

## 【FdData 高校入試：中学数学 1 年：空間図形】

[[位置関係:2 直線の位置関係](#)/[面と直線の位置関係](#)/[角柱・角錐の体積と表面積](#)/[立体の切断など](#)/[円柱と円錐の体積](#)/[円柱と円錐の表面積](#)/[球の体積・表面積](#)/[展開図](#)/[投影図](#)/[FdData 入試製品版のご案内](#)]

[[FdData 入試ホームページ](#)]掲載の pdf ファイル(サンプル)一覧]

※次のリンクは[Shift]キーをおしながら左クリックすると、新規ウィンドウが開きます

数学： [[数学 1 年](#)], [[数学 2 年](#)], [[数学 3 年](#)]

理科： [[理科 1 年](#)], [[理科 2 年](#)], [[理科 3 年](#)]

社会： [[社会地理](#)], [[社会歴史](#)], [[社会公民](#)]

※全内容を掲載しておりますが、印刷はできないように設定しております

### 【】位置関係

### 【】2 直線の位置関係

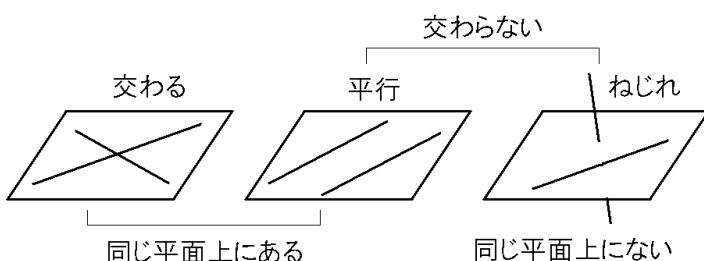
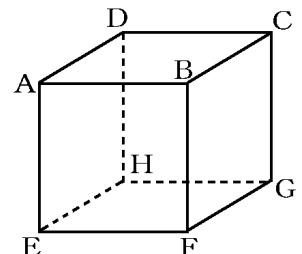
#### [問題]

右の図のように、点 A, B, C, D, E, F, G, H を頂点とする立方体がある。この立方体において、辺 AD と平行な辺をすべて書け。

(広島県)(\*)

#### [解答欄]

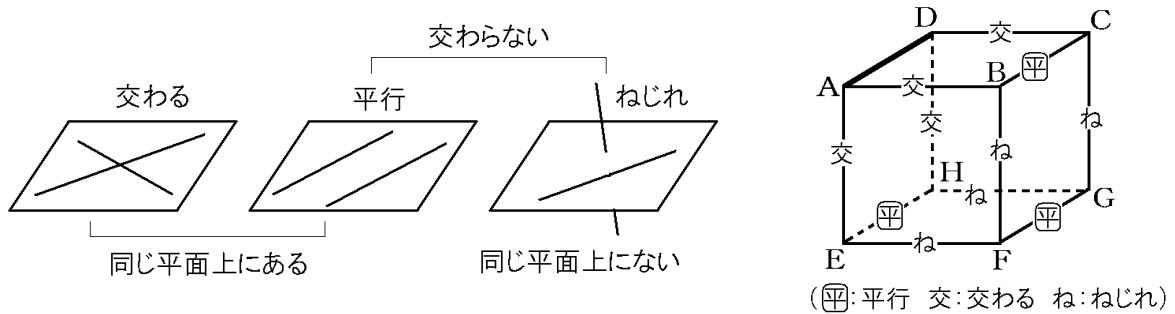
#### [ヒント]



[解答]辺 BC, 辺 FG, 辺 EH

[解説]

空間における 2 直線の位置関係は、交わる、平行、ねじれの 3 つにわけることができる。



図の立方体の辺 AD に対し、面 ABCD 上の辺 AB と辺 CD は交わり、辺 BC は平行である。面 EFGH 上の辺 EH と辺 FG は、辺 AD と平行である。辺 EF と辺 HG は、辺 AD とねじれの位置関係にある。側面上の辺 AE と辺 DH は、辺 AD と交わっている。辺 BF と辺 CG は、辺 AD とねじれの位置関係にある。

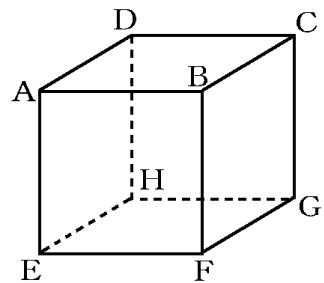
[問題]

右図の立体 ABCD-EFGH は、立方体である。辺 AE と平行な辺をすべて書け。

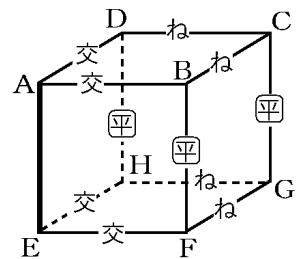
(石川県)(\*)

[解答欄]

[解答] 辺 BF, 辺 CG, 辺 DH



[解説]



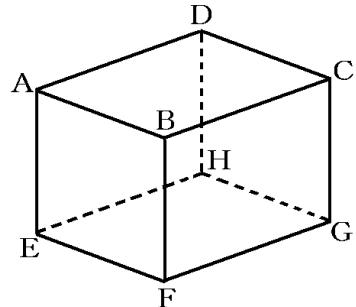
[問題]

直方体 ABCD-EFGH において、次の[ ]のうち、  
辺 AB とねじれの位置にある辺はどれか。1つ選べ。

[ 辺 BC 辺 CG 辺 EF 辺 HG ]

(大阪府)(\*)

[解答欄]



[解答]辺 CG

[解説]

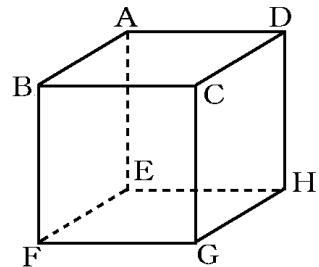
辺 AB に対し、辺 BC は交わり、辺 CG はねじれ、辺 EF は平行、辺 HG は平行の位置にある。

[問題]

右の図は立方体 ABCDEFGH である。辺 AB とねじれの位置にある辺はどれか、すべて書け。

(徳島県)(\*)

[解答欄]



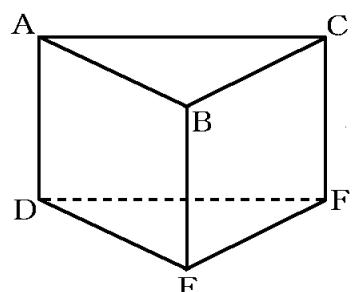
[解答]辺 CG, 辺 DH, 辺 EH, 辺 FG

[問題]

右の図の三角柱 ABC-DEF において、辺 AD とねじれの位置にある辺をすべて答えよ。

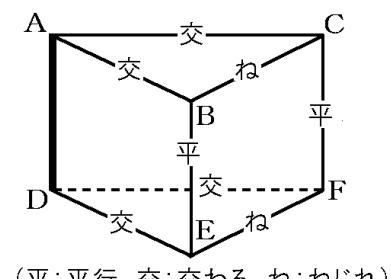
(栃木県)(\*)

[解答欄]



[解答]辺 BC, 辺 EF

[解説]



(平:平行 交:交わる ね:ねじれ)

[問題]

右の図は、三角柱 ABCDEF である。辺 AB とねじれの位置にある辺は、何本あるか。

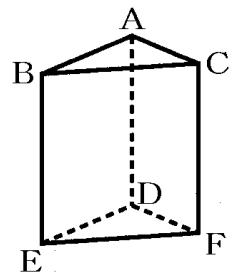
(富山県)(\*)

[解答欄]

[解答]3 本

[解説]

辺 AB とねじれの位置にある辺は、CF, DF, EF の 3 本である。



[問題]

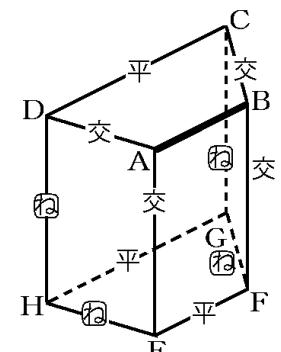
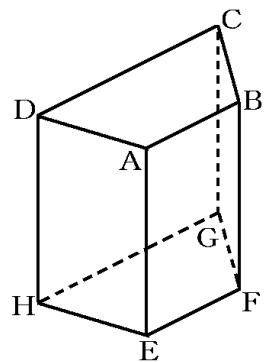
右の図のように、 $AB \parallel DC$  の台形 ABCD を底面とする四角柱がある。この四角柱の辺のうち、辺 AB とねじれの位置にある辺をすべて書け。

(北海道)(\*)

[解答欄]

[解答]辺 DH, 辺 CG, 边 EH, 边 FG

[解説]



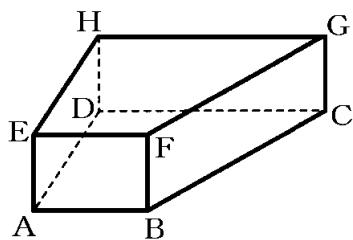
(平:平行 交:交わる ね:ねじれ)

[問題]

右の図の立体で、辺 BC とねじれの位置にある辺は、全部で何本あるか。

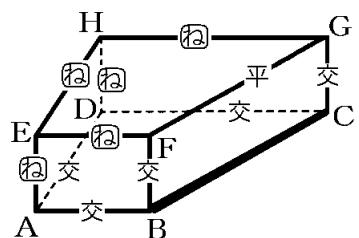
(福岡県)(\*)

[解答欄]



[解答]5 本

[解説]



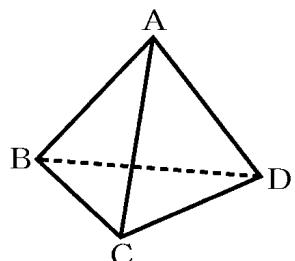
(平:平行 交:交わる ね:ねじれ)

[問題]

右図の四面体 ABCD において、辺を直線とみたとき、直線 AB とねじれの位置にある直線を答えよ。

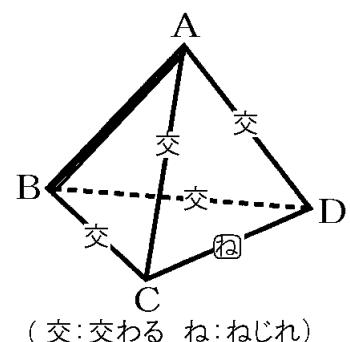
(島根県)(\*)

[解答欄]



[解答]直線 CD

[解説]



(交:交わる ね:ねじれ)

[問題]

右の図のように、底面が正方形 BCDE である正四角すい ABCDE がある。次のア～キのうち、直線 BC とねじれの位置にある直線はどれか。適当なものを全て選び、その記号を書け。

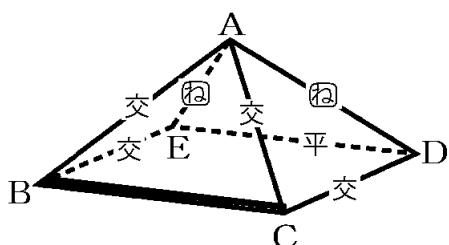
- ア 直線 AB イ 直線 AC ウ 直線 AD エ 直線 AE  
オ 直線 BE カ 直線 CD キ 直線 DE

(愛媛県)(\*)

[解答欄]

[解答]ウ、エ

[解説]



(平:平行 交:交わる ね:ねじれ)

[問題]

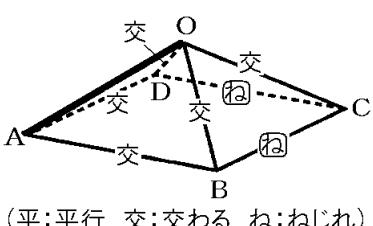
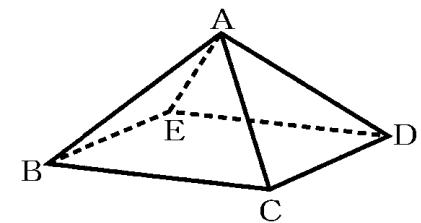
右の図の正四角すいで、辺 OA とねじれの位置にある辺をすべて書け。

(青森県)(\*)

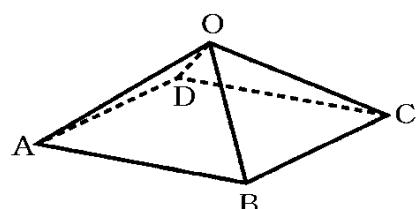
[解答欄]

[解答]辺 BC, 辺 CD

[解説]



(平:平行 交:交わる ね:ねじれ)



[問題]

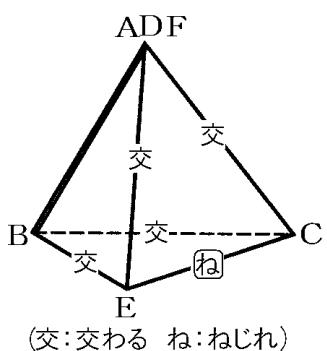
右の図は、正四面体の展開図である。この展開図を組み立てたとき、辺 AB とねじれの位置にある辺を答えよ。

(青森県)(\*\*)

[解答欄]

[解答]辺 CE

[解説]



[問題]

右の図は、正四角すいと直方体を合わせた形で、点 A, B, C, D, E, F, G, H, I を頂点とする立体を表している。

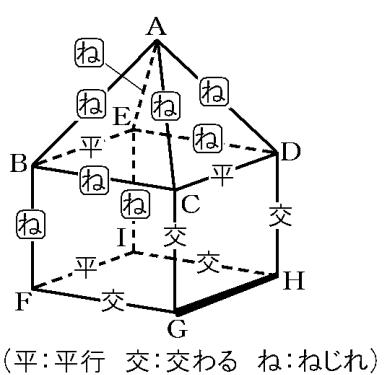
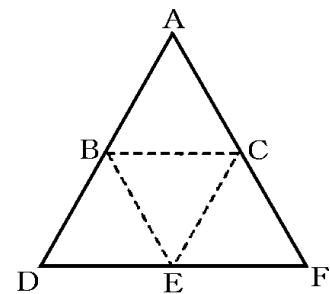
図に示す立体において、辺 GH とねじれの位置にある辺は全部で何本あるか。

(福岡県)(\*)

[解答欄]

[解答]8 本

[解説]



(平:平行 交:交わる ね:ねじれ)

## 【】面と直線の位置関係

[直線と平面の位置関係]

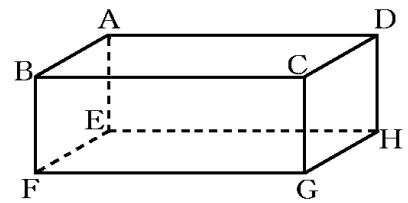
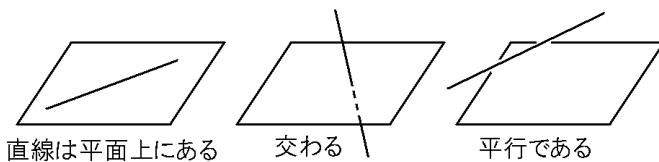
[問題]

右の図の直方体で、面 ABFE に平行な辺をすべて書け。  
(滋賀県)(\*)

[解答欄]

[ヒント]

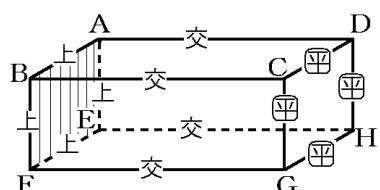
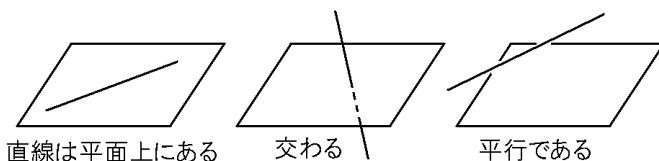
直線と平面の位置関係には、次の 3 つの場合がある。



[解答]辺 CG, 辺 GH, 辺 HD, 辺 DC

[解説]

直線と平面の位置関係には、次の 3 つの場合がある。



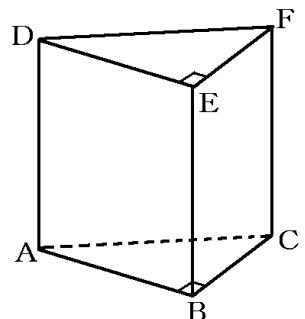
[問題]

右の図のような三角柱がある。次の[ ]の辺のうち、面 BCFE と平行な辺はどれか。正しいものを 1 つ選んで、その記号を書け。

[ 辺 AB 辺 AD 辺 DE 辺 DF ]

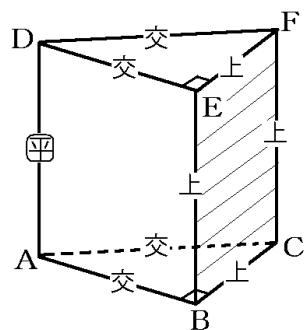
(香川県)(\*)

[解答欄]



[解答]辺 AD

[解説]



(平行:平行 交:交わる 上:平面上)

[問題]

右の図は、1辺が5cmの立方体である。次の各問いに答えよ。

- (1) 辺 AB と垂直な面を全て答えよ。  
(2) 辺 AD とねじれの位置にある辺はいくつあるか。  
(和歌山県)(\*)

[解答欄]

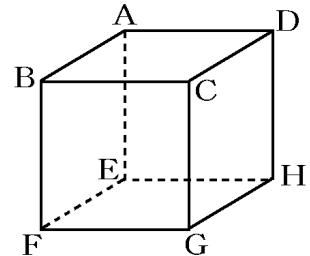
(1)

(2)

[解答](1) 面 AEHD, 面 BFGC (2) 4本

[解説]

(2) 辺 AD とねじれの位置にある辺は、辺 BF, 辺 CG, 辺 FE, 辺 GH の4つである。



[直線と平面が垂直に交わる]

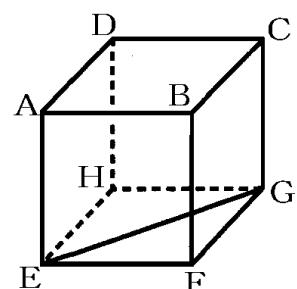
[問題]

右の図のような立方体があり、線分 EG は正方形 EFGH の対角線である。このとき、 $\angle AEG$  の大きさについて、正しく述べられている文は、ア～エのうちのどれか。1つ選べ。

- ア  $\angle AEG$  の大きさは、 $90^\circ$  より大きい。  
イ  $\angle AEG$  の大きさは、 $90^\circ$  より小さい。  
ウ  $\angle AEG$  の大きさは、 $90^\circ$  である。  
エ  $\angle AEG$  の大きさが  $90^\circ$  より大きいか小さいかは、問題の条件だけでは決まらない。

(岡山県)(\*)

[解答欄]



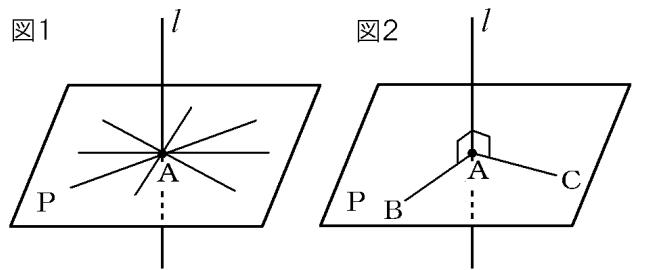
[解答]ウ

[解説]

右の図1のように、直線 $l$ と平面Pが垂直であるとき、平面P上の点Aを通るすべての直線と $l$ は垂直である。

逆に、図2のように、直線 $l$ と平面Pが点Aで交わっており、点Aを通る平面上の2つの直線(図では直線ABと直線AC)と直線 $l$ が垂直であれば、直線 $l$ と平面Pは垂直になる。

問題の図で、 $\angle AEH=90^\circ$ 、 $\angle AEF=90^\circ$ なので、AEは底面EFGHと垂直な位置関係にある。したがって、AEは底面EFGH上のEを通る直線EGと垂直に交わる。

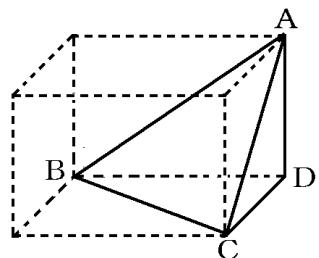


[問題]

右の図のように、直方体の一部を切り取ってできた三角錐がある。次の面を底面としたときの高さは、どこの長さになるか。

- ① 面BCDを底面としたとき
- ② 面ACDを底面としたとき

(補充問題)(\*\*)



[解答欄]

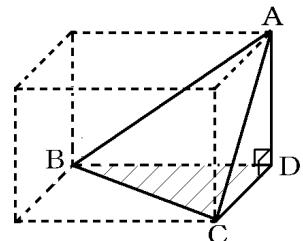
①	②
---	---

[解答]① 辺AD ② 辺BD

[解説]

① 直線ADは、平面BCD上のBDと垂直である。また、直線ADは、平面BCD上のCDとも垂直である。したがって、直線ADは平面BCDと垂直になる。

② ①と同様に、直線BDは平面ACDと垂直である。



[問題]

空間内に、直線 $l$ をふくむ平面Aと、直線 $m$ をふくむ平面Bがある。直線 $l$ 、平面A、直線 $m$ 、平面Bの位置関係について、つねに正しいものを、次のア～エから1つ選び、記号で答えよ。

ア 平面Aと平面Bが平行であるならば、直線 $l$ と直線 $m$ は平行である。

イ 直線 $l$ と直線 $m$ が平行であるならば、平面Aと平面Bは平行である。

ウ 平面Aと平面Bが垂直であるならば、直線 $l$ と平面Bは垂直である。

エ 直線 $l$ と平面Bが垂直であるならば、平面Aと平面Bは垂直である。

(山形県)

[解答欄]

[解答]エ

[平面が 1 つに決まるものはどれか]

[問題]

空間内の平面について述べた文として適切でないものを、次のア～エの中から 1 つ選び、その記号を書け。

- ア 一直線上にある 3 点をふくむ平面は 1 つに決まる。
- イ 交わる 2 直線をふくむ平面は 1 つに決まる。
- ウ 平行な 2 直線をふくむ平面は 1 つに決まる。
- エ 1 つの直線とその直線上にない 1 点をふくむ平面は 1 つに決まる。

(青森県)(\*)

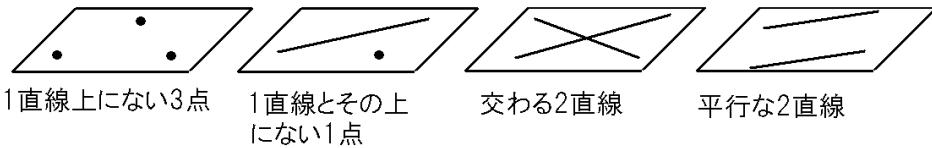
[解答欄]

[解答]ア

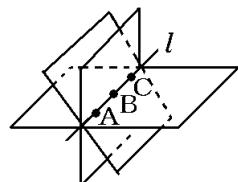
[解説]

平面が 1 つだけ決まるのは次の 4 つの場合である。

[平面が決まる条件]



アは誤り。右図のように、一直線上にある 3 点 A, B, C をふくむ平面は 1 つではない(無数にある)。



[問題]

次のア～エの中から平面が 1 つに決まるものをすべて選べ。

- ア 空間に 2 点があたえられたとき。
- イ 空間に 1 つの直線があたえられたとき。
- ウ 空間に同一直線上にある 3 点があたえられたとき。
- エ 空間に同一直線上にない 3 点があたえられたとき。

(補充問題)(\*)

[解答欄]

[解答]エ

[解説]

アは図1、イは図2、ウは図3のように、平面は1つに決まらない。

図1

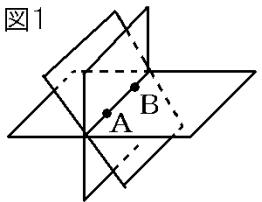


図2

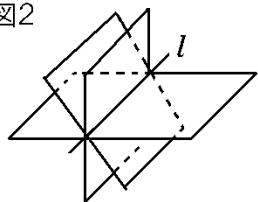
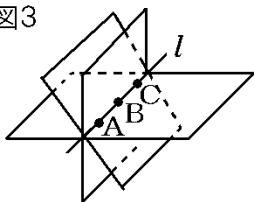


図3



[問題]

空間内にある平面  $P$  と、異なる2直線  $l, m$  の位置関係について、つねに正しいものを、次のア～エから1つ選び、記号で答えよ。

- ア 直線  $l$  と直線  $m$  が、それぞれ平面  $P$  と交わるならば、直線  $l$  と直線  $m$  は交わる。
- イ 直線  $l$  と直線  $m$  が、それぞれ平面  $P$  と平行であるならば、直線  $l$  と直線  $m$  は平行である。
- ウ 平面  $P$  と交わる直線  $l$  が、平面  $P$  上にある直線  $m$  と垂直であるならば、平面  $P$  と直線  $l$  は垂直である。
- エ 平面  $P$  と交わる直線  $l$  が、平面  $P$  上にある直線  $m$  と交わらないならば、直線  $l$  と直線  $m$  はねじれの位置にある。

(山形県)(\*\*)

[解答欄]

[解答]エ

【】体積と表面積

【】角柱・角錐の体積と表面積

[問題]

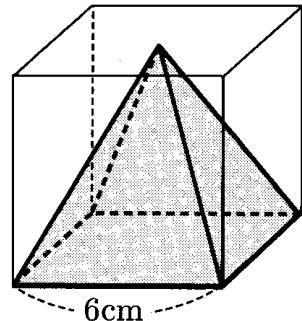
1辺が6cmの立方体と、底面が合同で高さが等しい正四角錐がある。この正四角錐の体積を求めよ。

(栃木県)(\*\*)

[解答欄]

[ヒント]

$$(\text{錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$



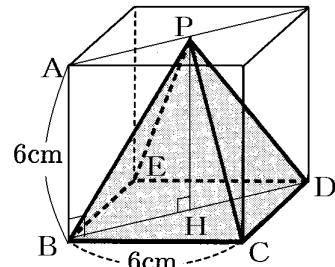
[解答]  $72\text{cm}^3$

[解説]

右図で、正方形BCDEを底辺とすると、高さはPHである。

$$PH = AB = 6(\text{cm})$$

$$(\text{錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times (6 \times 6) \times 6 = 72(\text{cm}^3)$$



[問題]

右の図のように、縦3cm、横4cm、高さ5cmの直方体がある。

直方体の面ABCD上に点Pがあるとき、Pと頂点E, F, G, Hをそれぞれ結んでできる四角錐の体積を求めよ。

(富山県)(\*\*)

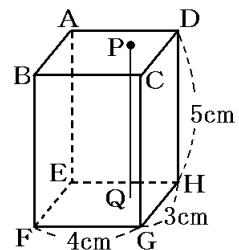
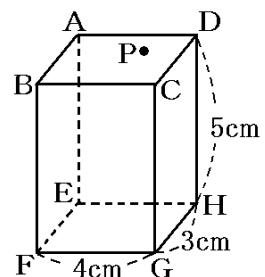
[解答欄]

[解答]  $20\text{cm}^3$

[解説]

平面ABCDと平面EFGHは平行であるので、Pから底面に垂直におろした垂線PQの長さはDHと同じ5cmになる(Pが平面ABCDのどの位置にあっても  $PQ=5\text{cm}$  になる)。したがって、長方形EFGHを底面とするこの四角錐の高さは5cmである。

$$(\text{錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times 4 \times 3 \times 5 = 20(\text{cm}^3)$$



[問題]

底面が 1 辺 6cm の正方形で、体積が  $96\text{cm}^3$  である四角すいの高さを求めよ。

(山口県)(\*\*)

[解答欄]

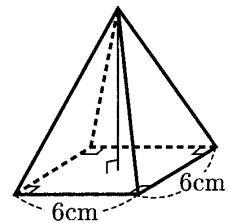
[解答]8cm

[解説]

求める高さを  $x\text{ cm}$  とすると、(底面積) =  $6 \times 6 = 36(\text{cm}^2)$  なので、

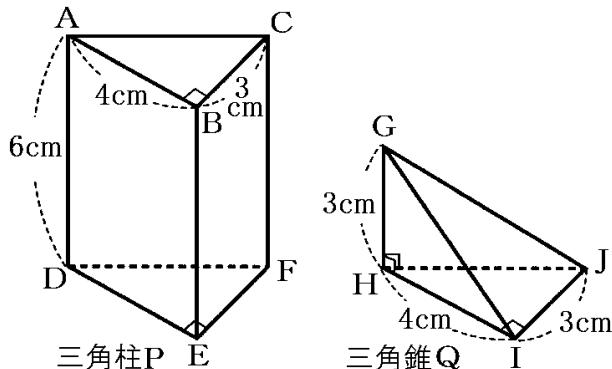
$$(\text{錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times 36 \times x = 96(\text{cm}^3)$$

$$12x = 96, \quad x = 96 \div 12 = 8(\text{cm})$$



[問題]

次の図のように、 $AB=4\text{cm}$ ,  $BC=3\text{cm}$ ,  $AD=6\text{cm}$ ,  $\angle ABC=90^\circ$  の三角柱 P と、 $GH=3\text{cm}$ ,  $HI=4\text{cm}$ ,  $IJ=3\text{cm}$ ,  $\angle GHI=\angle GHJ=\angle HIJ=90^\circ$  の三角錐 Q がある。三角柱 P の体積は、三角錐 Q の体積の何倍か。



(北海道)(\*\*)

[解答欄]

[ヒント]

(三角柱の体積) = (底面積) × (高さ)

$$(\text{三角錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

[解答]6 倍

[解説]

$$(\text{三角柱 } P \text{ の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \left(\frac{1}{2} \times AB \times CB\right) \times AD = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times 6 = 36(\text{cm}^3)$$

$$(\text{三角錐 } Q \text{ の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times HI \times JI\right) \times CH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times 3$$

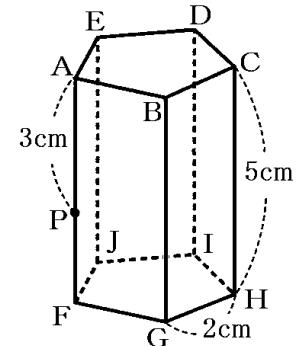
$$= 6(\text{cm}^3) \quad \text{よって, } (\text{三角柱 } P \text{ の体積}) \div (\text{三角錐 } Q \text{ の体積}) = 36 \div 6 = 6(\text{倍})$$

[問題]

右の図のような、底面が 1 辺 2cm の正五角形で高さが 5cm である正五角柱 ABCDE-FGHIJ があり、辺 AF 上に AP=3cm となる点 P がある。正五角柱 ABCDE-FGHIJ の体積を  $S\text{cm}^3$ 、五角錐 P-FGHIJ の体積を  $T\text{cm}^3$  とする。このとき、2 つの図形の体積の比  $S : T$  を、最も簡単な整数の比で表せ。

(栃木県)(\*\*)

[解答欄]



[解答] 15 : 2

[解説]

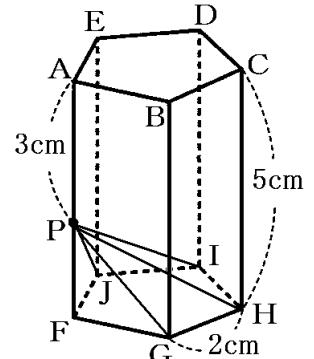
底面 FGHIJ の面積を  $a(\text{cm}^2)$  とする。

$$(\text{正五角柱の体積 } S) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ } CH) = a \times 5 = 5a(\text{cm}^3)$$

$$(\text{五角錐の体積 } T) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ } PF) = \frac{1}{3} \times a \times (5-3)$$

$$= \frac{1}{3} \times a \times 2 = \frac{2}{3}a(\text{cm}^3)$$

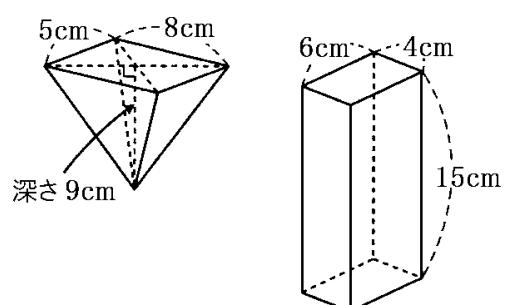
$$(\text{正五角柱の体積 } S) : (\text{五角錐の体積 } T) = 5a : \frac{2}{3}a = 5 : \frac{2}{3} = 15 : 2$$



[問題]

右の図のような、底面が長方形の四角錐の容器 A と直方体の容器 B がある。A を水でいっぱいに満たし、その水をこぼすことなく、すべて B に移す。B を水平な台の上に置いたとき、B に入った水の深さは何 cm になるか。ただし、容器の厚さは考えないものとする。

(福島県)(\*\*)



[解答欄]

[解答]5cm

[解説]

$$(\text{四角錐 } A \text{ の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times 5 \times 8 \times 9 = 120(\text{cm}^3) \cdots ①$$

B に入った水の深さを  $x$  cm とすると、

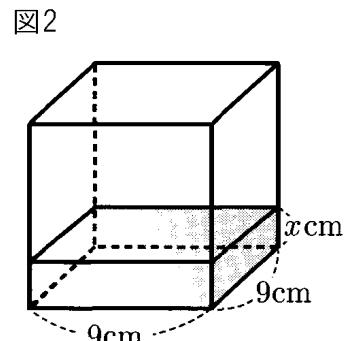
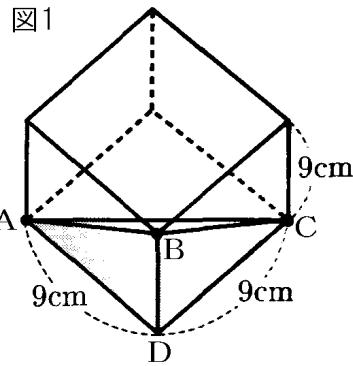
$$(\text{B に入った水の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{水の高さ}) = 6 \times 4 \times x = 24x(\text{cm}^3) \cdots ②$$

$$\text{①, ②より, } 24x = 120, x = 120 \div 24 = 5$$

[問題]

図 1 のように、1 辺の長さが 9cm の立方体状の容器に、水面が頂点 A, B, C を通る平面となるように水を入れた。次に、この容器を水平な台の上に置いたところ、図 2 のように、容器の底面から水面までの高さが  $x$  cm になった。 $x$  の値を求めよ。

(岐阜県)(\*\*)



[ヒント]

図 1 で、水がたまっている部分は、 $\triangle ABD$  を底辺とした場合、高さが CD の三角錐である。

$$[\text{解答}] x = \frac{3}{2}$$

[解説]

図 1 で、水がたまっている部分は、 $\triangle ABD$  を底辺とした場合、高さが CD の三角錐である。

$$(\text{三角錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times 9 \times 9 \right) \times 9 = \frac{243}{2}(\text{cm}^3)$$

$$(\text{図 2 の水がたまっている部分の体積}) = 9 \times 9 \times x = 81x(\text{cm}^3)$$

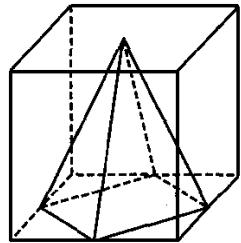
$$\text{よって, } 81x = \frac{243}{2}, x = \frac{243}{2} \div 81 = \frac{3}{2}$$

[問題]

右の図のように、立方体の底面の各辺の中点と、この面と向かい合う面の対角線の交点を結ぶと正四角錐ができる。このとき、正四角錐の体積は、立方体の体積の何倍になるかを求めよ。

(鳥取県)(\*\*)

[解答欄]



[ヒント]

立方体の底面 ABCD は正四角錐の底面 EFGH の 2 倍

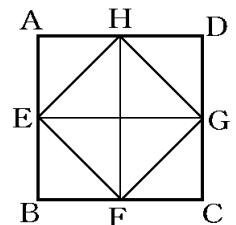
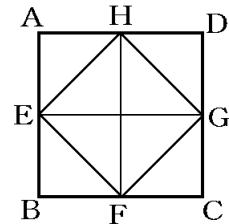
[解答]  $\frac{1}{6}$  倍

[解説]

右図は立方体の底面 ABCD と正四角錐の底面 EFGH を示している。

図のように、ABCD は 8 つの三角形に分けられているが、どの三角形も同じ形で、面積が同じである。EFGH は 4 つの三角形からできているの

で、ABCD と比べると面積は  $\frac{1}{2}$  である。



すなわち、ABCD の面積を  $S$  とすると、EFGH の面積は  $\frac{1}{2}S$  になる。

この正四角錐と立方体の高さは共通であるので、ともに  $h$  と表すことができる。

(立方体の体積) = (底面積) × (高さ) =  $Sh$

$$(\text{正四角錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} S \times h = \frac{1}{6} Sh$$

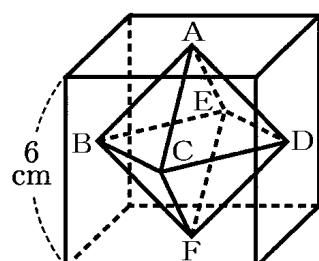
したがって、正四角錐の体積は、立方体の体積の  $\frac{1}{6}$  倍になる。

[問題]

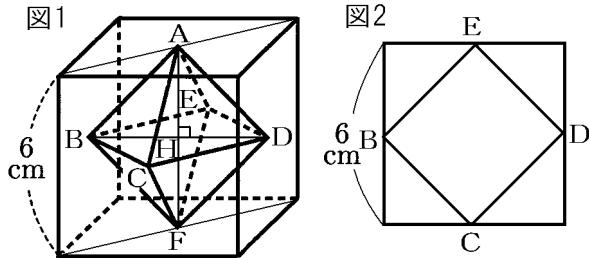
1 辺の長さが 6cm の立方体がある。右の図のように、それぞれの面の対角線の交点を A, B, C, D, E, F とするとき、この 6 つの点を頂点とする正八面体の体積を求めよ。

(埼玉県)(\*\*\*)

[解答欄]



[ヒント]



[解答]  $36 \text{ cm}^3$

[解説]

右の図1で正四角錐ABCDEの体積を求める。

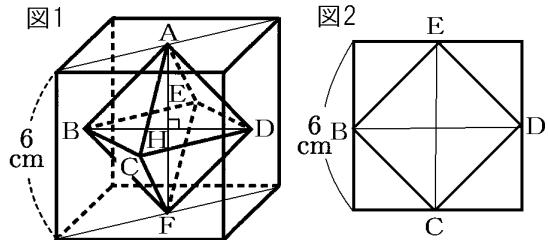
この正四角錐の高さは、 $AH = 6 \div 2 = 3(\text{cm})$

図2でわかるように、底面の正方形BCDEの面積は、外側を囲む1辺が6cmの正方形の半分であるので、

$$(\text{正方形 } BCDE \text{ の面積}) = 6 \times 6 \div 2 = 18(\text{cm}^2)$$

$$\text{よって, (正四角錐 } ABCDE \text{ の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times 18 \times 3 = 18(\text{cm}^3)$$

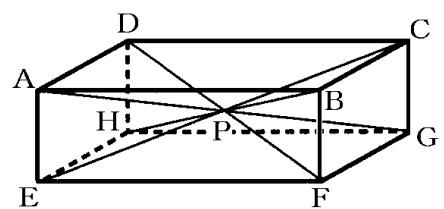
$$\text{したがって, (正八面体の体積)} = 18 \times 2 = 36(\text{cm}^3)$$



[問題]

右の図は、直方体ABCD-EFGHに4本の対角線をひいたもので、この4本の対角線は1点Pで交わっている。この直方体は、各面を底面とし、点Pを頂点とする四角すいが6個集まつたものとみることができる。これらの四角すいのうち、長方形EFGHを底面とし、点Pを頂点とする四角すいの体積と直方体ABCD-EFGHの体積の比を、最も簡単な整数の比で表せ。

(山梨県)(\*\*)



[解答欄]

[ヒント]

長方形EFGHの面積をS、AEの長さをhとする。

[解答] 1 : 6

[解説]

長方形 EFGH の面積を S, AE の長さを h とする。

$$(直方体 ABCD-EFGH の体積) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = S \times h = Sh$$

長方形 EFGH を底面とし, 点 P を頂点とする四角すいの高さ(P から底面に下ろした垂線の

長さ)は AE の半分の  $\frac{1}{2}h$  なので,

$$(P \text{ を頂点とする四角すいの体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times S \times \frac{1}{2}h = \frac{1}{6}Sh$$

$$(P \text{ を頂点とする四角すいの体積}) : (\text{直方体 } ABCD-EFGH \text{ の体積}) = \frac{1}{6}Sh : Sh$$

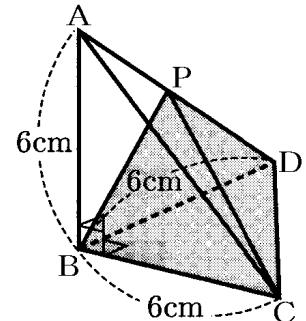
$$= \frac{1}{6} : 1 = 1 : 6$$

[問題]

右の図のような, AB=BC=BD=6cm,  $\angle ABC = \angle ABD = \angle CBD = 90^\circ$  の三角錐 ABCD があり, 辺 AD 上に AP : PD = 1 : 2 となる点 P をとる。このとき, 三角錐 PBCD の体積を求めよ。

(埼玉県)(\*\*\*)

[解答欄]



[ヒント]

角錐 PBCD の底面を  $\triangle BCD$  とし, P から底面の  $\triangle BCD$  におろした垂線の足を H とすると,  
 $AB : PH = 3 : 2$

[解答]  $24\text{cm}^3$

[解説]

$$(\text{三角錐 } PBCD \text{ の底面積}) = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18(\text{cm}^2)$$

P から底面の  $\triangle BCD$  におろした垂線の足を H とする。

$$AP : PD = 1 : 2 \text{ なので, } AD : PD = (1+2) : 2 = 3 : 2$$

よって,  $AB : PH = 3 : 2$ ,  $6 : PH = 3 : 2$

$$3PH = 6 \times 2, \quad PH = 12 \div 3 = 4(\text{cm})$$

$$\text{したがって, } (\text{三角錐 } PBCD \text{ の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{三角錐 } PBCD \text{ の底面積}) \times (\text{高さ } PH)$$

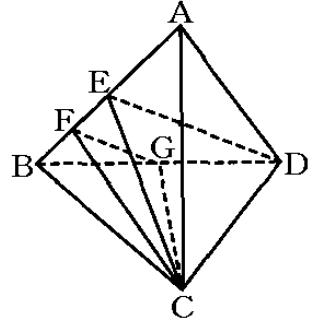
$$= \frac{1}{3} \times 18 \times 4 = 24(\text{cm}^3)$$

[問題]

右図は、A, B, C, D を頂点とする正四面体である。E, F は辺 AB 上の点で、 $AE=2EF=2FB$  であり、G は辺 BD の中点である。E, F, C, D, G を頂点とする立体の体積は、正四面体 ABCD の体積の何倍か求めよ。

(愛知県)(\*\*\*\*)

[解答欄]

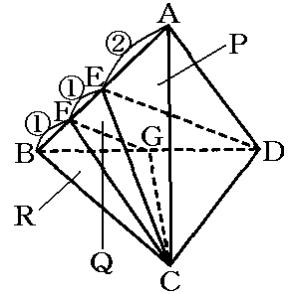


[ヒント]

正四面体の底面を  $\triangle ABC$  とすると、高さは D から平面 ABC へおろした垂線の長さ  $h$  である。体積を  $V$  とする。

P の部分：底面積( $\triangle ACE$ )は  $\triangle ABC$  の  $\frac{1}{2}$  で、高さは  $h$  なので、体積は  $\frac{1}{2}V$  である。

R の部分：底面積( $\triangle BCF$ )は  $\triangle ABC$  の  $\frac{1}{4}$  で、高さは  $\frac{1}{2}h$  なので、体積は  $\frac{1}{8}V$  である。



[解答]  $\frac{3}{8}$  倍

[解説]

この正四面体の底面を  $\triangle ABC$  とし、 $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とする。高さは D から平面 ABC へおろした垂線の長さになる。この高さを  $h$  とする。また、正四面体の体積を  $V$  とする。

右図のように、この正四面体を P, Q, R の 3 つの部分に分けて考える。

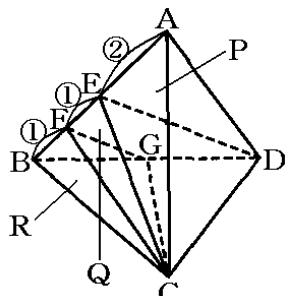
Q は E, F, C, D, G を頂点とする立体である。

まず、P の体積を求める。

P の底面を  $\triangle AEC$  とすると、高さは D から平面 ABC へおろした垂線の長さ  $h$  になる。右図のように、E は AB の中点なので、 $\triangle AEC$  の面積は  $\triangle ABC$  の面積  $S$  の  $\frac{1}{2}$  になる。底面積が正四面体の  $\frac{1}{2}$  で、

高さが同じなので、体積は、正四面体の  $\frac{1}{2}$  の  $\frac{1}{2}V$  になる。 $\cdots\textcircled{1}$

次に R の体積を求める。



R の底面を△BEC とすると、AB : FB = 4 : 1 なので、△BEC の面積は△ABC の面積  $S$  の  $\frac{1}{4}$

になる。高さは G から平面 ABC へおろした垂線の長さになるが、G は BD の中点なので、

G から平面 ABC へおろした垂線の長さは  $h$  の  $\frac{1}{2}$  になる。

したがって、R の体積は、正四面体の体積  $V$  の  $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$  の  $\frac{1}{8}V$  になる。…②

$$\text{①, ②より, } (\text{Q の体積}) = (\text{正四面体の体積}) - (\text{P の体積}) - (\text{R の体積}) = V - \frac{1}{2}V - \frac{1}{8}V$$

$= \frac{8}{8}V - \frac{4}{8}V - \frac{1}{8}V = \frac{3}{8}V$  になる。よって、E, F, C, D, G を頂点とする立体の体積は、

正四面体 ABCD の体積の  $\frac{3}{8}$  倍である。

## 【】立体の切削など

### [問題]

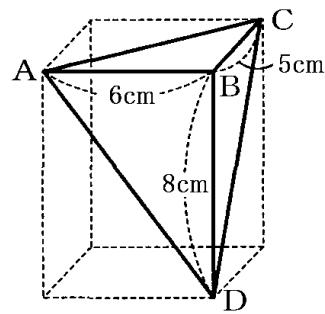
右の図のように、直方体の一部を切り取ってできた  
三角錐の体積を求めよ。

(栃木県)(\*\*)

### [解答欄]

### [ヒント]

$$(三角錐 ABCD の体積) = \frac{1}{3} \times (\triangle ABC の面積) \times (高さ DB)$$



[解答]  $40\text{cm}^3$

### [解説]

図の三角錐は直方体の一部を切り取ってできたものなので、辺 DB は面 ABC に垂直である。  
したがって、この三角錐の底面を  $\triangle ABC$  とすると高さは DB になる。

$$\begin{aligned} (三角錐 ABCD の体積) &= \frac{1}{3} \times (\triangle ABC の面積) \times (高さ DB) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times AB \times BC\right) \times (高さ DB) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times 5 = 40(\text{cm}^3) \end{aligned}$$

※底面を ABD、高さを辺 CB として計算することもできる。また、底面を BCD、高さを辺 AB として計算することもできる。

### [問題]

右の図のように、1辺の長さが 4cm の立方体を、3つの頂点 B, C, D を通る平面で切り取ってできた三角錐 ABCD がある。三角錐 ABCD の体積は何  $\text{cm}^3$  か。

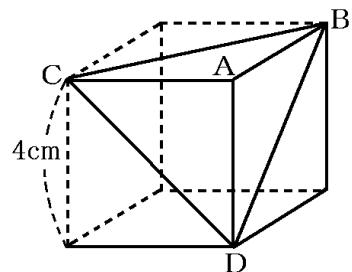
(山口県)(\*\*)

### [解答欄]

[解答]  $\frac{32}{3}\text{cm}^3$

### [解説]

辺 DA は平面 ABC に垂直なので、この三角錐の底面を  $\triangle ABC$  とすると高さは DA になる。



$$(三角錐 ABCD の体積) = \frac{1}{3} \times (\triangle ABC の面積) \times (高さ DA) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times AC \times AB\right) \times (高さ DA)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 4 = \frac{32}{3} (\text{cm}^3)$$

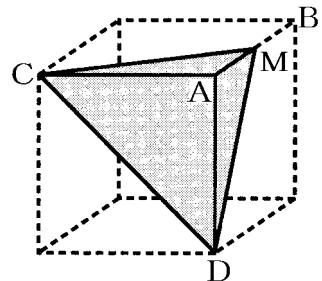
[問題]

右図は、1辺が6cmの立方体を、頂点C, D, および辺ABの中点Mを通る平面で切り取ってできた三角錐である。

(1) この三角錐について、辺ADとねじれの位置にある辺を選び、記号を用いて書け。

(2) この三角錐の体積を求めよ。

(長野県)(\*\*)



[解答欄]

(1)

(2)

[解答](1) CM (2) 18cm<sup>3</sup>

[解説]

(1) この三角錐の辺のうち、AC, AM, CD, MDは辺ADと交わる。辺CMは辺ADと交わらず、平行でもないのでねじれの位置にある。

(2) この三角錐の底面を△ACMとすると高さはDAであるので、

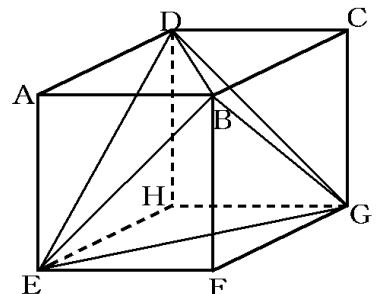
$$\begin{aligned} \text{(この三角錐の体積)} &= \frac{1}{3} \times (\triangle ACM \text{ の面積}) \times (\text{高さ } DA) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times AC \times AM\right) \times (\text{高さ } DA) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 3 \times 6 = 18(\text{cm}^3) \end{aligned}$$

[問題]

右図の立体ABCD-EFGHは、1辺が6cmの立方体である。図において、4点B, D, E, Gを頂点とする立体BDEGの体積を求めよ。

(石川県)(\*\*)

[解答欄]



[ヒント]

図の立体BDEGは、図の立方体から、同じ形の4つの三角錐を切り取ったものである。

[解答]72cm<sup>3</sup>

[解説]

図の立体 BDEG は、図の立方体から、同じ形の 4 つの三角錐を切り取ったものである。

$$(\text{立方体の体積}) = 6 \times 6 \times 6 = 216(\text{cm}^3)$$

三角錐 ABDE で、 $\triangle ABD$  を底面とすると高さは AE である(AE は平面 ABD に垂直)。

$$\begin{aligned} (\text{三角錐 ABDE の体積}) &= \frac{1}{3} \times (\triangle ABD \text{ の面積}) \times (\text{高さ AE}) = \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times AB \times AD \right) \times AE \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times 6 = 36(\text{cm}^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{立体 BDEG の体積}) &= (\text{立方体の体積}) - (\text{三角錐の体積}) \times 4 = 216 - 36 \times 4 = 216 - 144 \\ &= 72(\text{cm}^3) \end{aligned}$$

[問題]

右の図のように、1 辺の長さが 6cm の立方体 ABCD-EFGH がある。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) 立方体 ABCD-EFGH の体積は、四面体 CFGH の体積の何倍か。
  - (2) 四面体 ACFH の体積を求めよ。
- (岩手県)(\*\*)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[解答](1) 6 倍 (2)  $72\text{cm}^3$

[解説]

$$(1) (\text{立方体 ABCD-EFGH の体積}) = 6 \times 6 \times 6 = 216(\text{cm}^3)$$

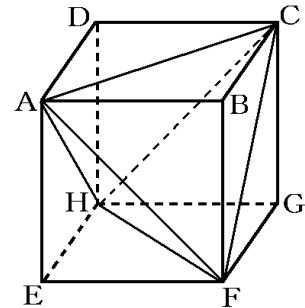
四面体(三角錐)CFGH の底面を  $\triangle CFG$  とすると高さは HG である(HG は平面 CFG に垂直)。

$$\begin{aligned} (\text{三角錐 CFGH の体積}) &= \frac{1}{3} \times (\triangle CFG \text{ の面積}) \times (\text{高さ HG}) = \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times FG \times CG \right) \times HG \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times 6 = 36(\text{cm}^3) \end{aligned}$$

$$(\text{立方体 ABCD-EFGH の体積}) \div (\text{三角錐 CFGH の体積}) = 216(\text{cm}^3) \div 36(\text{cm}^3) = 6(\text{倍})$$

(2) 四面体 ACFH は立方体 ABCD-EFGH から、同じ形の 4 つの三角錐(CFGH, ACBF, AFEH, ACDH)を切り取ったものであるので、

$$\begin{aligned} (\text{四面体 ACFH の体積}) &= (\text{立方体 ABCD-EFGH の体積}) - (\text{三角錐 CFGH の体積}) \times 4 \\ &= 216 - 36 \times 4 = 216 - 144 = 72(\text{cm}^3) \end{aligned}$$



[問題]

健さんは、図1のような1辺の長さが6cmの立方体の形をした容器ABCD-EFGHを使って、水の体積を調べてみることにした。次の各問いに答えよ。ただし、容器の厚さは考えないものとする。

- (1) 健さんが、図1の容器に水を入れて密閉し、傾けたところ、図2のように水面は△AFHになった。このときの水の体積を求めよ。
- (2) 次に、健さんは、水の入った図2の容器を、面EFGHが底になるように水平な台に置いた。このとき、面EFGHから水面までの高さを求めよ。

(山形県)(\*\*\*)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]

$$(\text{三角錐AEFHの体積}) = \frac{1}{3} \times (\triangle AEH \text{の面積}) \times (\text{高さ FE})$$

[解答](1) 36cm<sup>3</sup> (2) 1cm

[解説]

(1) 水の体積は、図の三角錐AEFHの体積と同じである。

三角錐AEFHの底面をAEHとすると、高さはFEになる(辺FEは平面AEHと垂直)。

$$(\text{三角錐AEFHの体積}) = \frac{1}{3} \times (\triangle AEH \text{の面積}) \times (\text{高さ FE}) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times AE \times HE\right) \times FE$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times 6 = 36(\text{cm}^3)$$

(2) 面EFGHから水面までの高さをx(cm)とすると、

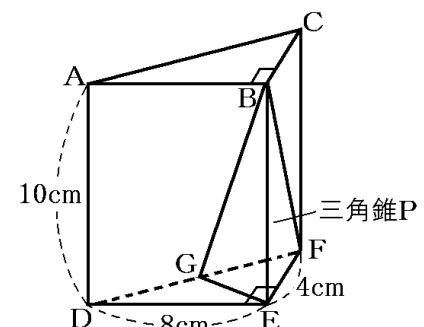
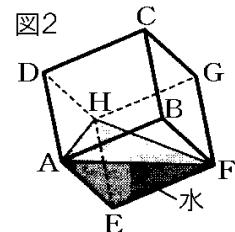
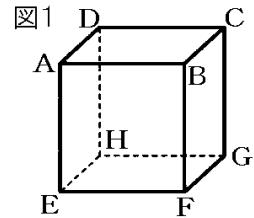
$$(\text{水の体積}) = EF \times FG \times x = 36,$$

$$6 \times 6 \times x = 36, \quad 36x = 36, \quad x = 36 \div 36 = 1(\text{cm})$$

[問題]

右の図のように、点A, B, C, D, E, Fを頂点とし、 $\angle DEF = 90^\circ$ の直角三角形DEFを底面の1つとする三脚柱がある。辺DFの中点をGとし、4点B, E, F, Gを結んで三角錐Pをつくる。辺DEの長さが8cm、辺EFの長さが4cm、辺ADの長さが10cmのとき、三角錐Pの体積を求めよ。

(三重県)(\*\*\*)



[解答欄]

[ヒント]

三角錐 P の底面を  $\triangle EFG$  とすると、高さは BE になる。G は DF の中点なので、 $\triangle EFG$  の面積は  $\triangle DEF$  の面積の  $\frac{1}{2}$  になる。

[解答]  $\frac{80}{3} \text{ cm}^3$

[解説]

三角錐 P の底面を  $\triangle EFG$  とすると、高さは BE になる(平面  $EFG \perp$  直線 BE なので)。

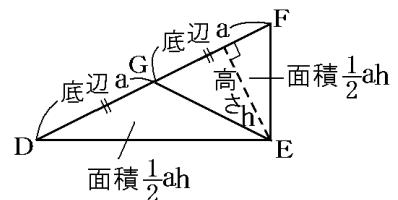
G は辺 DF の中点なので、右図のように、

$(\triangle EFG \text{ の面積}) = (\triangle EDG \text{ の面積})$  が成り立つ。

したがって、 $\triangle EFG$  の面積は  $\triangle EFD$  の面積の半分である。

$$\text{よって}, (\triangle EFG \text{ の面積}) = (\triangle EFD \text{ の面積}) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times DE \times EF \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8(\text{cm}^2)$$

$$\text{したがって}, (\text{三角錐 P の体積}) = \frac{1}{3} \times (\triangle EFG \text{ の面積}) \times (\text{高さ BE}) = \frac{1}{3} \times 8 \times 10 = \frac{80}{3}(\text{cm}^3)$$

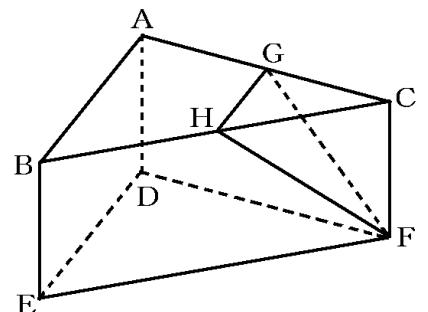


[問題]

右の図のように、底面が直角三角形で側面がすべて長方形の三角柱 ABC-DEF があり、 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 4\text{cm}$ ， $AC = 6\text{cm}$ ， $AD = 3\text{cm}$  である。また、辺 AC，辺 BC の中点をそれぞれ G，H とする。このとき、三角柱 ABC-DEF から三角錐 CFGH を切り取った残りの立体の体積を求めよ。

(秋田県)(\*\*\*)

[解答欄]



[ヒント]

三角柱ABC-DEFの体積から三角錐CFGHの体積を引く。

三角錐CFGHの底面を△CGHとするとき、

$$(\triangle \text{CGH の面積}) = \frac{1}{4} (\triangle \text{ABC の面積})$$

[解答]  $33\text{cm}^3$

[解説]

図1で、

$$(\text{三角柱ABC-DEFの体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

$$= (\triangle \text{ABC の面積}) \times (\text{高さ AD}) = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times 3$$

$$= 36(\text{cm}^3) \cdots ①$$

次に、三角錐CFGHで、△CGHを底面とするとき、

高さはCFになる( $\angle HCF = 90^\circ$ ,  $\angle GCF = 90^\circ$ なので)

$\triangle HCG$ の面積を右の図2, 図3を使って求める。

図2のように、 $\triangle ABH$ と $\triangle ACH$ は、底辺の長さが等しく、高さAIが共通なので、面積が等しい。

$$(\triangle \text{ABC の面積}) = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12(\text{cm}^2)$$

$$\text{よって}, (\triangle AHC \text{の面積}) = 12 \div 2 = 6(\text{cm}^2)$$

さらに、図3のように、 $\triangle HCG$ と $\triangle HAG$ は底辺(CG, AG)

が等しく高さが共通なので、面積が等しい。よって、

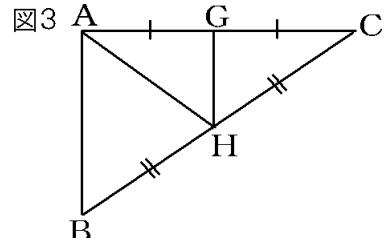
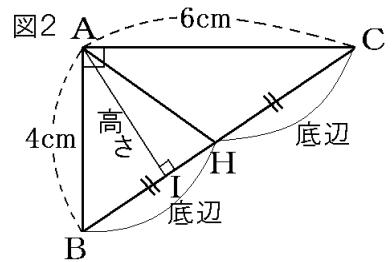
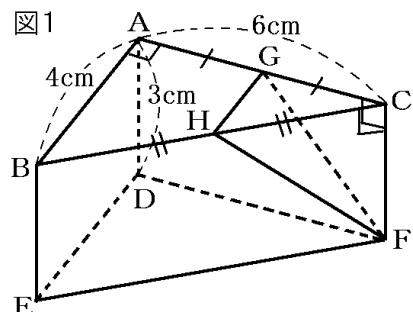
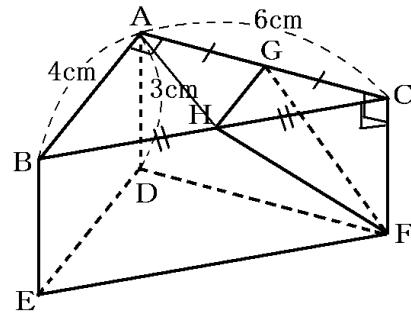
$$(\triangle HCG \text{の面積}) = (\triangle AHC \text{の面積}) \div 2 = 6 \div 2 = 3(\text{cm}^2)$$

$$(\text{三角錐CFGHの体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

$$= \frac{1}{3} \times (\triangle HCG \text{の面積}) \times (\text{高さ CF}) = \frac{1}{3} \times 3 \times 3 = 3(\text{cm}^3) \cdots ②$$

①, ②より、

$$(\text{切り取った残りの立体の体積}) = 36 - 3 = 33(\text{cm}^3)$$



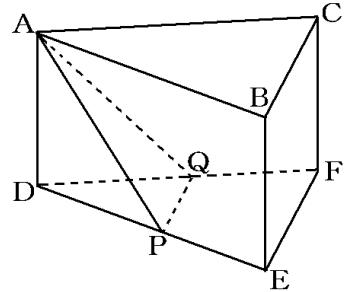
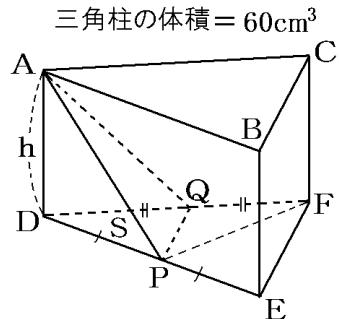
[問題]

右の図は体積が  $60\text{cm}^3$  の三角柱である。辺 DE, DF の中点をそれぞれ P, Q とするとき、三角すい ADPQ の体積を求めよ。

(長野県)(\*\*\*)

[解答欄]

[ヒント]



[解答]  $5\text{cm}^3$

[解説]

$\triangle PDQ$  の面積を  $S\text{cm}^2$ 、高さ AD を  $h\text{cm}$  とすると、

$$(\text{三角すい ADPQ の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

$$= \frac{1}{3} Sh(\text{cm}^3) \cdots ①$$

次に、三角柱の体積を求めるために、まず、底面  $\triangle FDE$  の面積を  $S$  を使って表す。

右図の  $\triangle PDQ$  の底辺  $DQ$  の長さと  $\triangle PFQ$  の底辺  $FQ$  の長さは等しく、高さは共通なので、

$$(\triangle PFQ \text{ の面積}) = (\triangle PDQ \text{ の面積}) = S(\text{cm}^2)$$

$$\text{よって}, (\triangle FDP \text{ の面積}) = (\triangle PFQ \text{ の面積}) + (\triangle PDQ \text{ の面積}) = S + S = 2S(\text{cm}^2)$$

$\triangle FDP$  の底辺  $DP$  の長さと  $\triangle FEP$  の底辺  $EP$  の長さは等しく、高さは共通なので、

$$(\triangle FEP \text{ の面積}) = (\triangle FDP \text{ の面積}) = 2S(\text{cm}^2)$$

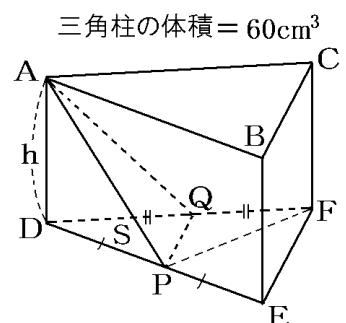
$$\text{よって}, (\triangle FDE \text{ の面積}) = (\triangle FEP \text{ の面積}) + (\triangle FDP \text{ の面積}) = 2S + 2S = 4S(\text{cm}^2)$$

$$\text{したがって}, (\text{三角柱の体積}) = (\text{底面積} \triangle FDE) \times (\text{高さ } AD) = 4S \times h = 4Sh(\text{cm}^3) \cdots ②$$

$$\text{①, ②より}, (\text{三角すい ADPQ の体積}) : (\text{三角柱の体積}) = \frac{1}{3} Sh : 4Sh = Sh : 12Sh = 1 : 12$$

$$(\text{三角柱の体積}) = 60(\text{cm}^3) \text{ なので},$$

$$(\text{三角すい ADPQ の体積}) = 60 \div 12 = 5(\text{cm}^3)$$



(別解)

$\triangle DPQ$  の面積を  $S \text{cm}^2$ , 高さ  $AD$  を  $h \text{cm}$  とすると,

$$(\text{三角すい } ADPQ \text{ の体積}) = \frac{1}{3} Sh (\text{cm}^3)$$

$P$  は  $DE$  の中点,  $Q$  は  $DF$  の中点なので, 中点連結定理(3年範囲)より,  $PQ \parallel EF$ ,  $PQ = \frac{1}{2} EF$

よって,  $\triangle DPQ$  と  $\triangle DEF$  は相似で, 相似比は  $1 : 2$  となる。

したがって, 面積比は  $1^2 : 2^2 = 1 : 4$  となる。

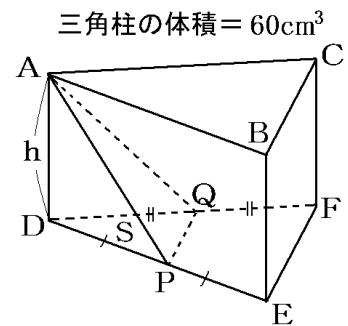
よって,  $(\triangle DEF \text{ の面積}) = 4S (\text{cm}^3)$

ゆえに,  $(\text{三角柱の体積}) = 4Sh (\text{cm}^3)$

$$(\text{三角すい } ADPQ \text{ の体積}) : (\text{三角柱の体積}) = \frac{1}{3} Sh : 4Sh = 1 : 12$$

$(\text{三角柱の体積}) = 60 (\text{cm}^3)$  なので,

$$(\text{三角すい } ADPQ \text{ の体積}) = 60 \div 12 = 5 (\text{cm}^3)$$



## 【】円柱と円錐の体積

### [問題]

右の図は、円柱の投影図である。この円柱の体積を求めよ。

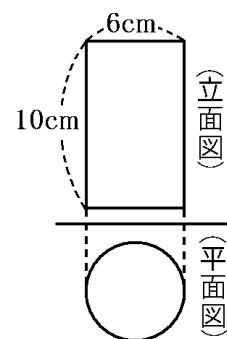
(円周率は $\pi$ を用いること。)

(愛媛県)(\*)

### [解答欄]

### [ヒント]

$$(\text{円柱の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$



[解答]  $90\pi \text{ cm}^3$

### [解説]

この円柱は底面の円の半径が  $6 \div 2 = 3(\text{cm})$ 、高さが  $10\text{cm}$  なので、

$$(\text{円柱の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = (\pi \times 3^2) \times 10 = 90\pi (\text{cm}^3)$$

### [問題]

右の図のような長方形 ABCD を辺 AB を軸として 1 回転させてできる

立体の体積は何  $\text{cm}^3$  か。

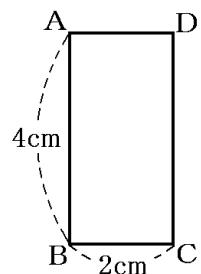
(長崎県)(\*)

### [解答欄]

### [ヒント]

1 回転させてできる立体は、底面が半径  $2\text{cm}$  の円で、高さが  $4\text{cm}$  の円柱である。

$$(\text{円柱の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$



[解答]  $16\pi \text{ cm}^3$

### [解説]

長方形 ABCD を辺 AB を軸として 1 回転させてできる立体は円柱である。その底面は半径  $2\text{cm}$  の円で、高さは  $4\text{cm}$  なので、

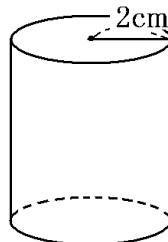
$$(\text{円柱の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = (\pi \times 2^2) \times 4 = 16\pi (\text{cm}^3)$$

[問題]

右の図のように、底面の半径が 2cm、体積が  $24\pi \text{ cm}^3$  の円柱がある。  
この円柱の高さを求めよ。

(北海道)(\*)

[解答欄]



[解答]6cm

[解説]

高さを  $x \text{ cm}$  とすると、

$$(\text{円柱の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \pi \times 2^2 \times x = 24\pi$$

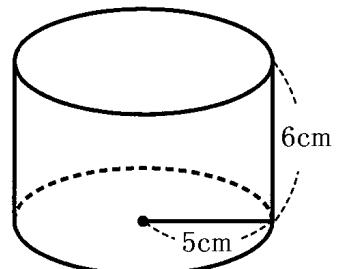
$$4\pi x = 24\pi, \quad x = 24\pi \div 4\pi = 6(\text{cm})$$

[問題]

右の図の立体は、底面の半径が 5cm、高さが 6cm の円柱である。この円柱の表面積を求めよ。ただし、円周率は  $\pi$  とする。

(群馬県)(\*)

[解答欄]



[ヒント]

$$(\text{円柱の表面積}) = (\text{底面の円の面積}) \times 2 + (\text{側面積}) = (\text{底面の円の面積}) \times 2 + (\text{円周}) \times (\text{高さ})$$

[解答] $110\pi \text{ cm}^2$

[解説]

$$\begin{aligned} (\text{円柱の表面積}) &= (\text{底面の円の面積}) \times 2 + (\text{側面積}) = (\text{底面の円の面積}) \times 2 + (\text{円周}) \times (\text{高さ}) \\ &= \pi \times 5^2 \times 2 + 2\pi \times 5 \times 6 = 50\pi + 60\pi = 110\pi (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

[問題]

高さが等しい円柱 A と円柱 B がある。円柱 A の底面の円の半径は、円柱 B の底面の円の半径の 2 倍である。円柱 A の体積は、円柱 B の体積の何倍か。

(鹿児島県)(\*\*)

[解答欄]

[解答]4倍

[解説]

(底面積) =  $\pi \times (\text{半径})^2$  なので、半径が2倍になると、底面積は  $2^2=4$  倍になる。

(円柱の体積) = (底面積) × (高さ) なので、体積も4倍になる。

[問題]

右図の立体は、底面の半径が2cm、高さが6cmの円すいである。

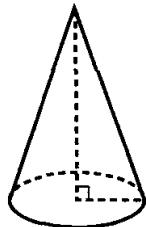
円周率を $\pi$ として、この円すいの体積を求めよ。

(大阪府)(\*)

[解答欄]

[ヒント]

$$(\text{円錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$



[解答] $8\pi \text{ cm}^3$

[解説]

$$(\text{円錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times (\pi \times 2^2) \times 6 = \frac{1}{3} \times \pi \times 4 \times 6 = 8\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

[問題]

右の図のような、AC=4cm、BC=3cm、 $\angle ACB=90^\circ$  の直角三角形ABCがある。この直角三角形を辺ACを軸として1回転させてできる立体の体積を求めよ。

(岡山県)(\*\*)

[解答欄]

[ヒント]

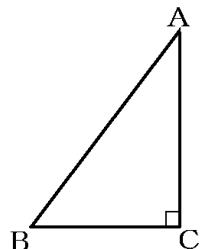
1回転させてできる立体は円錐で、その底面は半径3cmの円で、高さは4cmである。

[解答] $12\pi \text{ cm}^3$

[解説]

図の直角三角形を辺ACを軸として1回転させてできる立体は円錐である。その底面は半径3cmの円で、高さは4cmなので、

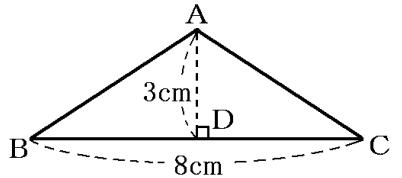
$$(\text{円錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times (\pi \times 3^2) \times 4 = 12\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$



[問題]

右の図のような  $AB=AC$  の二等辺三角形  $ABC$  がある。点  $A$  から辺  $BC$  に垂線をひき、辺  $BC$  との交点を  $D$  とする。  
 $BC=8\text{cm}$ ,  $AD=3\text{cm}$  のとき、辺  $BC$  を軸として 1 回転させたときにできる立体の体積を求めよ。ただし、円周率には  $\pi$  を用いること。

(高知県)(\*\*)



[解答欄]

[ヒント]

$\triangle ABD$  を  $BC$  を軸として 1 回転させたときにできる円錐と、 $\triangle ACD$  を  $BC$  を軸として 1 回転させたときにできる円錐に分けて考える。

[解答] $24\pi \text{ cm}^3$

[解説]

$\triangle ABC$  は二等辺三角形で  $AD \perp BC$  なので、 $BD=CD=8 \div 2=4(\text{cm})$  になる。

$\triangle ABD$  と  $\triangle ACD$  の 2 つの部分に分けて考える。

$\triangle ABD$  を  $BC$  を軸として 1 回転させたときにできる立体は、底面の半径が  $AD=3\text{cm}$ 、高さが  $BD=4\text{cm}$  の円錐なので、

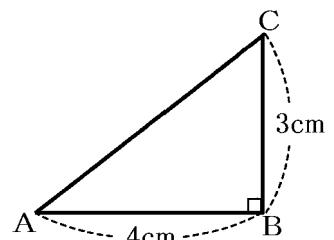
$$(\text{円錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times (\pi \times 3^2) \times 4 = 12\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$\triangle ACD$  を  $BC$  を軸として 1 回転させたときにできる立体も同様にして  $12\pi \text{ cm}^3$  になるので、求める体積は、 $12\pi + 12\pi = 24\pi \text{ (cm}^3\text{)}$  になる。

[問題]

図のような、 $AB=4\text{cm}$ ,  $BC=3\text{cm}$ ,  $\angle ABC=90^\circ$  の  $\triangle ABC$  がある。 $\triangle ABC$  を直線  $AB$  を軸として 1 回転させてできる立体の体積を  $V\text{cm}^3$  とし、 $\triangle ABC$  を直線  $BC$  を軸として 1 回転させてできる立体の体積を  $W\text{cm}^3$  とするとき、体積の比  $V : W$  を最も簡単な整数の比で表せ。

(岡山県)(\*\*)



[解答欄]

$V : W =$

[解答] $V : W = 3 : 4$

[解説]

直線 AB を軸として 1 回転させてできる立体は、底面の円の半径が 3cm で高さが 4cm の円錐なので、 $V = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

直線 BC を軸として 1 回転させてできる立体は、底面の円の半径が 4cm で高さが 3cm の円錐なので、 $W = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 3 = 16\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

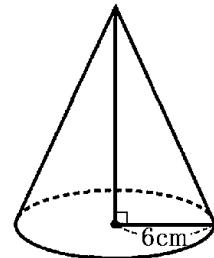
よって、 $V : W = 12\pi : 16\pi = 3 : 4$

[問題]

右の図のように、底面の半径が 6cm、体積が  $132\pi \text{ cm}^3$  の円錐がある。この円錐の高さを求めよ。

(北海道)(\*\*)

[解答欄]



[解答] 11cm

[解説]

この円錐の高さを  $h(\text{cm})$  とすると、 $\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = (\text{円錐の体積})$  より、

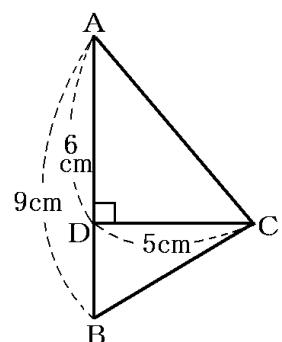
$$\frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times h = 132\pi, \quad 12\pi h = 132\pi, \quad h = 132\pi \div 12\pi = 11(\text{cm})$$

[問題]

右の図のように、 $\angle A$  と  $\angle B$  がともに  $90^\circ$  より小さい角である  $\triangle ABC$  において、頂点 C から辺 AB にひいた垂線と辺 AB との交点を D とする。 $AB = 9\text{cm}$ ,  $AD = 6\text{cm}$ ,  $CD = 5\text{cm}$  のとき、 $\triangle ABC$  を、辺 AB を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし、円周率は  $\pi$  とする。

(宮城県)(\*\*)

[解答欄]



[ヒント]

$\triangle ACD$  を AB を軸として 1 回転させたときにできる円錐と、 $\triangle BCD$  を AB を軸として 1 回転させたときにできる円錐に分けて考える。

[解答]  $75\pi \text{ cm}^3$

[解説]

$\triangle ACD$  と  $\triangle BCD$  の 2 つの部分に分けて考える。

$\triangle ACD$  を辺 AB を軸として 1 回転させてできる立体は、底面の半径が CD=5cm、高さが AD=6cm の円錐になるので、体積は、

$$\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times (\pi \times 5^2) \times 6 = 50\pi \text{ (cm}^3\text{)} \text{ になる。} \cdots ①$$

$\triangle BCD$  を辺 AB を軸として 1 回転させてできる立体は、底面の半径が CD=5cm、高さが BD=9-6=3(cm) の円錐になるので、体積は、

$$\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times (\pi \times 5^2) \times 3 = 25\pi \text{ (cm}^3\text{)} \text{ になる。} \cdots ②$$

①、②より、求める体積は、 $50\pi + 25\pi = 75\pi \text{ (cm}^3\text{)} \text{ になる。}$

[問題]

右の図の四角形 ABCD を、直線 l を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(佐賀県)(\*\*)

[解答欄]

[ヒント]

長方形 BCDE と直角三角形 ABE の 2 つの部分に分けて考える。

長方形 BCDE を直線 l を軸として 1 回転させてできる立体は、底面の半径が CD=2cm、高さが ED=5cm の円柱である。直角三角形 ABE を直線 l を軸として 1 回転させてできる立体は、底面の半径が BE=2cm、高さが AE=3cm の円錐である。

[解答]  $24\pi \text{ cm}^3$

[解説]

長方形 BCDE と直角三角形 ABE の 2 つの部分に分けて考える。

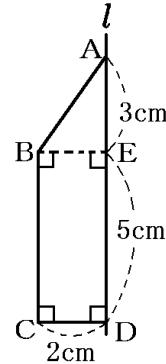
長方形 BCDE を直線 l を軸として 1 回転させてできる立体は、底面の半径が CD=2cm、高さが ED=5cm の円柱なので、体積は

$$(\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = (\pi \times 2^2) \times 5 = 20\pi \text{ (cm}^3\text{)} \text{ になる。} \cdots ①$$

直角三角形 ABE を直線 l を軸として 1 回転させてできる立体は、底面の半径が BE=2cm、高さが AE=3cm の円錐なので、体積は

$$\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times (\pi \times 2^2) \times 3 = 4\pi \text{ (cm}^3\text{)} \text{ になる。} \cdots ②$$

①、②より、求める体積は、 $20\pi + 4\pi = 24\pi \text{ (cm}^3\text{)} \text{ になる。}$

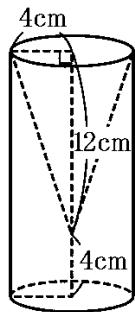


[問題]

右の図のように、底面の半径が 4cm、高さが 16cm の円柱から、底面の半径が 4cm、高さが 12cm の円錐を取り除いてできた残りの立体の体積を求めよ。

(福井県)(\*\*)

[解答欄]



[解答]  $192\pi \text{ cm}^3$

[解説]

$$(\text{円柱の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = (\pi \times 4^2) \times 16 = 256\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$(\text{円錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times (\pi \times 4^2) \times 12 = 64\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

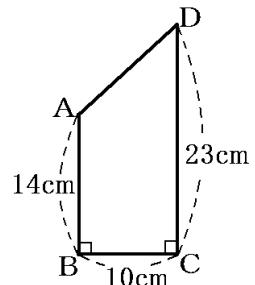
$$(\text{円柱の体積}) - (\text{円錐の体積}) = 256\pi - 64\pi = 192\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

[問題]

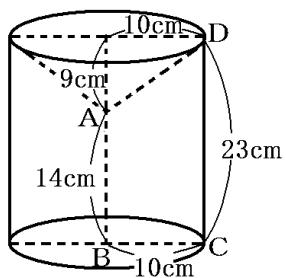
右の図のような  $\angle B = \angle C = 90^\circ$  の四角形 ABCD がある。  
 $AB = 14\text{cm}$ ,  $BC = 10\text{cm}$ ,  $CD = 23\text{cm}$  のとき、辺 AB を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(高知県)(\*\*)

[解答欄]



[ヒント]



[解答]  $2000\pi \text{ cm}^3$

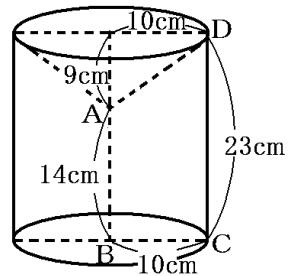
[解説]

右図のように、辺 AB を軸として 1 回転させてできる立体は円柱から円錐を取り除いた立体になる。

$$(円柱の体積) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = (\pi \times 10^2) \times 23 = 2300\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\begin{aligned} (\text{円錐の体積}) &= \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times (\pi \times 10^2) \times 9 \\ &= 300\pi \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

$$(\text{円柱の体積}) - (\text{円錐の体積}) = 2300\pi - 300\pi = 2000\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

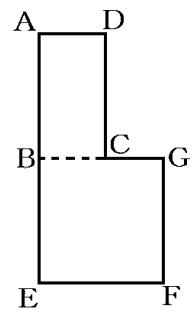


[問題]

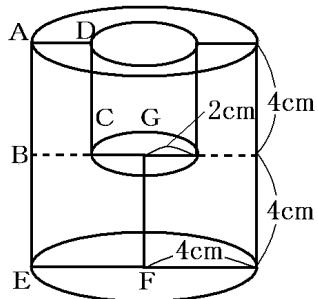
右の図のように、長方形 ABCD と正方形 BEFG が同じ平面上にあり、点 C は線分 BG の中点で、AB=BE=4cm である。長方形 ABCD と正方形 BEFG を合わせた図形を、直線 GF を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし、円周率を  $\pi$  とする。

(秋田県)(\*\*)

[解答欄]



[ヒント]



[解答]  $112\pi \text{ cm}^3$

[解説]

右図は、直線 GF を軸として 1 回転させてできる立体である。

大きい円柱は、底面の円の半径が 4cm、高さが 8cm なので、

$$(\text{大きい円柱の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = (\pi \times 4^2) \times 8 = 128\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

小さい円柱は、底面の円の半径が 2cm、高さが 4cm なので、

$$(\text{小さい円柱の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = (\pi \times 2^2) \times 4 = 16\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$(\text{大きい円柱の体積}) - (\text{小さい円柱の体積}) = 128\pi - 16\pi$$

$$= 112\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

[問題]

右の図のような、円錐 P と円柱 Q がある。円錐 P の底面の半径は 5cm で、高さは 6cm である。次の各問い合わせに答えよ。ただし、円周率を  $\pi$  とする。

- (1) 円錐 P の体積を求めよ。
- (2) 円錐 P と円柱 Q の、底面の面積の比が 9 : 16 で、高さの比が 3 : 8 のとき、円錐 P と円柱 Q の体積の比を求めよ。

(宮城県)(\*\*)

[解答欄]

(1)	(2)(P の体積) : (Q の体積) =
-----	------------------------

[ヒント]

(2) 円柱 Q の底面積は円錐 P の  $\frac{16}{9}$  倍、円柱 Q の高さは円錐 P の  $\frac{8}{3}$  倍である。

[解答](1)  $50\pi \text{ cm}^3$  (2)(P の体積) : (Q の体積) = 9 : 128

[解説]

$$(1) (\text{円錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times (\pi \times 5^2) \times 6 = 50\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

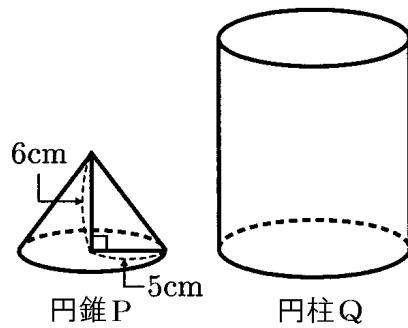
$$(2) (\text{円錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}), (\text{円柱の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

円錐 P と円柱 Q の底面の面積の比が 9 : 16 なので、円柱 Q の底面積は円錐 P の  $\frac{16}{9}$  倍、

円錐 P と円柱 Q の高さの比が 3 : 8 なので、円柱 Q の高さは円錐 P の  $\frac{8}{3}$  倍である。

したがって、円柱 Q の体積は円錐 P の体積の  $\frac{16}{9} \times \frac{8}{3} \times 3 = \frac{128}{9}$  (倍)になる。

よって、(P の体積) : (Q の体積) = 1 :  $\frac{128}{9} = 9 : 128$



[問題]

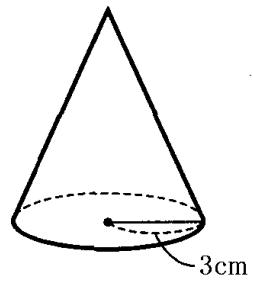
右の図のような、底面の半径が 3cm、体積が  $18\pi \text{ cm}^3$  の円すいがある。この円すいの高さを求めよ。

(福島県)(\*\*)

[解答欄]

[ヒント]

(円錐の体積) =  $\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$  より、体積と底面積がわかれば高さを計算できる。



[解答] 6cm

[解説]

この円すいの高さを  $x \text{ cm}$  とすると、

$$(\text{円錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times (\pi \times 3^2) \times x = 3\pi x (\text{cm}^3)$$

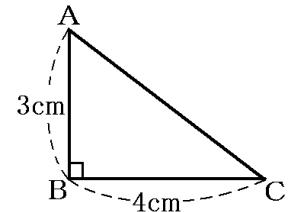
体積は  $18\pi \text{ cm}^3$  なので、

$$3\pi x = 18\pi, \quad x = 18\pi \div 3\pi, \quad x = 6$$

[問題]

右の図のように、 $AB=3\text{cm}$ 、 $BC=4\text{cm}$ 、 $\angle B=90^\circ$  の直角三角形 ABC がある。この直角三角形 ABC を、直線 AB を軸として 1 回転させてできる円錐 P の体積は、直線 BC を軸として 1 回転させてできる円錐 Q の体積の何倍になるか求めよ。

(徳島県)(\*\*)



[解答欄]

[解答]  $\frac{4}{3}$  倍

[解説]

$$(\text{円錐 P の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times (\pi \times 4^2) \times 3 = 16\pi (\text{cm}^3)$$

$$(\text{円錐 Q の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times (\pi \times 3^2) \times 4 = 12\pi (\text{cm}^3)$$

$$(\text{円錐 P の体積}) \div (\text{円錐 Q の体積}) = 16\pi \div 12\pi = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} (\text{倍})$$

[問題]

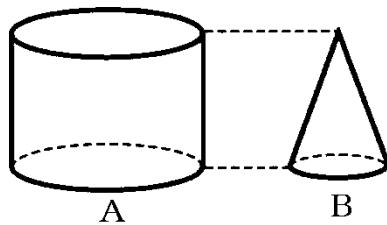
右の図において、円柱Aと円すいBは高さが等しく、  
Aの底面の半径はBの底面の半径の2倍である。Aの  
体積はBの体積の何倍となるか。

(群馬県)(\*\*)

[解答欄]

[ヒント]

円錐Bの底面の円の半径を $r\text{ cm}$ 、高さを $h\text{ cm}$ とすると、円柱Aの底面の円の半径は $2r\text{ cm}$ 、  
高さは $h\text{ cm}$ となる。



[解答]12倍

[解説]

円錐Bの底面の円の半径を $r\text{ cm}$ 、高さを $h\text{ cm}$ とすると、円柱Aの底面の円の半径は $2r\text{ cm}$ 、  
高さは $h\text{ cm}$ となる。したがって、

$$(\text{円柱Aの体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = (\pi \times (2r)^2) \times h = 4\pi r^2 h (\text{cm}^3)$$

$$(\text{円錐Bの体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times (\pi \times r^2) \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 h (\text{cm}^3)$$

$$\text{よって、} (\text{円柱Aの体積}) \div (\text{円錐Bの体積}) = 4\pi r^2 h \div \frac{1}{3} \pi r^2 h = 4 \div \frac{1}{3} = 4 \times 3 = 12 \text{ (倍)}$$

[問題]

円柱の容器Aと円錐の形をした鉄のおもりBがある。容器A、おもりBは、どちらも底面の半径が $6\text{cm}$ 、高さが $15\text{cm}$ である。右の図のよう  
に、容器AにおもりBを入れ、底面が水平な状態で水を入れていく。

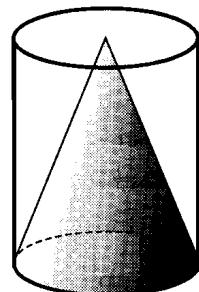
おもりBを入れた容器Aいっぱいにたまつた水を、1辺が $12\text{cm}$ の立方体の容器Cに残らず移した。容器Cの水面の高さを求めよ。ただし、容器Cは底面が水平になるように置いてあるものとする。また、容器の厚  
みは考えないものとする。また、円周率を $\pi$ とする。

(長野県)(\*\*)

[解答欄]

[ヒント]

「おもりBを入れた容器Aいっぱいにたまつた水」の体積は、容器Aの体積からBの体積  
を引いた量になる。



[解答]  $\frac{5}{2} \pi \text{ cm}$

[解説]

「おもり B を入れた容器 A いっぱいにたまつた水」の体積は、容器 A の体積から B の体積を引いた量になる。A は底面の半径が 6cm、高さが 15cm の円柱であるので、

$$(A \text{ の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = (\pi \times 6^2) \times 15 = 540 \pi (\text{cm}^3) \cdots ①$$

B は底面の半径が 6cm、高さが 15cm の円錐であるので、

$$(\text{円錐 B の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times (\pi \times 6^2) \times 15 = 180 \pi (\text{cm}^3) \cdots ②$$

したがって、たまつた水の体積は、①、②より、 $540 \pi - 180 \pi = 360 \pi (\text{cm}^3)$  になる。

次に、容器 C にたまつた水の深さを  $x \text{ cm}$  とすると、

$$(\text{水がたまつた部分の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = 12 \times 12 \times x = 144x (\text{cm}^3)$$

$$\text{よって}, 144x = 360\pi \text{ が成り立つ。 } x = 360\pi \div 144 = \frac{360}{144}\pi = \frac{5}{2}\pi (\text{cm})$$

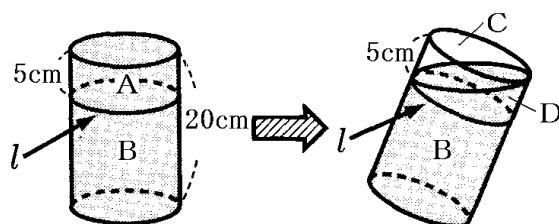
[問題]

右の図 1 のように、高さが 20cm の円柱形の容器に、水がいっぱいに入っている。この容器の側面には上端から 5cm の位置に線  $l$  がかれている。この容器を傾けて水をこぼしていく、図 2 のように水面が線  $l$  に届いたところで傾けるのをやめた。このとき、残った水の量とこぼれ出た水の量の比を、もっとも簡単な整数の比で表せ。

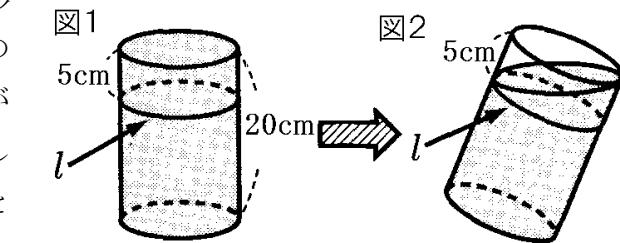
(大分県)(\*\*\*)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] 7 : 1



[解説]

この円柱形の容器の底面積を  $S$  とすると、

図 1 の A の円柱の高さは 5cm, B の円柱の高さは  $20 - 5 = 15(cm)$  なので、

$$(A \text{ の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = S \times 5 = 5S(cm^3)$$

$$(B \text{ の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = S \times 15$$

$$= 15S(cm^3)$$

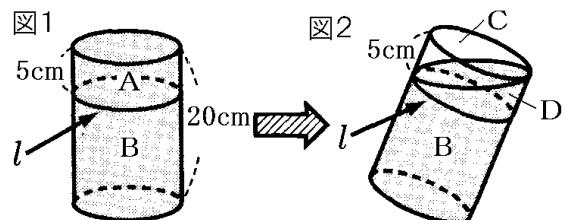


図 2 で、C と D の体積は等しく、C と D の体積の和は A の体積( $5S(cm^3)$ )と等しいので、

$$(C \text{ の体積}) = (D \text{ の体積}) = (A \text{ の体積}) \div 2 = 5S \div 2 = 2.5S(cm^3)$$

$$(\text{残った水の量}) = (B \text{ の体積}) + (D \text{ の体積}) = 15S + 2.5S = 17.5S(cm^3)$$

$$(\text{こぼれ出た水の量}) = (C \text{ の体積}) = 2.5S(cm^3)$$

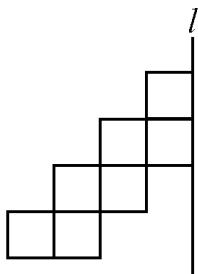
$$\text{よって, } (\text{残った水の量}) : (\text{こぼれ出た水の量}) = 17.5S : 2.5S = 175 : 25 = 7 : 1$$

[問題]

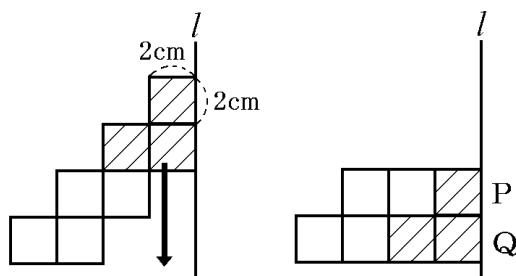
右の図のように、一辺の長さが 2cm の正方形を 7 枚組み合わせた図形がある。この図形を、直線  $l$  を回転の軸として 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

(鳥取県)(\*\*\*)

[解答欄]



[ヒント]



[解答]  $200\pi cm^3$

[解説]

図1の斜線部分の3個の正方形を下方向に4cm平行移動すると、図2のようになる。このとき、図1の回転体の体積は、図2の回転体の体積と同じになる。

図2のPの段にある3個の正方形の部分をlを

軸として1回転させてできる回転体は、底面の円の半径が $2 \times 3 = 6\text{cm}$ 、高さが2cmの円柱になるので、体積は、

$$(\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = (\pi \times 6^2) \times 2 = 72\pi (\text{cm}^3) \text{となる。} \cdots \textcircled{1}$$

図2のQの段にある4個の正方形の部分をlを軸として1回転させてできる回転体は、底面の円の半径が $2 \times 4 = 8\text{cm}$ 、高さが2cmの円柱になるので、体積は、

$$(\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = (\pi \times 8^2) \times 2 = 128\pi (\text{cm}^3) \text{となる。} \cdots \textcircled{2}$$

①、②より、体積の合計は、 $72\pi + 128\pi = 200\pi (\text{cm}^3)$ になる。

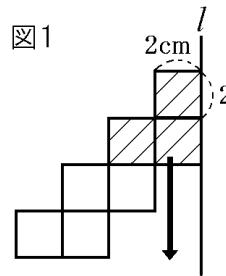


図1

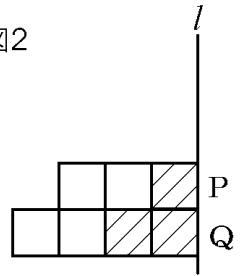


図2

## 【】円柱と円錐の表面積

[円柱の表面積]

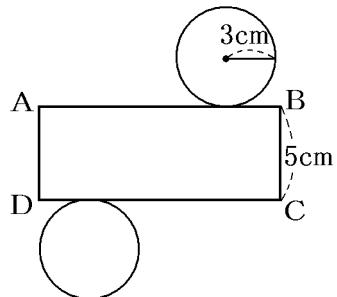
[問題]

右の図は、底面の半径が3cm、高さが5cmの円柱である。  
この円柱の表面積を求めよ。ただし、円周率は $\pi$ とする。

(山口県)(\*\*)

[解答欄]

[ヒント]



CDの長さと底面の円の円周の長さは等しい。

[解答] $48\pi\text{ cm}^2$

[解説]

右図のような展開図をかくとわかりやすい。

右図において、CDの長さと底面の円の円周の長さは等しい。

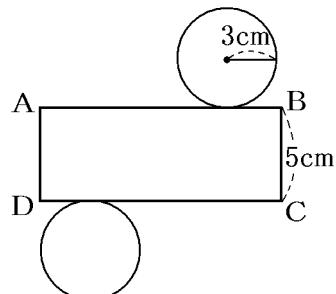
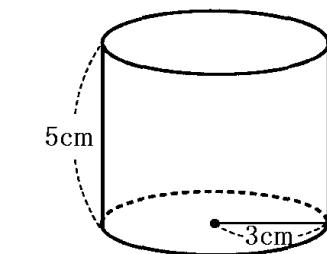
(円周の長さ) $=2\pi \times 3=6\pi\text{ (cm)}$ なので、 $CD=6\pi\text{ (cm)}$

よって、(側面積) $=BC \times CD=5 \times 6\pi=30\pi\text{ (cm}^2\text{)}$

(底面積) $=\pi \times 3^2=9\pi\text{ (cm}^2\text{)}$

よって、(表面積) $=(\text{底面積}) \times 2+(\text{側面積})$

$=9\pi \times 2+30\pi=48\pi\text{ (cm}^2\text{)}$



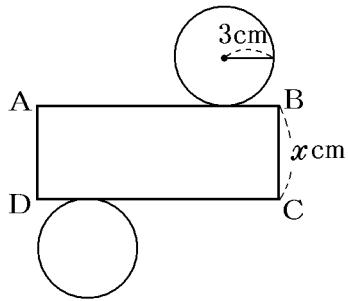
[問題]

底面の半径が3cm、側面積が $54\pi\text{ cm}^2$ の円柱がある。この円柱の高さを求めよ。

(福島県)(\*\*)

[解答欄]

[ヒント]



[解答]9cm

[解説]

この円柱の高さを  $x$  cm とする。

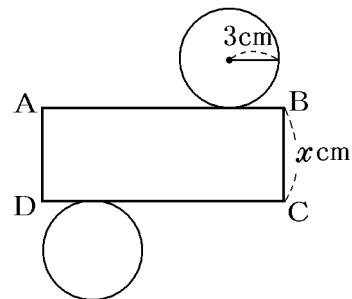
右図において、CD の長さと底面の円の円周の長さは等しい。

(円周の長さ) =  $2\pi \times 3 = 6\pi$  (cm) なので、CD =  $6\pi$  (cm)

したがって、

(側面積) = BC × CD =  $x \times 6\pi = 54\pi$

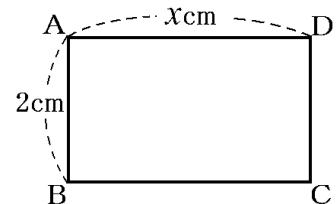
$$x = 54\pi \div 6\pi = 9(\text{cm})$$



[問題]

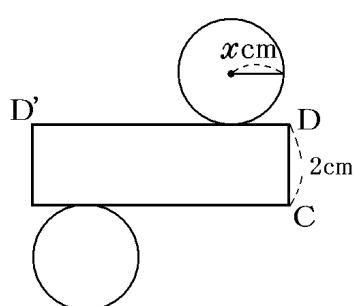
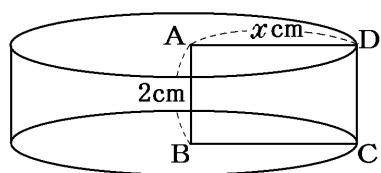
右の図のような AB = 2cm, AD = x cm の長方形 ABCD がある。この長方形を、直線 AB を軸として 1 回転させてできる立体の表面積は  $96\pi \text{ cm}^2$  であった。このとき、辺 AD の長さを求めよ。ただし、 $\pi$  は円周率である。

(栃木県)(\*\*\*)



[解答欄]

[ヒント]



[解答]6cm

[解説]

※二次方程式(3年範囲)を利用  
底面の円の半径は  $x \text{ cm}$  になる  
ので、

$$(\text{底面積}) = \pi \times x^2 = \pi x^2 (\text{cm}^2)$$

図2で、 $DD'$  の長さと底面の円の円周の長さは等しいので、

$$DD' = 2\pi \times x = 2\pi x$$

$$(\text{側面積}) = CD \times DD' = 2 \times 2\pi x = 4\pi x$$

$$\text{よって、} (\text{表面積}) = (\text{底面積}) \times 2 + (\text{側面積}) = \pi x^2 \times 2 + 4\pi x = 96\pi$$

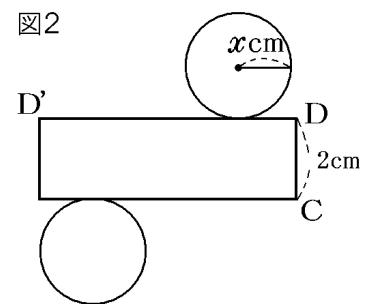
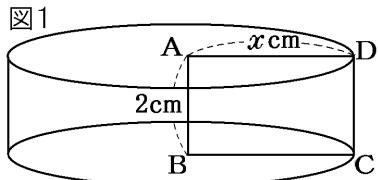
$$2\pi x^2 + 4\pi x = 96\pi, \quad x^2 + 2x - 48 = 0,$$

$$(x+8)(x-6) = 0$$

$$x = -8, 6$$

$$x > 0 \text{ なので, } x = 6$$

よって、 $AD$  の長さは 6cm



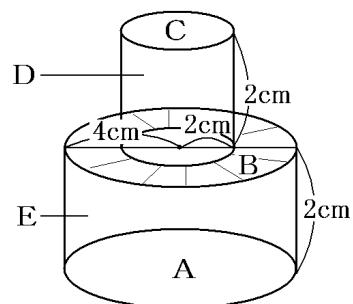
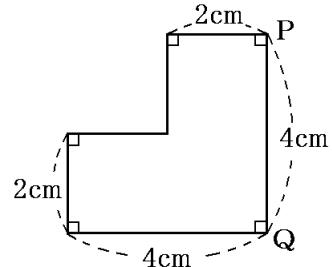
[問題]

右の図形を、辺  $PQ$  を軸として1回転させてできる立体の表面積を求めよ。

(千葉県)(\*\*\*)

[解答欄]

[ヒント]



$$(\text{表面積}) = (\text{A の面積}) + (\text{B と C を合わせた面積}) + (\text{側面積 D}) + (\text{側面積 E})$$

[解答]  $56\pi \text{ cm}^2$

[解説]

右の図で、この回転体の表面積は、A の底面の円の面積、C の底面の円の面積、B のドーナツ状の部分の面積、D の側面積、E の側面積を合わせたものになる。

B と C を合わせた面積は A と同じになる。

よって、(A, B, C の面積の合計) =  $\pi \times 4^2 \times 2 = 32\pi (\text{cm}^2)$

D の側面を展開したものは長方形で、

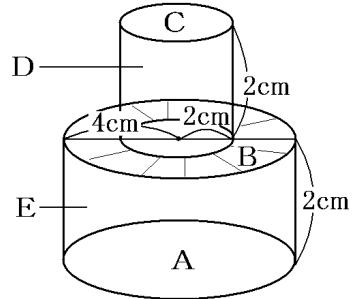
縦が 2cm、横が  $2\pi \times 2 = 4\pi (\text{cm})$  である。

よって、(D の部分の面積) =  $2 \times 4\pi = 8\pi (\text{cm}^2)$

E の側面を展開したものは長方形で、縦が 2cm、横が  $2\pi \times 4 = 8\pi (\text{cm})$  である。

よって、(E の部分の面積) =  $2 \times 8\pi = 16\pi (\text{cm}^2)$

したがって、(表面積) =  $32\pi + 8\pi + 16\pi = 56\pi (\text{cm}^2)$



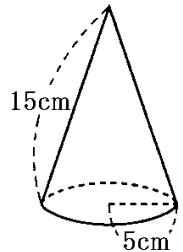
[円錐の表面積]

[問題]

右の図のような、底面の半径が 5cm で、母線の長さが 15cm の円錐がある。この円錐の表面積を求めよ。

(徳島県)(\*\*)

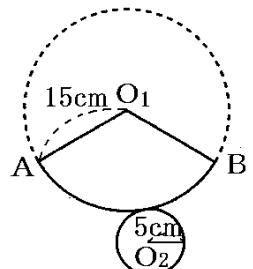
[解答欄]



[ヒント]

(弧 AB の長さ) = (円 O<sub>2</sub> の円周)

(おうぎ形 O<sub>1</sub>AB の面積) = (円 O<sub>1</sub> の面積) ×  $\frac{\text{(弧ABの長さ)}}{\text{(円O}_1\text{の円周)}}$



[解答]  $100\pi \text{ cm}^2$

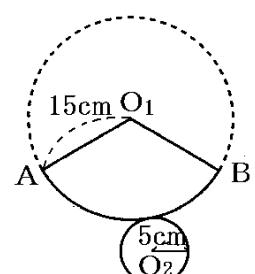
[解説]

右図のような展開図をかくとわかりやすい(側面を展開したときのおうぎ形の中心角は、最初は不明なので適当でかまわない)。

底面の円 O<sub>2</sub> の半径は 5cm なので、円周は、 $2 \times 5 \times \pi = 10\pi (\text{cm})$

側面を展開した円 O<sub>1</sub> の弧 AB の長さと底面の円 O<sub>2</sub> の円周の長さは等しいので、(弧 AB の長さ) =  $10\pi (\text{cm})$

円 O<sub>1</sub> の半径は 15cm なので、円周は、 $2 \times 15 \times \pi = 30\pi (\text{cm})$



したがって、弧 AB の長さは円 O<sub>1</sub> の円周の長さの  $10\pi \div 30\pi = \frac{10\pi}{30\pi} = \frac{1}{3}$  になる。

よって、おうぎ形  $O_1AB$  の面積も円  $O_1$  の面積の  $\frac{1}{3}$  になる。

$$(おうぎ形 O_1AB の面積) = (\text{円 } O_1 \text{ の面積}) \times \frac{1}{3} = \pi \times 15^2 \times \frac{1}{3} = 75\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

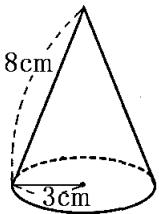
$$\text{また, (底面の円 } O_2 \text{ の面積)} = \pi \times 5^2 = 25\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{したがって, (円錐の表面積)} = 75\pi + 25\pi = 100\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

### [問題]

右の図のような、底面が半径 3cm の円で、母線の長さが 8cm の円錐がある。この円錐の展開図をかくとき、①円錐の側面となるおうぎ形の中心角を求めよ。②また、このおうぎ形の面積を求めよ。

(愛媛県)(\*\*)



### [解答欄]

①	②
---	---

### [ヒント]

$$(\text{円 } O_1 \text{ の弧 } AB \text{ の長さ}) = (\text{円 } O_2 \text{ の円周の長さ})$$

[解答]①  $135^\circ$     ②  $24\pi \text{ cm}^2$

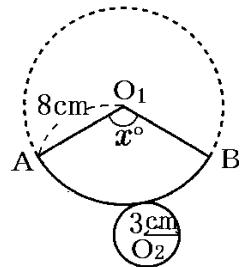
### [解説]

右図は、この円錐の展開図である、円錐の側面となるおうぎ形の中心角を  $x^\circ$  とする。

$(\text{円 } O_1 \text{ の弧 } AB \text{ の長さ}) = (\text{円 } O_2 \text{ の円周の長さ})$  なので、

$$2\pi \times 8 \times \frac{x}{360} = 2\pi \times 3, \quad \frac{x}{45} = 3, \quad x = 3 \times 45 = 135^\circ$$

$$(\text{おうぎ形の面積}) = \pi \times 8^2 \times \frac{135}{360} = \pi \times 64 \times \frac{3}{8} = 24\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$



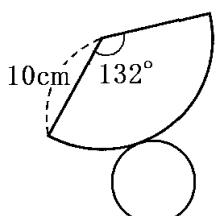
### [問題]

右の図は、円錐の展開図で、側面は半径 10cm、中心角  $132^\circ$  のおうぎ形である。この円錐の底面の円の半径を求めよ。

(山口県)(\*\*)

### [解答欄]

--



[解答]  $\frac{11}{3} \text{ cm}$

[解説]

円錐の底面の円の半径を  $x \text{ cm}$  とすると、

$$(\text{底面の円の円周の長さ}) = 2\pi \times x = 2\pi x (\text{cm})$$

$$(\text{側面のおうぎ形の弧の長さ}) = 2\pi \times 10 \times \frac{132}{360} = \frac{22}{3}\pi (\text{cm})$$

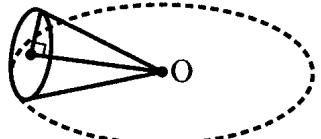
(底面の円の円周の長さ) = (側面のおうぎ形の弧の長さ)なので、

$$2\pi x = \frac{22}{3}\pi, \quad x = \frac{11}{3} (\text{cm})$$

[問題]

右の図のように、底面の半径が  $4\text{cm}$  の円錐を平面上に置き、頂点  $O$  を中心としてすべらないように転がした。このとき、点線で表した円  $O$  の上を 1 周し、もとの場所にもどるまでに、3 回半だけ回転した。この円錐の表面積を求めよ。ただし、円周率を  $\pi$  とする。

(秋田県)(\*\*)



[解答欄]

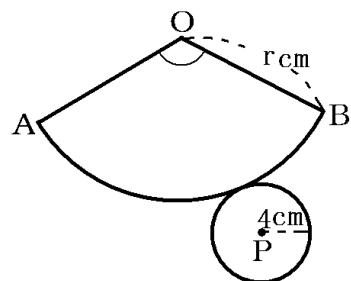
[ヒント]

底面の円  $P$  の半径は  $4\text{cm}$  なので、円  $P$  の円周は、

$2\pi \times 4 = 8\pi (\text{cm})$  である。一方、右の円  $O$  の半径を  $r(\text{cm})$  とすると、円  $O$  の円周は  $2\pi r(\text{cm})$  である。

「3回半だけ回転した」とあるので、

(円  $O$  の円周) = (円  $P$  の円周)  $\times 3.5$  が成り立つ。



[解答]  $72\pi \text{ cm}^2$

[解説]

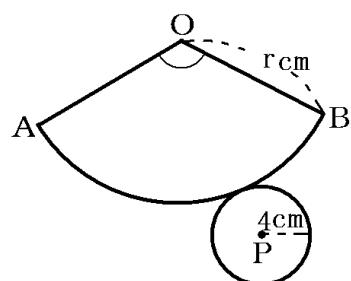
底面の円  $P$  の半径は  $4\text{cm}$  なので、円  $P$  の円周は、

$2\pi \times 4 = 8\pi (\text{cm})$  である。一方、右の円  $O$  の半径を  $r(\text{cm})$  とすると、円  $O$  の円周は  $2\pi r(\text{cm})$  である。

「3回半だけ回転した」とあるので、

(円  $O$  の円周) = (円  $P$  の円周)  $\times 3.5$  が成り立つ。 …①

よって、 $2\pi r = 8\pi \times 3.5, r = 8\pi \times 3.5 \div 2\pi = 14(\text{cm})$



$$(\text{底面 } P \text{ の面積}) = \pi \times 4^2 = 16\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{①より, (おうぎ形 OAB の面積)} = \pi \times 14^2 \times \frac{\text{弧ABの長さ}}{\text{円Oの円周}} = \pi \times 14^2 \times \frac{\text{円Pの円周}}{\text{円Oの円周}}$$

$$= \pi \times 14^2 \times \frac{\text{円Pの円周}}{\text{円Pの円周} \times 3.5} = \pi \times 14^2 \times \frac{1}{3.5} = 56\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

したがって、この円錐の表面積は、 $16\pi + 56\pi = 72\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

## 【】球の体積・表面積

[球の表面積]

[問題]

半径 5cm の球の表面積を求めよ。

(青森県)(\*)

[解答欄]

[ヒント]

$$(球の表面積) = 4\pi \times (\text{半径})^2$$

[解答]  $100\pi \text{ cm}^2$

[解説]

$$(球の表面積) = 4\pi \times (\text{半径})^2 = 4\pi \times 5^2 = 100\pi \text{ (cm}^2)$$

[問題]

右の図のように、半径 3cm の球を、中心 O を通る平面で切ってできた立体の表面積を求めよ。ただし、円周率は  $\pi$  とする。

(石川県)(\*)

[解答欄]

[解答]  $27\pi \text{ cm}^2$

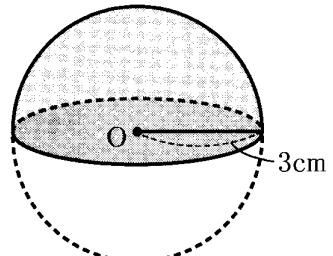
[解説]

$$(\text{半径 } 3\text{cm の球の表面積}) = 4\pi \times (\text{半径})^2 = 4\pi \times 3^2 = 36\pi \text{ (cm}^2)$$

$$(\text{半径 } 3\text{cm の円の面積}) = \pi \times (\text{半径})^2 = \pi \times 3^2 = 9\pi \text{ (cm}^2)$$

よって、この立体の表面積は、

$$36\pi \times \frac{1}{2} + 9\pi = 27\pi \text{ (cm}^2)$$



[問題]

半径が 5cm の球の表面積と、底面の半径が 4cm の円柱の表面積が等しいとき、この円柱の高さを求めよ。

(宮城県)(\*\*)

[解答欄]

[解答]  $\frac{17}{2} \text{ cm}$

[解説]

$$(\text{球の表面積}) = 4\pi \times 5^2 = 100\pi (\text{cm}^2)$$

$$(\text{円柱の底面積}) = \pi \times 4^2 = 16\pi (\text{cm}^2)$$

底面の半径が 4cm の円柱の高さを  $x$  cm とすると、この円柱の側面の長方形の縦の長さは  $x$  cm で、横の長さは  $2\pi \times 4 = 8\pi (\text{cm})$  なので、

$$(\text{円柱の側面積}) = x \times 8\pi = 8\pi x (\text{cm}^2)$$

$$\begin{aligned} & \text{よって, } (\text{円柱の表面積}) = (\text{円柱の底面積}) \times 2 + (\text{円柱の側面積}) = 16\pi \times 2 + 8\pi x \\ & \quad = 32\pi + 8\pi x (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

球の表面積と円柱の表面積が等しいので、

$$32\pi + 8\pi x = 100\pi, \quad 8 + 2x = 25, \quad 2x = 17, \quad x = \frac{17}{2} (\text{cm})$$

[球の体積]

[問題]

半径  $\frac{3}{2}$  cm の球の体積は何  $\text{cm}^3$  か。ただし、円周率は  $\pi$  とする。

(広島県)(\*)

[解答欄]

[ヒント]

半径  $r$  の球の体積を  $V$  とすると、 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

[解答]  $\frac{9}{2}\pi \text{ cm}^3$

[解説]

半径  $r$  の球の体積を  $V$  とすると、 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\text{したがって, } (\text{体積}) = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \frac{27}{8} = \frac{9}{2}\pi (\text{cm}^3)$$

[問題]

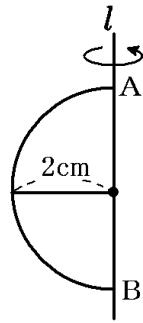
右の図のような半径 2cm の半円を、 直径 AB を含む直線  $l$  を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし、 円周率は  $\pi$  とする。  
(栃木県)(\*)

[解答欄]

[ヒント]

求める立体は半径 2cm の球になる。

[解答]  $\frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3$



[解説]

直径 AB を含む直線  $l$  を軸として 1 回転させてできる立体は半径が 2cm の球なので、

$$(\text{体積}) = \frac{4}{3}\pi \times 2^3 = \frac{32}{3}\pi (\text{cm}^3)$$

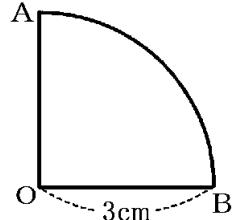
[問題]

右図のような半径が 3cm、 中心角が  $90^\circ$  のおうぎ形 OAB を、 線分 OA を軸として 1 回転させてできる立体の体積は何  $\text{cm}^3$  か。  
(長崎県)(\*)

[解答欄]

[ヒント]

求める立体は半径 3cm の球の半分になる。



[解答]  $18\pi \text{ cm}^3$

[解説]

おうぎ形 OAB を、 線分 OA を軸として 1 回転させてできる立体は、 半径 3cm の球の半分な

$$\text{ので、 } (\text{体積}) = \frac{4}{3}\pi \times 3^3 \times \frac{1}{2} = 18\pi (\text{cm}^3)$$

[問題]

半径 3cm の球を、中心 O を通る平面 X で切った半球を、さらに O を通り平面 X に垂直な 2 つの平面で切り取って、右図のような立体をつくった。 $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 90^\circ$  のとき、この立体の①体積と、②表面積を求めよ。

(補充問題)(\*\*)

[解答欄]

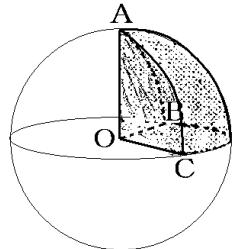
①	②
---	---

[ヒント]

① 図の立体は半径 3cm の球を 8 等分したものである。

② 右図の S の曲面は半径 3cm の球の表面の  $\frac{1}{8}$  である。

図の P, Q, R はそれぞれ、半径 3cm, 中心角  $90^\circ$  のおうぎ形である。



[解答] ①  $\frac{9}{2} \pi \text{ cm}^3$  ②  $\frac{45}{4} \pi \text{ cm}^2$

[解説]

① 図の立体は球を 8 等分したものであるので、

$$(\text{この立体の体積}) = (\text{球の体積}) \times \frac{1}{8} = \frac{4}{3} \pi \times 3^3 \times \frac{1}{8} = \frac{9}{2} \pi (\text{cm}^3)$$

② 右図の S の曲面は半径 3cm の球の表面の  $\frac{1}{8}$  である。したがって、

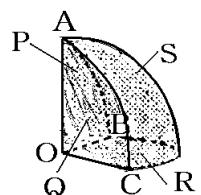
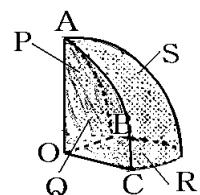
$$(S \text{ の部分の面積}) = 4\pi \times 3^2 \times \frac{1}{8} = \frac{9}{2} \pi (\text{cm}^2)$$

図の P, Q, R はそれぞれ、半径 3cm, 中心角  $90^\circ$  のおうぎ形であるので、

$$(P \text{ の部分の面積}) = \pi \times 3^2 \times \frac{90}{360} = \frac{9}{4} \pi (\text{cm}^2)$$

したがって、(表面積) = (S の部分の面積) + (P の部分の面積)  $\times 3$

$$= \frac{9}{2} \pi + \frac{9}{4} \pi \times 3 = \frac{18}{4} \pi + \frac{27}{4} \pi = \frac{45}{4} \pi (\text{cm}^2)$$



[問題]

半径 6cm の球を、右の図のように切り取った立体がある。

この立体の①体積と、②表面積を求めよ。

(補充問題)(\*\*\*)

[解答欄]

①	②
---	---

[ヒント]

①  $\angle AOB=60^\circ$  なので、図の立体の体積は半径 6cm の球の体積の  $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$  倍である。

② 図の立体の表面積は、半径 6cm の半円 2 つと、球の表面積の  $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$  の和になる。

[解答]①  $48\pi \text{ cm}^3$  ②  $60\pi \text{ cm}^2$

[解説]

①  $\angle AOB=60^\circ$  なので、図の立体の体積は半径 6cm の球の体積の  $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$  倍である。

$$\text{したがって、(図の立体の体積)} = \frac{4}{3}\pi \times 6^3 \times \frac{1}{6} = 48\pi (\text{cm}^3)$$

② 図の立体の表面積は、半径 6cm の半円 2 つと、球の表面積の  $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$  の和になる。

$$\text{したがって、(図の立体の表面積)} = \pi \times 6^2 \times \frac{1}{2} \times 2 + 4\pi \times 6^2 \times \frac{1}{6} = 36\pi + 24\pi = 60\pi (\text{cm}^2)$$

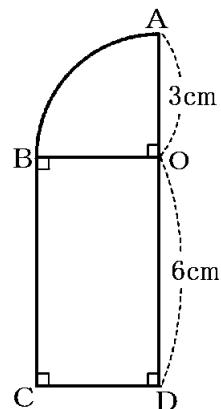
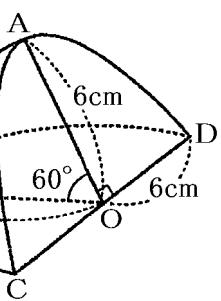
[問題]

右の図は、2つの半径 OA, OB と弧 AB で囲まれたおうぎ形と、長方形 OBCD を組み合わせた図形である。この図形を、直線 AD を軸として1回転させてできる立体の体積を求めよ。

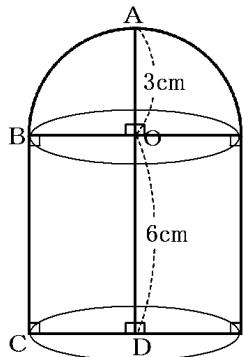
(岐阜県)(\*\*)

[解答欄]

--



[ヒント]



[解答]  $72\pi \text{ cm}^3$

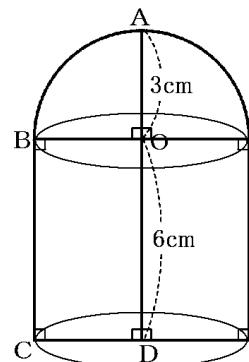
[解説]

1回転させてできる立体は、右図のように、半径3cmの球の半分と、底面の半径が3cmで高さが6cmの円柱を合わせた形になる。

$$(\text{半球の体積}) = \frac{4}{3}\pi \times 3^3 \times \frac{1}{2} = 18\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$(\text{円柱の体積}) = \pi \times 3^2 \times 6 = 54\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

よって、求める体積は、 $18\pi + 54\pi = 72\pi \text{ (cm}^3\text{)}$



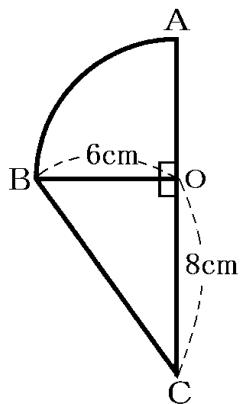
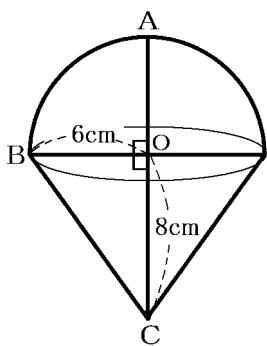
[問題]

右の図のように、おうぎ形AOBと直角三角形BOCが同じ平面上にあり、OB=6cm, OC=8cm,  $\angle AOB=90^\circ$ ,  $\angle BOC=90^\circ$ である。おうぎ形AOBと直角三角形BOCを合わせた図形を、直線ACを軸として1回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし、円周率を $\pi$ とする。

(秋田県改)(\*\*)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $240\pi \text{ cm}^2$

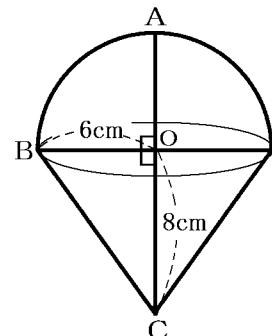
[解説]

1回転させてできる立体は、右図のように、半径6cmの球の半分と、底面の半径が6cmで高さが8cmの円錐を合わせた形になる。

$$(\text{半球の体積}) = \frac{4}{3}\pi \times 6^3 \times \frac{1}{2} = 144\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$(\text{円錐の体積}) = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

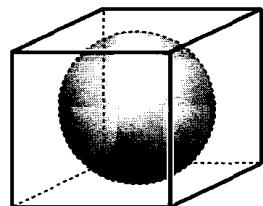
よって、求める体積は、 $144\pi + 96\pi = 240\pi \text{ (cm}^3\text{)}$



[問題]

右の図のように、球がきっちり入る1辺の長さが6cmの立方体の箱がある。この球の体積を求めよ。ただし、円周率は $\pi$ とする。

(徳島県)(\*\*)



[解答欄]

[ヒント]

立方体の1辺の長さが6cmなので球の半径は3cmになる。

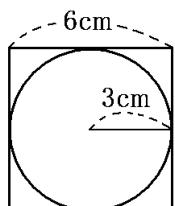
[解答] $36\pi \text{ cm}^3$

[解説]

右図は、この立体を真横から見たものである。図のように、立方体の1辺の長さが6cmなので球の半径は3cmになる。

半径 $r$ の球の体積を $V$ とすると、 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ なので、

$$(\text{体積}) = \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$



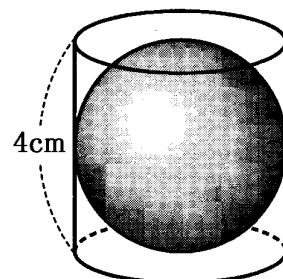
[問題]

右の図のように、円柱と、その中にちょうどはいる球がある。

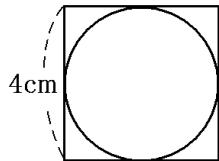
円柱の高さが4cmであるとき、円柱の体積と球の体積の差を求めよ。ただし、円周率は $\pi$ とする。

(徳島県)(\*\*)

[解答欄]



[ヒント]



[解答]  $\frac{16}{3} \pi \text{ cm}^3$

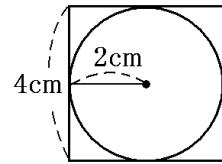
[解説]

右図は、この立体を真横から見たものである。図のように、円柱の高さは 4cm なので、その中にちょうどはいる球の半径は、 $4 \div 2 = 2\text{cm}$  になる。よって、円柱の底面の円の半径も 2cm になる。

$$(\text{円柱の体積}) = \pi \times 2^2 \times 4 = 16\pi (\text{cm}^3),$$

$$(\text{球の体積}) = \frac{4}{3} \pi \times 2^3 = \frac{32}{3} \pi (\text{cm}^3)$$

$$\text{したがって, } (\text{円柱の体積}) - (\text{球の体積}) = 16\pi - \frac{32}{3}\pi = \frac{48}{3}\pi - \frac{32}{3}\pi = \frac{16}{3}\pi (\text{cm}^3)$$



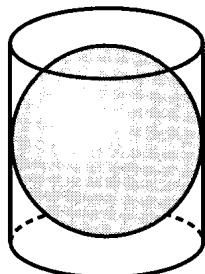
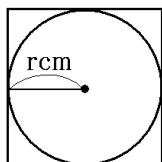
[問題]

右図のように、底面の直径と高さが等しい円柱の中に、直径が円柱の高さと等しい球が入っている。このとき、球の体積は円柱の体積の何倍か。

(奈良県)(\*\*)

[解答欄]

[ヒント]



[解答]  $\frac{2}{3}$  倍

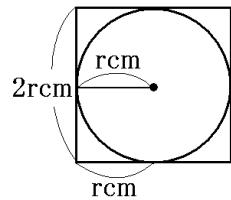
[解説]

球の半径を  $r(\text{cm})$  とすると、円柱の底面の円の半径は  $r(\text{cm})$  で、高さは  $2r(\text{cm})$  になるので、

$$(\text{球の体積}) = \frac{4}{3}\pi r^3 (\text{cm}^3)$$

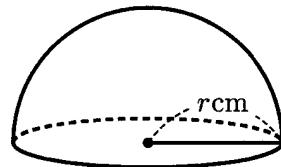
$$(\text{円柱の体積}) = \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3 (\text{cm}^3)$$

$$(\text{球の体積}) \div (\text{円柱の体積}) = \frac{4}{3}\pi r^3 \div 2\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$



[問題]

右の図は半径  $r \text{ cm}$  の球を切断してできた半球で、切断面の円周の長さは  $4\pi \text{ cm}$  であった。①このとき、 $r$  の値を求めよ。  
②また、この半球の体積は何  $\text{cm}^3$  か。ただし、 $\pi$  は円周率とする。



(鹿児島県)(\*\*)

[解答欄]

①	②
---	---

[解答] ① 2 ②  $\frac{16}{3}\pi \text{ cm}^3$

[解説]

$$\textcircled{1} \quad 2\pi r = 4\pi, \quad r = \frac{4\pi}{2\pi} = 2(\text{cm})$$

$$\textcircled{2} \quad (\text{体積}) = \frac{4}{3}\pi \times r^3 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{3}\pi \times 2^3 \times \frac{1}{2} = \frac{16}{3}\pi (\text{cm}^3)$$

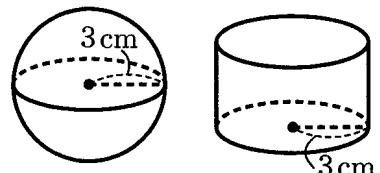
[問題]

右の図のように、半径が  $3\text{cm}$  の球と、底面の半径が  $3\text{cm}$  の円柱がある。これらの体積が等しいとき、円柱の高さを求めよ。

(佐賀県)(\*\*)

[解答欄]

--



[ヒント]

$$(球の体積) = \frac{4}{3}\pi \times 3^3$$

円柱の高さを  $x$  cm とすると, (円柱の体積) =  $\pi \times 3^2 \times x$

[解答] 4cm

[解説]

$$(球の体積) = \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

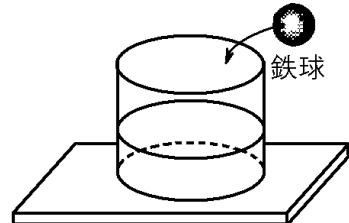
円柱の高さを  $x$  cm とすると, (円柱の体積) =  $\pi \times 3^2 \times x = 9\pi x$  (cm<sup>3</sup>)

(円柱の体積) = (球の体積)なので,  $9\pi x = 36\pi$ ,  $x = 4$  (cm)

[問題]

右の図のように, 底面の半径が 8cm の円柱の形をした容器に水が入れられ水平な台の上に置かれている。この容器に, 半径が 2cm の鉄球を何個か静かに沈めたところ, 水がこぼれることなく, 水面がちょうど 1cm 上昇した。このとき, 沈めた鉄球の個数を求めよ。ただし, 容器の厚さは考えないものとし, 沈めた鉄球はすべて水中にあるものとする。

(和歌山県)(\*\*)



[ヒント]

(上昇した分の体積) = (底面積) × (高さ) = ( $\pi \times 8^2$ ) × 1 (cm<sup>3</sup>)

$$(\text{半径が } 2\text{cm の鉄球 } 1\text{ 個の体積}) = \frac{4}{3}\pi \times 2^3 \text{ (cm}^3\text{)}$$

[解答] 6 個

[解説]

「底面の半径が 8cm の円柱の形をした容器」「水面がちょうど 1cm 上昇した」とあるので,

(上昇した分の体積) = (底面積) × (高さ) = ( $\pi \times 8^2$ ) × 1 =  $64\pi$  (cm<sup>3</sup>)

$$(\text{半径が } 2\text{cm の鉄球 } 1\text{ 個の体積}) = \frac{4}{3}\pi \times 2^3 = \frac{32}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

(鉄球 1 個の体積) × (鉄球の個数) = (上昇した分の体積)なので,

$$(\text{鉄球の個数}) = (\text{上昇した分の体積}) \div (\text{鉄球 } 1\text{ 個の体積}) = 64\pi \div \frac{32}{3}\pi = 64\pi \times \frac{3}{32\pi} = 6(\text{個})$$

[問題]

右の図のように、半径が  $r$  の半球の形をした容器 A と半径が  $r$  で高さが  $2r$  の円柱の形をした容器 B がある。容器 A に水をいっぱいに入れて、容器 B に移すとき、容器 A の何杯分の水が容器 B に入るか。ただし、容器の厚みは考えないものとする。

(滋賀県)(\*\*)

[解答欄]

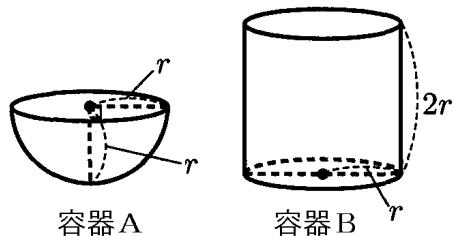
[解答]3 杯

[解説]

$$(容器 A の容積) = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$(容器 B の容積) = \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$$

$$(容器 B の容積) \div (容器 A の容積) = 2\pi r^3 \div \frac{2}{3}\pi r^3 = 2 \div \frac{2}{3} = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

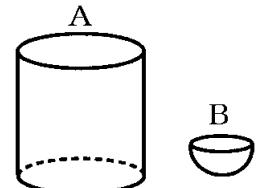


[問題]

右の図のように、円柱の形をした容器 A と半球の形をした容器 B がある。A は、底面の直径と高さが等しい。また、A の底面の半径は、B の半径の 2 倍である。B に水をいっぱいに入れて、A に移しかえる。何杯で A をいっぱいにすることができるか。ただし、容器の厚さは考えないものとする。

(長野県)(\*\*)

[解答欄]



[解答]24 杯

[解説]

$$\text{容器 B の半径を } r \text{ とすると, } (\text{容器 B の容積}) = \frac{4}{3}\pi r^3 \div 2 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

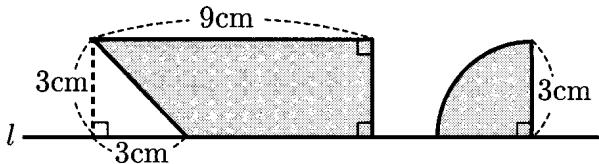
「A は、底面の直径と高さが等しい。また、A の底面の半径は、B の半径の 2 倍である。」とあるので、容器 A の底面の半径は  $2r$ 、高さは  $2r \times 2 = 4r$  である。よって、

$$(\text{容器 A の容積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \pi \times (2r)^2 \times 4r = 16\pi r^3$$

$$(\text{容器 A の容積}) \div (\text{容器 B の容積}) = 16\pi r^3 \div \frac{2}{3}\pi r^3 = 16 \div \frac{2}{3} = 16 \times \frac{3}{2} = 24$$

[問題]

次の図のように、縦3cm、横9cmの長方形から、底辺3cm、高さ3cmの直角三角形を取り除いてできる台形と、半径3cm、中心角90°のおうぎ形が、直線l上にある。この台形とおうぎ形を、直線lを軸として1回転させる。このとき、次の各問いに答えよ。(円周率は $\pi$ を用いること。)



- (1) 台形を1回転させてできる立体の体積を求めよ。
- (2) 台形を1回転させてできる立体の体積は、おうぎ形を1回転させてできる立体の体積の何倍か。

(愛媛県)(\*\*\*)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[解答](1)  $72\pi \text{ cm}^3$  (2) 4倍

[解説]

(1) (台形を1回転させてできる立体の体積)

= (長方形を1回転させてできる立体の体積) - (直角三角形を1回転させてできる立体の体積)

長方形を1回転させてできる立体は、底面が半径3cm、高さが9cmの円柱なので、

$$(体積) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \pi \times 3^2 \times 9 = 81\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

直角三角形を1回転させてできる立体は、底面が半径3cm、高さが3cmの円錐なので、

$$(体積) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 3 = 9\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

よって、(台形を1回転させてできる立体の体積) =  $81\pi - 9\pi = 72\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

(2) このおうぎ形を直線lを軸として1回転させてできる立体は、半径3cmの球の半分の

$$\text{で、 (体積)} = \frac{4}{3} \pi \times 3^3 \times \frac{1}{2} = 18\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

したがって、台形を1回転させてできる立体の体積は、おうぎ形を1回転させてできる立体の体積の、 $72\pi \div 18\pi = 4$ (倍)である。

[問題]

右の図のような、1辺の長さが  $r\text{ cm}$  の正方形 ABCD がある。中心角が  $90^\circ$  のおうぎ形 ABD の弧 DB と正方形の 2 辺 BC, CD とで囲まれた図の斜線部分を、直線 AB を軸として回転させてできる立体の体積を、 $r$  を用いた式で表せ。ただし、円周率を  $\pi$  とする。

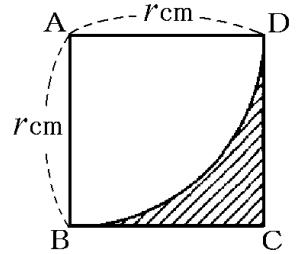
(宮城県)

[解答欄]

[ヒント]

求める体積は、右図のように、底面の半径が  $r\text{ cm}$  で高さが  $r\text{ cm}$  の円柱の体積から、半径  $r\text{ cm}$  の球の半分の体積を引いたものになる。

$$[\text{解答}] \frac{1}{3}\pi r^3 (\text{cm}^3)$$

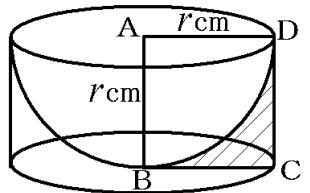
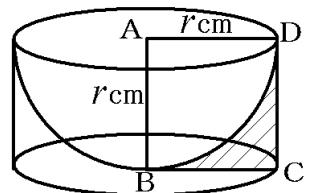


[解説]

「図の斜線部分を、直線 AB を軸として回転させてできる立体の体積」は、右図のように、底面の半径が  $r\text{ cm}$  で高さが  $r\text{ cm}$  の円柱の体積から、半径  $r\text{ cm}$  の球の半分の体積を引いたものになる。

$$(\text{図の円柱の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \pi r^2 \times r = \pi r^3 (\text{cm}^3)$$

$$(\text{球の体積の半分}) = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$$



$$\text{よって, } (\text{図の円柱の体積}) - (\text{球の体積の半分}) = \pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^3 (\text{cm}^3)$$

## 【】展開図

[位置関係]

[問題]

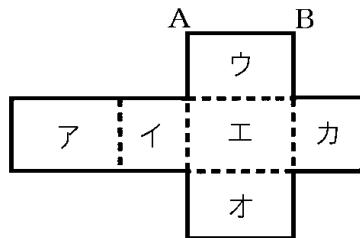
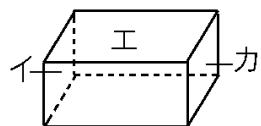
右の展開図を組み立てて直方体をつくるとき、次のア～オの面のうち、面イと平行になるものはどれか。

(大阪府)(\*)

[解答欄]

[解答]面イ

[解説]



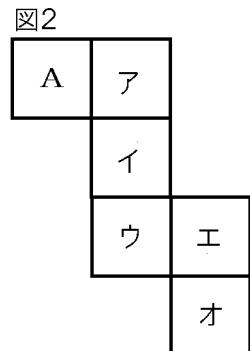
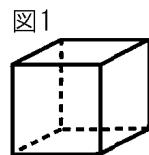
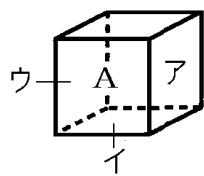
[問題]

右の図1のような立方体があり、この立方体の展開図を図2のようにかいた。この立方体において、面Aと平行になる面を、ア～オの中から1つ選び、記号で答えよ。

(福島県)(\*\*)

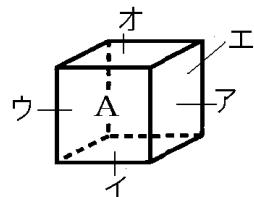
[解答欄]

[ヒント]



[解答]エ

[解説]



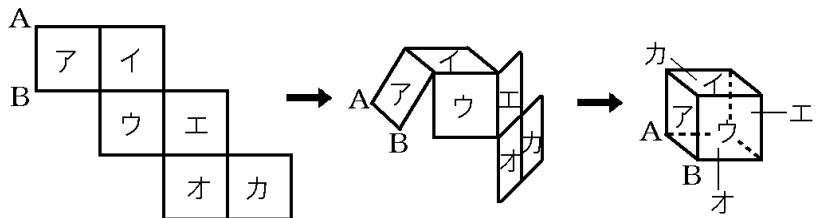
[問題]

右の図は、立方体の展開図である。この展開図を組み立てて作られる立方体について、辺ABと垂直な面をア～カのなかからすべて選べ。

(岐阜県)(\*\*)

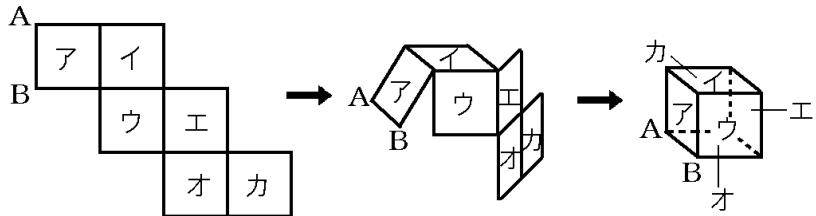
[解答欄]

[ヒント]



[解答] ウ, カ

[解説]



上図のように、ウを中心に折り曲げる。アとオはABを含み、ウとカはABに垂直で、イとエはABに平行である。

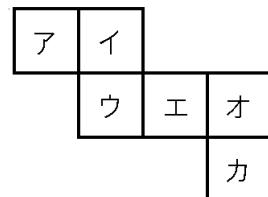
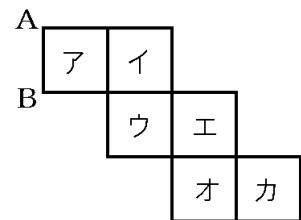
[問題]

右の図は立方体の展開図である。この展開図を組み立てができる立方体について、面イと平行な面はどれか。図の中の記号で答えよ。

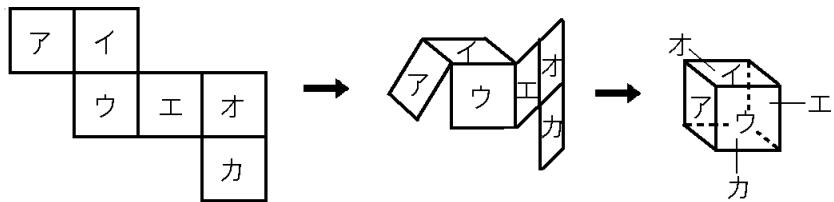
(栃木県)(\*\*)

[解答欄]

[解答] カ



[解説]



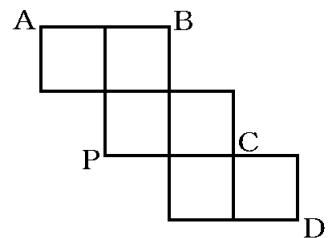
[問題]

右の展開図を組み立てて立方体をつくる。次のア～エはそれぞれ、この立方体の2つの頂点を結ぶ線分である。

ア～エの中で、最も長いものはどれか。その記号を書け。

ア 線分 AP イ 線分 BP ウ 線分 CP エ 線分 DP

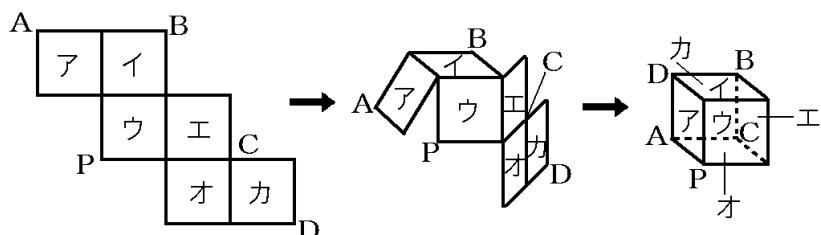
(広島県)(\*\*)



[解答欄]

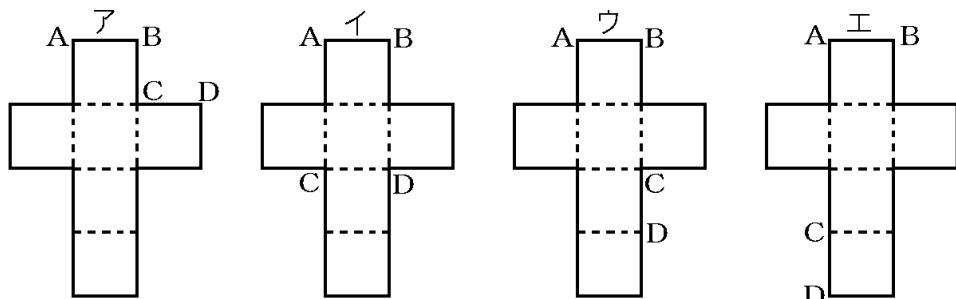
[解答]イ

[解説]



[問題]

次のア～エは、立方体の展開図である。これらの展開図を組み立ててそれぞれ立方体を作ったとき、辺ABと辺CDがねじれの位置にあるのはどれか。その展開図の記号を書け。

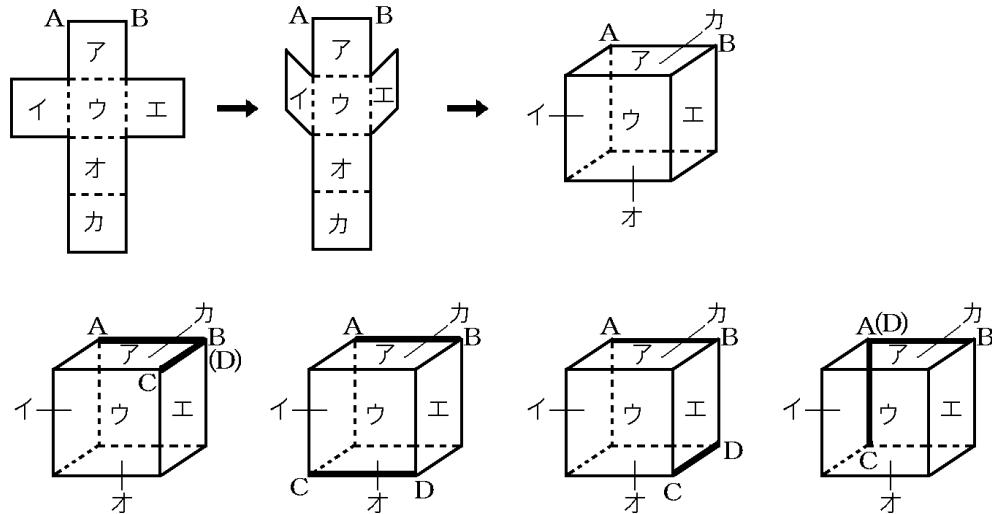


(広島県)(\*\*)

[解答欄]

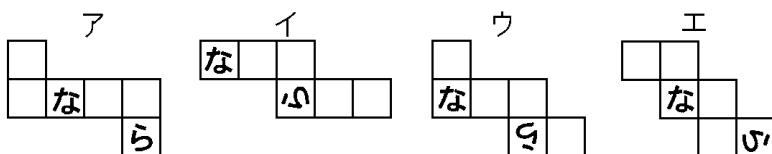
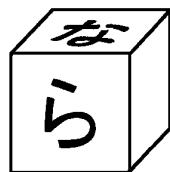
[解答]ウ

[解説]



[問題]

右図のように、「な」「ら」とかかれた立方体がある。次のア～エの立方体の展開図の中に、組み立てると図の立方体ができるものが1つある。その展開図を選び、ア～エの記号で答えよ。

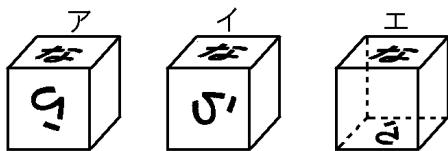


(奈良県)(\*\*\*)

[解答欄]

[解答]ウ

[解説]

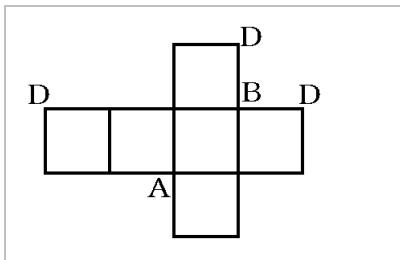


[問題]

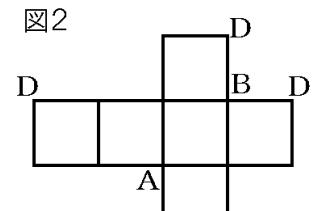
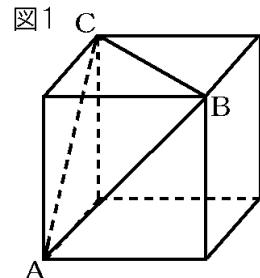
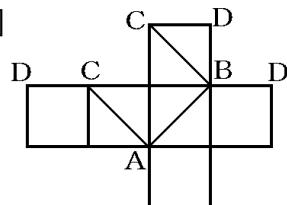
図1のような立方体がある。3点A, B, Cを通る平面で、この立方体を2つに切る。図1の立方体の展開図が図2のようになるとき、図1の頂点Cに対応する点が、図2には2点ある。点Cを表す文字Cと、線分AB, BC, CAを図2にかけ。

(長野県)(\*\*)

[解答欄]



[解答]

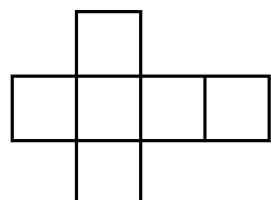


[問題]

右の図は、立方体を辺にそって切り開いたときの展開図である。このように立方体を切り開くときに切った辺は何本あるか。

(兵庫県)(\*\*)

[解答欄]



[ヒント]

1辺を切ると2本の線分になる。展開図は14本の線分で囲まれている。

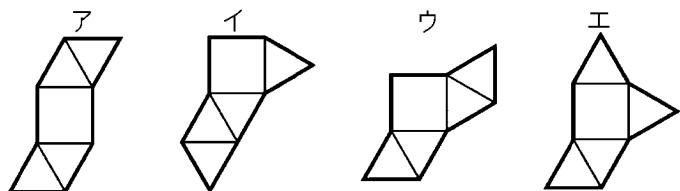
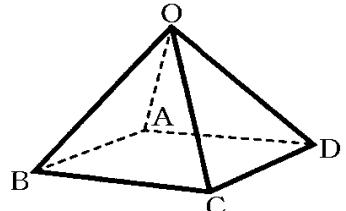
[解答]7本

[解説]

1辺を切ると2本の線分になる。展開図は14本の線分で囲まれているので、切った辺は、 $14 \div 2 = 7$ (本)である。

[問題]

右の図において、四角すい  $OABCD$  は、すべての辺の長さが等しい正四角すいである。この正四角すいを、4つの辺  $OA$ ,  $AB$ ,  $AD$ ,  $OC$  で切って開いたとき、その展開図の形となっているものを、次のア～エから1つ選び、記号で答えよ。



(山形県)(\*\*)

[解答欄]

[解答]ウ

[問題]

図1のように、点  $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  を頂点とし、全ての辺の長さが等しい正四角すいがある。図2はこの正四角すいの展開図の1つである。図2の展開図をつくるためには、図1の正四角すいの3辺  $OA$ ,  $OB$ ,  $BC$  に加えて、どの1辺を切り開けばよいか。次のア～オから1つ選び、その記号を書け。

ア 辺  $OC$  イ 辺  $OD$  ウ 辺  $AB$  エ 辺  $AD$  オ 辺  $CD$

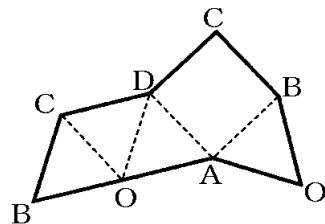
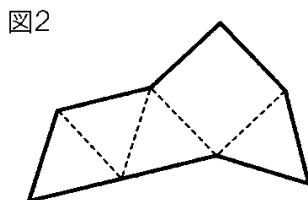
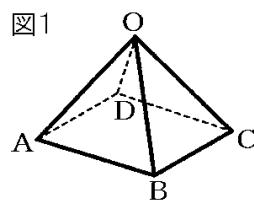
(奈良県)(\*\*)

[解答欄]

[解答]オ

[解説]

展開図に各点を書き入れると右図のようになるので、 $OA$ ,  $OB$ ,  $BC$  に加えて、辺  $CD$  を切り開けばよい。



[体積・表面積]

[問題]

右の図は、三角柱の展開図である。この展開図を組み立ててつくれる三角柱の体積を求めよ。

(岐阜県)(\*)

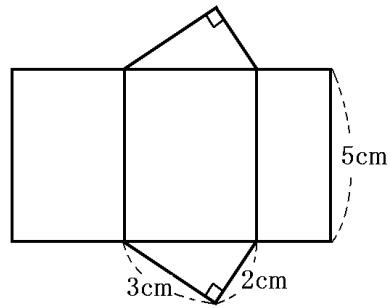
[解答欄]

[解答]  $15\text{cm}^3$

[解説]

$$(\text{底面積}) = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3(\text{cm}^2)$$

$$(\text{三角柱の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = 3 \times 5 = 15(\text{cm}^3)$$



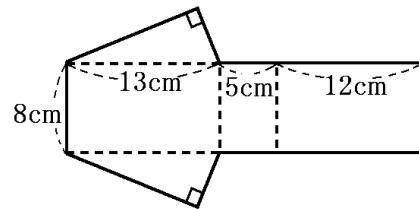
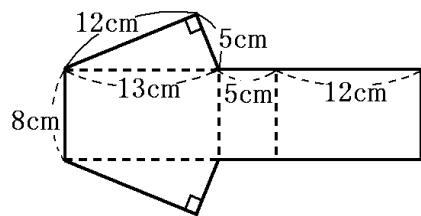
[問題]

右の図は、三角柱の展開図である。この展開図を組み立ててできる三角柱の表面積を求めよ。

(徳島県)(\*\*)

[解答欄]

[ヒント]



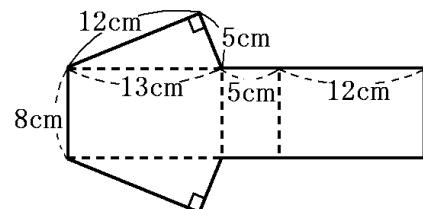
[解答]  $300\text{cm}^2$

[解説]

$$(\text{側面積}) = 8 \times (13 + 5 + 12) = 240(\text{cm}^2)$$

$$(\text{底面積}) = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30(\text{cm}^2)$$

$$(\text{表面積}) = (\text{側面積}) + (\text{底面積}) \times 2 = 240 + 30 \times 2 = 300(\text{cm}^2)$$



## 【】投影図

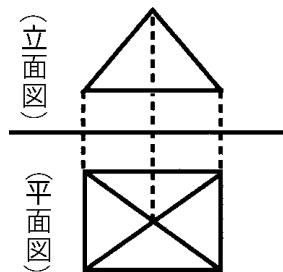
### [問題]

右の図は、ある立体の投影図である。この投影図が表す立体の名前として正しいものを、次の[ ]のうちから 1つ選べ。

[ 四角錐 四角柱 三角錐 三角柱 ]

(栃木県)(\*)

### [解答欄]

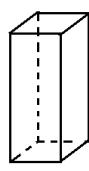


[解答]四角錐

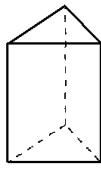
### [解説]

代表的な立体の見取図と投影図は、次の通りである。

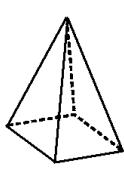
### [見取図]



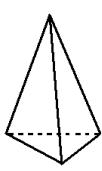
四角柱



三角柱



四角錐



三角錐



円錐

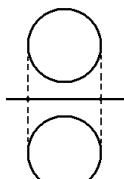
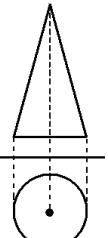
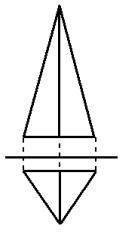
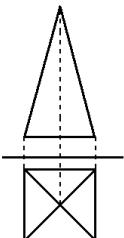
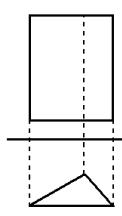
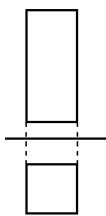


円柱



球

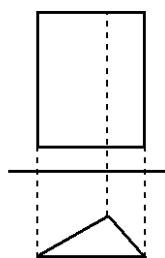
### [投影図]



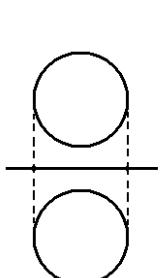
### [問題]

次の投影図で示される立体の名前を答えよ。

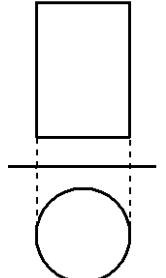
(1)



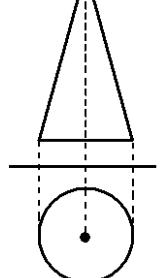
(2)



(3)



(4)



(補充問題)(\*)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
(4)		

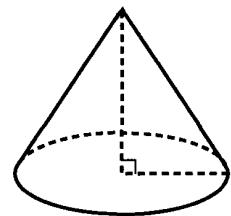
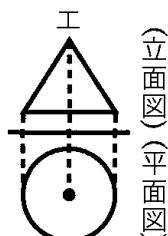
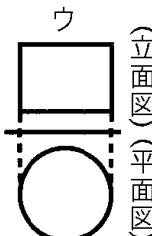
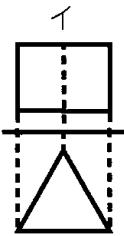
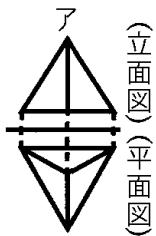
[解答](1) 三角柱 (2) 球 (3) 円柱 (4) 円錐

[問題]

右図の立体は、底面の半径が 4cm、高さが 6cm の円すいである。この立体を P とする。

- ① 次のア～エのうち、立体 P の投影図として最も適しているものは

はどれか。



- ② 円周率を  $\pi$  として、立体 P の体積を求めよ。

(大阪府)(\*)

[解答欄]

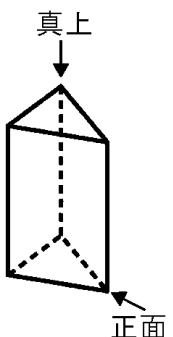
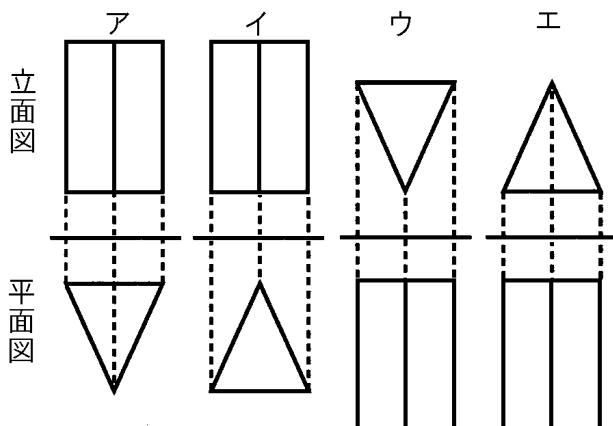
[解答]① エ ②  $32\pi \text{ cm}^3$

[解説]

$$(\text{円錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 6 = 32\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

[問題]

右の図のような三角柱がある。この三角柱の投影図として、最も適当なものを次のア～エの中から 1 つ選び、記号で答えよ。



(鹿児島県)(\*)

[解答欄]

[解答]ア

[問題]

右の図は、三角柱の投影図である。この三角柱の体積を答えよ。

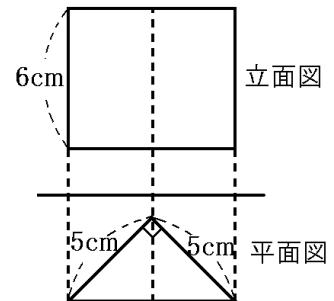
(新潟県)(\*)

[解答欄]

[解答] $75\text{cm}^3$

[解説]

$$(\text{角柱の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times 6 = 75(\text{cm}^3)$$



[問題]

右の図は、円柱の投影図で、立面図は一辺の長さが 10cm の正方形である。この円柱の体積は何  $\text{cm}^3$  か。ただし、円周率は  $\pi$  とする。

(広島県)(\*)

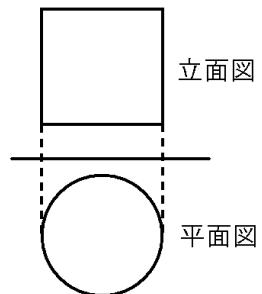
[解答欄]

[解答] $250\pi\text{cm}^3$

[解説]

底面の円の直径は 10cm、半径は 5cm である。高さは 10cm である。

$$(\text{円柱の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \pi \times 5^2 \times 10 = 250\pi(\text{cm}^3)$$

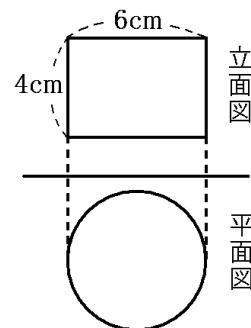


[問題]

右の図は、円柱の投影図である。立面図は縦4cm、横6cmの長方形であり、平面図は円である。このとき、この円柱の体積を求めよ。

(佐賀県)(\*)

[解答欄]



[解答] $36\pi \text{ cm}^3$

[解説]

底面の円の直径は6cm、半径は3cmである。高さは4cmである。

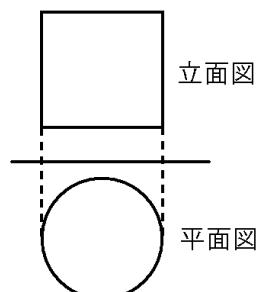
$$(\text{円柱の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \pi \times 3^2 \times 4 = 36\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

[問題]

右の図は円柱の投影図である。立面図は一辺の長さが8cmの正方形で、平面図は円である。このとき、この円柱の側面積を求めよ。ただし、円周率は $\pi$ とする。

(石川県)(\*)

[解答欄]



[解答] $64\pi \text{ cm}^2$

[解説]

この円柱の側面を展開すると長方形になる。この長方形の縦の長さは8cm、横の長さは、底面の円の円周の長さ $\pi \times 8 = 8\pi \text{ (cm)}$ と同じになる。

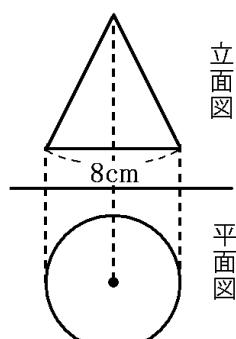
$$\text{よって, } (\text{側面積}) = 8 \times 8\pi = 64\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

[問題]

右の図は、円錐の投影図であり、立面図は底辺が8cm、面積が $36\text{cm}^2$ の二等辺三角形である。このとき、この円錐の体積を求めよ。

(福島県)(\*\*)

[解答欄]



[解答] $48\pi \text{ cm}^3$

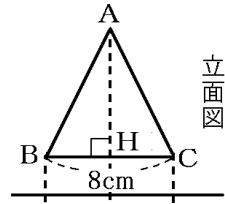
[解説]

右図の△ABC の面積について、 $\frac{1}{2} \times 8 \times AH = 36$  が成り立つ。

$$4AH = 36, \quad AH = 9(\text{cm})$$

よって、この円錐の高さは 9cm である。

$$(\text{円錐の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 9 = 48\pi (\text{cm}^3)$$

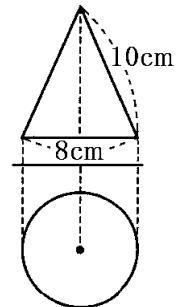


[問題]

右の図は、円錐の投影図である。この円錐の表面積を求めよ。  
(富山県)(\*\*)

[解答欄]

[解答]  $56\pi \text{ cm}^2$



底面の円の直径は 8cm なので、

$$(\text{底面の円の円周の長さ}) = \pi \times 8 = 8\pi (\text{cm})$$

側面の展開図のおうぎ形の中心角を  $a^\circ$  とすると、

$$(\text{側面のおうぎ形の弧の長さ}) = 2\pi \times 10 \times \frac{a}{360} = \frac{\pi}{18}a$$

(側面のおうぎ形の弧の長さ) = (底面の円の円周の長さ)なので、

$$\frac{\pi}{18}a = 8\pi, \quad a = 8 \times 18 = 144^\circ$$

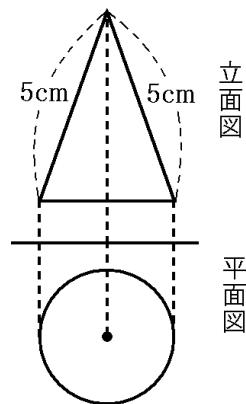
$$\text{よって、(側面のおうぎ形の面積)} = \pi \times 10^2 \times \frac{144}{360} = \pi \times 100 \times \frac{2}{5} = 40\pi (\text{cm}^2)$$

$$(\text{底面の円の面積}) = \pi \times 4^2 = 16\pi (\text{cm}^2)$$

$$\text{よって、(表面積)} = (\text{側面のおうぎ形の面積}) + (\text{底面の円の面積}) = 40\pi + 16\pi = 56\pi (\text{cm}^2)$$

[問題]

右の図は、ある立体の投影図であり、平面図は円である。  
この立体の側面積が  $15\pi \text{ cm}^2$  であるとき、底面の周の長さは何 cm か。ただし、 $\pi$  は円周率とする。  
(鹿児島県)(\*\*)



[解答欄]

[解答]  $6\pi \text{ cm}$

[解説]

側面の展開図のおうぎ形の中心角を  $a^\circ$  とすると、側面積が  $15\pi \text{ cm}^2$  なので、

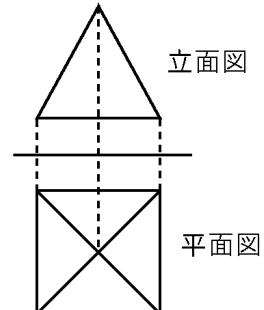
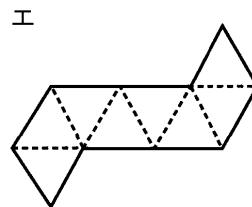
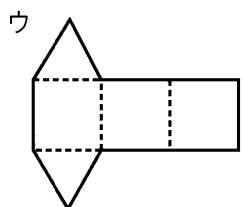
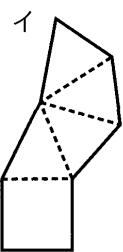
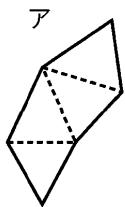
$$\pi \times 5^2 \times \frac{a}{360} = 15\pi, \quad 25\pi \times \frac{a}{360} = 15\pi, \quad \frac{a}{360} = \frac{15\pi}{25\pi} = \frac{3}{5}$$

底面の周の長さは側面のおうぎ形の弧の長さと等しいので、

$$\pi \times 5 \times 2 \times \frac{a}{360} = 10\pi \times \frac{3}{5} = 6\pi \text{ (cm)}$$

[問題]

右の図は、ある立体の投影図です。この立体の展開図として適切なものを、下の①～④の中から選び、その番号を書きなさい。



(広島県)(\*)

[解答欄]

[解答] イ

## 【FdData 入試製品版のご案内】

詳細は、[\[FdData 入試ホームページ\]](#)に掲載 ([Shift]+左クリック→新規ウィンドウ)  
姉妹品：[\[FdData 中間期末ホームページ\]](#) ([Shift]+左クリック→新規ウィンドウ)

### ◆印刷・編集

この PDF ファイルは、FdData 入試を PDF 形式に変換したサンプルで、印刷はできないようになっています。製品版の FdData 入試は Windows パソコン用のマイクロソフト Word(Office)の文書ファイルで、印刷・編集を自由に行うことができます。

### ◆FdData 入試の特徴

FdData 入試は、公立高校入試問題の全傾向を網羅することを基本方針に編集したワープロデータ(Word 文書)です。入試理科・社会・数学ともに、過去に出題された公立高校入試の問題をいったんばらばらに分解して、細かい単元ごとに再編集して作成しております。

### ◆サンプル版と製品版の違い

ホームページ上に掲載しておりますサンプルは、製品の Word 文書を PDF ファイルに変換したもので印刷や編集はできませんが、製品の全内容を掲載しており、どなたでも自由に閲覧できます。問題を「目で解く」だけでもある程度の効果をあげることができます。

しかし、FdData 入試がその本来の力を発揮するのは印刷や編集ができる製品版においてです。また、製品版は、すぐ印刷して使える「問題解答分離形式」、編集に適した「問題解答一体形式」、などの形式を含んでいますので、目的に応じて活用することができます。

※[FdData 入試の特徴\(QandA 方式\)](#) ([Shift]+左クリック→新規ウィンドウ)

### ◆FdData 入試製品版(Word 版)の価格(消費税込み)

※以下のリンクは[Shift]キーをおしながら左クリックすると、新規ウィンドウが開きます  
[数学 1 年](#)(4400 円), [数学 2 年](#)(6400 円), [数学 3 年](#)(9600 円)：(統合版は 16,200 円)  
[理科 1 年](#)(6800 円), [理科 2 年](#)(6800 円), [理科 3 年](#)(6800 円)：(統合版は 16,200 円)  
[社会地理](#)(6800 円), [社会歴史](#)(6800 円), [社会公民](#)(6800 円)：(統合版は 16,200 円)  
※Windows パソコンにマイクロソフト Word がインストールされている必要があります。  
(Mac の場合はお電話でお問い合わせください)。

◆ご注文は、メール(info2@fdtext.com)、または電話(092-811-0960)で承っております。  
※[注文→インストール→編集・印刷の流れ](#) ([Shift]+左クリック)  
※[注文メール記入例](#) ([Shift]+左クリック)

【Fd 教材開発】 Mail : info2@fdtext.com Tel : 092-811-0960