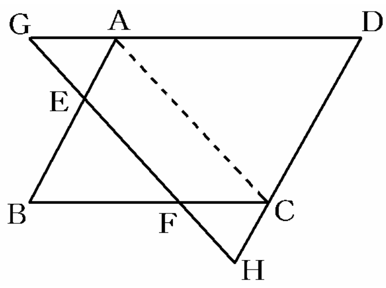
∴∠EAH＝∠GCF･･･③

①，②，③より1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△AEH≡△CGF　∴EH＝GF

[問題]

　平行四辺形ABCDの対角線ACに平行な直線が，AB，BCとE，Fで交わり，DA，DCの延長とG，Hで交わるとき，EG＝HFであることを証明せよ。



[解答]

△AEGと△CHFにおいて

仮定より AG//CF，AC//GFなので四角形ACFGは平行四辺形となる。

∴AG＝CF･･･①

AG//CFなので，同位角が等しく ∠AGE＝∠CFH･･･②

AB//DCなので，錯角が等しく ∠GAE＝∠EBF＝∠FCH･･･③

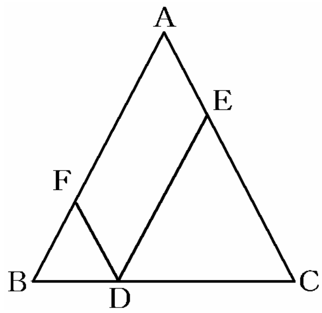
①，②，③より1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△AEG≡△CHF

∴EG＝HF

[問題]

　次の図で，AB＝ACで，ABとED，ACとFDはそれぞれ平行である。このとき，FD＋DE＝AB となることを証明せよ。



[解答]

仮定よりAB//ED，AC//FDなので

四角形AEDFは平行四辺形となる。

∴DE＝FA･･･①

仮定より AB＝ACなので，∠FBD＝∠ECD

FD//ACなので，同位角が等しく ∠ECD＝∠FDB

∴∠FBD＝∠FDBとなり，△FBDは二等辺三角形で，FD＝FB･･･②

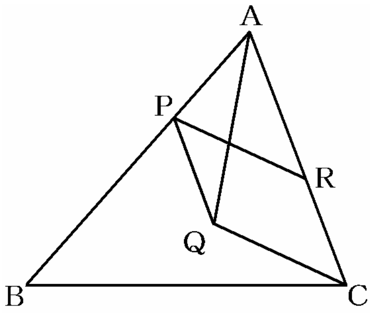
①，②より FD＋DE＝FB＋FA＝AB

∴FD＋DE＝AB

[問題]

次の図のように，△ABC**の辺**AB**上の点**P**から**AC**と平行になるようにひいた直線と**∠BAC**の二等分線との交点を**Q**とする。また，**P**から**QC**と平行になるようにひいた直線と辺**AC**との交点を**R**とする。**

このとき，RC＝PA**であることを証明せよ。**



[解答]

仮定より PQ//RC，PR//QC**なので，四角形**PQCR**は平行四辺形となる。**

∴RC＝PQ･･･①

次に，PQ//AC**なので，錯角が等しく** ∠PQA＝∠RAQ

仮定より ∠RAQ＝∠PAQ

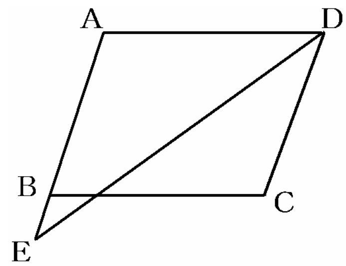
∴∠PQA＝∠PAQ**となり，**△PAQ**は二等辺三角形で，**PQ＝PA･･･②

①，②**より，**RC＝PA

【】平行四辺形の性質②(向かい合う角が等しい)

[問題]

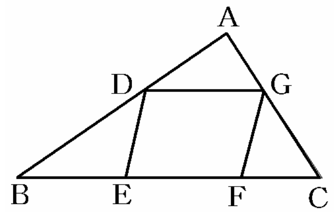
次の図で，四角形ABCD**は平行四辺形で，**ED**は**∠ADC**の二等分線である。**∠BED＝35°**のとき，**∠ABC**の大きさを求めよ。**



[解答]70°

[問題]

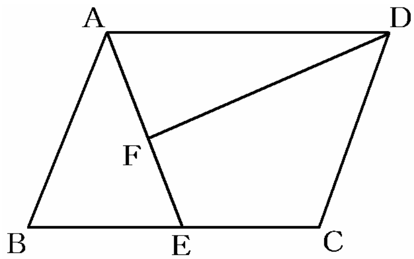
次の図で，△ABC**は**∠A＝90°**の直角三角形で，四角形**DEFG**は平行四辺形である。**∠BDE＝42°，∠ACB＝56°**のとき，**∠DGF**の大きさを求めよ。**



[解答]76°

[**問題**]

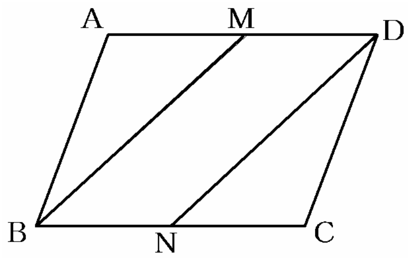
次の図で，E**は平行四辺形**$ABCD$**の辺**BC**上の点で，**$AB=AE$**である。また，**F**は線分**AE**上の点であり，**$\angle AFD=90°$**である。**$\angle ABE=68°$**のとき**$\angle CDF$**の大きさは何度か。**



[**解答**]46°

[**問題**]

平行四辺形$ABCD$**の対辺**AD，BC**の中点をそれぞれ**M，N**とするとき，**$BM=DN$**であることを証明せよ。**



[**解答**]

$\triangle ABM$**と**$\triangle CDN$**において**

四角形$ABCD$**は平行四辺形なので，**$AB=CD$･･･①

また，$AM=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC=CN$**で，**$AM=CN$･･･②

平行四辺形の向かい合う角は等しいので，$\angle BAM=\angle DCN$･･･③

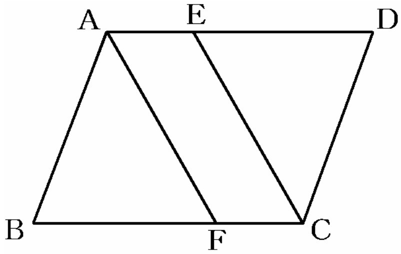
①，②，③より2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$\triangle ABM \equiv \triangle CDN$

$\therefore BM=DN$

[問題]

　平行四辺形ABCDの対角∠A，∠Cの2等分線がBC，ADと交わる点をそれぞれF，Eとすると，BF＝DEとなることを証明せよ。



[解答]

△ABFと△CDEにおいて

四角形ABCDは平行四辺形なので，AB＝CD･･･①

∠ABF＝∠CDE･･･②

仮定より　∠BAF＝$\frac{1}{2}$∠BAD，∠DCE＝$\frac{1}{2}$∠DCB

∠BAD＝∠DCBなので，∠BAF＝∠DCE･･･③

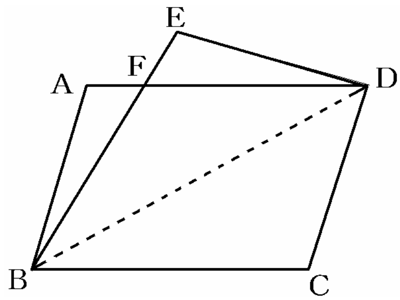
①，②，③より1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△ABF≡△CDE

∴BF＝DE

[問題]

　次の図のように，平行四辺形ABCDを対角線BDを折り目として折り返し，頂点Cが移る点をE，BEとADの交点をFとする。このとき，FA＝FEとなることを証明せよ。



[解答]

仮定より　∠FBD＝∠CBD

AD//BCなので，錯角が等しく　∠CBD＝∠FDB

∴∠FBD＝∠FDBとなり，△FBDは二等辺三角形で，FD＝FB･･･①

四角形ABCDは平行四辺形なので，AD＝BC

また，BC＝BE

∴AD＝BE･･･②

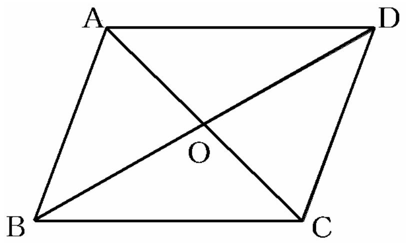
FA＝AD－FD，FE＝BE－FB

①，②より　FA＝FE

【】平行四辺形の性質③(対角線はそれぞれ中点で交わる)

[問題]

次の図を使って，平行四辺形の2つの対角線はおのおの中点で交わることを証明せよ。



[解答]

△ABOと△CDOにおいて

四角形ABCDは平行四辺形なので，AB＝CD・・・①

AB//CDなので，錯角が等しく ∠BAO＝∠DCO・・・②

∠ABO＝∠CDO・・・③

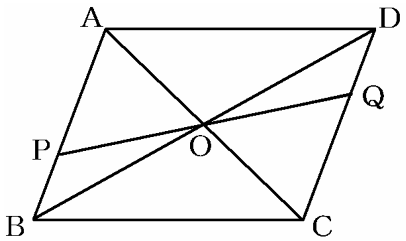
①，②，③より1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△ABO≡△CDO

∴AO＝CO，BO＝DO

[問題]

平行四辺形ABCDで，対角線の交点Oを通る直線をひき，対辺AB，CDとの交点を，それぞれP，Qとする。このとき，OP＝OQであることを証明せよ。



[解答]

△BPOと△DQOにおいて

平行四辺形の対角線はたがいに中点で交わるので，BO＝DO・・・①

対頂角は等しいので，∠BOP＝∠DOQ・・・②

AB//CDなので，錯角が等しく ∠PBO＝∠QDO・・・③

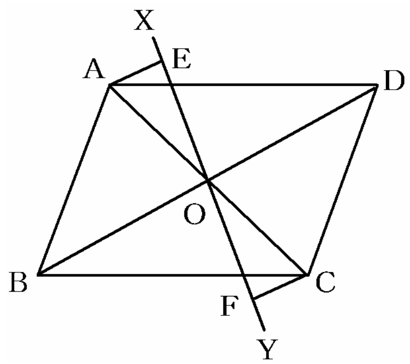
①，②，③より1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△BPO≡△DQO

∴OP＝OQ

[問題]

　平行四辺形ABCDの対角線の交点をOとする。Oを通る直線XYに，頂点A，Cから垂線AE，CFをひくと，AE＝CFであることを証明せよ。



[解答]

△AEOと△CFOにおいて

仮定より ∠AEO＝∠CFO＝90°･･･①

平行四辺形の対角線はたがいに中点で交わるので，

AO＝CO･･･②

対頂角は等しいので，∠AOE＝∠COF･･･③

①，②，③より直角三角形の斜辺と他の1鋭角がそれぞれ等しいので

△AEO≡△CFO

∴AE＝CF

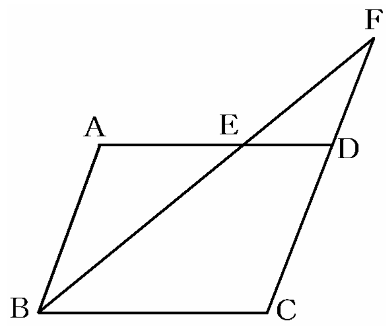
【】平行四辺形の性質④(その他)

[問題]

　平行四辺形ABCDで，∠Bの2等分線が辺AD，CDの延長と交わる点を，それぞれE，Fとするとき，次のことを証明せよ。

1) AB＝AE

2) CB＝CF



[解答]

1)　仮定より ∠ABE＝∠CBE

AD//BCなので，錯角が等しく ∠CBE＝∠AEB

∴∠ABE＝∠AEB

∴△ABEは二等辺三角形となり，AB＝AE

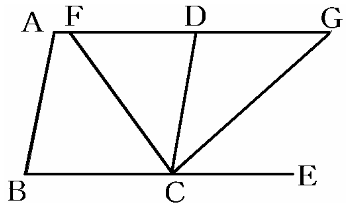
2) AB//CFなので，錯角が等しく ∠ABE＝∠CFB

∠ABE＝∠CBFなので，∠CFB＝∠CBF

∴△CBFは二等辺三角形となり，CB＝CF

[問題]

　次の図のように，平行四辺形ABCDの辺BCをのばした直線上に点Eをとり，∠DCBの二等分線と∠DCEの二等分線とが，直線ADと交わる点を，それぞれF，Gとするとき，DF＝DGであることを証明せよ。



[解答]

AD//BCなので，錯角が等しく ∠DFC＝∠BCF

仮定より ∠BCF＝∠DCF

∴∠DFC＝∠DCFとなり△DECは二等辺三角形になる。

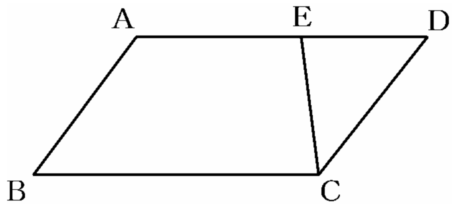
∴DF＝DC

同様にしてDC＝DG

∴DF＝DG

[問題]

　次の図のような平行四辺形ABCDの辺AD上に，∠ECD＝∠ABCとなるように点Eをとる。このとき，AE＋EC＝BCとなることを証明せよ。



[解答]

四角形ABCDは平行四辺形なので，向かい合う角が等しく ∠CDE＝∠ABC

仮定より ∠ABC＝∠ECD

∴∠CDE＝∠ECD となり△ECDは二等辺三角形

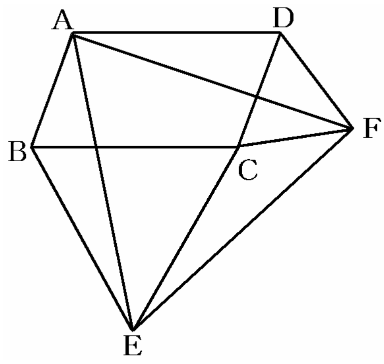
∴EC＝ED

∴AE＋EC＝AE＋ED＝AD＝BC

∴AE＋EC＝BC

[問題]

　平行四辺形ABCD**の**2**辺**BC，CD**をそれぞれ**1**辺とする正三角形**BEC，CFD**を次の図のようにつくるとき，次のことを証明せよ。**



1) ∠ABE＝∠FDA＝∠FCE

2) △AEF**は正三角形である。**

[解答]

1) ∠ABC＝x **とおく。**

△BEC，△CFD**は正三角形なので，**

∠ABE＝x ＋60°

∠FDA＝x ＋60°

次に，∠BCD＝180°－x **なので**

∠FCE＝360°－∠BCD－60°－60°

＝360°－(180°－x)－120°＝60°＋x

以上より，∠ABE＝∠FDA＝∠FCE

2) △ABE**と**△FDA**において**

△BEC，△CFD**は正三角形なので，**DF＝DC

四角形ABCD**は平行四辺形なので，**DC＝AB

∴AB＝DF･･･①

同様にして，AD＝BC，BC＝BE**なので**AD＝BE･･･②

1)**より**∠FDA＝∠ABE･･･③

①，②，③より2**辺とその間の角がそれぞれ等しいので**

△ABE≡△FDA**となり，**AE＝AF･･･④

次に，△FDA**と**△FCE**において**

△CFD**は正三角形なので，**DF＝CF･･･⑤

CE＝CB，CB＝DA**なので**DA＝CE･･･⑥

1)**より** ∠FDA＝∠FCE･･･⑦

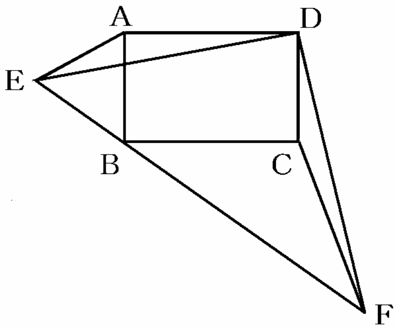
⑤，⑥，⑦より2**辺とその間の角がそれぞれ等しいので**

△FDA≡△FCE**となり，**AF＝EF･･･⑧

④，⑧よりAE＝EF＝AF**となり，**△AEF**は正三角形になる。**

[問題]

　次の図のように，長方形ABCDの頂点Bを通る直線上に，2点E，FをAB＝AE，BC＝CFとなるようにとる。このとき，ED＝DFとなることを証明せよ。



[解答]

△AEDと△CDFにおいて

仮定より AE＝AB

四角形ABCDは長方形なので，AB＝CD

∴AE＝CD･･･①

同様にして，AD＝BC，BC＝CFなのでAD＝CF･･･②

次に，∠ABE＝x とおく。

AB＝AEなので∠AEB＝∠ABE＝x

∴∠EAB＝180°－2x

∴∠EAD＝180°－2x＋90°＝270°－2x ･･･③

また，∠ABE＝x なので，∠CBF＝180°－90°－x＝90°－x

BC＝CFなので，∠CFB＝∠CBF＝90°－x

∴∠BCF＝180°－(90°－x)×2＝2x

∴∠DCF＝360°－90°－2x＝270°－2x ･･･④

③，④より ∠EAD＝∠DCF･･･⑤

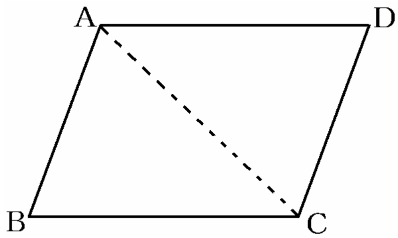
①，②，⑤より2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

△AED≡△CDF

∴ED＝DF

【】平行四辺形になる条件①(向かい合う2組の辺が等しい)

[問題]



次の図において，AB＝CD，BC＝DA**ならば，四角形**ABCD**は平行四辺形になることを証明せよ。**

[解答]

△ABC**と**△CDA**において**

AC**は共通･･･①**

仮定より AB＝CD･･･②，BC＝DA･･･③

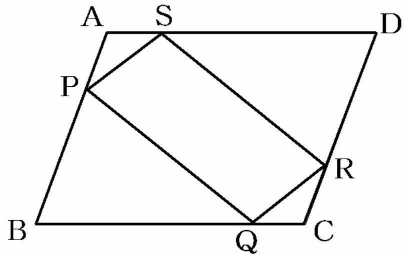
3**辺が等しいので，**△ABC≡△CDA

∴∠BCA＝∠DAC**で，錯角が等しいので** AD//BC

∠BAC＝∠DCA**で，錯角が等しいので** AB//DC

∴**向かい合う**2**組の辺が平行なので，四角形**ABCD**は平行四辺形になる**

[問題]



平行四辺形ABCD**の辺**AB，BC，CD，DA**上にそれぞれ点**P，Q，R，S**をとり，**AP＝CR，BQ＝DS**となるようにすれば，四角形**PQRS**は平行四辺形になることを証明せよ。**

[解答]

△APS**と**△CRQ**において**

仮定より AP＝CR･･･①

平行四辺形の向かい合う辺の長さは等しいのでAD＝CB

仮定より DS＝BQ**なので**

AS＝AD－DS＝CB－BQ＝CQ

∴AS＝CQ･･･②

平行四辺形の向かい合う角の大きさは等しいので，∠PAS＝∠RCQ･･･③

①，②，③より2**辺とその間の角がそれぞれ等しいので，**△APS≡△CRQ

∴PS＝RQ

同様にして，△BPQ≡DRS**となり，**PQ＝RS

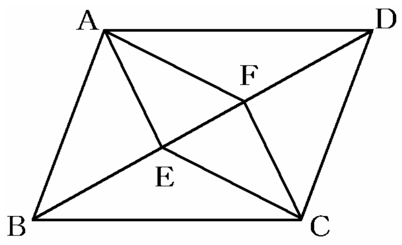
向かい合う2**組の辺の長さが等しいので，四角形**PQRS**は平行四辺形になる。**

[問題]

　平行四辺形ABCDの頂点A，Cから対角線BDへ垂線をひき，その交点をそれぞれE，Fとすると。

1）△ABEと△CDFが合同になることを証明せよ。

2）四角形AECFが平行四辺形になることを証明せよ。



[解答]

1）△ABEと△CDFにおいて

平行四辺形の向かい合う辺の長さは等しいので，AB＝CD･･･①

AB//CDなので，錯角が等しく ∠ABE＝∠CDF･･･②

仮定より ∠AEB＝∠CFD＝90°･･･③

①，②，③より直角三角形の斜辺と他の1鋭角がそれぞれ等しいので

△ABE≡△CDF

2）△AFDと△CEBにおいて

平行四辺形の向かい合う辺の長さは等しいので，AD＝CB･･･④

1)より△ABE≡△CDFなので DF＝BE･･･⑤

AD//BCなので，錯角が等しく ∠ADF＝∠CBE･･･⑥

④，⑤，⑥より2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

△AFD≡△CEB

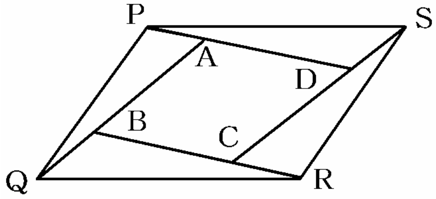
∴AF＝CE

また，1）より△ABE≡△CDFなので AE＝CF

向かい合う2組の辺の長さが等しいので，四角形AECFは平行四辺形になる。

[問題]

　次の図のように，平行四辺形ABCDの各辺の延長線上に，それぞれP，Q，R，Sをとり，AP＝BQ＝CR＝DSとすれば，四角形PQRSは平行四辺形であることを証明せよ。



[解答]

△PDSと△RBQにおいて

仮定より　DS＝BQ･･･①

四角形ABCDは平行四辺形なので，AD＝CB

また，PA＝RCなので，PD＝RB･･･②

平行四辺形の向かい合う角は等しいので，∠ADC＝∠CBA

∴∠PDS＝180°－∠ADC＝180°－∠CBA＝∠RBQ

∴∠PDS＝∠RBQ･･･③

①，②，③より2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

△PDS≡△RBQ　　∴PS＝RQ･･･④

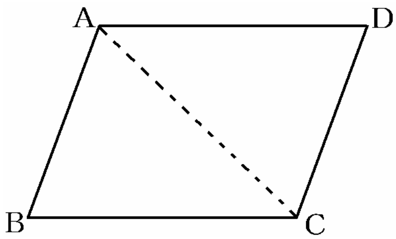
以上と同様にして，△QAP≡△SCRとなり，PQ＝RS･･･⑤

④，⑤より向かい合う2組の辺の長さが等しいので，四角形PQRSは平行四辺形になる。

【】平行四辺形になる条件②(向かい合う1組の辺が平行で等しい)

[問題]

　次の図において，ADとBCが平行で等しいならば，四角形ABCDは平行四辺形になることを証明せよ。



[解答]

△ABCと△CDAにおいて

ACは共通･･･①

仮定より　BC＝DA･･･②

AD//BCなので，錯角が等しく　∠BCA＝∠DAC･･･③

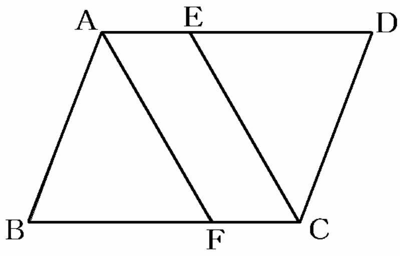
①，②，③より2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

△ABC≡△CDA　∴AB＝CD

向かい合う2組の辺の長さが等しいので，四角形ABCDは平行四辺形になる。

[問題]

平行四辺形ABCD**の対辺**AD，BC**上にそれぞれ点**E，F**を**AE＝CF**となるようにとる。このとき，四角形**AFCE**は平行四辺形であることを証明せよ。**



[解答]

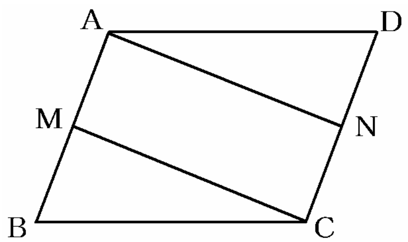
四角形ABCD**は平行四辺形なので，**AE//FC

仮定より AE＝FC

1**組の辺が平行で等しいので，四角形**AFCE**は平行四辺形である。**

[問題]

平行四辺形ABCD**の対辺**AB，DC**の中点を，それぞれ**M，N**とするとき，四角形**AMCN**は平行四辺形であることを証明せよ。**



[解答]

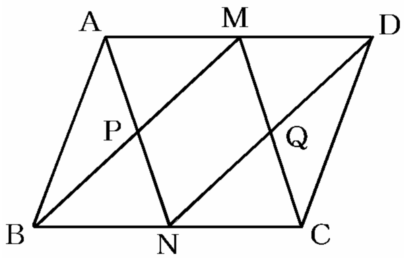
四角形ABCD**は平行四辺形なので，**AM//NC

AB＝DC，AM＝$\frac{1}{2}$AB，NC＝$\frac{1}{2}$DC**なので**AM＝NC

1**組の辺が平行で等しいので，四角形**AMCN**は平行四辺形である。**

[問題]

平行四辺形ABCD**の対辺**AD，BC**の中点をそれぞれ**M，N**とするとき，四角形**PNQM**は平行四辺形であることを証明せよ。**



[解答]

四角形ANCM**について**

四角形ABCD**は平行四辺形なので，**AM//NC

AD＝BC，AM＝$\frac{1}{2}$AD，NC＝$\frac{1}{2}$BC**なので**AM＝NC

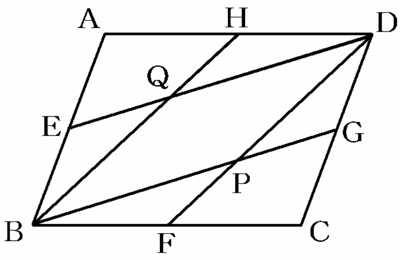
1**組の辺が平行で等しいので，四角形**AMCN**は平行四辺形である。**∴PN//MQ

同様にして，四角形BNDM**は平行四辺形で** MP//QN

2**組の辺が平行なので四角形**PNQM**は平行四辺形である。**

[問題]

平行四辺形ABCD**の各辺の中点を，**E，F，G，H**とし，**BG**と**DF**の交点を**P，BH**と**DE**の交点を**Q**とすると，四角形**BPDQ**は平行四辺形になることを証明せよ。**



[解答]

四角形BFDH**について**

四角形ABCD**は平行四辺形なので，**HD//BF

AD＝BC，HD＝$\frac{1}{2}$AD，BF＝$\frac{1}{2}$BC**なので，**HD＝BF

1**組の辺が平行で等しいので，四角形**BFDH**は平行四辺形である。**

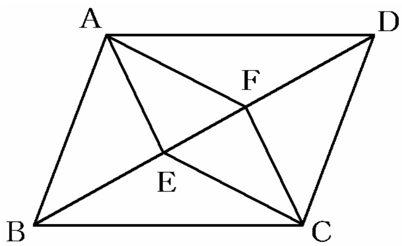
∴BQ//PD

同様にして，四角形BGDE**は平行四辺形となり，**BP//QD

2**組の辺が平行なので四角形**BPDQ**は平行四辺形である。**

[問題]

平行四辺形ABCD**の頂点**A，C**から対角線**BD**へ垂線をひき，その交点をそれぞれ**E，F**とすると，四角形**AECF**は平行四辺形になることを証明せよ。**



[解答]

△ABE**と**△CDF**において**

四角形ABCD**は平行四辺形なので，**AB＝CD･･･①

AB//CD**なので，錯角が等しく** ∠ABE＝∠CDF･･･②

仮定より ∠AEB＝∠CFD＝90°･･･③

①，②，③より，直角三角形の斜辺と他の1**鋭角がそれぞれ等しいので，**

△ABE≡△CDF

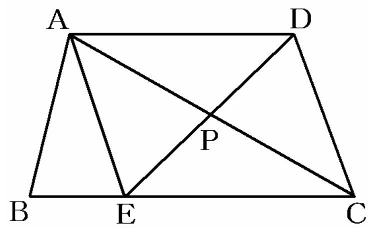
∴AE＝CF

また，∠AEF＝∠CFE＝90°**なので，錯角が等しく** AE//CF

1**組の辺が平行で等しいので，四角形**AECF**は平行四辺形である。**

[問題]

　台形ABCDにおいて，対角線ACの中点をPとし，DPの延長とBCの交点をEとするとき，四角形AECDは平行四辺形であることを証明せよ。



[解答]

△ADPと△CEPにおいて

仮定より AP＝CP･･･①

対頂角は等しいので ∠APD＝∠CPE･･･②

AD//BCなので，錯角が等しく ∠DAP＝∠ECP･･･③

①，②，③より1辺と両端の角がそれぞれ等しいので，

△ADP≡△CEP

∴AD＝CE

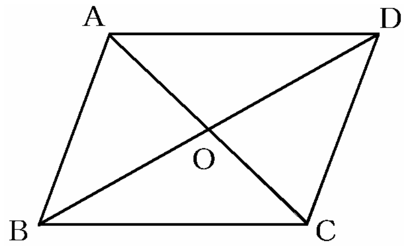
また，AD//CE

1組の辺が平行で等しいので，四角形AECDは平行四辺形である。

【】平行四辺形になる条件③(対角線がそれぞれ中点で交わる)

[問題]

　次の図で，AO＝CO，BO＝DOであるとき，四角形ABCDは平行四辺形になることを証明せよ。



[解答]

△ABOと△CDOにおいて

仮定よりAO＝CO･･･①

　　　　BO＝DO･･･②

対頂角は等しいので，∠AOB＝∠COD･･･③

①，②，③より2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

△ABO≡△CDO

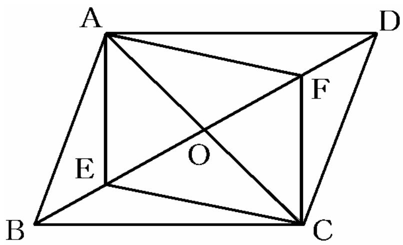
∴AB＝CD

∠OAB＝∠OCDなので，錯角が等しく AB//CD

1組の辺が平行で等しいので，四角形ABCDは平行四辺形になる。

[問題]

　平行四辺形ABCDの2つの対角線の交点をOとし，対角線BD上に点E，FをOE＝OFとなるようにとる。このとき，四角形AECFは平行四辺形であることを証明せよ。



[解答]

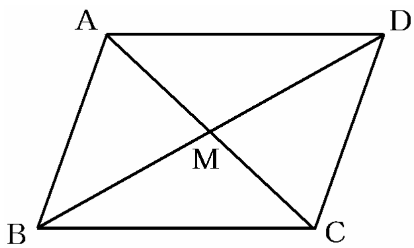
四角形ABCDは平行四辺形なので，OA＝OC

仮定より OE＝OF

∴対角線がそれぞれ中点で交わるので，四角形AECFは平行四辺形となる。

[問題]

　次の図のような△ABCで，点Bと辺ACの中点Mを結んだ直線と，点Cを通りBAに平行にひいた直線との交点をDとする。このとき，四角形ABCDが平行四角形になることを証明せよ。



[解答]

△ABMと△CDMにおいて

仮定より AM＝CM･･･①

対頂角は等しいので，∠AMB＝∠CMD･･･②

仮定より AB//CDなので，錯角が等しく ∠BAM＝∠DCM

①，②，③より1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

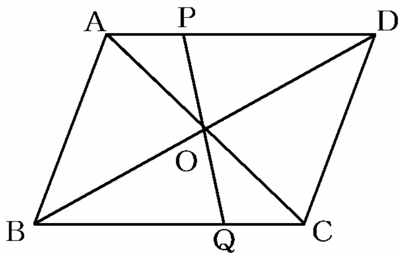
△ABM≡△CDM

∴BM＝DM･･･④

①，④より対角線がそれぞれ中点で交わるので，四角形ABCDは平行四辺形となる。

[問題]

平行四辺形ABCDの対角線の交点Oを通って，次の図のように直線PQをひくと，四角形PBQDは平行四辺形になることを証明せよ。



[解答]

△APOと△CQOにおいて

四角形ABCDは平行四辺形なので，AO＝CO･･･①

対頂角は等しいので，∠AOP＝∠COQ･･･②

AD//BCなので，錯角が等しく ∠PAO＝∠QCO･･･③

①，②，③より1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△APO≡△CQO

∴PO＝QO

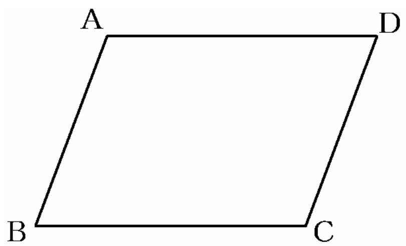
また，四角形ABCDは平行四辺形なので DO＝BO

対角線がそれぞれ中点で交わるので，四角形PBQDは平行四辺形となる。

【】平行四辺形になる条件④(向かい合う2組の角が等しい)

[問題]

次の図で，∠A＝∠C，∠B＝∠Dであるとき，四角形ABCDは平行四辺形になることを証明せよ。



[解答]

四角形の内角の和は360°なので

∠A＋∠B＋∠C＋∠D＝360°

仮定より，∠A＝∠C，∠B＝∠D

∴2∠A＋2∠B＝360°∴∠A＋∠B＝180°

ここで，BAの延長線上に点Eをとる

∠ABC＋∠BAD＝180°，∠EAD＋∠BAD＝180°なので

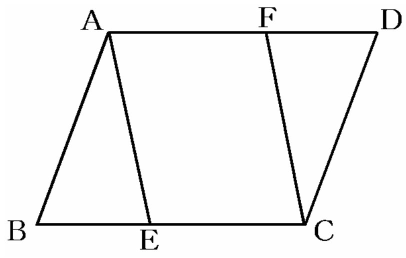
∠ABC＝∠EADとなり，同位角が等しいのでAD//BC

また，∠EAD＝∠ADCなので，錯角が等しく AB//DC

∴2組の向かい合う辺が平行なので四角形ABCDは平行四辺形になる。

[問題]

　次の図の平行四辺形ABCDで∠AEB＝∠CFDとすると，四角形AECFは平行四辺形になることを証明せよ。



[解答]

AD//BCなので　∠AEB＝∠EAF

∠CFD＝∠ECF

仮定より　∠AEB＝∠CFDなので，∠EAF＝∠ECF・・・①

∠AFC＝180°－∠CFD

∠AEC＝180°－∠AEB

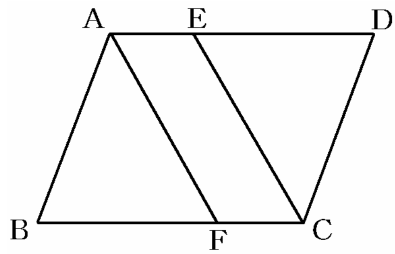
仮定より　∠AEB＝∠CFDなので，∠AFC＝∠AEC・・・②

①，②より向かい合う2組の角が等しいので

四角形AECFは平行四辺形になる。

[問題]

　平行四辺形ABCDの対角∠A，∠Cの2等分線がBC，ADと交わる点をそれぞれF，Eとするとき，四角形AFCEは平行四辺形であることを証明せよ。



[解答]

四角形ABCDは平行四辺形なので向かい合う角は等しく

∠BAD＝∠BCD

仮定より，∠EAF＝$\frac{1}{2}$∠BAD，∠ECF＝$\frac{1}{2}$∠BCD

∴∠EAF＝∠ECF・・・①

また，AD//BCなので，∠BFA＝∠EAF，∠DEC＝∠ECF

∴∠BFA＝∠DEC

∠CFA＝180°－∠BFA

∠AEC＝180°－∠DEC

∴∠CFA＝∠AEC・・・②

①，②より向かい合う2組の角が等しいので四角形AFCEは平行四辺形になる。

【】長方形

[問題]

　長方形は平行四辺形でもあることを証明せよ。

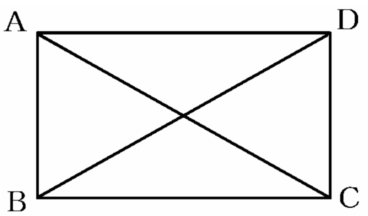
[解答]

長方形の定義より，4つの内角はすべて等しい。

∴向かい合う2組の角は等しくなるので，平行四辺形となる。

[問題]

　次の図を使って，長方形の対角線の長さが等しいことを証明せよ。



[解答]

△ABCと△DCBにおいて

BCは共通・・・①

四角形ABCDは長方形なので，∠ABC＝∠DCB＝90°・・・②

AB＝DC・・・③

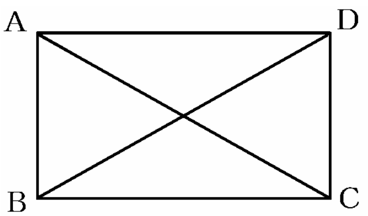
①，②，③より2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

△ABC≡△DCB

∴AC＝DB

[問題]

　次の図を使って，対角線の長さが等しい平行四辺形は長方形であることを証明せよ。



[解答]

△ABCと△DCBにおいて

BCは共通・・・①

仮定より AC＝DB・・・②

平行四辺形の向かい合う角は等しいので，AB＝DC・・・③

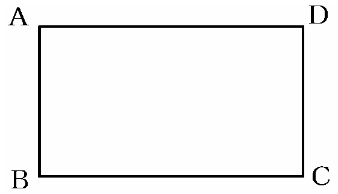
①，②，③より3辺がそれぞれ等しいので，△ABC≡△DCB

∴∠ABC＝∠DCB，さらに ∠ABC＝∠ADC，∠BAD＝∠DCBなので

4つの内角がすべて等しい。∴四角形ABCDは長方形となる。

[問題]

1つの角が直角である平行四辺形は長方形であることを証明せよ。



[解答]

∠A＝90°と仮定する。

平行四辺形の向かい合う角は等しいので，∠C＝∠A＝90°

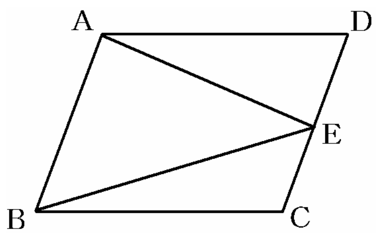
∠B＋∠D＝360°－(∠A＋∠C)＝360°－180°＝180°

∠B＝∠Dなので，∠B＝∠D＝90°

∴∠A＝∠B＝∠C＝∠D＝90°となり，四角形ABCDは長方形となる。

[問題]

平行四辺形ABCDの辺DCの中点をEとするとき，AE＝BEならば，この四角形ABCDは長方形になることを証明せよ。



[解答]

△ADEと△BCEにおいて

仮定より　AE＝BE･･･①

DE＝CE･･･②

平行四辺形の向かい合う辺の長さは等しいので，AD＝BC･･･③

①，②，③より3辺がそれぞれ等しいので

△ADE≡△BCE

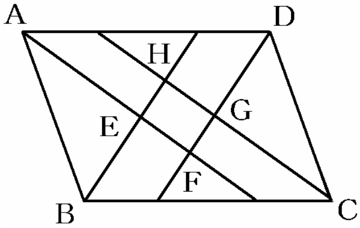
∴∠ADE＝∠BCE

平行四辺形の向かい合う角は等しいので，∠ADE＝∠ABC，∠ECB＝∠BAD

∴4つの内角がすべて等しくなり，四角形ABCDは長方形となる。

[**問題**]

　平行四辺形ABCD**の**4**つの角の二等分線で囲まれた四角形は長方形になる。このことを証明せよ。**



[**解答**]

∠BAE＝x，∠ABE＝y **とおくと，**

仮定より，∠DAE＝∠DCG＝∠BCG＝x

　　　　　∠CBE＝∠ADG＝∠CDG＝y

四角形の内角の和は360°**なので，**$4x+4y=360°$ ∴ $x+y=90°$

∠HEF＝∠AEB＝180°－(∠BAE＋∠ABE)＝180°－($x+y$)＝90°

同様にして，∠FGH＝90°

また，△AFD**について**

∠AFD＝180°－(∠FAD＋∠FDA)＝180°－($x+y$)＝90°

同様にして，∠BHC＝90°

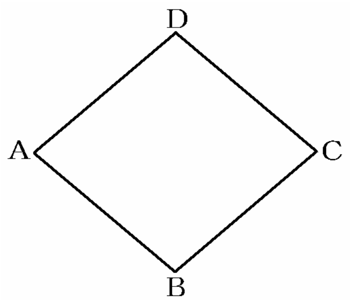
以上より四角形EFGH**の内角はすべて**90°**で等しくなる。**

∴**四角形**EFGH**は長方形となる。**

【】ひし形

[**問題**]

　ひし形は平行四辺形でもあることを証明せよ。



[**解答**]

ひし形ABCD**において**4**辺がすべて等しいので，**

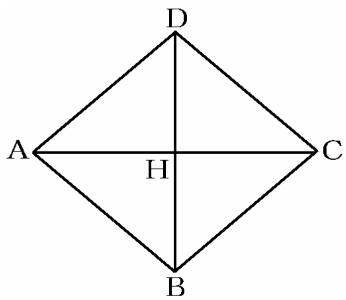
AB＝DC，AD＝BC

∴向かい合う2**組の辺の長さが等しいので，**

ひし形ABCD**は平行四辺形となる。**

[**問題**]

　次の図を使って，ひし形の対角線が垂直に交わることを証明せよ。



[**解答**]

△ADH**と**△CDH**において**

DH**は共通･･･①**

四角形ABCD**はひし形なので，**AD＝CD･･･②

また，ひし形は平行四辺形でもあるので，AH＝CH･･･③

∴3**つの辺がそれぞれ等しいので**

△ADH≡△CDH

∴∠AHD＝∠CHD

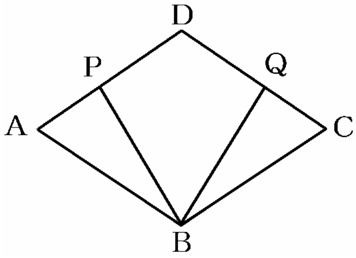
また，∠AHD＋∠CHD＝180°

∴∠AHD＝∠CHD＝90°

∴AC⊥DH

[問題]

　ひし形ABCDの頂点BからAD，CDにひいた垂線を，それぞれBP，BQとするとき，BP＝BQであることを証明せよ。



[解答]

△ABPと△CBQにおいて

四角形ABCDはひし形なので，AB＝CB･･･①

ひし形は平行四辺形でもあるので，向かい合う内角が等しく

∠BAP＝∠BCQ･･･②

仮定より ∠APB＝∠CQB＝90°･･･③

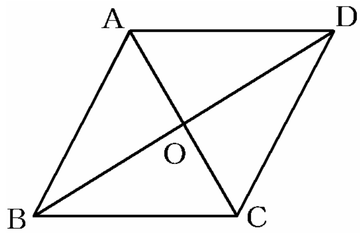
①，②，③より直角三角形の斜辺と他の1鋭角がそれぞれ等しいので

△ABP≡△CBQ

∴BP＝BQ

[問題]

　次の図を使って，対角線が垂直に交わる平行四辺形はひし形になることを証明せよ。



[解答]

△ABOと△ADOにおいて

AOは共通･･･①

平行四辺形の対角線はたがいに中点で交わるので，BO＝DO･･･②

仮定より ∠AOB＝∠AOD･･･③

①，②，③より2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

△ABO≡△ADO

∴AB＝AD･･･④

平行四辺形の向かい合う辺は等しいので，

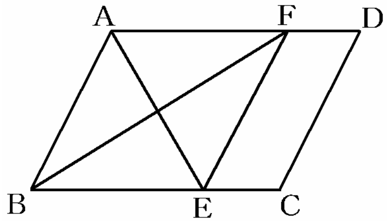
AB＝CD，AD＝BC･･･⑤

④，⑤よりAB＝BC＝CD＝DA

∴四角形ABCDはひし形となる。

[問題]

平行四辺形ABCDの∠A，∠Bの二等分線が辺BC，ADと交わる点をそれぞれE，Fとするとき，四角形ABEFはひし形になることを証明せよ。



[解答]

AEとBFの交点をHとする。

△ABHと△AFHにおいて

AHは共通･･･①

仮定より ∠BAH＝∠FAH･･･②

また，仮定より ∠ABH＝∠EBH

AF//BEなので，錯角が等しく ∠EBH＝∠AFH

∴∠ABH＝∠AFH･･･③

②，③より

∠AHB＝180°－(∠BAH＋∠ABH)＝180°－(∠FAH＋∠AFH)＝∠AHF

∴∠AHB＝∠AHF･･･④

①，②，④より1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△ABH≡△AFH

∴AB＝AF

同様にして，△ABH≡△BEHとなり，AB＝BE

△BEH≡△FEHとなり，BE＝EF

以上より，4つの辺の長さが等しいので

四角形ABEFはひし形になる

[問題]

次の(　ア　)，(　イ　)にあてはまるものを，下の1～4から，それぞれ1つ選び，記号で答えよ。

四角形ABCDは，ABとDCが平行で(　ア　)のとき，平行四辺形であり，さらに，平行四辺形ABCDは，(　イ　)のとき，長方形である。

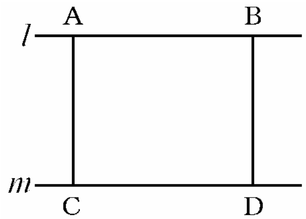
1　AD＝BC　　2　AB＝DC　　3　AB＝AD　　4　∠A＝∠B

[解答]ア 2，イ 4

【】平行線と面積①(底辺を共有)

[問題]

2直線l, mが平行であるとき，l上の2点A，Bからmにひいた垂線をAC，BDとすると，AC＝BDである。このことを証明せよ。



[解答]

仮定より，∠ACD＝90°

∠BDC＝90°なので，

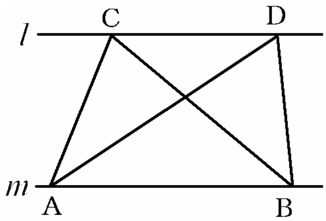
CDの延長上に点Eをとると，∠BDE＝90°

∴∠ACD＝∠BDEで同位角が等しいので，AC // BD

また，$l // m$なので四角形ABCDは平行四辺形となり，AC＝BD

[問題]

次の図で，2直線l, mが平行であるとき，△ABCと△ABDの面積が等しくなることを証明せよ。



[解答]

△ABCと△ABDの底辺をともにABとすると，底辺の長さは等しい。･･･①

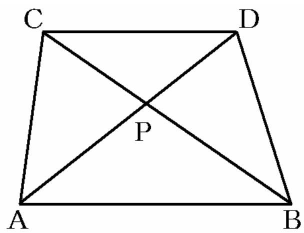
2直線l, mが平行なので，CからABまでの距離とDからABまでの距離が等しい。

∴△ABCと△ABDの高さが等しい。･･･②

①，②より△ABCと△ABDの面積は等しい。

[問題]

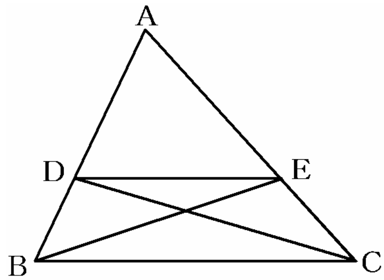
ABとCDが平行である台形ABDCで，対角線の交点をPとするとき，△APCの面積と△BPDの面積が等しくなることを証明せよ。



[解答]略

[問題]

△ABCで辺BCに平行な直線をひき，AB，ACと交わる点をそれぞれD，Eとする。このとき，△ABEの面積と△ACDの面積が等しくなることを証明せよ。



[解答]

△BDEと△CDEで底辺をともにDEとすると，

DE // BCなので，高さは同じになる。

よって，△BDE＝△CDEの

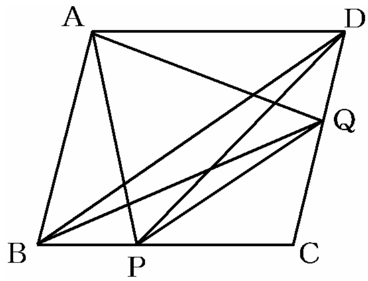
△ABE＝△ADE＋△BDE，

△ACD＝△ADE＋△CDE なので，

△ABE＝△ACD

[問題]

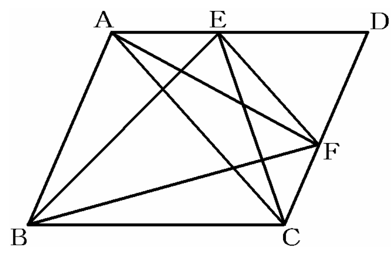
平行四辺形ABCDの対角線BDに平行な直線が，辺BC，CDと交わる点をそれぞれP，Qとする。△ABPと面積の等しい三角形をすべてあげよ。



[解答]△DBP，△DBQ，△DAQ

[問題]

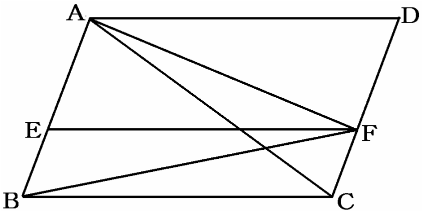
平行四辺形ABCDの対角線に平行な直線が辺AD，CDと交わる点を，それぞれE，Fとする。このとき，△ABEと面積が等しい三角形が3つあります。この三角形をすべてあげよ。



[解答]

△ACE，△ACF，△BCF

[問題]



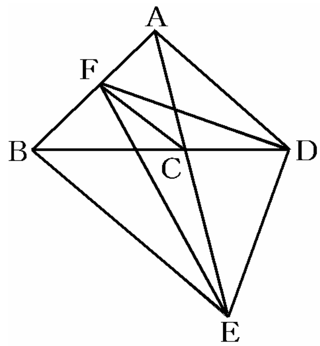
次の平行四辺形ABCD**で，**AD//EF**であるとき，**

△FCB**と面積が等しい三角形を書け。**

[**解答**]

△FCA，△BEF

[**問題**]



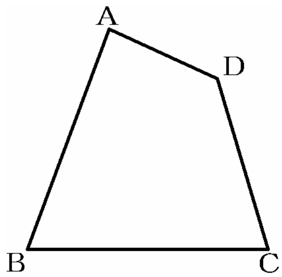
次の図で，AD，FC，BE**は互いに平行である。このとき，**

△DEF**は**△ABC**の面積の何倍か。**

[**解答**] 2**倍**

【】等積変形

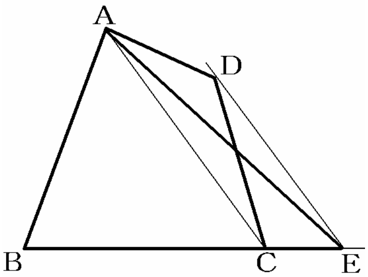
[**問題**]



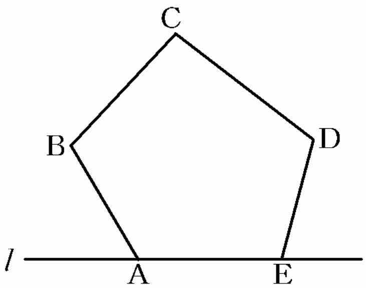
次の四角形ABCD**と，面積が等しい三角形**△ABE**を作図せよ。**

（作図に用いた線は，消さずに残しておくこと）

[解答]

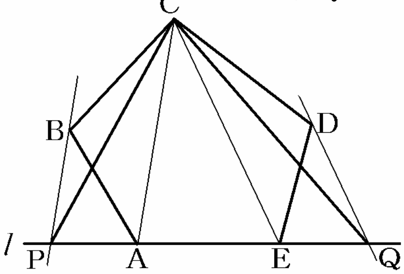


[**問題**]

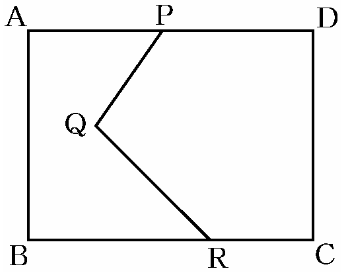


l **上に点**P，Q**をとって五角形**ABCDE**の面積と**△CPQ**の面積が等しくなるようにしたい。**P，Q**の位置を作図によって求めよ。**

[**解答**]

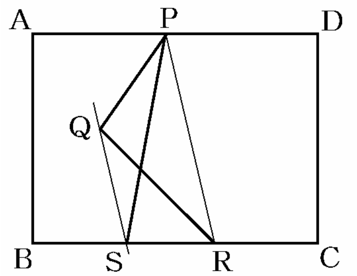


[問題]

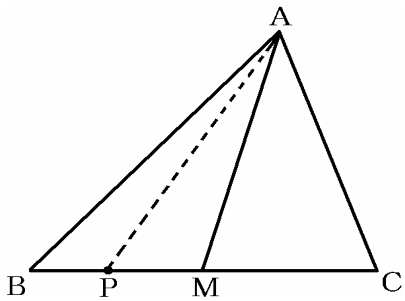


次の図のように，長方形ABCDがあり，PQRを境に2つの部分に分けられている。BC上に点Sをとって，2つの部分の面積を変えないでPSを新しい境界線としたい。点Sの位置を作図によって求めよ。

[解答]

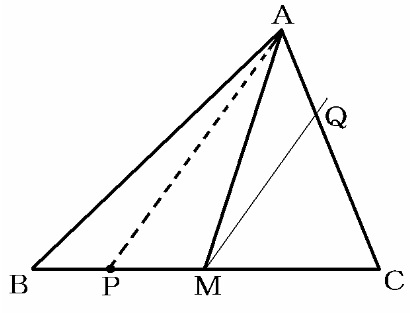


[問題]



△ABCにおいて，辺BCの中点をM，BM上の点をPとする。辺AC上に点Qをとって，線分PQが△ABCの面積を2等分するように，解答用紙の図に作図せよ。ただし，作図に用いた線は残し，必要なマークやアルファベットを必ず入れること。

[解答]



MQ // AP