

【FdData 高校入試：中学数学 3 年：2 次関数 1】

[\[式の決定／変域／変化の割合／グラフの特徴／放物線と直線の式／座標・長さなど／線分比など／面積を求める：2つの三角形の和／外側長方形から複数の三角形を引く／面積を2等分・面積比／等積変形の利用／FdData 入試製品版のご案内\]](#)

[\[FdData 入試ホームページ\]](#)掲載の pdf ファイル(サンプル)一覧]

※次のリンクは[Shift]キーをおしながら左クリックすると、新規ウィンドウが開きます

理科：[\[理科 1 年\]](#)，[\[理科 2 年\]](#)，[\[理科 3 年\]](#)

社会：[\[社会地理\]](#)，[\[社会歴史\]](#)，[\[社会公民\]](#)

数学：[\[数学 1 年\]](#)，[\[数学 2 年\]](#)，[\[数学 3 年\]](#)

※全内容を掲載しておりますが、印刷はできないように設定しております

【】式の決定・変化の割合・変域など

【】式の決定

[問題]

関数 $y = ax^2$ について、 $x = 3$ のとき、 $y = 18$ である。このとき、 a の値を求めよ。

(岡山県)(*)

[解答欄]

[ヒント]

$y = ax^2$ に $x = 3$ ， $y = 18$ を代入する。

[解答] $a = 2$

[解説]

$y = ax^2$ に $x = 3$ ， $y = 18$ を代入すると、

$$18 = a \times 3^2, \quad 9a = 18, \quad a = 2$$

[問題]

y は x の 2 乗に比例し、 $x = 3$ のとき、 $y = -36$ である。このとき、 y を x の式で表せ。

(秋田県)(*)

[解答欄]

[ヒント]

$y = ax^2$ とにおいて、 $y = ax^2$ に $x = 3$, $y = -36$ を代入する。

[解答] $y = -4x^2$

[解説]

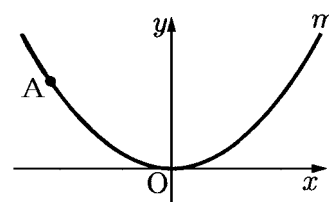
$y = ax^2$ とおく。 $y = ax^2$ に $x = 3$, $y = -36$ を代入すると、

$$-36 = a \times 3^2, \quad 9a = -36, \quad a = -4$$

よって、求める式は、 $y = -4x^2$

[問題]

右図において、 m は関数 $y = ax^2$ (a は定数) のグラフを表す。
A は m 上の点であり、その座標は $(-4, 3)$ である。 a の値を
求めよ。



(大阪府)(*)

[解答欄]

[解答] $a = \frac{3}{16}$

[解説]

$y = ax^2$ に $x = -4$, $y = 3$ を代入すると、

$$3 = 16a, \quad a = \frac{3}{16}$$

[問題]

y は x の 2 乗に比例し、 $x = 1$ のとき $y = 2$ である。 $x = 3$ のときの y の値を求めよ。

(沖縄県)(*)

[解答欄]

[解答] $y = 18$

[解説]

$y = ax^2$ とおく。 $y = ax^2$ に $x = 1$, $y = 2$ を代入すると、

$$2 = a \times 1, \quad a = 2, \quad \text{よって、} \quad y = 2x^2$$

$y = 2x^2$ に $x = 3$ を代入すると、 $y = 2 \times 3^2 = 18$

[問題]

右の表は、関数 $y = ax^2$ について、 x と y の関係を表したものである。このとき a の値および表の b の値を求めよ。

x	...	-6	...	4	...
y	...	b	...	6	...

(滋賀県)(*)

[解答欄]

$a =$	$b =$
-------	-------

[解答] $a = \frac{3}{8}$ $b = \frac{27}{2}$

[解説]

表より、 $x = 4$ のとき $y = 6$ なので、これを $y = ax^2$ に代入すると、

$$6 = 16a, \quad a = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \quad \text{よって、関数の式は } y = \frac{3}{8}x^2$$

$$y = \frac{3}{8}x^2 \text{ に } x = -6, \quad y = b \text{ を代入すると、 } b = \frac{3}{8} \times 36 = \frac{27}{2}$$

【】 変域

[問題]

関数 $y = 3x^2$ について、 x の変域が $-3 \leq x \leq 2$ のときの y の変域を求めよ。

(福島県)(*)

[解答欄]

[ヒント]

x の変域が $-3 \leq x \leq 2$ で $x = 0$ が変域内にあるので、 $x = -3$ 、 $x = 0$ 、 $x = 2$ のときの y の値を比較する。

[解答] $0 \leq y \leq 27$

[解説]

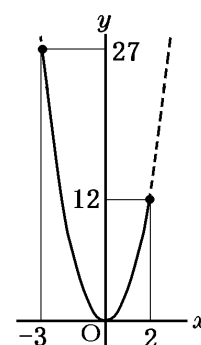
$x = 0$ が x の変域内にあるときは 3 点を比較する。

$$x = -3 \text{ のとき, } y = 3 \times (-3)^2 = 27$$

$$x = 0 \text{ のとき, } y = 0$$

$$x = 2 \text{ のとき, } y = 3 \times 2^2 = 12$$

よって、 y の変域は、 $0 \leq y \leq 27$



[問題]

関数 $y = \frac{2}{3}x^2$ について、 x の変域が $-1 \leq x \leq 3$ のときの y の変域を求めよ。

(福岡県)(*)

[解答欄]

[解答] $0 \leq y \leq 6$

[解説]

$x = 0$ が x の変域内にあるときは 3 点を比較する。

$$x = -1 \text{ のとき, } y = \frac{2}{3} \times (-1)^2 = \frac{2}{3}$$

$$x = 0 \text{ のとき, } y = 0$$

$$x = 3 \text{ のとき, } y = \frac{2}{3} \times 3^2 = 6$$

よって、 $0 \leq y \leq 6$

[問題]

関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ について、 x の変域が、 $2 \leq x \leq 6$ のときの y の変域を求めよ。

(補充問題)**

[解答欄]

[ヒント]

x の変域が $2 \leq x \leq 6$ で $x=0$ が変域内にないので、 $x=2$ 、 $x=6$ のときの y の値を比較する。

[解答] $2 \leq y \leq 18$

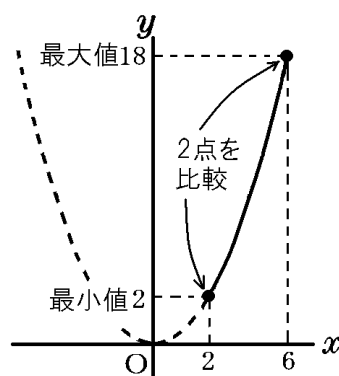
[解説]

$x=0$ が x の変域内にないときは 2 点を比較する。

$$x=2 \text{ のとき } y = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$$

$$x=6 \text{ のとき } y = \frac{1}{2} \times 6^2 = 18$$

よって、 $2 \leq y \leq 18$



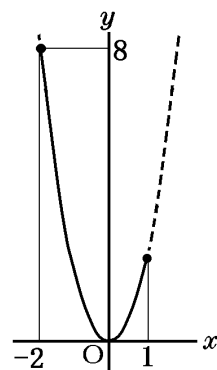
[問題]

関数 $y = ax^2$ について、 x の変域が $-2 \leq x \leq 1$ のとき、 y の変域が $0 \leq y \leq 8$ である。このとき、定数 a の値を求めよ。

(岡山県)**

[解答欄]

[ヒント]



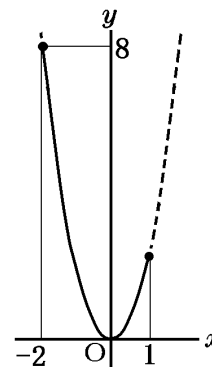
[解答] $a = 2$

[解説]

「 y の変域が $0 \leq y \leq 8$ である」より $y \geq 0$ であるので、 $a > 0$ である。
したがって、放物線のグラフは上に開いている。

「 x の変域が $-2 \leq x \leq 1$ のとき、 y の変域が $0 \leq y \leq 8$ である」とあるので、グラフは右図のようになる。

右図より、 $x = -2$ のとき $y = 8$ になる、
 $y = ax^2$ に $x = -2$ 、 $y = 8$ を代入すると、
 $8 = a \times (-2)^2$
 $4a = 8$ 、 $a = 2$



[問題]

関数 $y = x^2$ について、 x の変域が $a \leq x \leq 2$ のとき、 y の変域は $0 \leq y \leq 9$ である。このときの a の値を求めよ。

(高知県)

[解答欄]

[ヒント]

y の変域が $0 \leq y \leq 9$ なので、 $a < 0$ である。

[解答] $a = -3$

[解説]

$a > 0$ のときは、 $0 < a \leq x \leq 2$ なので、 $y = x^2$ の最小値は a^2 、最大値は $2^2 = 4$ なので、 $a^2 \leq y \leq 4$ となり、条件を満たさない。

$a < 0$ のときは、 $x = 0$ が x の変域内にあるので、3点を比較する。

- ・ $x = a$ のとき $y = a^2$
- ・ $x = 0$ のとき $y = 0$
- ・ $x = 2$ のとき $y = 2^2 = 4$

y の変域は $0 \leq y \leq 9$ なので、 $a^2 = 9$

$a < 0$ なので、 $a = -3$

[問題]

関数 $y = x^2$ について、 x の変域を $a \leq x \leq a + 2$ とするとき、 y の変域が $0 \leq y \leq 4$ となるような a の値を、次の[]の中からすべて選べ。

[-2 -1 0 1 2]

(埼玉県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

$a > 0$ のとき、 x の変域($a \leq x \leq a + 2$)は正の数の範囲にあるので、 $y > 0$ となり不適。

[解答]-2, 0

[解説]

$a > 0$ のとき、 x の変域($a \leq x \leq a + 2$)は正の数の範囲にあるので、 $y > 0$ となり不適。

$a = 0$ のとき、 $0 \leq x \leq 2$ なので、 $0 \leq y \leq 4$ となり、適する。

$a = -1$ のとき、 $-1 \leq x \leq 1$ なので、 $0 \leq y \leq 1$ となり、不適。

$a = -2$ のとき、 $-2 \leq x \leq 0$ なので、 $0 \leq y \leq 4$ となり、適する。

[問題]

関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ で、 x の変域が $a \leq x \leq 6$ のとき、 y の変域は $0 \leq y \leq 9$ である。 a がとることのできる値の範囲を求めよ。

(徳島県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

点 $P\left(a, \frac{1}{4}a^2\right)$ を考える。

P が P_1 の位置にあるときは、 $0 \leq y \leq 9$ にならない。

P が P_2 の位置にあるときは、 $0 \leq y \leq 9$ になる。

P が P_3 の位置にあるときは、 $0 \leq y \leq 9$ にならない。

[解答]-6 ≤ a ≤ 0

[解説]

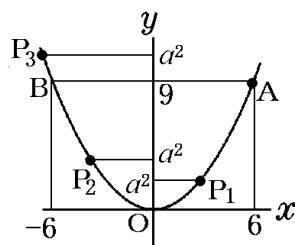
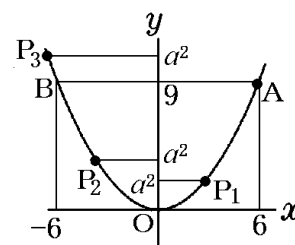
$$x = 6 \text{ のとき, } y = \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4} \times 6^2 = \frac{36}{4} = 9$$

右図のように、点 A の座標を $(6, 9)$ とする。

また、図のように、点 $B(-6, 9)$ をとる。

$$x = a \text{ のとき, } y = \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}a^2$$

点 $P\left(a, \frac{1}{4}a^2\right)$ を考える。



$0 < a \leq 6$ のとき、点 P は、図の P_1 のように OA 間にある。 x の変域が $a \leq x \leq 6$ であるので、 y の変域は $a^2 \leq y \leq 9$ になり、 $0 \leq y \leq 9$ にならない。

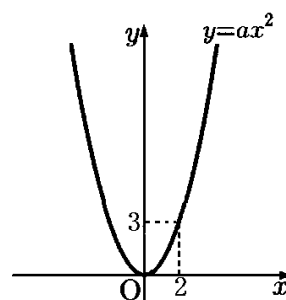
$-6 \leq a \leq 0$ のとき、点 P は、図の P_2 のように BO 間にある。 x の変域が $a \leq x \leq 6$ であるので、 y の変域は、図より、 $0 \leq y \leq 9$ になる。これは条件を満たす。

$a < -6$ のとき、点 P は、図の P_3 のような位置にある。 x の変域が $a \leq x \leq 6$ であるので、 y の変域は、図より、 $0 \leq y \leq a^2$ になり、 $0 \leq y \leq 9$ にならない。

したがって、条件を満たす a の値の範囲は、 $-6 \leq a \leq 0$ である。

[問題]

右の図のように、関数 $y = ax^2$ のグラフ上に点(2, 3)がある。次の各問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 次のアとイにあてはまる数をそれぞれ求めよ。

関数 $y = ax^2$ において、 x の変域が $b \leq x \leq 2$ のときの y の変域は $0 \leq y \leq 3$ である。このとき、 b の値の範囲は、

(ア) $\leq b \leq$ (イ) である。

(3) 関数 $y = ax^2$ において、 x の変域が $-4 \leq x \leq 3$ のときの y の変域と、関数 $y = cx^2$ において、 x の変域が $-2 \leq x \leq 3$ のときの y の変域とが等しいとき、 c の値を求めよ。

(兵庫県)**

[解答欄]

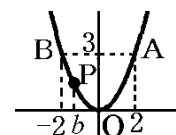
(1)	(2)ア	イ
(3)		

[解答](1) $a = \frac{3}{4}$ (2)ア -2 イ 0 (3) $c = \frac{4}{3}$

[解説]

(1) $y = ax^2$ に $x = 2$, $y = 3$ を代入すると、 $3 = a \times 4$, $a = \frac{3}{4}$

(2) x 座標が b である放物線上の点を P とする。P が右図の OB 間にあるとき、 y の変域は $0 \leq y \leq 3$ になる。



よって、 $-2 \leq b \leq 0$

(3) (1)より、 $a = \frac{3}{4}$ なので、この関数の式は $y = \frac{3}{4}x^2$

$$x = -4 \text{ のとき } y = \frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{4} \times (-4)^2 = 12$$

$$x = 0 \text{ のとき } y = \frac{3}{4}x^2 = 0$$

$$x = 3 \text{ のとき } y = \frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{4} \times 3^2 = \frac{27}{4}$$

よって、 $y = \frac{3}{4}x^2$ で、 x の変域が $-4 \leq x \leq 3$ のときの y の変域は、 $0 \leq y \leq 12$

$y = cx^2$ において、

$$x = -2 \text{ のとき } y = cx^2 = 4c,$$

$$x = 0 \text{ のとき } y = 0$$

$$x = 3 \text{ のとき } y = cx^2 = 9c$$

よって、 y の変域は、 $0 \leq y \leq 9c$

$$\text{したがって、 } 9c = 12, \quad c = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

【】 変化の割合

[問題]

関数 $y = -3x^2$ について、 x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めよ。

(愛知県)(*)

[解答欄]

[ヒント]

$$(x \text{ の増加量}) = 3 - 1, (y \text{ の増加量}) = -27 - (-3)$$

$$(\text{変化の割合}) = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})}$$

[解答] -12

[解説]

$$x = 1 \text{ のとき, } y = -3x^2 = -3$$

$$x = 3 \text{ のとき, } y = -3x^2 = -27$$

$$\text{よって, } (x \text{ の増加量}) = 3 - 1 = 2, (y \text{ の増加量}) = -27 - (-3) = -24$$

$$(\text{変化の割合}) = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{-24}{2} = -12$$

[問題]

関数 $y = \frac{6}{x}$ で、 x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めよ。

(秋田県)

[解答欄]

[解答] -2

[解説]

$$x = 1 \text{ のとき, } y = \frac{6}{1} = 6$$

$$x = 3 \text{ のとき, } y = \frac{6}{3} = 2$$

$$\text{よって, } (x \text{ の増加量}) = 3 - 1 = 2, (y \text{ の増加量}) = 2 - 6 = -4$$

$$(\text{変化の割合}) = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{-4}{2} = -2$$

[問題]

関数 $y = ax^2$ において、 x の値が 1 から 4 まで増加するときの変化の割合が -5 であるとき、 a の値を求めよ。

(広島県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

$$(x \text{ の増加量}) = 4 - 1 = 3, (y \text{ の増加量}) = 16a - a = 15a$$

$$\text{[解答]} a = -1$$

[解説]

$$x = 1 \text{ のとき } y = ax^2 = a \times 1^2 = a$$

$$x = 4 \text{ のとき } y = ax^2 = a \times 4^2 = 16a$$

$$\text{よって, } (x \text{ の増加量}) = 4 - 1 = 3, (y \text{ の増加量}) = 16a - a = 15a$$

$$\text{(変化の割合)} = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{15a}{3} = 5a$$

$$\text{「変化の割合が } -5 \text{ である」 とあるので, } 5a = -5, a = -1$$

[問題]

関数 $y = x^2$ について、 x が a から $a+5$ まで増加するとき、変化の割合は 7 である。このとき、 a の値を答えなさい。(3 点)

(新潟県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

$$(x \text{ の増加量}) = a + 5 - a, (y \text{ の増加量}) = (a + 5)^2 - a^2$$

$$\text{[解答]} a = 1$$

[解説]

$$x = a \text{ のとき } y = x^2 = a^2$$

$$x = a + 5 \text{ のとき } y = x^2 = (a + 5)^2$$

$$\text{よって, } (x \text{ の増加量}) = a + 5 - a = 5,$$

$$(y \text{ の増加量}) = (a + 5)^2 - a^2 = a^2 + 10a + 25 - a^2 = 10a + 25$$

$$\text{(変化の割合)} = \frac{(y \text{ の増加量})}{(x \text{ の増加量})} = \frac{10a + 25}{5} = 2a + 5$$

$$\text{変化の割合は } 7 \text{ であるので, } 2a + 5 = 7, 2a = 2, a = 1$$

[問題]

関数 $y = ax^2$ (a は定数) と関数 $y = -8x + 7$ について、 x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合が等しいとき、 a の値を求めよ。

(愛知県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

一次関数 $y = bx + c$ の変化の割合は常に b になる。

[解答] $a = -2$

[解説]

$x = 1$ のとき $y = ax^2 = a \times 1^2 = a$ 、 $x = 3$ のとき $y = ax^2 = a \times 3^2 = 9a$

よって、(x の増加量) $= 3 - 1 = 2$ 、(y の増加量) $= 9a - a = 8a$

$$(\text{変化の割合}) = \frac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})} = \frac{8a}{2} = 4a$$

一次関数 $y = bx + c$ の変化の割合は常に b になるので、 x の値が 1 から 3 まで増加するときの $y = -8x + 7$ の変化の割合は -8

2 つの関数で変化の割合が同じなので、 $4a = -8$ 、 $a = -2$

[問題]

ある自動車動き始めてから x 秒間に進んだ距離を y m とすると、 $0 \leq x \leq 8$ の範囲では $y = \frac{3}{4}x^2$ の関係があった。この自動車動き始めて 1 秒後から 3 秒後までの平均の速さは毎秒何 m か。

(山口県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

$$(\text{平均の速さ}) = \frac{(\text{進んだ道のり})}{(\text{時間})}$$

[解答] 毎秒 3m

[解説]

$$x = 1(\text{秒}) \text{ のとき, } y = \frac{3}{4} \times 1^2 = \frac{3}{4} (\text{m})$$

$$x = 3(\text{秒}) \text{ のとき, } y = \frac{3}{4} \times 3^2 = \frac{27}{4} (\text{m})$$

よって,

$$(\text{時間})=3-1=2(\text{秒})$$

$$(\text{進んだ道のり})=\frac{27}{4}-\frac{3}{4}=\frac{24}{4}=6(\text{m})$$

$$(\text{平均の速さ})=\frac{(\text{進んだ道のり})}{(\text{時間})}=\frac{6}{2}=3(\text{m/s})$$

[問題]

関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ で、 x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合を m 、 x の値が 52 から 54 まで増加するときの変化の割合を n とする。 m と n の大きさを比べるとき、どのようなことがいえるか、次の①～④の中から正しいものを 1 つ選べ。

ア m と n は等しい。

イ m の方が大きい。

ウ n の方が大きい。

エ m と n のどちらが大きいかは、判断ができない。

(佐賀県)(**)

[解答欄]

[解答]ウ

[解説]

$y=ax^2$ で x が x_1 から x_2 へ増加するとき、

$$(\text{変化の割合})=\frac{(\text{yの増加量})}{(\text{xの増加量})}=\frac{ax_2^2-ax_1^2}{x_2-x_1}=\frac{a(x_2^2-x_1^2)}{x_2-x_1}=\frac{a(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=a(x_2+x_1)$$

したがって、 $y=\frac{1}{2}x^2$ で、

x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合 m は、 $m=\frac{1}{2}(2+4)=3$

x の値が 52 から 54 まで増加するときの変化の割合 n は、 $n=\frac{1}{2}(52+54)=53$

よって、 $m < n$ となる。

【】 グラフの特徴

[問題]

関数 $y = ax^2$ のグラフの特徴として適切なものを、次のア～オからすべて選び、その記号を書け。

ア 原点を通る。

イ x 軸について対称な曲線である。

ウ $a > 0$ のときは上に開き、 x 軸より下側にはない。

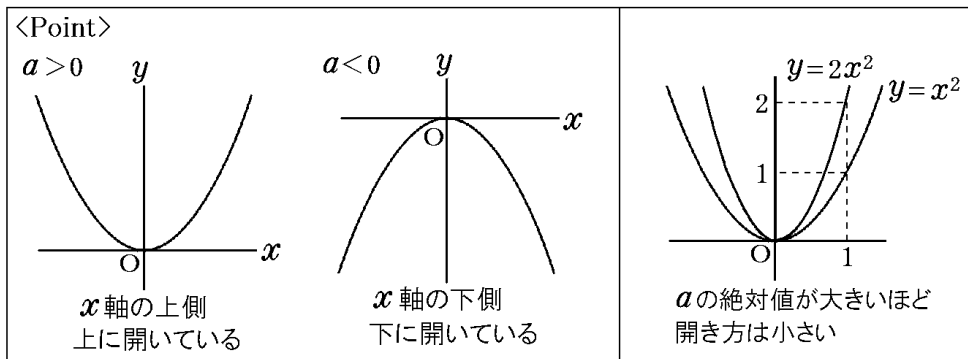
エ $a < 0$ のとき、 x の値が増加すると $x > 0$ の範囲では、 y の値は減少する。

オ a の値の絶対値が大きいほど、グラフの開き方は大きい。

(奈良県)(*)

[解答欄]

[ヒント]

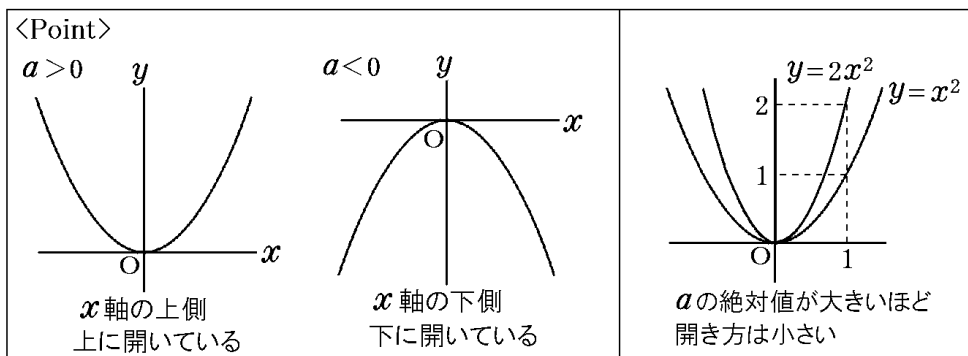


[解答]ア, ウ, エ

[解説]

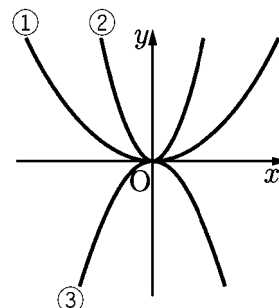
イは誤り。 $y = ax^2$ は y 軸について対称である。

オは誤り。 a の値の絶対値が大きいほど、グラフの開き方は小さい。



[問題]

右の図の①～③の放物線は、下のア～ウの関数のグラフである。
①～③は、それぞれどの関数のグラフか。ア～ウの中から選び、
その記号をそれぞれ書け。



ア $y = 2x^2$

イ $y = \frac{1}{3}x^2$

ウ $y = -x^2$

(広島県)

[解答欄]

①	②	③
---	---	---

[ヒント]

$y = mx^2$ で $m > 0$ のとき、グラフは x 軸の上側にあり、 $m < 0$ のときは x 軸の下側にある。
 $y = mx^2$ で m の絶対値が大きいほど開き方が小さい。

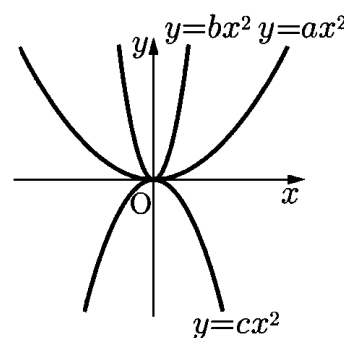
[解答]① イ ② ア ③ ウ

[解説]

$y = mx^2$ で $m > 0$ のとき、グラフは x 軸の上側にあり、 $m < 0$ のときは x 軸の下側にあるので、
①と②は $m > 0$ 、③は $m < 0$ である。したがって、③のグラフはウである。
また、 $y = mx^2$ で m の絶対値が大きいほど開き方が小さいので、①と②では②の絶対値が①より大きい。したがって、②はア、イのうちのアであることがわかる。

[問題]

右図は、3つの関数 $y = ax^2$ 、 $y = bx^2$ 、 $y = cx^2$ のグラフを、
同じ座標軸を使ってかいたものである。図の3つの関数に
ついて、比例定数 a 、 b 、 c を小さい順に左から並べて書け。



(長野県)(*)

[解答欄]

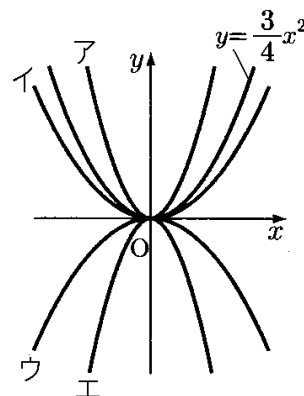
[解答] c, a, b

[解説]

$y = mx^2$ で $m > 0$ のとき、グラフは x 軸の上側にあり、 $m < 0$ のときは x 軸の下側にあるので、
 $a > 0$ 、 $b > 0$ 、 $c < 0$ である。
また、 $y = mx^2$ で m の絶対値が大きいほど開き方が小さいので、 $b > a$ であることがわかる。
したがって、 a, b, c を小さい順に並べると、 c, a, b となる。

[問題]

右の図のア～エは、 $y = ax^2$ の形で表される4つのグラフを、関数 $y = \frac{3}{4}x^2$ のグラフと同じ座標軸を使ってかいたものであり、そのうちの1つが関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフである。関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフを、ア～エから選び、記号で答えよ。



(山口県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

$y = ax^2$ で $a > 0$ のときは放物線のグラフは上に開く。

a の絶対値が小さいほど開き方は大きくなる。

[解答]イ

[解説]

$y = ax^2$ で $a > 0$ のときは放物線のグラフは上に開いているので、 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフはアかイである。また、 a の絶対値が大きいほど開き方は小さくなり、 a の絶対値が小さいほど開き方は大きくなる。 $y = \frac{1}{2}x^2$ の $\frac{1}{2}$ は、 $y = \frac{3}{4}x^2$ の $\frac{3}{4}$ より小さいので $y = \frac{1}{2}x^2$ の開き方は $y = \frac{3}{4}x^2$ より大きい。よって、 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフはイである。

[問題]

関数 $y = 2x^2$ のグラフと x 軸について対称であるグラフの式が $y = ax^2$ である。このとき、 a の値を求めよ。

(沖縄県)(*)

[解答欄]

[解答]−2

[解説]

$y = 2x^2$ と x 軸に対称なグラフの式は $y = -2x^2$ である。

[問題]

y の値が正の値をとらない関数を、次のア～エから 1 つ選べ。

ア $y = -\frac{x}{2}$ イ $y = -\frac{2}{x}$ ウ $y = -2x + 3$ エ $y = -2x^2$

(岐阜県)(*)

[解答欄]

--

[解答]エ

[解説]

エの $y = -2x^2$ は下に開いており、 $y \leq 0$ となる。

[問題]

関数 $y = -x^2$ の値の増減について説明した次の文が正しくなるように、文章中の①、②の()内からそれぞれ適語を選べ。

$x < 0$ の範囲では、 x の値が増加するとき、 y の値は①(増加／減少)する。また、 $x > 0$ の範囲では、 x の値が増加するとき、 y の値は②(増加／減少)する。

(秋田県)(*)

[解答欄]

①	②
---	---

[解答]① 増加 ② 減少

【】 座標・長さなど

【】 放物線と直線の式

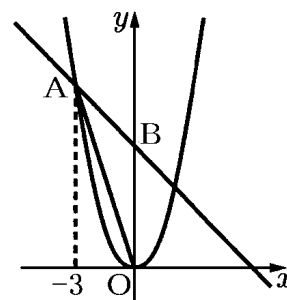
[問題]

右の図のように、関数 $y = x^2$ のグラフ上に、 x 座標が -3 となる点 A をとる。点 A を通り、傾きが -1 となる直線と y 軸との交点を B とする。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) 2 点 A, B を通る直線の式を答えよ。

(2) $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

(新潟県)**



[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]

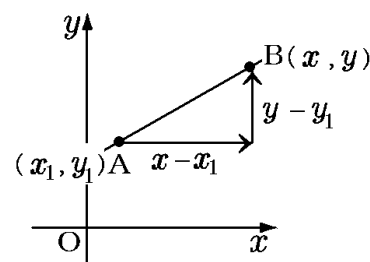
傾きが m で点 (x_1, y_1) を通る直線の式は $y = m(x - x_1) + y_1$ である。

[解答](1) $y = -x + 6$ (2) 9

[解説]

傾きが m で点 (x_1, y_1) を通る直線の式は $y = m(x - x_1) + y_1$ である。参考までに右図を使ってこの公式を導いておく。

直線 AB の傾き m は、図から、 $m = \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m, \quad y - y_1 = m(x - x_1),$$

よって、 $y = m(x - x_1) + y_1$

(1) $x = -3$ を $y = x^2$ に代入すると、 $y = 9$ なので、点 A の座標は $(-3, 9)$ である。

2 点 A, B を通る直線の傾きは -1 なので、

$y = m(x - x_1) + y_1$ の公式を使うと、

$$y = -(x + 3) + 9, \quad y = -x + 6$$

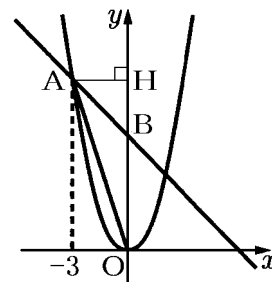
* $y = -x + b$ において、 $(-3, 9)$ を代入することで b を求めることもできるが、慣れると $y = m(x - x_1) + y_1$ の公式を使う方が簡単である。

(2) 右図で、 $\triangle OAB$ の底辺を OB とすると高さは AH である。

B は $y = -x + 6$ の y 切片なので、 $OB = 6$

点 A の x 座標は -3 なので、 $AH = 3$

$$\text{よって、} (\triangle OAB \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times OB \times AH = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

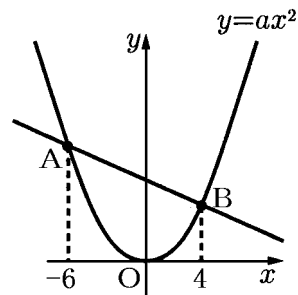


[直線の式の求め方]

傾きが m で (x_1, y_1) を通る直線
 $y = m(x - x_1) + y_1$

[問題]

右の図のように、関数 $y = ax^2$ ($a > 0$) のグラフ上に 2 点 A, B があり、 x 座標はそれぞれ $-6, 4$ である。直線 AB の傾きが $-\frac{1}{2}$ であるとき、 a の値を求めよ。



(栃木県)

[解答欄]

[ヒント]

2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線の傾き m は、 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

[解答] $a = \frac{1}{4}$

[解説]

2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線の傾き m は、 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ で表される。

そこで、まず、A, B の座標を a を使って表す。

点 A: $x = -6$ を $y = ax^2$ に代入すると、 $y = 36a$ なので、A の座標は $(-6, 36a)$

点 B: $x = 4$ を $y = ax^2$ に代入すると、 $y = 16a$ なので、B の座標は $(4, 16a)$

よって、(直線 AB の傾き) $= \frac{16a - 36a}{4 - (-6)} = \frac{-20a}{10} = -2a$

直線 AB の傾きは $-\frac{1}{2}$ なので、 $-2a = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{4}$

[問題]

右の図で、2 点 A, B は関数 $y = x^2$ のグラフ上の点であり、点 A の x 座標は -3 、点 B の x 座標は 2 である。直線 AB と x 軸との交点を C とする。このとき、点 C の座標を求めよ。

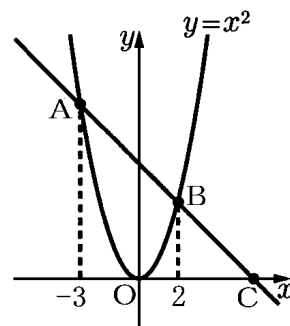
(茨城県)**

[解答欄]

[ヒント]

A, B の座標 → 直線 AB の式 → 点 C の座標

2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線の式は、 $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$



[解答](6, 0)

[解説]

まず、直線 AB の式を求める。

点 A の x 座標は -3 なので、 $y = x^2 = 9$ よって、 $A(-3, 9)$

点 B の x 座標は 2 なので、 $y = x^2 = 4$ よって、 $B(2, 4)$

2 点の座標から直線の式を求めるためには、連立方程式で解くこともできるが、計算が煩雑になる。

傾きが m で点 (x_1, y_1) を通る直線は、

$$y = m(x - x_1) + y_1 \text{ と表される。}$$

2 点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) が与えられているときは、

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ なので、} m \text{ を } y = m(x - x_1) + y_1 \text{ に代入すると、}$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \text{ となる。}$$

この公式を使って 2 点 $A(-3, 9)$, $B(2, 4)$ を通る直線の式を求めると、

$$y = \frac{4 - 9}{2 - (-3)}(x - 2) + 4, \quad y = \frac{-5}{5}(x - 2) + 4, \quad y = -x + 6$$

点 C の y 座標は 0 なので、 $y = -x + 6$ に $y = 0$ を代入して、 $0 = -x + 6$, $x = 6$

よって、点 C の座標は $(6, 0)$ となることがわかる。

※この公式の傾きを求めるとき、ここでは(Bの座標)−(Aの座標)で計算したが、反対にして

$\frac{9 - 4}{-3 - 2}$ としてもかまわない。また、ここでは、 x_1, y_1 は点 B の座標を使ったが、点 A の座

標を使ってもかまわない。

[直線の式の求め方]

傾きが m で (x_1, y_1) を通る直線
 $y = m(x - x_1) + y_1$

2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線
 $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$

[問題]

右の図で、曲線は関数 $y = 2x^2$ のグラフである。曲線上に x 座標が $-3, 2$ である 2 点 A, B をとり、この 2 点を通る直線 l をひく。

直線 l と x 軸との交点を C とするとき、 $\triangle AOC$ の面積を求めよ。

ただし、座標軸の単位の長さを 1cm とする。

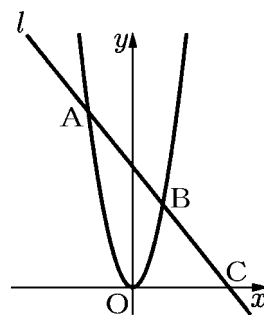
(埼玉県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

点 A, B の座標 → 直線 l の式 → 点 C の x 座標

[解答] 54cm^2



【解説】

点 A の座標 : $x = -3$ を $y = 2x^2$ に代入して $y = 2 \times 9 = 18$ なので, $A(-3, 18)$

点 B の座標 : $x = 2$ を $y = 2x^2$ に代入して $y = 2 \times 4 = 8$ なので, $B(2, 8)$

$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って 2 点 $A(-3, 18)$, $B(2, 8)$ を通る直線 l の式を求める

$$\text{と, } y = \frac{8-18}{2-(-3)}(x-2)+8, \quad y = -2(x-2)+8, \quad y = -2x+12$$

点 C の x 座標 : $y = -2x+12$ に $y = 0$ を代入して, $0 = -2x+12$, $2x = 12$, $x = 6$

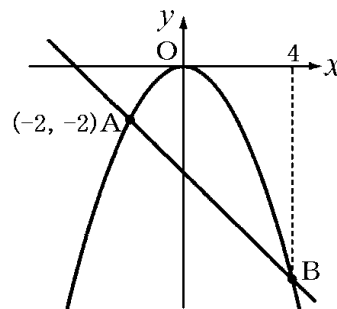
よって, $OC = 6$

$\triangle AOC$ の底辺を OC とすると, 高さは, 点 A の y 座標の 18 と等しくなるので,

$$(\triangle AOC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times 6 \times 18 = 54(\text{cm}^2)$$

【問題】

右の図のように, 関数 $y = ax^2$ のグラフ上に点 $A(-2, -2)$ と点 B があり, 点 B の x 座標は 4 である。このとき, 次の各問いに答えよ。



- (1) a の値を求めよ。
- (2) 点 B の y 座標を求めよ。
- (3) 直線 AB の式を求めよ。

(佐賀県)**

【解答欄】

(1)	(2)	(3)
-----	-----	-----

【解答】(1) $-\frac{1}{2}$ (2) -8 (3) $y = -x - 4$

【解説】

(1) 関数 $y = ax^2$ のグラフ上に点 $A(-2, -2)$ があるので, $y = ax^2$ に $x = -2$, $y = -2$ を代入すると, $-2 = a \times (-2)^2$ が成り立つ。よって, $-2 = 4a$, $a = -\frac{2}{4}$, $a = -\frac{1}{2}$

(2) (1) より, $a = -\frac{1}{2}$ なので, この放物線の式は, $y = -\frac{1}{2}x^2$ になる。

$$y = -\frac{1}{2}x^2 \text{ に } x = 4 \text{ を代入すると, } y = -\frac{1}{2} \times 4^2 = -8$$

(3) $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って直線 AB の式を求める。

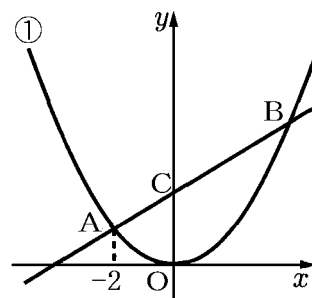
仮定より $A(-2, -2)$, (2)より $B(4, -8)$ なので,

$$y = \frac{-8 - (-2)}{4 - (-2)}(x - 4) - 8, \quad y = \frac{-6}{6}(x - 4) - 8$$

$$y = -(x - 4) - 8, \quad y = -x - 4$$

[問題]

右の図のように、関数 $y = \frac{1}{4}x^2 \dots \textcircled{1}$ のグラフ上に 2 点 A, B
がある。A の x 座標は -2 , B の x 座標は正で、B の y 座標は A
の y 座標より 3 だけ大きい。また、点 C は直線 AB と y 軸との
交点である。このとき、次の各問いに答えよ。



(1) 点 A の y 座標を求めよ。

(2) 点 B の座標を求めよ。

(3) 直線 AB の式を求めよ。

(4) 線分 BC 上に 2 点 B, C とは異なる点 P をとる。また、関数 $\textcircled{1}$ のグラフ上に点 Q を、線
分 PQ が y 軸と平行になるようにとり、PQ の延長と x 軸との交点を R とする。

PQ : QR = 5 : 1 となるときの P の座標を求めよ。

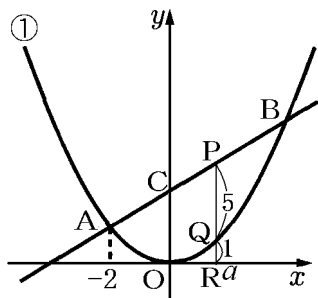
(熊本県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
(4)		

[ヒント]

(4) P, Q, R の位置関係は次の図のようになる。



[解答](1) 1 (2) (4, 4) (3) $y = \frac{1}{2}x + 2$ (4) $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

【解説】

(1) $x = -2$ を $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入すると、 $y = \frac{1}{4} \times 4 = 1$ なので、点 A の y 座標は 1 である。

(2) (1) より点 A の y 座標は 1 で、「B の y 座標は A の y 座標より 3 だけ大きい」ので、

B の y 座標は、 $1 + 3 = 4$ である。 $y = 4$ を $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入すると、 $4 = \frac{1}{4}x^2$ 、 $x^2 = 16$ 、

$x > 0$ なので、 $x = 4$ よって、点 B の座標は (4, 4) である。

(3) $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って直線 AB の式を求める。

点 A(-2, 1), 点 B(4, 4) なので、

$$y = \frac{4-1}{4-(-2)}(x-4)+4, \quad y = \frac{3}{6}(x-4)+4, \quad y = \frac{1}{2}x+2$$

(4) P, Q, R の位置関係は右図のようになる。

点 P, Q, R の x 座標を $x = a$ とすると、

点 P の y 座標は、 $x = a$ を $y = \frac{1}{2}x + 2$ に代入して、 $y = \frac{1}{2}a + 2$

点 Q の y 座標は、 $x = a$ を $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入して、 $y = \frac{1}{4}a^2$

よって、 $PR = \frac{1}{2}a + 2$ 、 $QR = \frac{1}{4}a^2$

$PQ : QR = 5 : 1$ より、 $PR : QR = (5+1) : 1$ 、 $PR : QR = 6 : 1$

比の外項の積は内項の積に等しいので、 $PR \times 1 = QR \times 6$

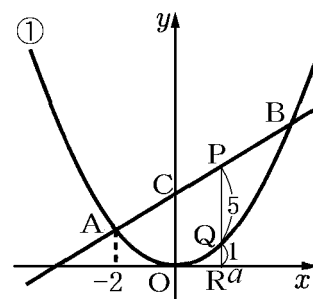
したがって、 $\frac{1}{2}a + 2 = \frac{1}{4}a^2 \times 6$ 、 $a + 4 = 3a^2$ 、 $3a^2 - a - 4 = 0$

解の公式を使うと、 $a = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{6} = \frac{1 \pm 7}{6}$ 、 $a = \frac{4}{3}$ 、 -1

$a > 0$ なので、 $a = \frac{4}{3}$ よって、点 P の x 座標は $\frac{4}{3}$ である。

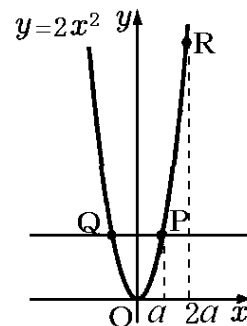
点 P の y 座標は、 $x = \frac{4}{3}$ を $y = \frac{1}{2}x + 2$ に代入して、 $y = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} + 2 = \frac{8}{3}$

したがって、点 P の座標は $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$ である。



[問題]

右の図のように、関数 $y=2x^2$ のグラフ上に 2 点 P, Q があり、直線 PQ は x 軸に平行である。点 P の x 座標を a とする。このとき、次の各問に答えよ。ただし、 $a > 0$ とする。



(1) 点 Q の座標を a を用いて表せ。

(2) 関数 $y=2x^2$ のグラフ上で x 座標が $2a$ である点を R とする。2 点 Q, R を通る直線の傾きが 7 のとき、 a の値を求めよ。

(京都府)**

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]

(2) 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線の傾きは $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ である。

[解答](1) $(-a, 2a^2)$ (2) $a = \frac{7}{2}$

[解説]

(1) 点 P の x 座標は a であるので、 $y=2x^2$ に $x=a$ を代入すると、 $y=2a^2$ によって、点 P の座標は $(a, 2a^2)$ である。「直線 PQ は x 軸に平行である」ので、点 Q は y 軸について点 P と線対称の位置にある。したがって、点 Q の座標は $(-a, 2a^2)$ である。

(2) まず、点 R の座標を求める。

点 R の x 座標は $2a$ なので、 $y=2x^2$ に $x=2a$ を代入すると、 $y=2 \times (2a)^2 = 8a^2$ によって、点 R の座標は $(2a, 8a^2)$ となる。

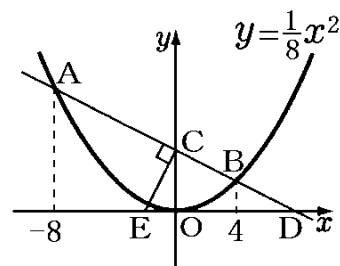
$Q(-a, 2a^2), R(2a, 8a^2)$ なので、

$$(\text{直線 QR の傾き}) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8a^2 - 2a^2}{2a - (-a)} = 7$$

$$\frac{6a^2}{3a} = 7, \quad 2a = 7, \quad a = \frac{7}{2}$$

[問題]

右の図のように、関数 $y = \frac{1}{8}x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があり、2 点 A, B の x 座標はそれぞれ $-8, 4$ である。2 点 A, B を通る直線と y 軸との交点を C, x 軸との交点を D とする。また、 x 軸上に $\angle ACE = 90^\circ$ となるように点 E をとる。このとき、次の各問いに答えよ。



(1) 2 点 A, B を通る直線の式を求めよ。

(2) 点 D の座標を求めよ。

(3) 線分 DE の長さを求めよ。

(京都府)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
-----	-----	-----

[ヒント]

(3) 「 $\angle ACE = 90^\circ$ 」なので、直線 CE は直線 AB と垂直である。

傾き m の直線と傾き n の直線が垂直であるとき、 $mn = -1$ が成り立つ。

したがって、(直線 CE の傾き) \times (直線 AB の傾き) $= -1$

[解答](1) $y = -\frac{1}{2}x + 4$ (2) $(8, 0)$ (3) 10

[解説]

(1) まず、点 A, B の座標を求める。

点 A の x 座標は -8 なので、 $y = \frac{1}{8}x^2$ に $x = -8$ を代入して、 $y = \frac{1}{8} \times (-8)^2 = 8$

点 B の x 座標は 4 なので、 $y = \frac{1}{8}x^2$ に $x = 4$ を代入して、 $y = \frac{1}{8} \times 4^2 = 2$

よって、 $A(-8, 8)$, $B(4, 2)$

$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使うと、

$$y = \frac{2 - 8}{4 - (-8)}(x - 4) + 2, \quad y = -\frac{1}{2}(x - 4) + 2, \quad y = -\frac{1}{2}x + 4$$

(2) 点 D は $y = -\frac{1}{2}x + 4$ 上にあり、 y 座標が 0 なので、 $y = -\frac{1}{2}x + 4$ に $y = 0$ を代入して、

$$0 = -\frac{1}{2}x + 4, \quad 0 = -x + 8, \quad x = 8$$

よって、点 D の座標は $(8, 0)$ となる。

(3) まず、直線 CE の式を求める。

「 $\angle ACE=90^\circ$ 」なので、直線 CE は直線 AB と垂直である。

傾き m の直線と傾き n の直線が垂直であるとき、 $mn=-1$ が成り立つ。

したがって、(直線 CE の傾き) \times (直線 AB の傾き) $= -1$

$$\text{(直線 CE の傾き)} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1, \text{(直線 CE の傾き)} = -1 \div \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \times (-2) = 2$$

点 C の y 座標が直線 CE の y 切片になる。

点 C は直線 AB ($y = -\frac{1}{2}x + 4$) の y 切片でもあるので、 y 切片は 4 である。

したがって、直線 CE の式は、 $y = 2x + 4$

$y = 2x + 4$ に $y = 0$ を代入すると、 $0 = 2x + 4$, $2x = -4$, $x = -2$

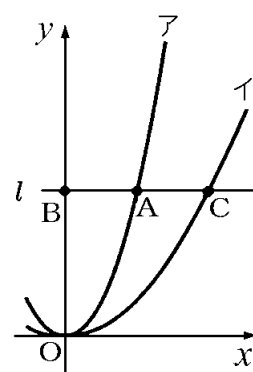
よって、点 E の座標は $(-2, 0)$ である。

$$\text{(DE の長さ)} = \text{(点 D の } x \text{ 座標)} - \text{(点 E の } x \text{ 座標)} = 8 - (-2) = 10$$

【】 座標・長さなど

[問題]

右の図において、アは関数 $y = x^2$ 、イは関数 $y = ax^2 (a > 0)$ のグラフである。点 A はア上の点であり、 x 座標は 2 である。点 A を通り x 軸に平行な直線を l とする。直線 l と y 軸の交点を B とし、直線 l とイの交点のうち、 x 座標が正である点を C とする。点 A が線分 BC の中点であるとき、 a の値を求めよ。



(秋田県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

点 A の x 座標は 2 → 点 A の y 座標 → 点 C の y 座標

点 A の x 座標は 2, A は線分 BC の中点 → 点 C の x 座標

点 C の x, y 座標 → $y = ax^2$ に代入

[解答] $a = \frac{1}{4}$

[解説]

点 A の x 座標は 2 であるので、

$y = x^2$ に $x = 2$ を代入すると、 $y = 2^2 = 4$

よって、点 A の y 座標は 4 である。

したがって、点 C の y 座標も 4 である。

また、点 A は線分 BC の中点であるので、

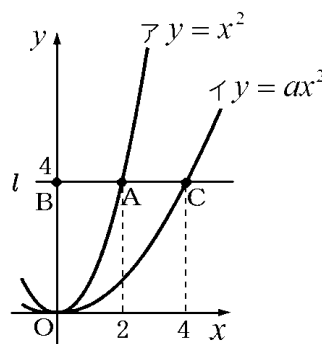
点 C の x 座標は 4 である。

よって、点 C の座標は (4, 4) である。

$y = ax^2$ は、点 C(4, 4) を通るので、 $y = ax^2$ に

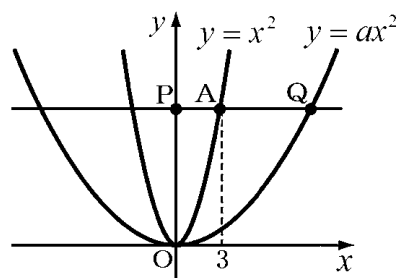
$x = 4, y = 4$ を代入すると、

$4 = a \times 4^2, 16a = 4, a = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ が成り立つ。



[問題]

右の図は、2つの関数 $y = x^2$, $y = ax^2$ ($a > 0$) のグラフである。関数 $y = x^2$ のグラフ上で、 x 座標が 3 である点を A とする。また、 A を通り x 軸に平行な直線が、 y 軸と交わる点を P 、関数 $y = ax^2$ のグラフと交わる点のうち、 x 座標が正の数である点を Q とする。このとき、 $OP = PQ$ となるような a の値を求めよ。



(栃木県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

点 A の x 座標は 3 → 点 A の y 座標 → 点 Q の y 座標

点 A の y 座標 → OP → PQ → 点 Q の x 座標

点 Q の x, y 座標 → $y = ax^2$ に代入

[解答] $a = \frac{1}{9}$

[解説]

点 A の x 座標は 3 であるので、 $y = x^2$ に $x = 3$ を代入すると、 $y = 3^2 = 9$ である。

よって、点 A の y 座標は 9 で、点 Q の y 座標も 9 になる。

したがって、 $OP = 9$ になる。

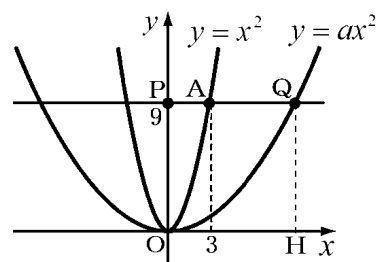
仮定より $OP = PQ$ なので、 $PQ = 9$

よって、 $OH = PQ = 9$ なので、点 Q の x 座標は 9 になる。

以上より、点 Q の座標は (9, 9) であることがわかる。

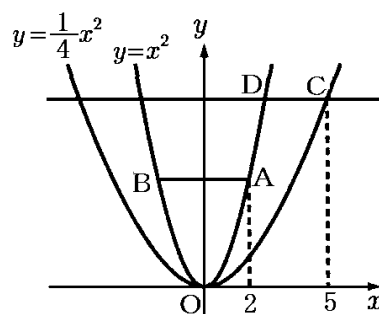
点 Q は、 $y = ax^2$ 上にあるので、 $y = ax^2$ に $x = 9$, $y = 9$ を代入すると、

$$9 = a \times 9^2, \quad 81a = 9, \quad a = \frac{9}{81} = \frac{1}{9} \text{ になる。}$$



[問題]

右の図のように、関数 $y = x^2$ のグラフ上に、 x 座標が 2 である点 A と、点 A と y 座標が等しく x 座標が異なる点 B をとり、点 A と点 B を結ぶ。また、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に、 x 座標が 5 である点 C をとり、点 C を通り x 軸に平行な直線と関数 $y = x^2$ のグラフとの交点のうち、 x 座標が正である点を D とする。線分 AB と線分 CD の長さの比を求めよ。



(宮城県)**

[解答欄]

AB : CD =

[ヒント]

C の x 座標は 5 → C の y 座標 = D の y 座標 → D の x 座標 → CD の長さ

[解答] AB : CD = 8 : 5

[解説]

まず、線分 AB の長さを求める。「点 A と y 座標が等しく x 座標が異なる点 B」より、点 B の x 座標は -2 である。よって、 $AB = 2 - (-2) = 4 \cdots \textcircled{1}$

次に、線分 CD の長さを求める。点 C の x 座標が 5 なので、点 D の x 座標がわかれば CD の長さを求めることができる。

点 C の x 座標が 5 なので、 $y = \frac{1}{4}x^2$ に $x = 5$ を代入すると、 $y = \frac{1}{4} \times 5^2 = \frac{25}{4}$

したがって、点 C の y 座標は $\frac{25}{4}$ になる。

点 D の y 座標は、点 C の y 座標と等しいので、 $\frac{25}{4}$ である。

$y = x^2$ に $y = \frac{25}{4}$ を代入すると、 $\frac{25}{4} = x^2$ 、よって、 $x = \pm \frac{5}{2}$

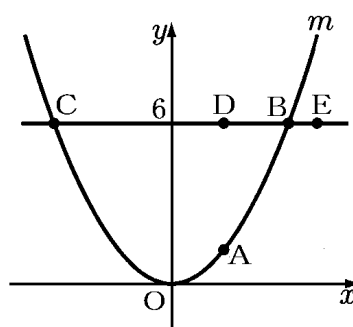
点 D の x 座標は正であるので、 $x = \frac{5}{2}$

点 C の x 座標が 5、点 D の x 座標が $\frac{5}{2}$ なので、 $CD = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \cdots \textcircled{2}$

①、②より、 $AB : CD = 4 : \frac{5}{2} = 8 : 5$

[問題]

右図において、 m は $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフを表す。A, B, Cは m 上の点であって、Aの x 座標は2である。Bの x 座標は、Cの x 座標より大きい。D, Eは、BとCとを結んでできる直線上の点であり、B, C, D, Eの y 座標はいずれも6である。Dの x 座標はAの x 座標に等しく、Eの x 座標はBの x 座標より大きい。



- (1) Bの x 座標とCの x 座標をそれぞれ求めよ。
 (2) Eの x 座標を t とする。DE²=CE×BEとなるときの t の値を求めよ。

(大阪府)**

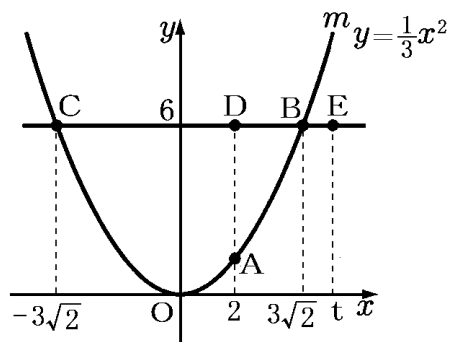
[解答欄]

(1)B :	C :	(2)
--------	-----	-----

[ヒント]

(1) 点B, Cの y 座標は6→ $y=\frac{1}{3}x^2$ に代入

(2) 右図より、DE= $t-2$
 CE= $t-(-3\sqrt{2})=t+3\sqrt{2}$
 BE= $t-3\sqrt{2}$



[解答](1)B : $3\sqrt{2}$ C : $-3\sqrt{2}$ (2) $t=\frac{11}{2}$

[解説]

(1) $y=\frac{1}{3}x^2$ 上の点B, Cの y 座標は6であるので、

$$y=\frac{1}{3}x^2 \text{に } y=6 \text{を代入して、 } 6=\frac{1}{3}x^2$$

$$x^2=18, \quad x=\pm\sqrt{18}=\pm 3\sqrt{2}$$

点Bの x 座標は正なので、 $x=3\sqrt{2}$

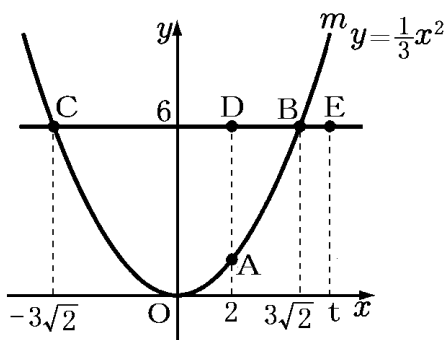
点Cの x 座標は $-3\sqrt{2}$

(2) 右図より、DE= $t-2$

$$CE=t-(-3\sqrt{2})=t+3\sqrt{2}, \quad BE=t-3\sqrt{2}$$

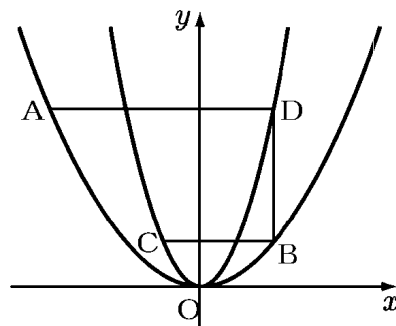
$$DE^2=CE \times BE \text{ が成り立つので、 } (t-2)^2=(t+3\sqrt{2})(t-3\sqrt{2})$$

$$t^2-4t+4=t^2-(3\sqrt{2})^2, \quad -4t=-18-4, \quad -4t=-22 \quad \text{よって、 } t=\frac{22}{4}=\frac{11}{2}$$



[問題]

右の図のように、関数 $y=x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B, 関数 $y=4x^2$ のグラフ上に 2 点 C, D がある。点 A, C の x 座標は負の数、点 B, D の x 座標は正の数で、線分 AD, BC は x 軸に平行、線分 BD は y 軸に平行である。このとき、 $AD : BC$ を求めよ。



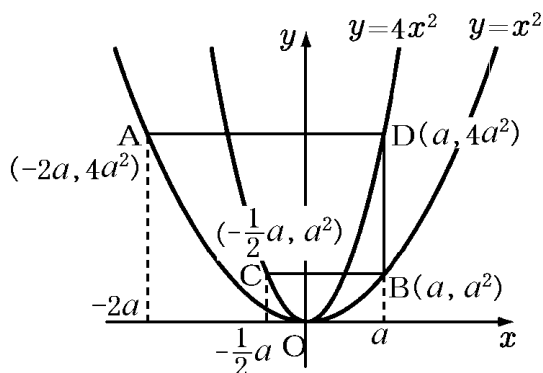
(広島県改)(**)

[解答欄]

AD : BC =

[ヒント]

まず、点 B の x 座標を a ($a > 0$) とし、B, C, D, A の座標を a を使って表す。



[解答] $AD : BC = 2 : 1$

[解説]

まず、点 B の x 座標を a ($a > 0$) とし、B, C, D, A の座標を a を使って表す。

点 B は $y=x^2$ 上にあるので、 $y=x^2$ に $x=a$ を代入すると、 $y=a^2$

よって、点 B の座標は (a, a^2) になる。

点 C の y 座標は点 B の y 座標 (a^2) と同じである。

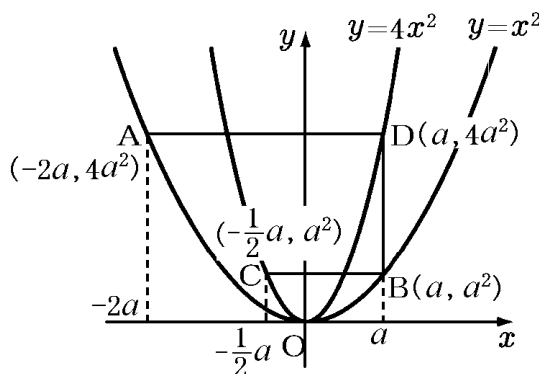
点 C は $y=4x^2$ 上にあるので、 $y=4x^2$ に $y=a^2$ を代入して、

$$a^2 = 4x^2, \quad x^2 = \frac{1}{4}a^2, \quad x = \pm \frac{1}{2}a$$

点 C の x 座標は負であるので、 $x = -\frac{1}{2}a$

よって、点 C の座標は $(-\frac{1}{2}a, a^2)$

点 D は $y=4x^2$ 上にあるので、 $y=4x^2$ に $x=a$ を代入すると、 $y=4a^2$



よって、点 D の座標は $(a, 4a^2)$ になる。

点 A の y 座標は点 D の y 座標 $(4a^2)$ と同じである。

点 A は $y = x^2$ 上にあるので、 $y = x^2$ に $y = 4a^2$ を代入すると、
 $4a^2 = x^2$, $x^2 = 4a^2$, $x = \pm 2a$

点 A の x 座標は負であるので、 $x = -2a$

よって、点 A の座標は $(-2a, 4a^2)$

B, C, D, A の座標を記入すると、上図のようになる。図より、

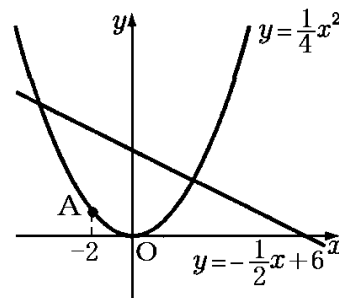
$$AD = (\text{点 D の } x \text{ 座標}) - (\text{点 A の } x \text{ 座標}) = a - (-2a) = a + 2a = 3a$$

$$BC = (\text{点 B の } x \text{ 座標}) - (\text{点 C の } x \text{ 座標}) = a - \left(-\frac{1}{2}a\right) = a + \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$$

$$\text{よって、} AD : BC = 3a : \frac{3}{2}a = 6a : 3a = 2 : 1$$

[問題]

右の図のように、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフと直線 $y = -\frac{1}{2}x + 6$ がある。このとき、次の各問いに答えよ。



(1) 関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に、x 座標が -2 となる点 A をとるとき、A の y 座標を求めよ。

(2) 関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフ上を動く点 P と、直線 $y = -\frac{1}{2}x + 6$ 上

を動く点 Q がある。P, Q の x 座標が等しく、 $PQ = 6$ であるとき、P の x 座標をすべて求めよ。

(岩手県)(**)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]

(2) 放物線が直線より上側にあるとき、 $\frac{1}{4}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x + 6\right) = 6$

放物線が直線より下側にあるとき、 $-\frac{1}{2}x + 6 - \frac{1}{4}x^2 = 6$

[解答](1) 1 (2) $-8, -2, 0, 6$

[解説]

(1) $x = -2$ を $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入すると, $y = \frac{1}{4} \times 4 = 1$

(2) 放物線が直線より上側にあるとき,

$$\frac{1}{4}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x + 6\right) = 6$$

$$x^2 + 2x - 24 = 24, \quad x^2 + 2x - 48 = 0, \quad (x+8)(x-6) = 0, \quad x = -8, 6$$

放物線が直線より下側にあるとき,

$$-\frac{1}{2}x + 6 - \frac{1}{4}x^2 = 6$$

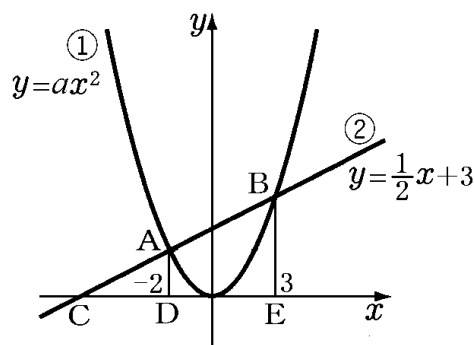
$$-2x - x^2 = 0, \quad x^2 + 2x = 0, \quad x(x+2) = 0, \quad x = 0, -2$$

よって, $PQ = 6$ であるとき, P の x 座標は, $-8, -2, 0, 6$

【】 線分比など

[問題]

右の図において、①は関数 $y = ax^2$ ，②は関数 $y = \frac{1}{2}x + 3$ のグラフである。点 A, B は①と②の交点で、 x 座標はそれぞれ -2 , 3 である。このとき、次の各問いに答えよ。



- (1) a の値を求めよ。
- (2) 図のように、②と x 軸との交点を C とし、点 A, B から x 軸に垂線をひき、その交点をそれぞれ D , E とする。 $BA : AC$ を最も簡単な整数の比で表せ。

(山梨県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]

(2) $\triangle CAD$ と $\triangle CBE$ で、 AD , BE は x 軸と垂直なので $AD \parallel BE$ となる。平行線の性質より、 $BA : AC = ED : DC$ が成り立つ。

[解答](1) $a = \frac{1}{2}$ (2) $5 : 4$

[解説]

(1) まず、点 A の座標を求める。点 A の x 座標は $x = -2$ なので、 $x = -2$ を $y = \frac{1}{2}x + 3$ に代入

すると、 $y = \frac{1}{2} \times (-2) + 3 = -1 + 3 = 2$ よって、点 A の座標は $(-2, 2)$ である。

点 A は $y = ax^2$ 上の点であるので、 $y = ax^2$ に $x = -2$, $y = 2$ を代入すると、

$$2 = a \times (-2)^2, \quad 4a = 2, \quad a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(2) $\triangle CAD$ と $\triangle CBE$ で、 AD , BE は x 軸と垂直なので $AD \parallel BE$ となる。

平行線の性質より、 $BA : AC = ED : DC$ が成り立つ。…①

点 E の x 座標は 3 、点 D の x 座標は -2 なので、

$$ED = (\text{点 E の } x \text{ 座標}) - (\text{点 D の } x \text{ 座標}) = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5 \cdots \text{②}$$

DC の長さを求めるためには、点 C の x 座標を求める必要がある。

点 C は $y = \frac{1}{2}x + 3$ 上にあり、 y 座標は 0 であるので、 $y = \frac{1}{2}x + 3$ に $y = 0$ を代入すると、

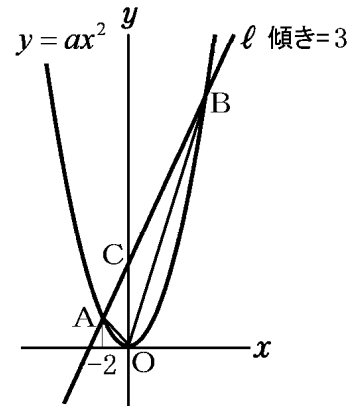
$$0 = \frac{1}{2}x + 3, \quad x + 6 = 0, \quad x = -6$$

したがって、 $DC = (\text{点 D の } x \text{ 座標}) - (\text{点 C の } x \text{ 座標}) = (-2) - (-6) = -2 + 6 = 4 \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③より、 $BA : AC = ED : DC = 5 : 4$

[問題]

右の図の放物線は関数 $y = ax^2$ のグラフであり、直線 l と 2 点 A, B で交わっている。また、点 C は直線 l と y 軸との交点である。点 A の x 座標が -2 、直線 l の傾きが 3 であり、 $\triangle AOC$ と $\triangle BOC$ の面積比が $1 : 3$ であるとき、 a の値を求めよ。



(三重県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

$\triangle AOC$ の底辺を AC, $\triangle BOC$ の底辺を BC とすると、
高さは共通になるので、

$AC : CB = (\triangle AOC \text{ の面積}) : (\triangle BOC \text{ の面積}) = 1 : 3$ となる。

[解答] $a = \frac{3}{4}$

[解説]

<Point> 面積比 \rightarrow 底辺の比 $\rightarrow x$ 座標の比

$\triangle AOC$ の底辺を AC, $\triangle BOC$ の底辺を BC とすると、
高さは共通になるので、

$AC : CB = (\triangle AOC \text{ の面積}) : (\triangle BOC \text{ の面積}) = 1 : 3$ となる。

図のように、 x 軸に垂線 AP, BQ をひくと、 $AP \parallel CO \parallel BQ$ なので、
 $PO : OQ = AC : CB = 1 : 3$ となる。

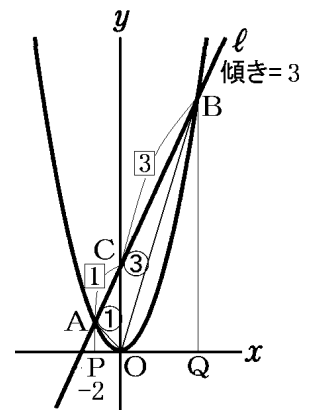
点 A の x 座標は -2 なので P の x 座標も -2 で、点 Q の x 座標は
 $2 \times 3 = 6$ になる。したがって、点 B の x 座標も 6 になる。

点 A, B は $y = ax^2$ 上にあるので、

点 A の y 座標は、 $x = -2$ を $y = ax^2$ に代入して、 $y = a \times (-2)^2 = 4a$

点 B の y 座標は、 $x = 6$ を $y = ax^2$ に代入して、 $y = a \times 6^2 = 36a$

したがって、(直線 AB の傾き) $= \frac{36a - 4a}{6 - (-2)} = \frac{32a}{8} = 4a = 3$ よって、 $a = 3 \div 4 = \frac{3}{4}$



[問題]

右の図のように、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上の点 $A(-4, 8)$, $B(2, 2)$ を通る直線 l がある。また、この直線が y 軸および関数 $y = \frac{a}{x}$ (a は負の定数, $x > 0$) のグラフと交わる点を、それぞれ P , Q とする。 $\triangle OAP : \triangle OQP = 2 : 3$ になるとき、 a の値を求めよ。

(沖縄県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

$\triangle OAP$ の底辺を AP , $\triangle OQP$ の底辺を PQ とすると、高さは O から l におろした垂線の長さで共通になる。

したがって、底辺の比は面積比と等しくなり、

$$AP : PQ = \triangle OAP : \triangle OQP = 2 : 3 \text{ になる。}$$

右図のように、点 A, Q から x 軸に垂線 AC, QD をひくと、 $AC \parallel PO \parallel QD$ なので、

$$CO : OD = AP : PQ = 2 : 3 \text{ になる。}$$

[解答] $a = -12$

[解説]

<Point> 面積比 \rightarrow 底辺の比 $\rightarrow x$ 座標の比

$\triangle OAP$ の底辺を AP , $\triangle OQP$ の底辺を PQ とすると、高さは O から l におろした垂線の長さで共通になる。

したがって、底辺の比は面積比と等しくなり、

$$AP : PQ = \triangle OAP : \triangle OQP = 2 : 3 \text{ になる。}$$

右図のように、点 A, Q から x 軸に垂線 AC, QD をひくと、 $AC \parallel PO \parallel QD$ なので、

$$CO : OD = AP : PQ = 2 : 3 \text{ になる。}$$

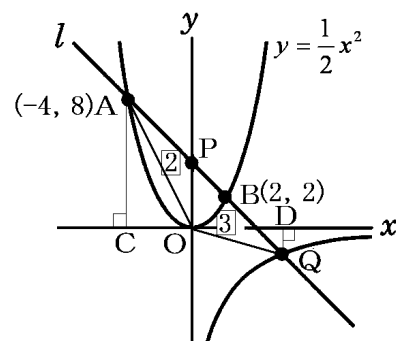
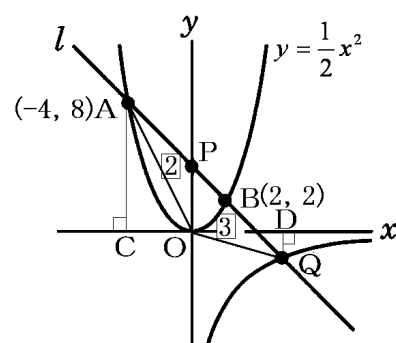
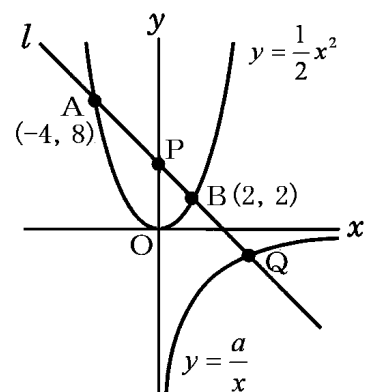
$$CO = 4 \text{ なので, } 4 : OD = 2 : 3 \text{ となる。}$$

$$\text{したがって, } 2OD = 12, \text{ } OD = 6$$

よって、点 Q の x 座標は 6 になる。

点 Q の y 座標がわかれば、 $y = \frac{a}{x}$ に代入して a の値を求めることができる。

そこで、直線 l の式を求める。



2点 $A(-4, 8)$, $B(2, 2)$ を通る直線の式は、 $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式より、

$$y = \frac{2 - 8}{2 - (-4)}(x - 2) + 2, \quad y = -(x - 2) + 2, \quad y = -x + 4$$

x 座標が 6 である点 Q は直線 l 上にあるので、 $y = -x + 4$ に $x = 6$ を代入して、

$$y = -6 + 4 = -2$$

よって、点 Q の座標は $(6, -2)$

点 Q は $y = \frac{a}{x}$ 上にもあるので、 $x = 6, y = -2$ を $y = \frac{a}{x}$ に代入して、

$$-2 = \frac{a}{6}, \quad a = (-2) \times 6 \quad \text{よって、} \quad a = -12$$

[問題]

右の図で、点 O は原点であり、放物線①は関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグ

ラフである。双曲線②は反比例 $y = \frac{a}{x}$ のグラフで、 $a > 0$ である。

点 A は、放物線①と双曲線②との交点で、その x 座標は 4 である。点 B は、放物線①上の点で、線分 AB は x 軸に平行である。点 C は、双曲線②上の点で、その x 座標は負の数である。線分 AC 、線分 BC と x 軸との交点をそれぞれ D, E とする。

$AB : DE = 5 : 1$ であるとき、点 C の座標を求めよ。

(香川県)(***)

[解答欄]

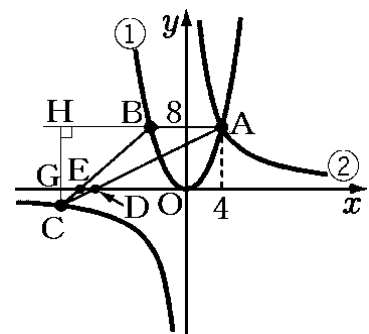
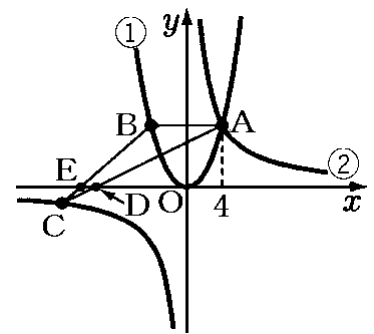
[ヒント]

右図のように、点 G, H をとると、 $CH : CG = AB : DE$,

$AB : DE = 5 : 1$ なので、 $CH : CG = 5 : 1$

よって、 $CG : GH = 1 : (5 - 1) = 1 : 4$

[解答] $(-16, -2)$



[解説]

点 A の x 座標は 4 なので、 $x=4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると、 $y=\frac{1}{2}\times 16=8$

点 A は $y=\frac{a}{x}$ 上にもあるので、 $x=4$ 、 $y=8$ を $y=\frac{a}{x}$ に代入すると、 $8=\frac{a}{4}$ 、 $a=32$

右図のように、点 G、H をとると、 $CH : CG = AB : DE$ 、

$AB : DE = 5 : 1$ なので、 $CH : CG = 5 : 1$

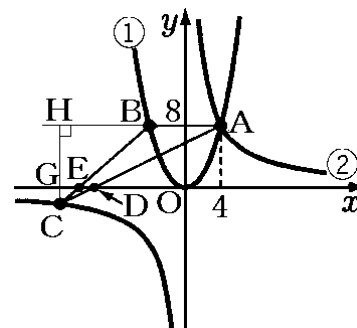
よって、 $CG : GH = 1 : (5-1) = 1 : 4$

点 H の y 座標は点 A の y 座標と等しいので 8 である。

したがって、点 C の y 座標は -2 である。

双曲線の式は $y=\frac{32}{x}$ なので、 $y=-2$ を代入すると、

$-2=\frac{32}{x}$ 、 $-2x=32$ 、 $x=-16$ よって点 C の座標は $(-16, -2)$ である。



[問題]

右の図のように、関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 、 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフと、原点を通る直線との交点をそれぞれ A、B とする。点 B から x 軸に垂線 BC をひく。点 B の座標が $(6, 9)$ のとき、 $\triangle BOC$ と $\triangle BAC$ の面積の比を求めなさい。

(埼玉県)(***)

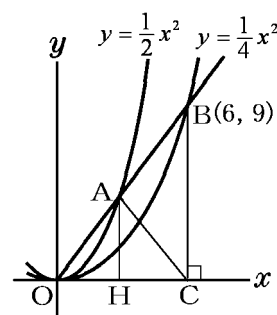
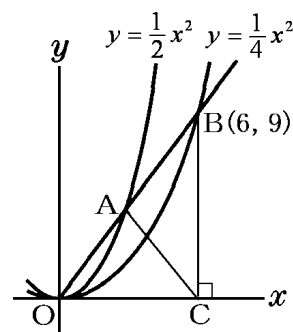
[解答欄]

[ヒント]

<Point> x 座標の比 \rightarrow 底辺の比 \rightarrow 面積比

$\triangle BOC$ の底辺を OB、 $\triangle BAC$ の底辺を AB とすると、高さは共通になる。したがって、 $\triangle BOC$ と $\triangle BAC$ の面積の比は底辺の比 $OB : AB$ と等しくなる。点 A の座標がわかれば、この比がわかる。

[解答] 2 : 1



[解説]

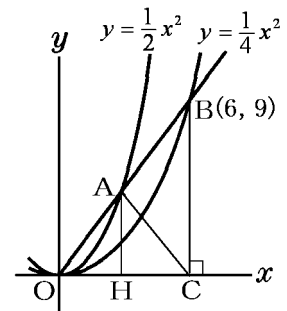
<Point> x 座標の比→底辺の比→面積比

$\triangle BOC$ の底辺を OB , $\triangle BAC$ の底辺を AB とすると、高さは共通になる。したがって、 $\triangle BOC$ と $\triangle BAC$ の面積の比は底辺の比 $OB : AB$ と等しくなる。

点 A の座標がわかれば、この比がわかる。・・・①

まず、直線 OB の式を求める。 OB は原点を通る直線なので、その式は $y = ax$ とおくことができる。点 B の座標は $(6, 9)$ なので、 $x = 6, y = 9$ を $y = ax$ に代入して、

$$9 = a \times 6, a = 9 \div 6 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \quad \text{よって } OB \text{ の式は } y = \frac{3}{2}x \text{ となる。}$$



次に、 $y = \frac{3}{2}x$ と $y = \frac{1}{2}x^2$ の交点 A を求める。

$$y = \frac{1}{2}x^2 \text{ を } y = \frac{3}{2}x \text{ に代入して、} \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}x$$

両辺を 2 倍して、 $x^2 = 3x, x^2 - 3x = 0, x(x - 3) = 0$ よって、 $x = 0, 3$

したがって、点 A の x 座標は $x = 3$ で、右上図の $OH = 3$ となる。

したがって、 $OA : OB = OH : OC = 3 : 6 = 1 : 2$

よって、 $OB : AB = 2 : (2 - 1) = 2 : 1$

①より、 $\triangle BOC$ と $\triangle BAC$ の面積の比は $2 : 1$ となる。

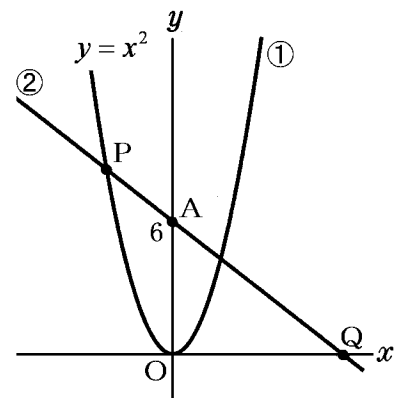
[問題]

右の図において、曲線①は関数 $y = x^2$ のグラフである。

点 $A(0, 6)$ を通る右下がりの直線②が曲線①と交わる 2 点のうち x 座標が負の点を P とし、また、直線②と x 軸との交点を Q とする。 $PA : AQ = 1 : 3$ となるとき、点 P の座標を求めよ。

(茨城県)(***)

[解答欄]



[ヒント]

P から x 軸に垂線 PH をひく。

AO // PH なので、平行線の性質より、

$$AO : PH = QA : QP = 3 : (3+1) = 3 : 4$$

AO=6 より PH を求める。

→点 P の座標

[解答] $(-2\sqrt{2}, 8)$

[解説]

P から x 軸に垂線 PH をひく。

AO // PH なので、平行線の性質より、

$$AO : PH = QA : QP$$

$$PA : AQ = 1 : 3 \text{ なので, } QA : QP = 3 : (3+1) = 3 : 4$$

また、A の y 座標が 6 なので、AO=6

$$\text{よって, } 6 : PH = 3 : 4$$

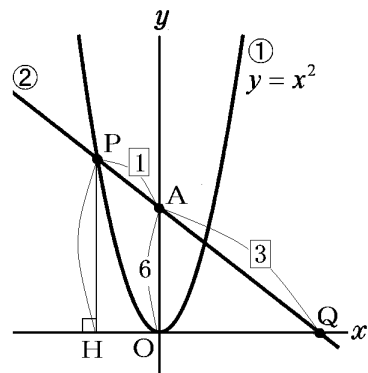
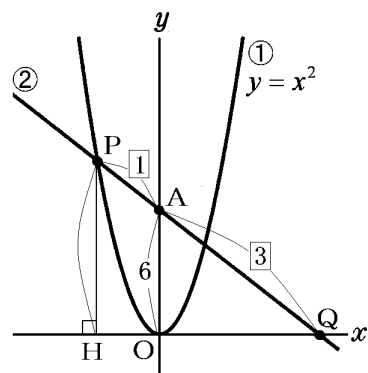
比の内項の積は外項の積に等しいので、

$$PH \times 3 = 6 \times 4, \quad PH = 6 \times 4 \div 3 = 8$$

よって、点 P の y 座標は 8 である。

点 P は $y = x^2$ 上の点なので、 $y = 8$ を $y = x^2$ に代入して、 $8 = x^2$ となる。

$x < 0$ なので、 $x = -\sqrt{8} = -\sqrt{4 \times 2} = -2\sqrt{2}$ よって、点 P の座標は $(-2\sqrt{2}, 8)$ となる。

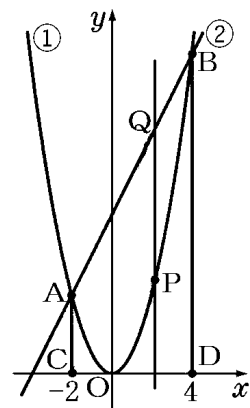


[問題]

右の図において、①は関数 $y = x^2$ 、②は関数 $y = 2x + 8$ のグラフである。2点 A、B は①と②の交点で、 x 座標はそれぞれ -2 と 4 である。点 A、B から x 軸に垂線をひき、 x 軸との交点をそれぞれ C、D とする。また、点 P は①のグラフ上を A から B まで動く。点 P の x 座標が正のとき、点 P を通り、 y 軸に平行な直線をひき、②のグラフとの交点を Q とする。直線 CQ と直線 OP が平行となるような点 P の座標を求めよ。

(石川県)(***)

[解答欄]



[ヒント]

点 P, Q の x 座標を $t(t > 0)$ とする → 点 P, Q の y 座標

点 P の座標 → 直線 OP の傾き

点 C, Q の座標 → 直線 CQ の傾き

(直線 OP の傾き) = (直線 CQ の傾き) で式を立てる。

[解答] $(2\sqrt{2}, 8)$

[解説]

点 P の x 座標を $t(t > 0)$ とすると、点 Q の x 座標も t になる。

点 P は $y = x^2$ 上にあるので、 $x = t$ のとき $y = t^2$ になる。

よって、点 P の座標は (t, t^2) である。

点 Q は $y = 2x + 8$ 上にあるので、 $x = t$ のとき $y = 2t + 8$ になる。

よって、点 Q の座標は $(t, 2t + 8)$ である。

「直線 CQ と直線 OP が平行」とあるので、この 2 つの直線の傾きは等しくなる。

C(-2, 0), Q(t, 2t + 8) より、

$$(\text{直線 CQ の傾き}) = \frac{2t + 8 - 0}{t - (-2)} = \frac{2t + 8}{t + 2}$$

O(0, 0), P(t, t²) より、

$$(\text{直線 OP の傾き}) = \frac{t^2 - 0}{t - 0} = t$$

$$\text{よって、} \frac{2t + 8}{t + 2} = t$$

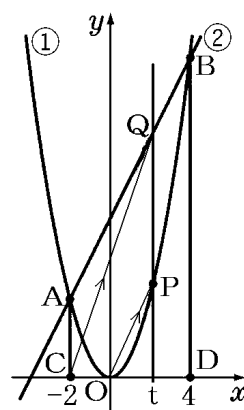
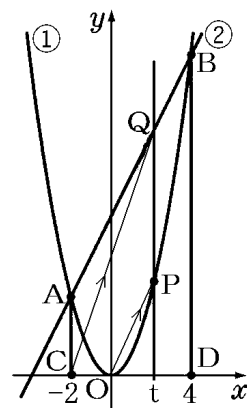
両辺に $t + 2$ をかけると、 $2t + 8 = t^2 + 2t$, $t^2 = 8$, $t = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

$t > 0$ なので、 $t = 2\sqrt{2}$

よって、点 P の x 座標は $x = 2\sqrt{2}$

$x = 2\sqrt{2}$ を $y = x^2$ に代入すると、 $y = (2\sqrt{2})^2 = 8$

したがって、点 P の座標は $(2\sqrt{2}, 8)$ である。



【】 面積

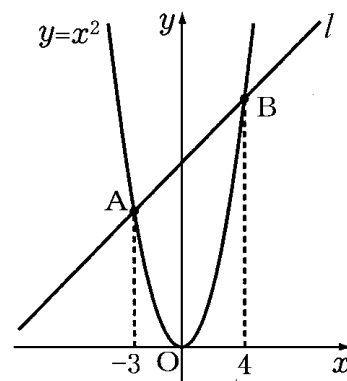
【】 面積を求める：2つの三角形の和

【問題】

右の図のように、関数 $y = x^2$ のグラフと直線 l が 2 点 A, B で交わっている。点 A の x 座標は -3 、点 B の x 座標は 4 である。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) 直線 l の式を求めよ。
- (2) $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

(富山県)(***)



【解答欄】

(1)	(2)
-----	-----

【ヒント】

(1) まず、点 A, B の座標を求める。

2 点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) を通る直線の式は、

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \text{ の公式を使って求めることができる。}$$

(2) $\triangle OAB$ を $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ に分けて考える。

OC を共通の底辺とすると、

$\triangle OAC$ の高さは AD、

$\triangle OBC$ の高さは BE

になる。

【解答】(1) $y = x + 12$ (2) 42

【解説】

(1) まず、点 A, B の座標を求める。

点 A の x 座標は -3 で、点 A は $y = x^2$ 上にあるので、

$$y = x^2 \text{ に } x = -3 \text{ を代入して、 } y = (-3)^2 = 9$$

よって、点 A の座標は $(-3, 9)$

点 B の x 座標は 4 で、点 B は $y = x^2$ 上にあるので、

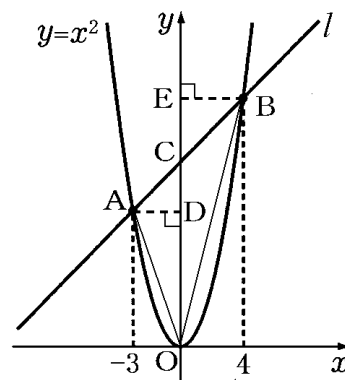
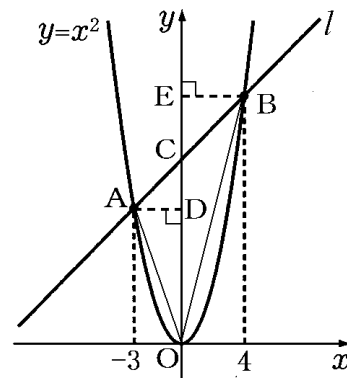
$$y = x^2 \text{ に } x = 4 \text{ を代入して、 } y = 4^2 = 16$$

よって、点 B の座標は $(4, 16)$

直線 l は、 $A(-3, 9)$, $B(4, 16)$ を通るので、

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \text{ の公式を使うと、}$$

$$y = \frac{16 - 9}{4 - (-3)}(x + 3) + 9, \quad y = \frac{7}{7}(x + 3) + 9, \quad y = x + 12$$



(2) $\triangle OAB$ を $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ に分けて考える。

点 C は直線 $y = x + 12$ の切片 (y 切片) なので、点 C の y 座標は 12 である。よって、 $OC = 12$

$$(\triangle OAC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OC) \times (\text{高さ } AD) = \frac{1}{2} \times 12 \times 3 = 18$$

$$(\triangle OBC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OC) \times (\text{高さ } BE) = \frac{1}{2} \times 12 \times 4 = 24$$

よって、 $(\triangle OAB \text{ の面積}) = (\triangle OAC \text{ の面積}) + (\triangle OBC \text{ の面積}) = 18 + 24 = 42$

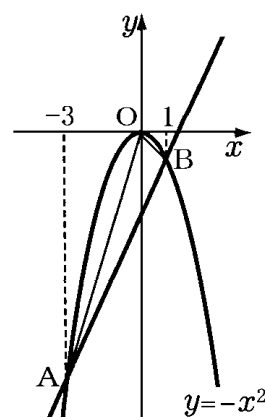
[問題]

右の図のように、関数 $y = -x^2$ のグラフ上に、x 座標がそれぞれ -3 、 1 となる点 A、B をとるとき、次の各問いに答えよ。

(1) 2 点 A、B を通る直線の式を求めよ。

(2) $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

(新潟県)(***)



[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[解答] (1) $y = 2x - 3$ (2) 6

[解説]

(1) まず、点 A、B の座標を求める。

点 A の x 座標は -3 で、点 A は $y = -x^2$ 上にあるので、

$$y = -x^2 \text{ に } x = -3 \text{ を代入して、 } y = -(-3)^2 = -9$$

よって、点 A の座標は $(-3, -9)$

点 B の x 座標は 1 で、点 B は $y = -x^2$ 上にあるので、

$$y = -x^2 \text{ に } x = 1 \text{ を代入して、 } y = -1^2 = -1$$

よって、点 B の座標は $(1, -1)$

直線 AB は、 $A(-3, -9)$ 、 $B(1, -1)$ を通るので、

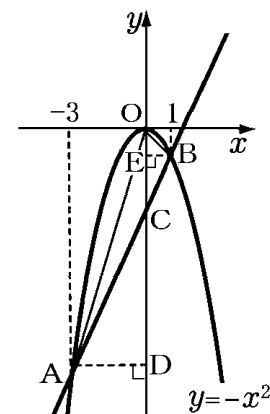
$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1 \text{ の公式を使うと、}$$

$$y = \frac{-1 - (-9)}{1 - (-3)} (x - (-3)) - 9, \quad y = 2(x + 3) - 9, \quad y = 2x - 3$$

(2) $\triangle OAB$ を $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ に分けて考える。

点 C は直線 $y = 2x - 3$ の y 切片なので、点 C の y 座標は -3 である。よって、 $OC = 3$

$$(\triangle OAC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OC) \times (\text{高さ } AD) = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$$

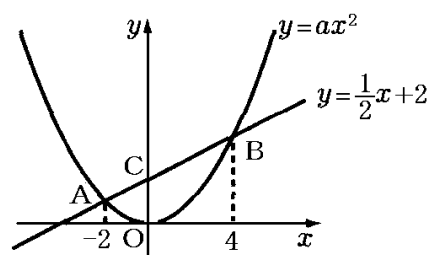


$$(\triangle OBC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OC) \times (\text{高さ } BE) = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{3}{2}$$

$$\text{よって, } (\triangle OAB \text{ の面積}) = (\triangle OAC \text{ の面積}) + (\triangle OBC \text{ の面積}) = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

[問題]

右の図のように、関数 $y = ax^2$ のグラフと直線 $y = \frac{1}{2}x + 2$ が、2点 A, B で交わっている。2点 A, B の x 座標が、それぞれ $-2, 4$ であるとき、次の各問いに答えよ。ただし、 $a > 0$ とする。また、原点 O から点(1, 0)までの距離及び原点 O から点(0, 1)までの距離をそれぞれ 1cm とする。



(1) a の値を求めよ。

(2) $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

(千葉県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]

(1) $x = -2$ を $y = \frac{1}{2}x + 2$ に代入して点 A の座標を求める。点 A は $y = ax^2$ 上にもあるので、点 A の座標を $y = ax^2$ に代入すれば a の値を求めることができる。

[解答](1) $a = \frac{1}{4}$ (2) 6cm^2

[解説]

(1) 点 A の x 座標は -2 である。 $x = -2$ を $y = \frac{1}{2}x + 2$ に代入すると、 $y = \frac{1}{2} \times (-2) + 2 = 1$

点 A は $y = ax^2$ 上にもあるので、 $x = -2, y = 1$ を $y = ax^2$ に代入すると、 $1 = 4a, a = \frac{1}{4}$

(2) $\triangle OAB$ を $\triangle ACO$ と $\triangle BCO$ に分けて考える。

点 C の y 座標は $y = \frac{1}{2}x + 2$ の切片 (y 切片) なので 2 である。よって、 $CO = 2(\text{cm})$ である。

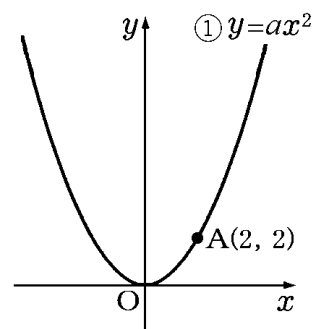
$\triangle ACO$ の底辺を CO とすると、高さは $2(\text{cm})$ なので、 $(\triangle ACO \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2(\text{cm}^2)$

$\triangle BCO$ の底辺を CO とすると、高さは $4(\text{cm})$ なので、 $(\triangle BCO \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4(\text{cm}^2)$

よって、 $(\triangle OAB \text{ の面積}) = (\triangle ACO \text{ の面積}) + (\triangle BCO \text{ の面積}) = 2 + 4 = 6(\text{cm}^2)$

[問題]

右の図のように関数 $y = ax^2 \cdots \textcircled{1}$ のグラフが、点 $A(2, 2)$ を通っている。このとき、次の各問いに答えよ。ただし、原点は O とする。



- (1) a の値を求めよ。
- (2) 点 A を通り、傾きが -1 の直線の式を求めよ。
- (3) (2) で求めた直線と $\textcircled{1}$ のグラフとの交点のうち、点 A とは異なる点を B とするとき、 $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

(鳥取県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
-----	-----	-----

[ヒント]

- (1) 点 $A(2, 2)$ は $y = ax^2$ 上にあるので、点 A の座標を $y = ax^2$ に代入して a の値を求める。
- (2) 傾きが m で点 (x_1, y_1) を通る直線の式は、 $y = m(x - x_1) + y_1$ の公式を使って求めることができる。
- (3) $y = ax^2$ と $y = m(x - x_1) + y_1$ の交点は、 $ax^2 = m(x - x_1) + y_1$ とおいて求める。

[解答](1) $a = \frac{1}{2}$ (2) $y = -x + 4$ (3) 12

[解説]

(1) $y = ax^2$ のグラフが、点 $A(2, 2)$ を通っているので、

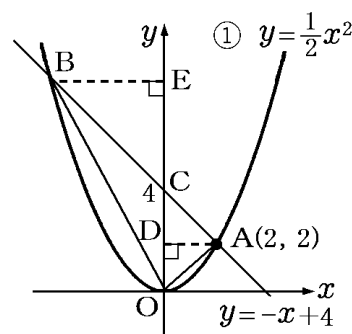
$$x = 2, y = 2 \text{ を } y = ax^2 \text{ に代入して、} 2 = a \times 4, a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(2) $y = m(x - x_1) + y_1$ の公式を使うと、点 $A(2, 2)$ を通り傾きが -1 の直線の式は、
 $y = -(x - 2) + 2, y = -x + 4$

(3) 右図のように、 $\triangle OAB$ を $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ に分けて考える。
 点 C は直線 $y = -x + 4$ の y 切片なので、点 C の y 座標は 4 である。
 よって、 $OC = 4$

$$(\triangle OAC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OC) \times (\text{高さ } AD) = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

$\triangle OBC$ の面積を求めるためには、高さ BE を求める必要がある。



そこで、点 B の x 座標を求める。

点 B は $y = \frac{1}{2}x^2 \cdots \textcircled{1}$ と、 $y = -x + 4 \cdots \textcircled{2}$ の交点である。

$\textcircled{2}$ を $\textcircled{1}$ に代入すると、 $-x + 4 = \frac{1}{2}x^2$

$-2x + 8 = x^2$, $x^2 + 2x - 8 = 0$, $(x + 4)(x - 2) = 0$, よって、 $x = -4, 2$

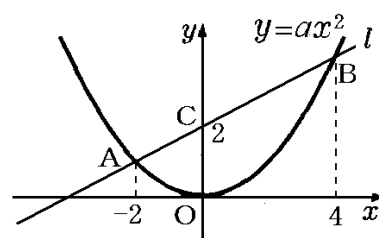
したがって、点 B の x 座標は -4 となり、 $BE = 4$ となる。

($\triangle OBC$ の面積) $= \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OC) \times (\text{高さ } BE) = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

よって、($\triangle OAB$ の面積) $= (\triangle OAC$ の面積) $+ (\triangle OBC$ の面積) $= 4 + 8 = 12$

[問題]

右の図で、曲線は関数 $y = ax^2$ のグラフである。曲線上に x 座標が $-2, 4$ である 2 点 A, B をとり、この 2 点を通る直線 l をひく。直線 l が y 軸と点 C(0, 2) で交わるとき、次の各問いに答えよ。ただし、座標軸の単位の長さを 1cm とする。



(1) $\triangle OBC$ の面積を求めよ。

(2) a の値を求めよ。

(埼玉県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]

(2) まず、 $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って 2 点 A($-2, 4a$), B($4, 16a$) を通る直線の

式を求める。次に、直線 AB は点 C(0, 2) を通ることに注目して a の値を求める。

[解答](1) 4cm^2 (2) $a = \frac{1}{4}$

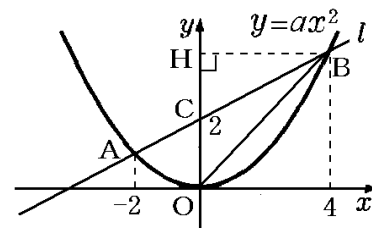
[解説]

(1) $\triangle OBC$ の底辺を OC とすると、高さは右図の BH である。 $OC = 2\text{cm}$, $BH = 4\text{cm}$ なので、

($\triangle OBC$ の面積) $= \frac{1}{2} \times OC \times BH = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4(\text{cm}^2)$

(2) まず、直線 AB の式を a を使って表す。

点 A の x 座標は -2 なので、 $x = -2$ を $y = ax^2$ に代入して、 $y = a \times (-2)^2 = 4a$



よって、点 A(-2, 4a)

点 B の x 座標は 4 なので、 $x=4$ を $y=ax^2$ に代入して、 $y=a \times 4^2 = 16a$

よって、点 B(4, 16a)

$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って 2 点 A(-2, 4a), B(4, 16a) を通る直線の式を求める。

$$y = \frac{16a - 4a}{4 - (-2)}(x - (-2)) + 4a, \quad y = 2a(x + 2) + 4a, \quad y = 2ax + 8a$$

直線 AB は点 C(0, 2) を通るので、 $x=0, y=2$ を $y=2ax+8a$ に代入すると、

$$2 = 8a \quad \text{よって、} \quad a = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

[問題]

右の図で、曲線は関数 $y=x^2$ のグラフである。x 軸上に x 座標が -3 である点 A をとり、点 A を通り傾きが正の直線 l をひく。直線 l と曲線との交点のうち x 座標が負のものを B, 正のものを C とし、直線 l と y 軸との交点を D とする。点 B の x 座標が -2 のとき、 $\triangle BOD$ の面積を求めよ。ただし、座標軸の単位の長さを 1cm とする。

(埼玉県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

$\triangle BOD$ の底辺を OD とすると、高さは 2 である。点 D は直線 l の切片(y 切片)なので、直線 l の式を求めれば、D の座標がわかる。 $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って、2 点 A, B を通る直線 l の式を求めることができる。

[解答] 12cm²

[解説]

右図で、 $\triangle BOD$ の底辺を OD とすると、高さは BH になる。

点 B の x 座標は -2 なので、BH=2 である。

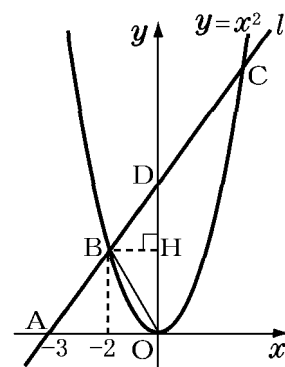
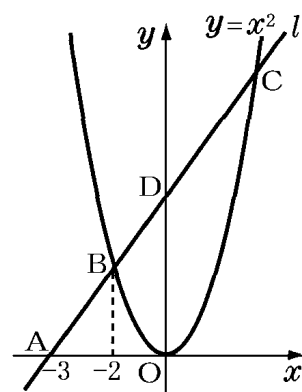
点 D の座標がわかれば、OD の長さを求めることができる。

そこで、直線 l の式を求める。

点 A の座標は (-3, 0) である。

点 B の x 座標は -2 で、点 B は $y=x^2$ 上にあるので、

$$y = x^2 \text{ に } x = -2 \text{ を代入して、} \quad y = (-2)^2 = 4$$



よって、点 B の座標は(-2, 4)

$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って 2 点 A(-3, 0), B(-2, 4) を通る直線の式を求める。

$$y = \frac{4 - 0}{-2 - (-3)}(x - (-3)) + 0, \quad y = 4(x + 3), \quad y = 4x + 12$$

$y = 4x + 12$ に $x = 0$ を代入すると、 $y = 12$

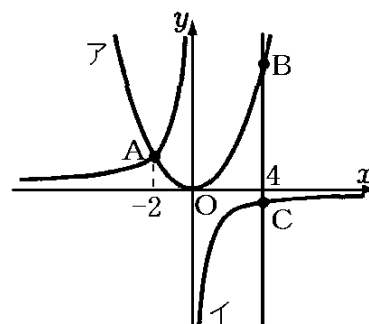
よって、点 D の y 座標は 12 で、 $OD = 12$

$$(\triangle BOD \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times OD \times BH = \frac{1}{2} \times 12 \times 2 = 12(\text{cm}^2)$$

[問題]

右の図において、放物線アは関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフで、

放物線ア上にある 2 点 A, B は、x 座標がそれぞれ -2, 4 である。また、双曲線イは点 A を通る反比例のグラフで、点 C は、点 B を通り y 軸に平行な直線と双曲線イとの交点である。次の各問いに答えよ。



(1) A の y 座標を求めよ。

(2) 双曲線イのグラフについて、y を x の式で表せ。

(3) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(群馬県)(***)

[解答欄]

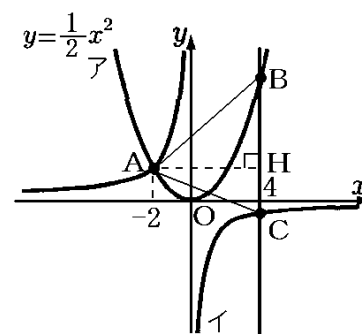
(1)	(2)	(3)
-----	-----	-----

[ヒント]

(1) 点 A は $y = \frac{1}{2}x^2$ 上にあるので、 $y = \frac{1}{2}x^2$ に $x = -2$ を代入すれば点 A の y 座標を求めることができる。

(2) 双曲線イのグラフの式を $y = \frac{a}{x}$ とおく。点 A は $y = \frac{a}{x}$ 上にあるので、点 A の座標を代入すれば a の値を求めることができる。

(3) 右図のように $\triangle ABC$ の底辺を BC とすると、高さは AH になる。BC の長さを求めるために、点 B と点 C の y 座標を求める。



[解答](1) 2 (2) $y = -\frac{4}{x}$ (3) 27

[解説]

(1) 点 A の x 座標は -2 で、点 A は $y = \frac{1}{2}x^2$ 上にあるので、

$$y = \frac{1}{2}x^2 \text{ に } x = -2 \text{ を代入して、}$$

$$y = \frac{1}{2} \times (-2)^2 = 2$$

(2) 双曲線イのグラフの式を $y = \frac{a}{x}$ とおく。

点 A($-2, 2$) は $y = \frac{a}{x}$ 上にあるので、 $y = \frac{a}{x}$ に $x = -2, y = 2$ を代入して、

$$2 = \frac{a}{-2}, \quad a = 2 \times (-2) = -4$$

よって、双曲線イのグラフの式は、 $y = \frac{-4}{x}, y = -\frac{4}{x}$

(3) 図のように $\triangle ABC$ の底辺を BC とすると、高さは AH になる。BC の長さを求めるために、点 B と点 C の y 座標を求める。

点 B は $y = \frac{1}{2}x^2$ 上にあり、 x 座標は 4 なので、 $y = \frac{1}{2}x^2$ に

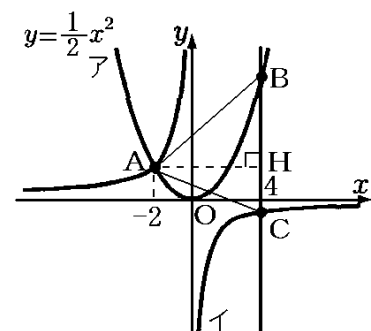
$$x = 4 \text{ を代入して、 } y = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$$

点 C は $y = -\frac{4}{x}$ 上にあり、 x 座標は 4 なので、 $y = -\frac{4}{x}$ に $x = 4$ を代入して、 $y = -\frac{4}{4} = -1$

よって、 $BC = (\text{点 B の } y \text{ 座標}) - (\text{点 C の } y \text{ 座標}) = 8 - (-1) = 9$

また、図より、 $AH = 4 - (-2) = 6$

よって、 $(\triangle ABC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 BC}) \times (\text{高さ AH}) = \frac{1}{2} \times 9 \times 6 = 27$



[問題]

右の図において、①は関数 $y = \frac{1}{3}x^2$ のグラフ、②は反比例のグラフである。①と②は点 B で交わっていて、点 B の x 座標は 3 である。また、①のグラフ上に x 座標が -6 である点 A をとり、直線 AB と y 軸との交点を C とする。②のグラフ上に x 座標が負である点 P をとる。△OAB と △OCP の面積が等しくなるとき、点 P の座標を求めよ。

(山形県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

点 A, B の座標を求める

→直線 AB の式を求める, 反比例のグラフ②の式を求める。

→△OAB の面積を△AOC と △BOC に分けて求める。

図のように, △OCP の底辺を OC とすると, 高さは PI である。

[解答](-9, -1)

[解説]

まず, △OAB の面積を求める。

右図のように, △OAB を△AOC と △BOC に分けて考える。

右図のように, OC を共通の底辺と考えると, △AOC の高さは $AG=6$ で, △BOC の高さは $BH=3$ である。…(1)

そこで, 点 C の座標を求めるために直線 AB の式を求める。

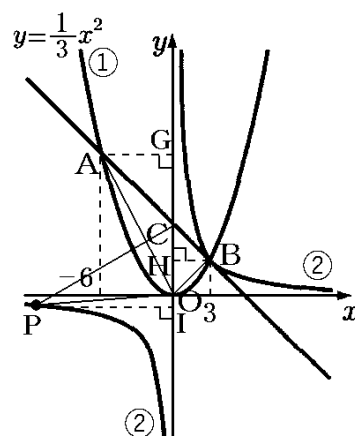
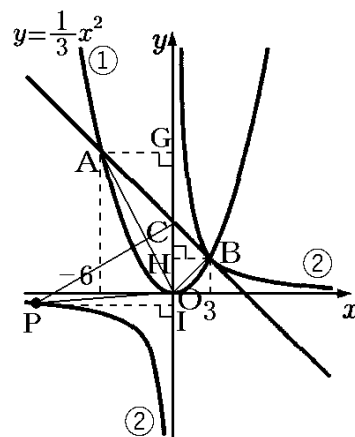
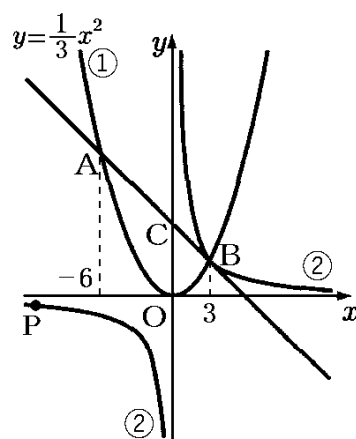
点 A の y 座標は, $y = \frac{1}{3}x^2$ に $x = -6$ を代入すると,

$$y = \frac{1}{3} \times (-6)^2 = \frac{36}{3} = 12 \text{ なので, 点 A の座標は } (-6, 12)$$

点 B の y 座標は, $y = \frac{1}{3}x^2$ に $x = 3$ を代入すると,

$$y = \frac{1}{3} \times 3^2 = 3 \text{ なので, 点 B の座標は } (3, 3)$$

$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って 2 点 A(-6, 12), B(3, 3) を通る直線の式を求める。



$$y = \frac{3-12}{3-(-6)}(x-3)+3, \quad y = -(x-3)+3, \quad y = -x+6$$

点 C は $y = -x+6$ の切片 (y 切片) なので, 点 C の y 座標は 6 になる。

よって, $OC = 6 \cdots (2)$

(1), (2) より,

$$(\triangle AOC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OC) \times (\text{高さ } AG) = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$$

$$(\triangle BOC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OC) \times (\text{高さ } BH) = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

よって, $(\triangle OAB \text{ の面積}) = (\triangle AOC \text{ の面積}) + (\triangle BOC \text{ の面積}) = 18 + 9 = 27$

次に, 点 P の座標を求める。

「 $\triangle OAB$ と $\triangle OCP$ の面積が等しくなる」とあるので,

$(\triangle OCP \text{ の面積}) = 27$ である。

図のように, $\triangle OCP$ の底辺を OC とすると, 高さは PI である。

$$\text{よって, } (\triangle OCP \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OC) \times (\text{高さ } PI) = 27$$

$$\frac{1}{2} \times 6 \times (\text{高さ } PI) = 27, \quad 3 \times (\text{高さ } PI) = 27, \quad (\text{高さ } PI) = 27 \div 3 = 9$$

したがって, 点 P の x 座標は -9 になる。

点 P の y 座標を求めるために反比例のグラフ②の式を求める。

反比例なので, ②の式は $y = \frac{k}{x}$ とおくことができる。

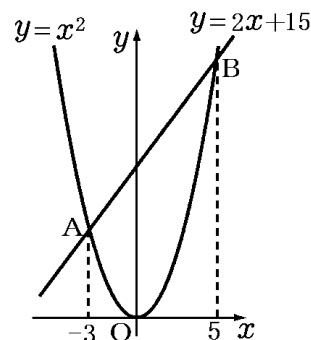
②のグラフは, 点 B(3, 3) を通るので, $y = \frac{k}{x}$ に $x = 3, y = 3$ を代入して, $3 = \frac{k}{3}, k = 3 \times 3 = 9$

よって, ②の式は $y = \frac{9}{x}$ となる。点 P の x 座標は -9 なので, $y = \frac{9}{-9} = -1$

よって, 点 P の座標は $(-9, -1)$ である。

[問題]

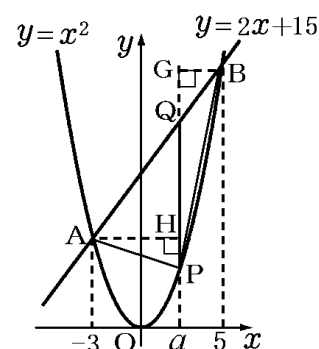
右の図のように、関数 $y = x^2$ と関数 $y = 2x + 15$ のグラフがある。2つのグラフは2点A、Bで交わり、点A、Bのx座標は、それぞれ-3、5である。関数 $y = x^2$ のグラフ上に点Pを、 $\triangle APB$ の面積が48になるようにとりたい。ただし、点Pのx座標は $0 < x < 5$ とする。点Pの座標を求めよ。
(長野県)(***)



[解答欄]

[ヒント]

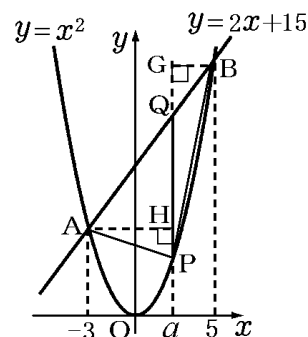
右図のように、y軸に平行な線分PQをひき、点P、Qのx座標を $x = a$ とする。
 $\triangle APB$ を $\triangle APQ$ と $\triangle BPQ$ に分けて考え、
 $\triangle APQ$ と $\triangle BPQ$ の共通の底辺をPQとする。
 $\triangle APQ$ と $\triangle BPQ$ の面積を a を使って表す。



[解答](3, 9)

[解説]

右図のように、y軸に平行な線分PQをひき、点P、Qのx座標を $x = a$ とする。
 $\triangle APB$ を $\triangle APQ$ と $\triangle BPQ$ に分けて考え、
 $\triangle APQ$ と $\triangle BPQ$ の共通の底辺をPQとする。
点Pのx座標は a で、点Pは $y = x^2$ 上にあるので、
 $x = a$ を $y = x^2$ に代入して $y = a^2$
点Qのx座標は a で、点Qは $y = 2x + 15$ 上にあるので、
 $x = a$ を $y = 2x + 15$ に代入して $y = 2a + 15$



したがって、(底辺PQ) = (点Qのy座標) - (点Pのy座標) = $2a + 15 - a^2$
($\triangle APQ$ の高さAH) = $a - (-3) = a + 3$, ($\triangle BPQ$ の高さBG) = $5 - a$
したがって、

$$\begin{aligned} (\triangle APQ \text{の面積}) &= \frac{1}{2} \times (\text{底辺 PQ}) \times (\text{高さ AH}) = \frac{1}{2} \times (2a + 15 - a^2) \times (a + 3) \\ &= \frac{1}{2} (2a^2 + 6a + 15a + 45 - a^3 - 3a^2) = \frac{1}{2} (-a^3 - a^2 + 21a + 45) \end{aligned}$$

$$(\triangle BPQ \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 PQ}) \times (\text{高さ BG}) = \frac{1}{2} \times (2a + 15 - a^2) \times (5 - a)$$

$$= \frac{1}{2} (10a - 2a^2 + 75 - 15a - 5a^2 + a^3) = \frac{1}{2} (a^3 - 7a^2 - 5a + 75)$$

$$(\triangle APB \text{ の面積}) = (\triangle APQ \text{ の面積}) + (\triangle BPQ \text{ の面積})$$

$$= \frac{1}{2} (-a^3 - a^2 + 21a + 45) + \frac{1}{2} (a^3 - 7a^2 - 5a + 75) = \frac{1}{2} (-8a^2 + 16a + 120) = -4a^2 + 8a + 60$$

「 $\triangle APB$ の面積が 48 になる」ので、 $-4a^2 + 8a + 60 = 48$

$$-4a^2 + 8a + 12 = 0, \quad a^2 - 2a - 3 = 0, \quad (a+1)(a-3) = 0, \quad a = -1, \quad a = 3$$

「点 P の x 座標は $0 < x < 5$ とする」とあるので、 $a = -1$ は不適、 $a = 3$ は適する。

点 P は $y = x^2$ 上にあるので、 $y = x^2$ に $x = 3$ を代入して、 $y = 3^2 = 9$

よって、点 P の座標は (3, 9)

[問題]

右の図のように、関数 $y = ax^2$ (a は正の定数) のグラフ上に、2 点 A, B がある。点 A の x 座標を -2, 点 B の x 座標を 3 とする。点 A と y 軸について対称な点を C とし、線分 AB と y 軸との交点を D とする。 $\triangle BCD$ の面積が 10 のとき、 a の値を求めよ。

(北海道)(****)

[解答欄]

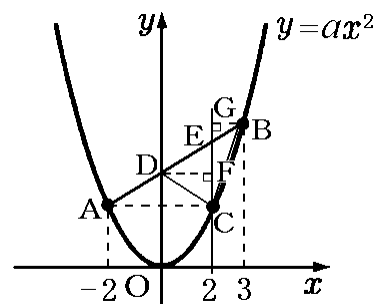
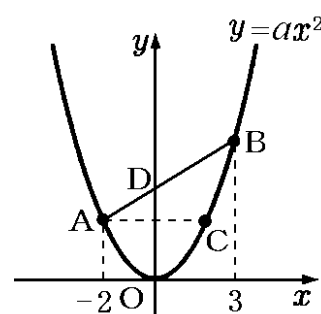
[ヒント]

右図のように、y 軸と平行な直線 CE をひき、点 F, G をとる。 $\triangle BCD$ を $\triangle BCE$ と $\triangle DCE$ に分けて考える。

$\triangle BCE$ と $\triangle DCE$ の共通の底辺を CE とする。

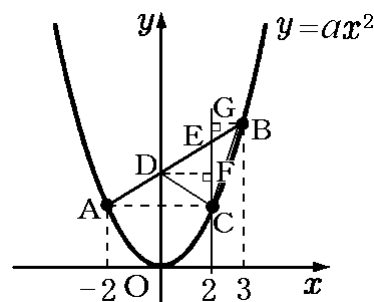
CE の長さを求めるために、点 C と E の y 座標を求める。

[解答] $a = \frac{5}{3}$



【解説】

x 座標が -2 である点Aと y 軸について対称な点Cの x 座標は 2 である。右図のように、 y 軸と平行な直線CEをひき、点F,Gをとる。 $\triangle BCD$ を $\triangle BCE$ と $\triangle DCE$ に分けて考える。



$\triangle BCE$ と $\triangle DCE$ の共通の底辺をCEとする。

CEの長さを求めるために、点CとEの y 座標を求める。

点Cは $y = ax^2$ 上にあり、点Cの x 座標は 2 なので、

$$y = ax^2 \text{ に } x=2 \text{ を代入すると、 } y = a \times 2^2 = 4a$$

よって、点Cの y 座標は $4a$ である。…①

次に、点Eの y 座標を求めるために、直線ABの式を求めておく。

点Aの x 座標は -2 なので、 $x = -2$ を $y = ax^2$ に代入して、 $y = a \times (-2)^2 = 4a$

よって、点Aの座標は $(-2, 4a)$

点Bの x 座標は 3 なので、 $x = 3$ を $y = ax^2$ に代入して、 $y = a \times 3^2 = 9a$

よって、点Bの座標は $(3, 9a)$

$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って2点A $(-2, 4a)$ 、B $(3, 9a)$ を通る直線の式を求める。

$$y = \frac{9a - 4a}{3 - (-2)}(x - (-2)) + 4a, \quad y = a(x + 2) + 4a, \quad y = ax + 6a$$

点Eは直線AB上にあり、点Eの x 座標は 2 なので、 $y = ax + 6a$ に $x = 2$ を代入して、

$y = a \times 2 + 6a = 2a + 6a = 8a$ よって、点Eの y 座標は $8a$ である。…②

①、②より、 $CE = 8a - 4a = 4a$

また、図より、 $DF = 2$ 、 $BG = 3 - 2 = 1$

$$(\triangle BCE \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 CE}) \times (\text{高さ BG}) = \frac{1}{2} \times 4a \times 1 = 2a$$

$$(\triangle DCE \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 CE}) \times (\text{高さ DF}) = \frac{1}{2} \times 4a \times 2 = 4a$$

よって、 $(\triangle BCD \text{ の面積}) = (\triangle BCE \text{ の面積}) + (\triangle DCE \text{ の面積}) = 2a + 4a = 6a$

「 $\triangle BCD$ の面積が10」とあるので、 $6a = 10$ 、 $a = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

【】面積を求める：外側長方形から複数の三角形を引く

[問題]

右の図のように、3点 $A(6, 5)$, $B(-2, 3)$, $C(2, 1)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある。 $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(佐賀県)**

[解答欄]

[ヒント]

右図のように、辺が x 軸, y 軸に平行な長方形 $APQR$ をとる。

外側の長方形 $APQR$ の面積から $\triangle APB$, $\triangle BQC$, $\triangle ACR$ の面積を引いて $\triangle ABC$ の面積を求める。

[解答]12

[解説]

右図のように、辺が x 軸, y 軸に平行な長方形 $APQR$ をとる。

$$\begin{aligned} (\text{長方形 } APQR \text{ の面積}) &= AR \times QR = (5-1) \times (6-(-2)) \\ &= 4 \times 8 = 32 \end{aligned}$$

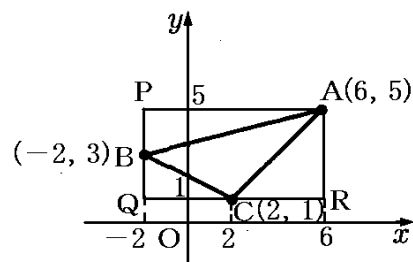
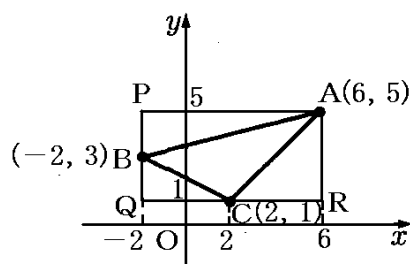
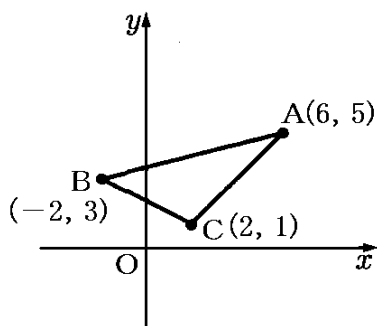
$$\begin{aligned} (\triangle APB \text{ の面積}) &= \frac{1}{2} \times AP \times BP = \frac{1}{2} \times (6-(-2)) \times (5-3) \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 2 = 8 \end{aligned}$$

$$(\triangle BQC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times CQ \times BQ = \frac{1}{2} \times (2-(-2)) \times (3-1) = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

$$(\triangle ACR \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times CR \times AR = \frac{1}{2} \times (6-2) \times (5-1) = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

よって,

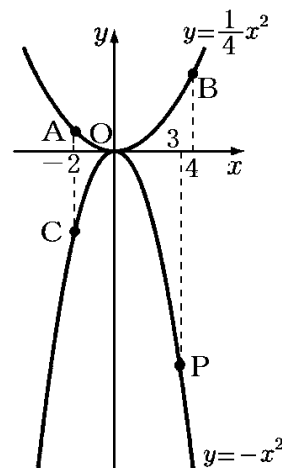
$$\begin{aligned} (\triangle ABC \text{ の面積}) &= (\text{長方形 } APQR \text{ の面積}) - (\triangle APB \text{ の面積}) - (\triangle BQC \text{ の面積}) - (\triangle ACR \text{ の面積}) \\ &= 32 - 8 - 4 - 8 = 12 \end{aligned}$$



[問題]

右の図のように、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があり、その x 座標はそれぞれ $-2, 4$ である。また、関数 $y = -x^2$ のグラフ上に 2 点 C, P があり、点 C の x 座標は -2 、点 P はグラフ上を動く点で、その x 座標は正の数である。点 P の x 座標が 3 のとき、四角形 ACPB の面積を求めよ。

(奈良県)**



[解答欄]

[ヒント]

右図のように、四角形 ACPB を囲む長方形 BDEF を、長方形の辺が x 軸または y 軸に平行になるようにとる。外側の長方形 BDEF の面積から、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle CPE$ 、 $\triangle BPF$ の面積を引いて四角形 ACPB の面積を求める。

[解答]50

[解説]

右図のように、四角形 ACPB を囲む長方形 BDEF を、長方形の辺が x 軸または y 軸に平行になるようにとる。外側の長方形 BDEF の面積から、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle CPE$ 、 $\triangle BPF$ の面積を引いて四角形 ACPB の面積を求める。まず、A, C, P, B の座標を求める。

A : $x = -2$ を $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入して $y = \frac{1}{4} \times (-2)^2 = 1$, A(-2, 1)

C : $x = -2$ を $y = -x^2$ に代入して $y = -(-2)^2 = -4$, C(-2, -4)

P : $x = 3$ を $y = -x^2$ に代入して $y = -3^2 = -9$, P(3, -9)

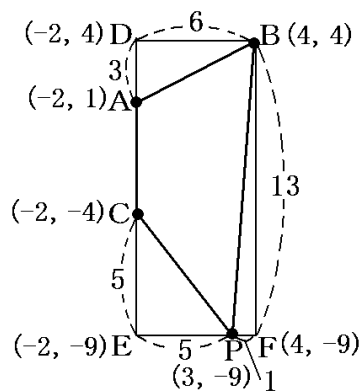
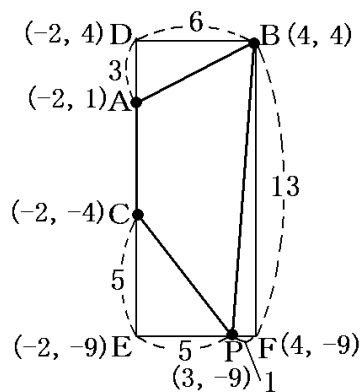
B : $x = 4$ を $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入して $y = \frac{1}{4} \times 4^2 = 4$, B(4, 4)

A, C, P, B の座標をもとに D, E, F の座標を求めると図のようになる。

これをもとに、各線分の長さを求めると図のようになる。

(長方形 BDEF の面積) = $13 \times 6 = 78$

($\triangle ABD$ の面積) = $\frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$



$$(\triangle CPE \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2}$$

$$(\triangle BPF \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times 1 \times 13 = \frac{13}{2}$$

$$(\text{四角形 ACPB}) = (\text{長方形 BDEF}) - (\triangle ABD) - (\triangle CPE) - (\triangle BPF)$$

$$= 78 - 9 - \frac{25}{2} - \frac{13}{2} = 50$$

[問題]

右の図のように、関数 $y = \frac{a}{x}$ ($a > 0$) のグラフ上に 2 点

A, B があり、それぞれの x 座標は -2 , 1 である。関数

$y = \frac{a}{x}$ と関数 $y = -\frac{1}{4}x^2$ のグラフは、点 A で交わっている。次の各問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 直線 AB の式を求めよ。

(3) 右の図のように、関数 $y = \frac{a}{x}$ のグラフ上に x 座標が 2

である点 C をとる。点 C を通り y 軸に平行な直線と

関数 $y = -\frac{1}{4}x^2$ のグラフとの交点を D とする。線分

AB 上に点 E をとり、 $\triangle BED$ の面積が $\triangle BDC$ の面積の 5 倍となるようにする。点 E の x 座標を求めよ。

(大分県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
-----	-----	-----

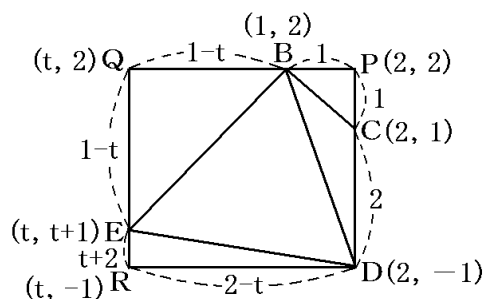
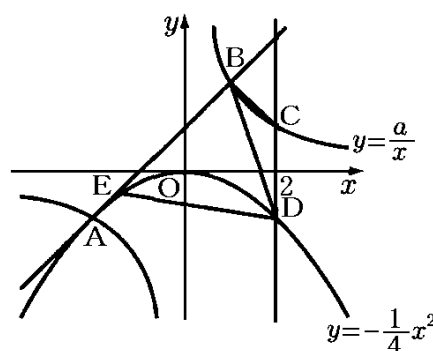
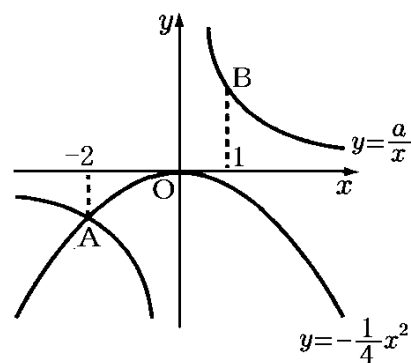
[ヒント]

(1) 点 A は $y = -\frac{1}{4}x^2$ 上 \rightarrow 点 A の座標 $\rightarrow y = \frac{a}{x}$ に代入

(2) 点 A, B の座標 \rightarrow 直線 AB の式

(3) 四角形 BCDE を囲む長方形 PQRD をとる。

点 E の x 座標を t とおいて、各点の座標を t などを使って表す。



長方形 PQRD から各三角形を引いて、 $\triangle BED$ の面積を計算(t で表す)。

($\triangle BED$ の面積) = ($\triangle BDC$ の面積) $\times 5$ より t の式を立てる。

[解答](1) $a = 2$ (2) $y = x + 1$ (3) $-\frac{3}{2}$

[解説]

(1) 点 A は $y = -\frac{1}{4}x^2$ 上にあるので、 $x = -2$ を $y = -\frac{1}{4}x^2$ に代入して、 $y = -\frac{1}{4} \times (-2)^2 = -1$

よって、点 A の座標は $(-2, -1)$

点 A は $y = \frac{a}{x}$ 上にもあるので、 $x = -2, y = -1$ を $y = \frac{a}{x}$ に代入して、

$$-1 = \frac{a}{-2}, \quad a = (-1) \times (-2) = 2$$

(2) 点 B は $y = \frac{2}{x}$ 上にあるので、 $x = 1$ を $y = \frac{2}{x}$ に代入して、 $y = \frac{2}{1} = 2$

よって、点 B の座標は $(1, 2)$ である。(1)より点 A の座標は $(-2, -1)$ なので、

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \text{ の公式より、} y = \frac{2 - (-1)}{1 - (-2)}(x - 1) + 2, \quad y = x - 1 + 2, \quad y = x + 1$$

(3) 右図のように、四角形 BCDE を囲む長方形 PQRD を、長方形の辺が x 軸または y 軸に平行になるようにとる。

まず、B, C, D の座標を求める。

(2)より、点 B の座標は $(1, 2)$ である。

点 C は $y = \frac{2}{x}$ 上にあり、 x 座標は 2 なので、 $x = 2$

を $y = \frac{2}{x}$ に代入して、 $y = \frac{2}{2} = 1$ よって、点 C の座標は $(2, 1)$

点 D は $y = -\frac{1}{4}x^2$ 上にあり、 x 座標は 2 なので、 $x = 2$ を $y = -\frac{1}{4}x^2$ に代入して、

$$y = -\frac{1}{4} \times 2^2 = -1 \quad \text{よって、点 D の座標は } (2, -1)$$

ここで、点 E の x 座標を t とおく。点 E は $y = x + 1$ 上にあるので、

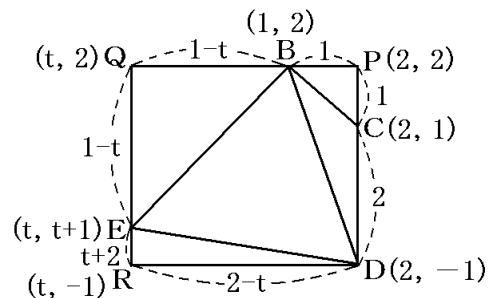
$$x = t \text{ を } y = x + 1 \text{ に代入して、} y = t + 1$$

よって、点 E の座標は $(t, t + 1)$ と表すことができる。

B, C, D, E の座標をもとに、P, Q, R の座標を求めると図のようになる。

これらの座標から、図のように各辺の長さを求めることができる。図より、

$$(\text{四角形 PQRD の面積}) = PD \times RD = (1 + 2) \times (2 - t) = 6 - 3t$$



$$(\triangle BDC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times CD \times BP = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$

「 $\triangle BED$ の面積が $\triangle BDC$ の面積の 5 倍となるようにする」とあるので、

$$(\triangle BED \text{ の面積}) = (\triangle BDC \text{ の面積}) \times 5 = 1 \times 5 = 5$$

$$(\triangle BCP \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times BP \times CP = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$(\triangle BEQ \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times BQ \times EQ = \frac{1}{2} \times (1-t) \times (1-t) = \frac{1}{2}(1-t)^2$$

$$(\triangle DER \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times DR \times ER = \frac{1}{2} (2-t) \times (2+t) = \frac{1}{2}(4-t^2)$$

$(\triangle BDC) + (\triangle BED) + (\triangle BCP) + (\triangle BEQ) + (\triangle DER) = (\text{四角形 PQRD})$ なので、

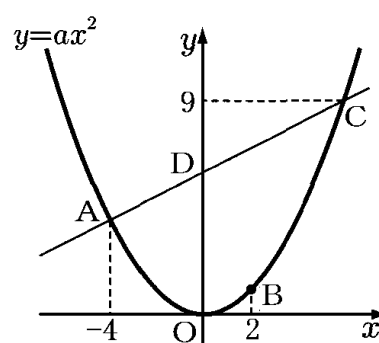
$$1 + 5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-t)^2 + \frac{1}{2}(4-t^2) = 6 - 3t$$

$$13 + (1-t)^2 + 4 - t^2 = 12 - 6t, \quad 13 + 1 - 2t + t^2 + 4 - t^2 = 12 - 6t, \quad 6t - 2t = 12 - 18$$

$$4t = -6, \quad t = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

[問題]

右の図のように、関数 $y = ax^2$ (a は定数) のグラフ上に 3 点 A, B, C がある。A の x 座標は -4 , B の x 座標は 2 , C の y 座標は 9 であり、C の x 座標は正である。点 D は直線 AC と y 軸との交点であり、点 O は原点である。また、関数 $y = ax^2$ について、 x の変域が $-4 \leq x \leq 2$ のとき、 y の変域は $0 \leq y \leq 4$ である。このとき、次の各問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 直線 AC の式を求めよ。

(3) 線分 CD 上に 2 点 C, D とは異なる点 P をとる。四角形 POBC の面積が 20 となるときの P の座標を求めよ。

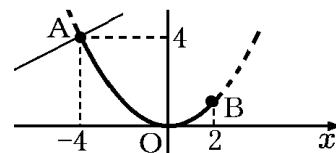
(熊本県)(***)

[解答欄]

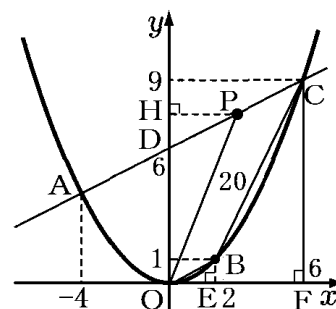
(1)	(2)	(3)
-----	-----	-----

[ヒント]

(1) 「 x の変域が $-4 \leq x \leq 2$ のとき、 y の変域は $0 \leq y \leq 4$ である」とあるので、右図のように、点Aの y 座標は4になる。



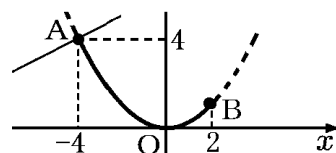
(3) 右図のように点P, E, F, Hをとり、 $\triangle POD$ の面積を求めてPHの長さを求めることで、点Pの x 座標を計算する。
 $(\triangle POD \text{の面積}) = (\text{台形 ODCFの面積}) - \{(\text{四角形 POBCの面積}) + (\triangle BOE \text{の面積}) + (\text{台形 EBCFの面積})\}$



[解答](1) $a = \frac{1}{4}$ (2) $y = \frac{1}{2}x + 6$ (3) $P\left(\frac{4}{3}, \frac{20}{3}\right)$

[解説]

(1) 「 x の変域が $-4 \leq x \leq 2$ のとき、 y の変域は $0 \leq y \leq 4$ である」とあるので、右図のように、点Aの y 座標は4になる。点A(-4, 4)は $y = ax^2$ 上にあるので、 $x = -4$, $y = 4$ を $y = ax^2$ に代入して、 $4 = a \times (-4)^2$, $16a = 4$, $a = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$



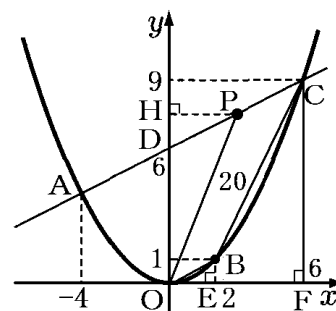
(2) まず、点Cの座標を求める。点Cは $y = \frac{1}{4}x^2$ 上にあるので、 $y = 9$ を $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入して、 $9 = \frac{1}{4}x^2$, $x^2 = 36$, $x > 0$ なので、 $x = 6$ よって、点Cの座標は(6, 9)

点A(-4, 4)なので、 $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って直線ACの式を求める。

$$y = \frac{9 - 4}{6 - (-4)}(x - 6) + 9, \quad y = \frac{1}{2}(x - 6) + 9, \quad y = \frac{1}{2}x + 6$$

(3) 右図のように点P, E, F, Hをとり、 $\triangle POD$ の面積を求めてPHの長さを求めることで、点Pの x 座標を計算する。

$$\begin{aligned} (\text{台形 ODCFの面積}) &= \frac{1}{2} \times (\text{上底 DO} + \text{下底 CF}) \times (\text{高さ OF}) \\ &= \frac{1}{2} \times (6 + 9) \times 6 = 45 \end{aligned}$$



点Bの x 座標は2なので、 $x = 2$ を $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入して、 $y = \frac{1}{4} \times 2^2 = 1$

よって、点Bの座標は(2, 1)

$$(\text{台形 EBCFの面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{上底 BE} + \text{下底 CF}) \times (\text{高さ EF}) = \frac{1}{2} \times (1 + 9) \times (6 - 2) = 20$$

$$(\triangle BOE \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 BE}) \times (\text{高さ OE}) = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$

また、仮定より、(四角形 POBC の面積) = 20

よって、

($\triangle POD$ の面積) + (四角形 POBC の面積) + ($\triangle BOE$ の面積) + (台形 EBCF の面積) = (台形 ODCF の面積)

$$(\triangle POD \text{ の面積}) + 20 + 1 + 20 = 45$$

よって、($\triangle POD$ の面積) = $45 - 41 = 4$

$$(\triangle POD \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 DO}) \times (\text{高さ PH}) = 4$$

$$\frac{1}{2} \times 6 \times (\text{高さ PH}) = 4, \quad 3 \times (\text{高さ PH}) = 4$$

$$(\text{高さ PH}) = 4 \div 3 = \frac{4}{3}$$

したがって、点 P の x 座標は $\frac{4}{3}$ である。点 P は $y = \frac{1}{2}x + 6$ 上にあるので、

$$x = \frac{4}{3} \text{ を } y = \frac{1}{2}x + 6 \text{ に代入して、 } y = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} + 6 = \frac{2}{3} + 6 = \frac{20}{3}$$

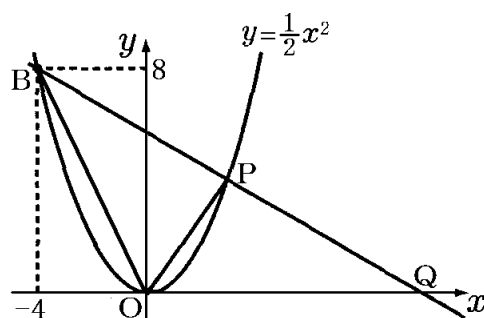
よって、点 P の座標は $\left(\frac{4}{3}, \frac{20}{3}\right)$ になる。

【】面積を2等分，面積比

[中点]

[問題]

右の図のように関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上を動く点 P がある。この点 P と点 B(-4, 8) とを結んでできる直線 BP と x 軸との交点を Q とする。このとき， $\triangle OPB$ の面積と $\triangle OPQ$ の面積が等しくなるような点 P の x 座標を求めよ。ただし，点 P は $x > 0$ を満たす範囲を動くものとする。

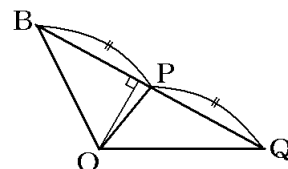


(鳥取県改)**

[解答欄]

[ヒント]

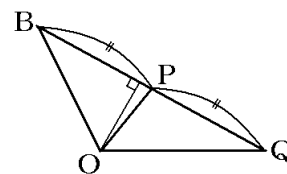
- ・「 $\triangle OPB$ の面積と $\triangle OPQ$ の面積が等しくなる」ので，点 P は線分 BQ の中点になる。
- ・点 B の y 座標が 8，点 Q の y 座標が 0 → 点 P の y 座標がわかる。



[解答] $2\sqrt{2}$

[解説]

「 $\triangle OPB$ の面積と $\triangle OPQ$ の面積が等しくなる」ので，点 P は線分 BQ の中点になる。(それぞれの底辺を BP, QP とすると高さは共通なので，BP = QP だから 2 つの三角形の面積は等しい)
点 B の y 座標が 8，点 Q の y 座標が 0 なので，点 P の y 座標は 4



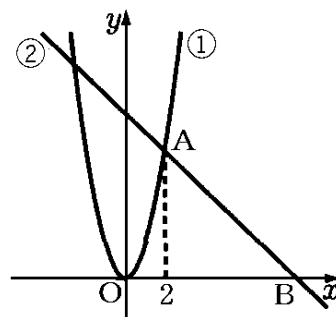
になる。点 P は $y = \frac{1}{2}x^2$ 上にあるので， $y = \frac{1}{2}x^2$ に $y = 4$ を代入して， $4 = \frac{1}{2}x^2$ ， $x^2 = 8$

$x > 0$ なので， $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

[問題]

右の図において，①は関数 $y = 2x^2$ のグラフで，②は傾きが -1 の直線である。点 A は①と②の交点で，その x 座標は 2 であり，点 B は②と x 軸の交点である。このとき，次の各問に答えよ。

- (1) 直線②の式を求めよ。
- (2) 線分 AB 上に点 C をとり，点 O と点 C を通る直線を l とする。この直線 l が三角形 OAB の面積を二等分するとき，直線 l の式を求めよ。



(高知県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]

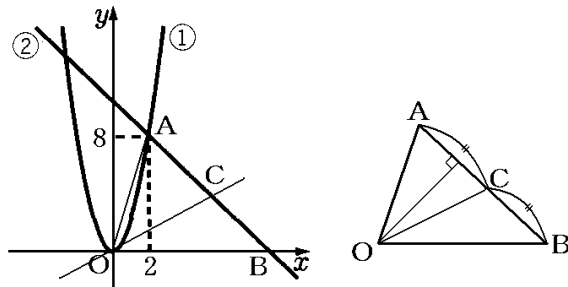
(1) A の座標, B の座標 → 直線②の式

(2) 直線 OC が三角形 OAB の面積を二等分

→ 点 C は線分 AB の中点 → C の座標

→ 直線 OC (直線 l の式)

[解答] (1) $y = -x + 10$ (2) $y = \frac{2}{3}x$



[解説]

(1) まず, 点 A の座標を求める。x座標が 2 である点 A は $y = 2x^2$ 上にあるので, $x = 2$ を $y = 2x^2$ に代入すると, $y = 2 \times 2^2 = 8$ よって, 点 A の座標は (2, 8)

②は傾きが -1 で, 点 A を通るので, $y = m(x - x_1) + y_1$ を使って直線の式を求める。

$$y = -(x - 2) + 8, \quad y = -x + 10$$

(2) 「直線 l (直線 OC) が三角形 OAB の面積を二等分する」とあるので, 点 C は線分 AB の中点になる。

点 A の y 座標は 8, 点 B の y 座標は 0 なので, 点 C の y 座標は, $(8 + 0) \div 2 = 4$ になる。

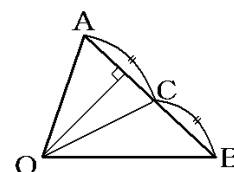
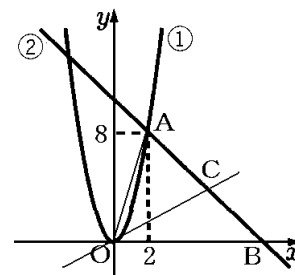
点 C は $y = -x + 10$ 上にあるので, $y = 4$ を $y = -x + 10$ に代入すると, $4 = -x + 10, \quad x = 10 - 4, \quad x = 6$

よって, 点 C の座標は (6, 4) になる。

直線 OC (直線 l) は原点 $O(0, 0)$ と $C(6, 4)$ を通る直線である。

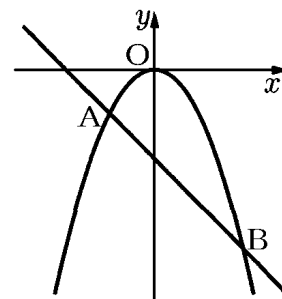
$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って, この直線の式を求める。

$$y = \frac{4 - 0}{6 - 0}(x - 0) + 0, \quad y = \frac{2}{3}x$$



[問題]

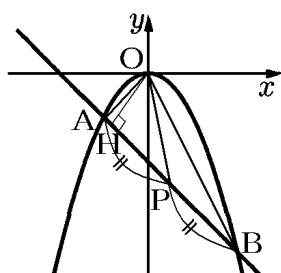
右の図のように、関数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があ
り、A, B の x 座標はそれぞれ $-2, 4$ である。直線 AB 上に点 P
があり、直線 OP が $\triangle OAB$ の面積を 2 等分しているとき、点 P
の座標を求めよ。



(鹿児島県)**

[解答欄]

[ヒント]



2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ の中点の座標は $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ (x, y それぞれの座標の平均)

[解答](1, -5)

[解説]

線分 AB の中点を P とすると、OP は $\triangle OAB$ の面積を 2 等分する。
それは次のように説明できる。

$\triangle OAP$ と $\triangle OBP$ で、それぞれの底辺を AP, BP とすると、
AP = BP である。また、2 つの三角形の高さは OH で共通である。
底辺と高さが同じなので、 $\triangle OAP$ と $\triangle OBP$ の面積は等しい。

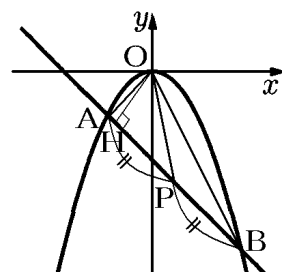
2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ の中点の座標は $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

で求めることができる (x, y それぞれの座標の平均)。

点 A の座標 : $x = -2$ を $y = -\frac{1}{2}x^2$ に代入すると、 $y = -\frac{1}{2} \times 4 = -2$ なので点 A は $(-2, -2)$

点 B の座標 : $x = 4$ を $y = -\frac{1}{2}x^2$ に代入すると、 $y = -\frac{1}{2} \times 16 = -8$ なので、点 B は $(4, -8)$

A $(-2, -2)$, B $(4, -8)$ の中点 P の座標は、 $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-2-8}{2}\right) = (1, -5)$



[底辺が共通(高さが共通)]

[問題]

右の図の①は、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフである。このグラフ上に点 A があり、その x 座標は 2 である。点 A を通り x 軸に平行な直線とグラフ①との交点のうち、点 A と異なる点を B とする。点 P は①のグラフ上を動く点であり、その x 座標は 2 より大きいものとする。図のように、2 点 B, P を通る直線を l とし、直線 l と x 軸との交点を Q とする。 $\triangle ABQ$ の面積と $\triangle ABP$ の面積が等しくなるとき、点 P の x 座標を求めよ。

(島根県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

- ・ $\triangle ABQ$ と $\triangle ABP$ の共通の底辺を AB とすると、
 $\triangle ABQ$ の面積と $\triangle ABP$ の面積が等しい
→ 高さ h_1 , h_2 が等しい
- ・ 点 A の y 座標 → 点 P の y 座標 → 点 P の x 座標

[解答] $2\sqrt{2}$

[解説]

$\triangle ABQ$ と $\triangle ABP$ の共通の底辺を AB とすると、右図の h_1 , h_2 がそれぞれの三角形の高さになる。

「 $\triangle ABQ$ の面積と $\triangle ABP$ の面積が等しくなる」とあり、底辺が共通で等しいので高さが等しくなる。

よって、 $h_1 = h_2$ になる。

点 A は $y = \frac{1}{4}x^2$ 上にあり、 x 座標が 2 なので、 $y = \frac{1}{4} \times 2^2 = 1$

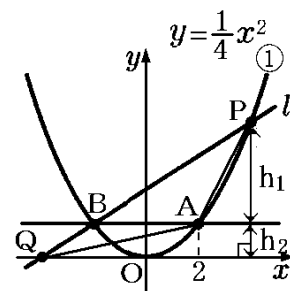
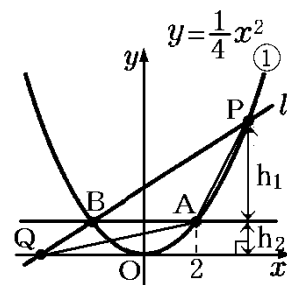
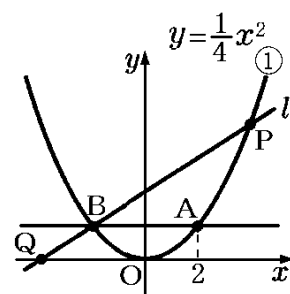
となり、 $h_2 = 1$ で、 $h_1 = h_2 = 1$ となる。

よって、点 P の y 座標は $h_1 + h_2 = 1 + 1 = 2$

点 P は $y = \frac{1}{4}x^2$ 上にあり、 y 座標が 2 なので、 $2 = \frac{1}{4}x^2$

$$x^2 = 8, \quad x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2},$$

$x > 0$ なので、 $x = 2\sqrt{2}$



[台形の面積の2等分など]

[問題]

右の図で、点Oは原点であり、2点A, Bの座標はそれぞれ(-4, 0), (2, 0)である。放物線①は関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフである。

点Aを通り、y軸に平行な直線をひき、放物線①との交点をCとする。また、点Bを通り、y軸に平行な直線をひき、放物線①との交点をDとし、点Cと点Dを結ぶ。線分CD上に点Eをとる。

直線AEが台形ABDCの面積を2等分するとき、点Eのx座標はいくらか。点Eのx座標をaとして、aの値を求めよ。

(香川県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

- ・点Cと点Dのy座標を計算→台形ABDCの面積
- ・点Eのx座標をaとする
- ・△EACの面積(底辺をACとすると、高さはEH)

は台形ABDCの面積の $\frac{1}{2}$ からaを求める。

[解答] $a = -\frac{1}{4}$

[解説]

まず、台形ABDCの面積を求めるために、点Cと点Dのy座標を計算する。

点Cのx座標は-4なので、 $x = -4$ を $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入すると、 $y = \frac{1}{2} \times (-4)^2 = 8$

点Dのx座標は2なので、 $x = 2$ を $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入すると、 $y = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$

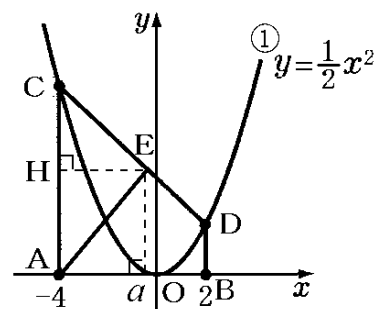
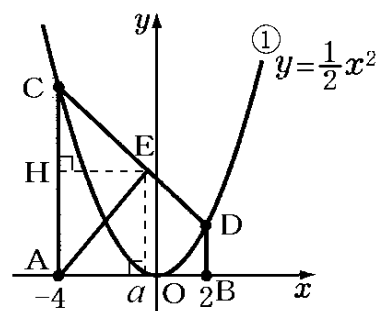
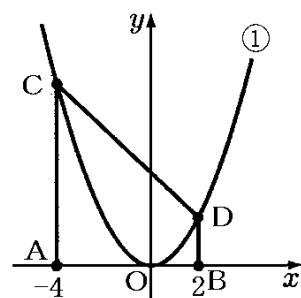
したがって、AC=8, BD=2

また、BA=2-(-4)=2+4=6

$$(\text{台形ABDCの面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{上底BD} + \text{下底AC}) \times (\text{高さBA})$$

$$= \frac{1}{2} \times (2+8) \times 6 = 30$$

右図のように点Eのx座標をaとする(図ではaが負の値である場合を描いているが、正の値でも、以下の計算は成り立つ)。



「直線 AE が台形 ABDC の面積を 2 等分する」とあるので、
 $\triangle EAC$ の面積は、 $30 \div 2 = 15$ である。

$\triangle EAC$ の底辺を $AC (= 8)$ とすると、高さは EH である。

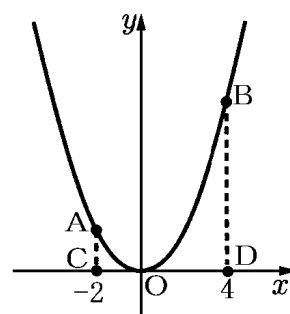
$$EH = a - (-4) = a + 4$$

$$(\triangle EAC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } AC) \times (\text{高さ } EH) = 15$$

$$\frac{1}{2} \times 8 \times (a + 4) = 15, \quad 4(a + 4) = 15, \quad 4a + 16 = 15, \quad 4a = -1 \quad \text{よって, } a = -\frac{1}{4}$$

[問題]

右の図のように、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があり、
 x 軸に 2 点 C, D がある。2 点 A, C の x 座標はともに -2 であり、
 2 点 B, D の x 座標はともに 4 である。線分 AB 上に点 E をとり、
 四角形 ACDE と $\triangle BDE$ をつくる。四角形 ACDE の面積と $\triangle BDE$
 の面積の比が $2 : 1$ となるとき、点 E の x 座標を求めよ。



(三重県)(***)

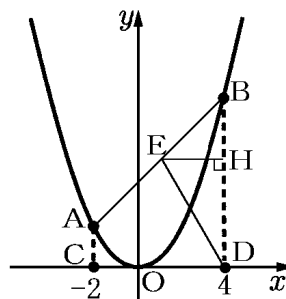
[解答欄]

[ヒント]

右図のような位置関係になる。

(四角形 ACDE の面積) : ($\triangle BDE$ の面積) = $2 : 1$ なので、

(台形 ACDB の面積) : ($\triangle BDE$ の面積) = $3 : 1$ である。



[解答] $\frac{3}{2}$

[解説]

(四角形 ACDE の面積) : ($\triangle BDE$ の面積) = $2 : 1$ なので、

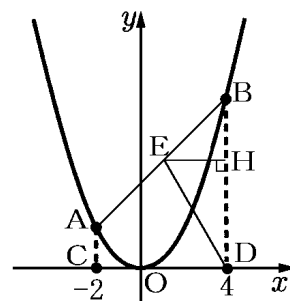
(台形 ACDB の面積) : ($\triangle BDE$ の面積) = $3 : 1$ である。…①

まず台形 ACDB の面積を求める。

$x = -2$ を $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入すると、 $y = 2$ なので点 A の座標は

$(-2, 2)$ で、 $AC = 2$

$x = 4$ を $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入すると、 $y = 8$ なので点 B の座標は $(4, 8)$ で、 $BD = 8$



$$CD = 4 - (-2) = 6$$

$$(\text{台形 ACDB の面積}) = \frac{1}{2} \times (AC + BD) \times CD = \frac{1}{2} \times (2 + 8) \times 6 = 30$$

$$\textcircled{1} \text{より, } (\triangle BDE \text{ の面積}) = (\text{台形 ACDB の面積}) \times \frac{1}{3} = 30 \times \frac{1}{3} = 10$$

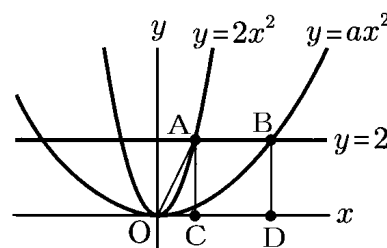
$$(\triangle BDE \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times BD \times EH = 10$$

$$\frac{1}{2} \times 8 \times EH = 10, \quad 4EH = 10, \quad EH = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\text{よって, 点 E の } x \text{ 座標は, } 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

[問題]

右の図で、O は原点、A、B はそれぞれ、直線 $y=2$ と 2 つの関数 $y=2x^2$ 、 $y=ax^2$ (a は定数、 $a > 0$) のグラフとの交点のうち、 x 座標が正である点である。また、C、D は x 軸上の点で、四角形 ACDB は正方形である。このとき、次の問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 点 C を通り、台形 AODB の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

(愛知県)(***)

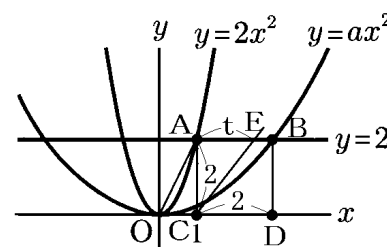
[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]

(1) 点 B の y 座標は 2、 x 座標は、 $AC=AB$ (正方形なので) を使って求める。

(2) AODB の面積を 2 等分する直線を CE とし、 $AE=t$ とおき、 $(\text{台形 AOCE の面積}) = (\text{台形 AODB の面積}) \div 2$ から t を求める



[解答](1) $a = \frac{2}{9}$ (2) $y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$

[解説]

(1) 点 A の y 座標は 2 なので、 $y = 2x^2$ に $y = 2$ を代入して、
 $2 = 2x^2$, $x^2 = 1$, $x > 0$ なので、 $x = 1$

よって、点 C の x 座標も 1 である。

次に、四角形 ACDB は正方形で、 $AC = 2$ なので、 $CD = 2$

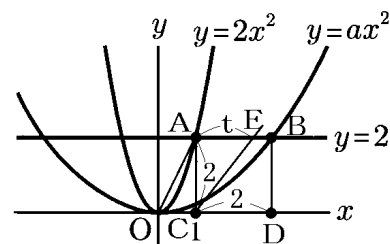
よって、点 D の x 座標は $1 + 2 = 3$ とわかる。

したがって、点 B の座標は $(3, 2)$ である。

点 B は $y = ax^2$ 上の点なので、 $y = ax^2$ に $x = 3$, $y = 2$ を代入して、

$$2 = a \times 3^2, 9a = 2$$

$$\text{よって、} a = \frac{2}{9}$$



$$(2) (\text{台形 AODB の面積}) = (\text{上底 AB} + \text{下底 OD}) \times (\text{高さ AC}) \div 2 = (2 + 3) \times 2 \div 2 = 5$$

点 C を通り、台形 AODB の面積を 2 等分する直線を右上図の CE とし、 $AE = t$ とおく。

$$(\text{台形 AOCE の面積}) = (\text{上底 AE} + \text{下底 OC}) \times (\text{高さ AC}) \div 2 = (t + 1) \times 2 \div 2 = t + 1$$

与えられた条件より、 $(\text{台形 AOCE の面積}) = (\text{台形 AODB の面積}) \div 2$

$$\text{よって、} t + 1 = \frac{5}{2}, t = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$$

$$(\text{直線 CE の傾き}) = \frac{AC}{AE} = AC \div AE = 2 \div \frac{3}{2} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

直線 CE は傾きが $\frac{4}{3}$ で、点 C(1, 0) を通るので、 $y = m(x - x_1) + y_1$ の公式を使って、

$$y = \frac{4}{3}(x - 1), y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} \text{ と求めることができる。}$$

[三角形の面積を一定の比に分ける]

[問題]

右の図で、①は関数 $y = -\frac{1}{4}x^2$ のグラフである。点 A,

B は①上にあり、点 A の x 座標は -8, 点 B の x 座標は

4 である。②は点 A, B を通る直線であり、y 軸との交

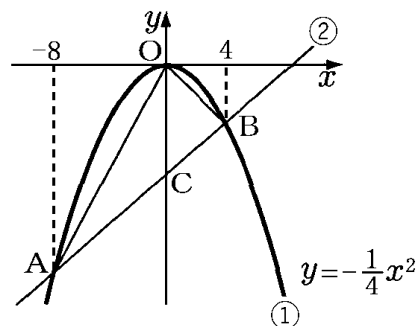
点を C とする。次の各問いに答えよ。ただし、座標軸の

単位の長さを 1cm とする。

(1) 直線②の式を求めよ。

(2) $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

(3) 点 Q を $\triangle OAB$ の辺 OA 上にとり、線分 CQ が $\triangle OAB$ の面積を 2 等分するとき、点 Q の座標を求めよ。



(青森県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
-----	-----	-----

[ヒント]

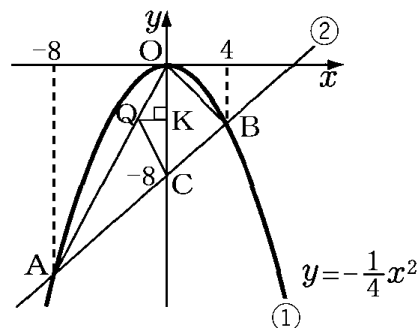
(1) A, B の座標計算→直線 AB(直線②)の式

(2) $\triangle OAB$ を $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ に分けて考える。

(3) (四角形 OBCQ の面積) = ($\triangle OAB$ の面積) \div 2

($\triangle OCQ$ の面積) = (OBCQ の面積) - ($\triangle OBC$ の面積)

$\triangle OCQ$ の面積と底辺 OC → 高さ QK → Q の x 座標



[解答](1) $y = x - 8$ (2) 48cm^2 (3) $Q(-2, -4)$

[解説]

(1) まず, 点 A, B の座標を求める。

点 A の x 座標は -8 なので, $y = -\frac{1}{4}x^2$ に $x = -8$ を代入すると, $y = -\frac{1}{4} \times (-8)^2 = -16$

よって, 点 A の座標は $(-8, -16)$

点 B の x 座標は 4 なので, $y = -\frac{1}{4}x^2$ に $x = 4$ を代入すると, $y = -\frac{1}{4} \times 4^2 = -4$

よって, 点 B の座標は $(4, -4)$

直線②は 2 点 $A(-8, -16)$, $B(4, -4)$ を通るので, $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式より,

$$y = \frac{-4 - (-16)}{4 - (-8)}(x - 4) - 4, \quad y = (x - 4) - 4, \quad y = x - 8$$

(2) $\triangle OAB$ を $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ に分けて考える。

$\triangle OAC$ の底辺を OC とすると, 高さは, 右図の AH になる。

$y = x - 8$ の y 切片は -8 なので, 点 C の y 座標は -8 で,

$OC = 8(\text{cm})$

点 A の x 座標は -8 なので, $AH = 8(\text{cm})$

$$(\triangle OAC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OC) \times (\text{高さ } AH) = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32(\text{cm}^2)$$

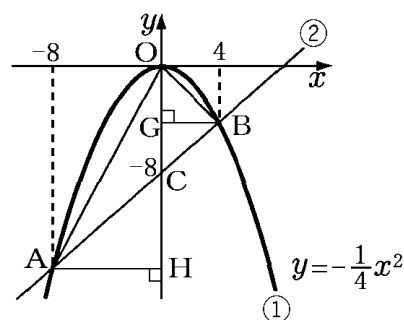
次に, $\triangle OBC$ の底辺を OC とすると, 高さは BG である。

点 B の x 座標は 4 なので, $BG = 4(\text{cm})$

$$(\triangle OBC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OC) \times (\text{高さ } BG) = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16(\text{cm}^2)$$

よって, ($\triangle OAB$ の面積) = ($\triangle OAC$ の面積) + ($\triangle OBC$ の面積) = $32 + 16 = 48(\text{cm}^2)$

(3) (2) より, $\triangle OAB$ の面積は 48cm^2 なので,



右図の四角形 OBCQ の面積は、 $48 \div 2 = 24(\text{cm}^2)$

$(\triangle OCQ \text{ の面積}) = 24 - (\triangle OBC \text{ の面積}) = 24 - 16 = 8(\text{cm}^2)$

$\triangle OCQ$ の底辺を OC とすると、高さは QK なので、

$(\triangle OCQ \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 OC}) \times (\text{高さ QK}) = 8(\text{cm}^2)$

$\frac{1}{2} \times 8 \times (\text{高さ QK}) = 8, 4 \times (\text{高さ QK}) = 8$

$(\text{高さ QK}) = 8 \div 4 = 2(\text{cm})$

よって、点 Q の x 座標は -2 になる。

点 Q の y 座標を求めるために、直線 OA の式を計算する。

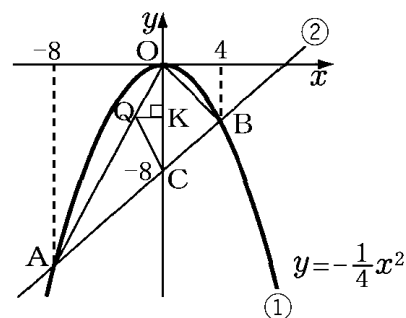
点 A の座標は (-8, -16)、点 O の座標は (0, 0) なので

$(\text{直線 OA の傾き}) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-16)}{0 - (-8)} = \frac{16}{8} = 2$

よって、直線 OA の式は $y = 2x$ である。

$y = 2x$ に $x = -2$ を代入すると、 $y = 2 \times (-2) = -4$

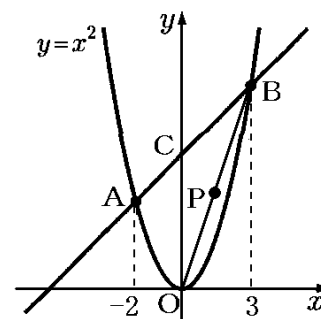
したがって、点 Q の座標は (-2, -4)



[問題]

右の図のように、関数 $y = x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B があり、2 点 A, B の x 座標はそれぞれ -2, 3 である。直線 AB と y 軸との交点を C とする。次の各問いに答えよ。

- (1) 直線 AB の式を求めよ。
- (2) $\triangle OAB$ の面積を求めよ。
- (3) 図のように、線分 OB 上に点 P を、四角形 OACP と $\triangle BCP$ の面積の比が 2:1 になるようにとる。このとき、点 P の x 座標を求めよ。



(長崎県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
-----	-----	-----

[ヒント]

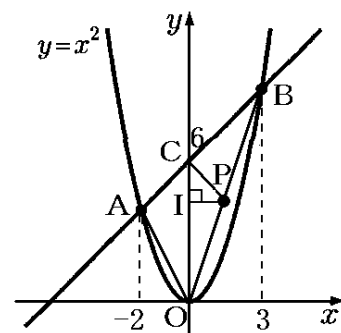
(1) A, B の座標計算→直線 AB の式

(2) $\triangle OAB$ を $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ に分けて考える。

$$(3) (\text{四角形 OACP の面積}) = (\triangle OAB \text{ の面積}) \times \frac{2}{2+1}$$

$$(\triangle POC \text{ の面積}) = (\text{四角形 OACP の面積}) - (\triangle AOC \text{ の面積})$$

$\triangle POC$ の面積と底辺 OC → 高さ PI → P の x 座標



[解答](1) $y = x + 6$ (2) 15 (3) $\frac{4}{3}$

[解説]

(1) $y = x^2$ 上にある点 A の x 座標は -2 なので, $x = -2$ を $y = x^2$ に代入して, $y = (-2)^2 = 4$ よって, 点 A の座標は (-2, 4) $y = x^2$ 上にある点 B の x 座標は 3 なので, $x = 3$ を $y = x^2$ に代入して, $y = 3^2 = 9$ よって, 点 B の座標は (3, 9)

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \text{ の公式を使って, 2 点 } A(-2, 4), B(3,$$

9) を通る直線の式を求める。

$$y = \frac{9 - 4}{3 - (-2)}(x - 3) + 9, \quad y = (x - 3) + 9, \quad y = x + 6$$

(2) $\triangle OAB$ を $\triangle AOC$ と $\triangle BOC$ に分けて考える。

$\triangle AOC$ の底辺を OC とすると, 右図の AH が高さになる。

点 C は直線 $y = x + 6$ の y 切片なので, 点 C の y 座標は 6 で, $OC = 6$ となる。また, 点 A の x 座標は -2 なので $AH = 2$ である。

$$(\triangle AOC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OC) \times (\text{高さ } AH) = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$$

次に, $\triangle BOC$ で, 点 B の x 座標は 3 なので, $BG = 3$ である。

$$(\triangle BOC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OC) \times (\text{高さ } BG) = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

よって, $(\triangle OAB \text{ の面積}) = (\triangle AOC \text{ の面積}) + (\triangle BOC \text{ の面積}) = 6 + 9 = 15$

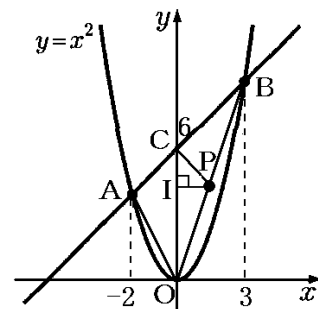
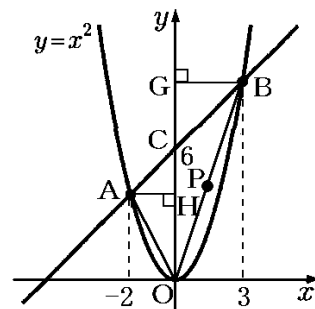
(3) (2) より, $\triangle OAB$ の面積は 15 である。

「四角形 OACP と $\triangle BCP$ の面積の比が 2 : 1 になる」より,

$$(\text{四角形 OACP の面積}) = (\triangle OAB \text{ の面積}) \times \frac{2}{2+1} = 15 \times \frac{2}{3} = 10$$

になる。(2) より, $(\triangle AOC \text{ の面積}) = 6$ なので,

$$(\triangle POC \text{ の面積}) = (\text{四角形 OACP の面積}) - (\triangle AOC \text{ の面積}) = 10 - 6 = 4$$



△POCの底辺をOCとすると、高さは右図のPIなので、

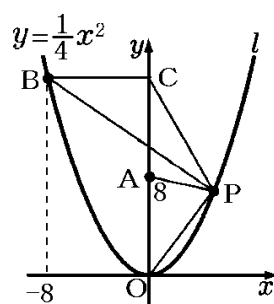
$$(\triangle POC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 OC}) \times (\text{高さ PI}) = 4$$

$$\frac{1}{2} \times 6 \times (\text{高さ PI}) = 4, \quad 3 \times (\text{高さ PI}) = 4, \quad (\text{高さ PI}) = 4 \div 3 = \frac{4}{3}$$

したがって、点Pのx座標は $\frac{4}{3}$ になる。

[問題]

右の図で、点Oは原点、点Aの座標は(0, 8)であり、曲線lは関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフを表している。点Bは曲線l上にあり、x座標は-8である。点Pのx座標が8より小さい正の数であるとき、点Bを通りx軸に平行な直線を引き、y軸との交点をCとし、点Oと点P、点Aと点P、点Bと点P、点Cと点Pをそれぞれ結んだ場合を表している。△CBPの面積が△AOPの面積の3倍になるとき、点Pのx座標を求めよ。



(東京都)(***)

[解答欄]

[ヒント]

点Pのx座標をaとする→y座標をaを使って表す
 △CBPの底辺BC、高さPH→面積をaを使って表す
 △AOPの底辺AO、高さPG→面積をaを使って表す
 (△CBPの面積) = (△AOPの面積) × 3

[解答]4

[解説]

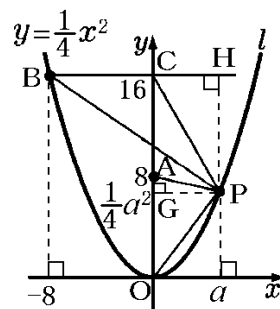
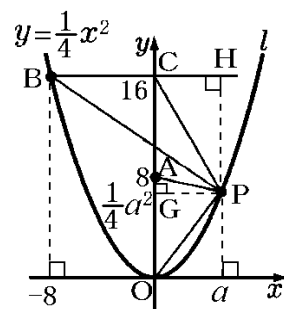
点Pのx座標をaとすると、点Pのy座標は、

$$y = \frac{1}{4}x^2 \text{ に } x = a \text{ を代入して、 } y = \frac{1}{4}a^2$$

△CBPの底辺をBCとすると、高さは右図のPHになる。

点Bのx座標が-8なので、BC=8

$$\text{点Bのy座標は、 } y = \frac{1}{4}x^2 \text{ に } x = -8 \text{ を代入して、 } y = \frac{1}{4} \times (-8)^2 = 16$$



よって、点 H の y 座標も 16 になる。

$$\text{したがって、PH} = (\text{点 H の y 座標}) - (\text{点 P の y 座標}) = 16 - \frac{1}{4}a^2$$

$$(\triangle \text{CBP の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 BC}) \times (\text{高さ PH}) = \frac{1}{2} \times 8 \times \left(16 - \frac{1}{4}a^2\right) = 64 - a^2 \cdots \textcircled{1}$$

次に、 $\triangle \text{AOP}$ の底辺を AO とすると、高さは右上図の PG になる。

「点 A の座標は (0, 8)」なので、 $\text{AO} = 8$

点 P の x 座標は a なので、 $\text{PG} = a$

$$\text{よって、} (\triangle \text{AOP の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 AO}) \times (\text{高さ PG}) = \frac{1}{2} \times 8 \times a = 4a \cdots \textcircled{2}$$

「 $\triangle \text{CBP}$ の面積が $\triangle \text{AOP}$ の面積の 3 倍になる」ので、

$$(\triangle \text{CBP の面積}) = (\triangle \text{AOP の面積}) \times 3$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より、} 64 - a^2 = 4a \times 3, \quad a^2 + 12a - 64 = 0, \quad (a - 4)(a + 16) = 0,$$

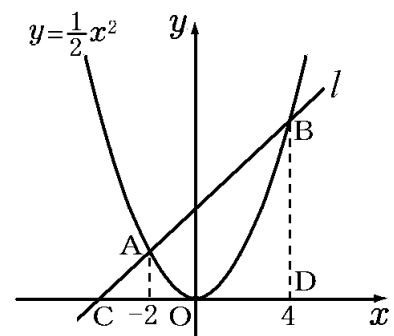
$$a = 4, -16 \quad a > 0 \text{ なので、} a = 4$$

よって、点 P の x 座標は 4 である。

[問題]

右の図のように、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフと直線 l の交点

を A, B とし、直線 l と x 軸の交点を C とする。また、点 B から x 軸に垂線 BD をひく。点 A の x 座標が -2、点 B の x 座標が 4 であるとき、次の各問いに答えよ。ただし、原点 O から点 (1, 0) までの距離及び原点 O から点 (0, 1) までの距離をそれぞれ 1cm とする。



(1) 直線 l の式を求めよ。

(2) 関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に点 P がある。ただし、点 P の x 座標は 0 より大きく 4 より小

さい。 $\triangle \text{PCD}$ と $\triangle \text{PBD}$ の面積の比が 1 : 6 であるとき、点 P の x 座標を求めよ。

(千葉県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]

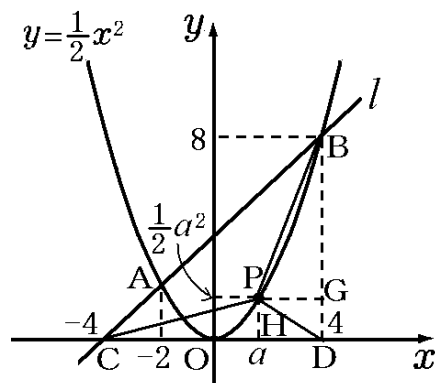
(1) A, B の座標計算→直線 AB(直線 l)の式

(2) 点 P の x 座標を $x=a$ とおく

$$(\triangle PCD \text{ の面積}) = \frac{1}{2} (\text{底辺 } CD) \times (\text{高さ } PH)$$

$$(\triangle PBD \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } BD) \times (\text{高さ } PG)$$

$$(\triangle PBD \text{ の面積}) = (\triangle PCD \text{ の面積}) \times 6$$



[解答](1) $y = x + 4$ (2) 1

[解説]

(1) まず, 点 A, B の座標を求める。

点 A の x 座標は -2 なので, $x = -2$ を $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入すると, $y = \frac{1}{2} \times (-2)^2 = 2$

よって点 A の座標は $(-2, 2)$

点 B の x 座標は 4 なので, $x = 4$ を $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入すると, $y = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$

よって点 B の座標は $(4, 8)$

$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って, 2 点 $A(-2, 2)$, $B(4, 8)$ を通る直線の式を求める。

$$y = \frac{8-2}{4-(-2)}(x-4)+8, \quad y = (x-4)+8, \quad y = x+4$$

(2) 点 P の x 座標を $x=a$ とおくと,

y 座標は, $x=a$ を $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入して $y = \frac{1}{2}a^2$

$\triangle PCD$ の底辺を CD とすると, 高さは $PH = \frac{1}{2}a^2$

l の式 $y = x + 4$ に $y = 0$ を代入すると, $0 = x + 4$, $x = -4$ になるので, 点 C の x 座標は -4 になる。

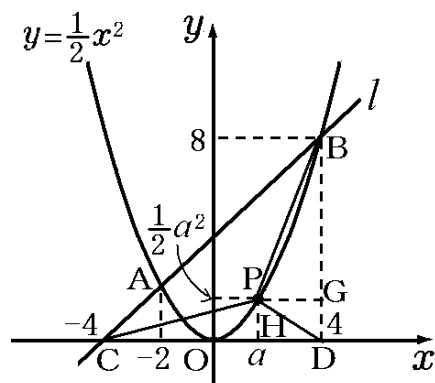
よって, $CD = 4 - (-4) = 8$

したがって, $(\triangle PCD \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times CD \times PH = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{1}{2}a^2 = 2a^2$

次に, $\triangle PBD$ の底辺を BD とすると, 高さは PG である。

$BD = 8$, $PG = 4 - a$ なので,

$$(\triangle PBD \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times BD \times PG = \frac{1}{2} \times 8 \times (4 - a) = 16 - 4a$$



$\triangle PCD$ と $\triangle PBD$ の面積の比が $1 : 6$ なので、

$$(\triangle PBD \text{ の面積}) = (\triangle PCD \text{ の面積}) \times 6$$

$$16 - 4a = 2a^2 \times 6, \quad 12a^2 + 4a - 16 = 0, \quad 3a^2 + a - 4 = 0$$

解の公式を使う。

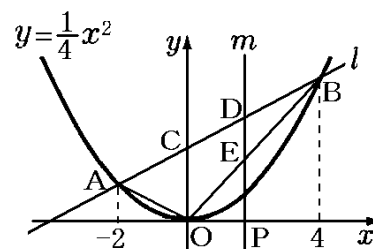
$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 3 \times (-4)}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-1 \pm 7}{6} = -\frac{4}{3}, 1$$

$0 < a < 4$ なので、 $a = 1$

したがって、点 P の x 座標は 1 である。

[問題]

右の図で、曲線は関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフである。曲線上に x 座標が $-2, 4$ である 2 点 A, B をとり、この 2 点を通る直線 l をひく。図のように、 x 軸上の $0 \leq x \leq 4$ の範囲に点 P をとり、点 P を通って y 軸に平行な直線 m をひく。直線 m と直線 l の交点を D 、直線 m と線分 OB との交点を E とする。 $\triangle OAB$ と $\triangle BDE$ の面積の比が $4 : 1$ のとき、点 P の x 座標を求めよ。
(埼玉県)(***)



[解答欄]

[ヒント]

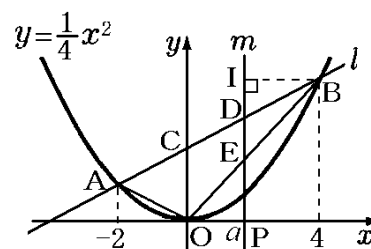
A, B の座標計算 → 直線 AB の式

$\triangle OAB$ を $\triangle OAC$ と $\triangle OBC$ に分けて、面積を計算

点 P の x 座標を a として、

$\triangle BDE$ (底辺 DE , 高さ BI) の面積を a を使って表す

($\triangle OAB$ の面積) : ($\triangle BDE$ の面積) = $4 : 1$ で式をたてる



[解答] $4 - \sqrt{6}$

[解説]

まず、直線 l の式を求めるために点 A, B の座標を計算する。

$y = \frac{1}{4}x^2$ 上にある点 A の x 座標は -2 なので、 $x = -2$ を $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入すると、

$y = \frac{1}{4} \times (-2)^2 = 1$ よって、点 A の座標は $(-2, 1)$

$y = \frac{1}{4}x^2$ 上にある点 B の x 座標は 4 なので、 $x = 4$ を $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入すると、

$$y = \frac{1}{4} \times 4^2 = 4 \quad \text{よって、点 B の座標は}(4, 4)$$

$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って、2 点 A(-2, 1), B(4, 4) を通る直線の式を求める。

$$y = \frac{4-1}{4-(-2)}(x-4)+4, \quad y = \frac{1}{2}(x-4)+4, \quad y = \frac{1}{2}x+2 \cdots \textcircled{1}$$

$y = \frac{1}{2}x+2$ の切片 (y 切片) は 2 なので、点 C の y 座標は 2 で、 $OC = 2$ になる。

次に、 $\triangle OAB$ を $\triangle OCA$ と $\triangle OCB$ に分割してその面積を求める。

$$(\triangle OCA \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OC) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

$$(\triangle OCB \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OC) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

$$\text{よって、} (\triangle OAB \text{ の面積}) = (\triangle OCA \text{ の面積}) + (\triangle OCB \text{ の面積}) = 2 + 4 = 6 \cdots \textcircled{2}$$

次に、点 P の x 座標を a として、 $\triangle BDE$ の面積を a を使って表すことにする。

右図で、 $\triangle BDE$ の底辺を DE とすると高さは BI になる。

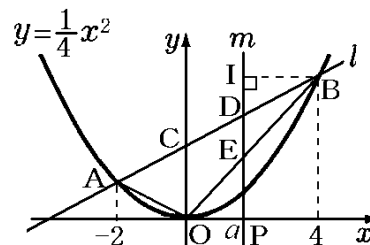
点 B の x 座標は 4 で、点 I の x 座標は a なので、

$$BI = 4 - a \text{ である。} \cdots \textcircled{3}$$

DE の長さを求めるために、点 D と E の y 座標を計算する。

x 座標が a である点 D は直線 l (①より $y = \frac{1}{2}x + 2$) 上にあ

るので、 $x = a$ を $y = \frac{1}{2}x + 2$ に代入して、 $y = \frac{1}{2}a + 2 \cdots \textcircled{4}$



点 B の座標は (4, 4) なので、(直線 OB の傾き) $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{4 - 0} = \frac{4}{4} = 1$

よって、直線 OB の式は $y = x$ である。

x 座標が a である点 E は $y = x$ 上にあるので、 $x = a$ を $y = x$ に代入して、 $y = a \cdots \textcircled{5}$

④、⑤より、点 D の y 座標は $y = \frac{1}{2}a + 2$ 、点 E の y 座標は $y = a$ なので、

$$DE = \frac{1}{2}a + 2 - a = -\frac{1}{2}a + 2 \cdots \textcircled{6}$$

③、⑥より、

$$(\triangle BDE \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } DE) \times (\text{高さ } BI)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}a + 2\right) \times (4-a) = \left(-\frac{1}{4}a + 1\right)(4-a) = \frac{1}{4}(-a+4)(4-a) = \frac{1}{4}(4-a)^2 = \frac{1}{4}(a-4)^2$$

「 $\triangle OAB$ と $\triangle BDE$ の面積の比が $4 : 1$ 」で、②より($\triangle OAB$ の面積) $=6$ なので、

$$(\triangle OAB \text{ の面積}) : (\triangle BDE \text{ の面積}) = 4 : 1, \quad 6 : \frac{1}{4}(a-4)^2 = 4 : 1$$

比の内項の積は外項の積に等しいので、 $\frac{1}{4}(a-4)^2 \times 4 = 6 \times 1$

$$(a-4)^2 = 6, \quad a-4 = \pm\sqrt{6}, \quad a = 4 \pm \sqrt{6}$$

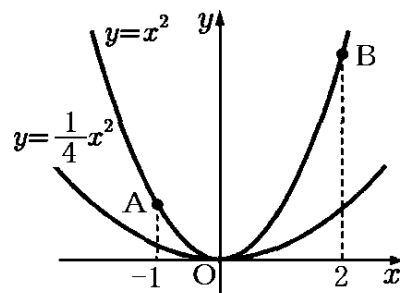
「 x 軸上の $0 \leq x \leq 4$ の範囲に点 P をとる」とあるので、 $0 \leq a \leq 4$

よって、 $a = 4 - \sqrt{6}$

[問題]

右の図のように、関数 $y = x^2$ のグラフと関数 $y = \frac{1}{4}x^2$

のグラフがある。2点 A, B は関数 $y = x^2$ のグラフ上の点であり、 A, B の x 座標はそれぞれ $-1, 2$ である。このとき、次の各問いに答えよ。



(1) 2点 A, B を通る直線の傾きを求めよ。

(2) 関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に点 P をとり、 P の x 座標

を t とする。ただし、 $0 < t < 2$ とする。また、 P を通り y 軸に平行な直線と関数 $y = x^2$ のグラフ、直線 AB との交点をそれぞれ Q, R とする。

① $t = 1$ のとき、線分 PQ と線分 QR の長さの比を求めよ。

② 線分 AP, PB, BQ, QA で囲まれた図形の面積が $\triangle AQB$ の面積と等しくなる t の値を求めよ。

(福島県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)② $PQ : QR =$	②
-----	------------------	---

[ヒント]

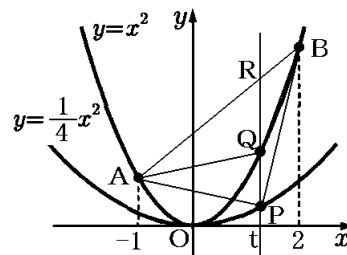
(1) A, B の座標計算 \rightarrow 直線 AB の式

(2)① $x = 1$ のときの P, Q, R の y 座標を計算

② $PQ = QR$ であれば、 $\triangle APQ = \triangle AQR, \triangle BPQ = \triangle BQR$

となり(それぞれ底辺が等しく高さが共通なので)、

線分 AP, PB, BQ, QA で囲まれた図形の面積は $\triangle AQB$ の面積と等しくなる。



[解答](1) 1 (2)①PQ : QR = 3 : 8 ② $\frac{2+2\sqrt{15}}{7}$

[解説]

(1) $y = x^2$ に $x = -1$ を代入すると $y = 1$ なので、点 A の座標は $(-1, 1)$

$y = x^2$ に $x = 2$ を代入すると $y = 4$ なので、点 B の座標は $(2, 4)$

よって、直線 AB の傾きは、 $\frac{4-1}{2-(-1)} = \frac{3}{3} = 1$

(2)① まず、直線 AB の式を求めておく。

(1)より、傾きが1でB(2, 4)を通るので、 $y = a(x - x_1) + y_1$ の公式より、 $y = (x - 2) + 4$, $y = x + 2$

$x = 1$ を $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入すると $y = \frac{1}{4}$ なので、P の y 座標は $\frac{1}{4}$

$x = 1$ を $y = x^2$ に代入すると $y = 1$ なので、Q の y 座標は 1

$x = 1$ を $y = x + 2$ に代入すると $y = 3$ なので、R の y 座標は 3

よって、 $PQ = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $QR = 3 - 1 = 2$

$$PQ : QR = \frac{3}{4} : 2 = 3 : 8$$

② $PQ = QR$ であれば、 $\triangle APQ = \triangle AQR$, $\triangle BPQ = \triangle BQR$

となり(それぞれ底辺が等しく高さが共通なので)、

線分 AP, PB, BQ, QA で囲まれた図形の面積は $\triangle AQB$ の面積と等しくなる。

$x = t$ を $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入すると $y = \frac{1}{4}t^2$ なので、P の y 座標は $\frac{1}{4}t^2$

$x = t$ を $y = x^2$ に代入すると $y = t^2$ なので、Q の y 座標は t^2

$x = t$ を $y = x + 2$ に代入すると $y = t + 2$ なので、R の y 座標は $t + 2$

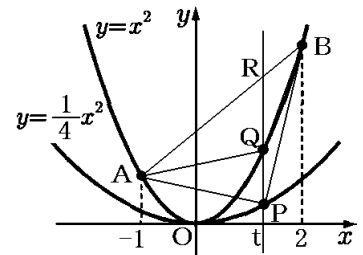
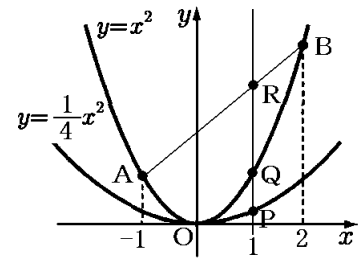
よって、 $QR = (t + 2) - t^2$, $PQ = t^2 - \frac{1}{4}t^2 = \frac{3}{4}t^2$

$PQ = QR$ なので、 $\frac{3}{4}t^2 = (t + 2) - t^2$, $3t^2 = 4t + 8 - 4t^2$

$$7t^2 - 4t - 8 = 0$$

$$\text{解の公式より, } t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 7 \times (-8)}}{14} = \frac{4 \pm \sqrt{240}}{14} = \frac{4 \pm 4\sqrt{15}}{14} = \frac{2 \pm 2\sqrt{15}}{7}$$

$t > 0$, $2 - 2\sqrt{15} < 0$ なので、 $t = \frac{2 - 2\sqrt{15}}{7}$ は不適。よって、 $t = \frac{2 + 2\sqrt{15}}{7}$



[問題]

右の図のように、関数 $y = x^2$ のグラフ上に、2点 A, B がある。点 A の x 座標を 2、点 B の x 座標を -1 とする。点 A と x 座標が等しい x 軸上の点を C とする。△ABC と △OAB において、線分 AB を底辺としたときのそれぞれの高さの比を、もっとも簡単な整数の比で求めよ。

(北海道)(***)

[解答欄]

[ヒント]

右図のように、△ABC と △OAB の共通の底辺を AB とすると、それぞれの高さの比は面積の比と等しくなる。そこで、△ABC と △OAB の面積をそれぞれ求める。

[解答] 2 : 1

[解説]

右図のように、△ABC と △OAB の共通の底辺を AB とすると、それぞれの高さの比は面積の比と等しくなる。そこで、△ABC と △OAB の面積をそれぞれ求める。

△ABC について、

点 A は $y = x^2$ 上にあるので、 $x = 2$ を $y = x^2$ に代入すると、 $y = 4$ によって、 $AC = 4$

△ABC の底辺を $AC = 4$ とすると、高さは $2 - (-1) = 3$ である。

したがって、(△ABC の面積) = $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 \cdots \text{①}$

次に、△OAB について、

まず、点 D の座標を求めるために、直線 AB の式を求める。

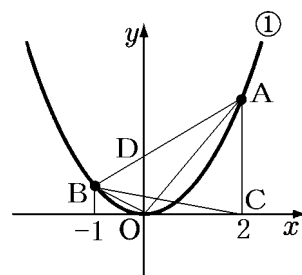
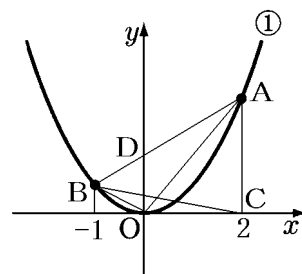
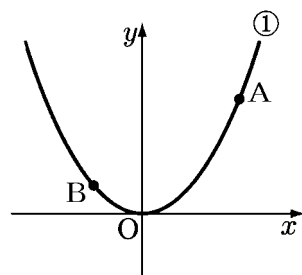
点 A(2, 4)、点 B(-1, 1) なので、 $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式より、

$$y = \frac{4-1}{2-(-1)}(x-2)+4, \quad y = x-2+4, \quad y = x+2$$

点 D は $y = x+2$ の切片 (y 切片) なので、点 D の y 座標は 2 で、 $OD = 2$ である。

△AOD、△BOD の共通の底辺を $OD = 2$ とすると、△AOD の高さは 2、△BOD の高さは 1 なので、

$$(\triangle AOD \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$



$$(\triangle BOD \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$

よって、 $(\triangle OAB \text{ の面積}) = (\triangle AOD \text{ の面積}) + (\triangle BOD \text{ の面積}) = 2 + 1 = 3 \cdots \textcircled{2}$

①, ②より、 $(\triangle ABC \text{ の面積}) : (\triangle OAB \text{ の面積}) = 6 : 3 = 2 : 1$ になる。

よって、 $\triangle ABC$ と $\triangle OAB$ において、線分 AB を底辺としたときのそれぞれの高さの比は、面積比と同じ $2 : 1$ となる。

[問題]

右の図のように、関数 $y = x^2$ のグラフ上に 3 点 $A(-3, 9)$, $B(-2, 4)$, $C(1, 1)$ がある。点 P を関数 $y = x^2$ のグラフ上にとる。 $\triangle OBC$ の面積と $\triangle OAP$ の面積の比が $1 : 5$ になるときの点 P の座標を求めよ。ただし、点 P の x 座標は正とする。

(徳島県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

まず、 B, C の座標 \rightarrow 直線 BC の式 $\rightarrow \triangle OBC$ の面積を求める。

次に、点 P の x 座標を $x = a$ とする。

A, P の座標 \rightarrow 直線 AP の式 $\rightarrow \triangle OAP$ の面積を a を使って表す。

$(\triangle OBC \text{ の面積}) : (\triangle OAP \text{ の面積}) = 1 : 5$ で a についての式を立てる。

[解答](2, 4)

[解説]

まず、 $\triangle OBC$ の面積を求めるために、直線 BC の式を計算する。

$B(-2, 4), C(1, 1)$ なので、 $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式より、

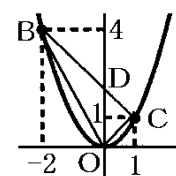
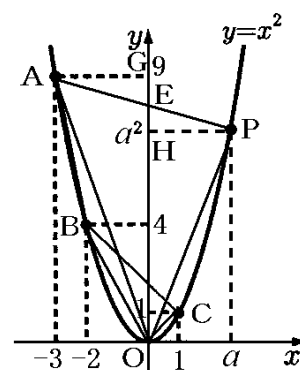
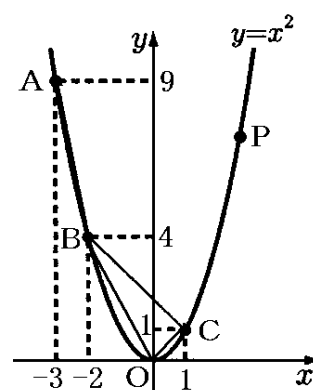
$$y = \frac{1-4}{1-(-2)}(x-1)+1, \quad y = -(x-1)+1, \quad y = -x+2$$

$y = -x+2$ の y 切片 D の y 座標は 2 になる。よって、 $OD = 2$

$$(\triangle OCD \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OD) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$

$$(\triangle OBD \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OD) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

$$(\triangle OBC \text{ の面積}) = (\triangle OCD \text{ の面積}) + (\triangle OBD \text{ の面積}) = 1 + 2 = 3 \cdots \textcircled{1}$$



次に、点 P の x 座標を $x=a$ として、 $\triangle OAP$ の面積を a を使って表すこととする。

そこで、まず直線 AP の式を求める。

点 P の x 座標は a なので、 $x=a$ を $y=x^2$ に代入して $y=a^2$

よって、P の座標は (a, a^2) である。点 A の座標は $(-3, 9)$ である。

$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って、2 点 A, P を通る直線の式

を求める。

$$y = \frac{a^2 - 9}{a - (-3)}(x - (-3)) + 9, \quad y = \frac{(a+3)(a-3)}{a+3}(x+3) + 9, \quad y = (a-3)(x+3) + 9$$

$$y = (a-3)x + 3a - 9 + 9, \quad y = (a-3)x + 3a$$

点 E は $y = (a-3)x + 3a$ の y 切片なので、点 E の y 座標は $3a$ となり、 $OE = 3a$ となる。

$$(\triangle OPE \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OE) \times (\text{高さ } PH) = \frac{1}{2} \times 3a \times a = \frac{3}{2}a^2$$

$$(\triangle OAE \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OE) \times (\text{高さ } AG) = \frac{1}{2} \times 3a \times 3 = \frac{9}{2}a$$

$$\text{よって、} (\triangle OAP \text{ の面積}) = (\triangle OPE \text{ の面積}) + (\triangle OAE \text{ の面積}) = \frac{3}{2}a^2 + \frac{9}{2}a \cdots \textcircled{2}$$

「 $\triangle OBC$ の面積と $\triangle OAP$ の面積の比が $1:5$ になる」ので、

$$(\triangle OBC \text{ の面積}) : (\triangle OAP \text{ の面積}) = 1 : 5$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より、} 3 : \left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{9}{2}a \right) = 1 : 5$$

比の内項の積は外項の積に等しいので、

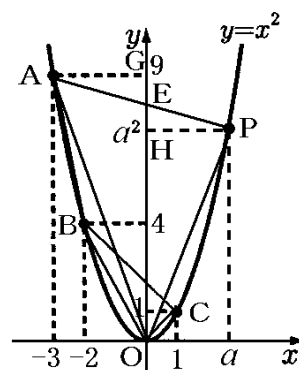
$$\left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{9}{2}a \right) \times 1 = 3 \times 5, \quad \frac{3}{2}a^2 + \frac{9}{2}a = 15, \quad 3a^2 + 9a = 30, \quad a^2 + 3a - 10 = 0, \quad (a+5)(a-2) = 0$$

よって、 $a = -5, 2$

「点 P の x 座標は正とする」とあるので、 $a > 0$ したがって、 $a = 2$

点 P は $y = x^2$ 上にあるので、 $x = 2$ を $y = x^2$ に代入して、 $y = 2^2 = 4$

よって、点 P の座標は $(2, 4)$ になる。



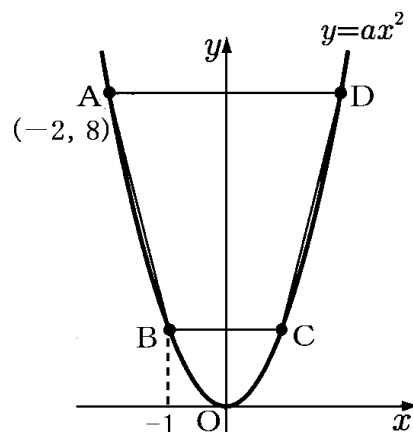
[問題]

右の図で、 O は原点、 A, B, C, D は関数 $y = ax^2$ (a は定数、 $a > 0$) のグラフ上の点で、線分 AD, BC はともに x 軸に平行である。点 A の座標が $(-2, 8)$ 、点 B の x 座標が -1 であるとき、次の各問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 点 B を通り、四角形 $ABCD$ の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

(愛知県)(***)



[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]

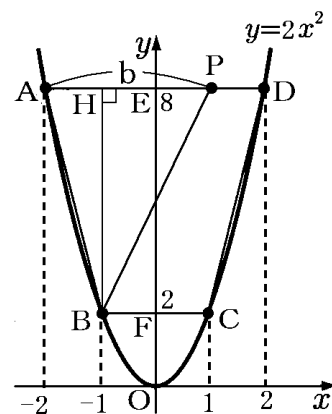
(1) 点 $A(-2, 8) \rightarrow y = ax^2$ に代入

(2) A, B, C, D の座標 \rightarrow 四角形 $ABCD$ の面積

$$(\triangle BAP \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{四角形 } ABCD \text{ の面積})$$

$\triangle BAP$ の面積、高さ $BH \rightarrow$ 底辺 $AP \rightarrow$ 点 P の座標

点 P, B の座標 \rightarrow 直線 BP の式



[解答](1) $a = 2$ (2) $y = 3x + 5$

[解説]

(1) 点 $A(-2, 8)$ は $y = ax^2$ 上にあるので、

$x = -2, y = 8$ を $y = ax^2$ に代入して、

$$8 = a \times (-2)^2, \quad 8 = 4a$$

$$a = 8 \div 4 = 2$$

(2) まず、四角形 $ABCD$ の面積を求めるために、 B, C, D の座標を計算する。

$y = 2x^2$ 上にある点 B の x 座標は -1 なので、

$$x = -1 \text{ を } y = 2x^2 \text{ に代入して } y = 2 \times (-1)^2 = 2$$

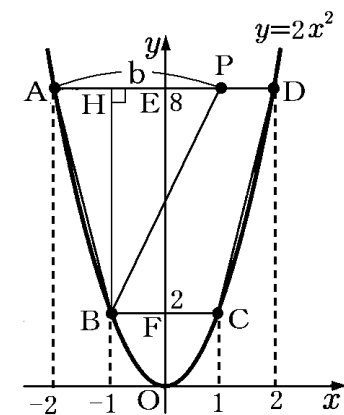
よって、点 B の座標は $(-1, 2)$

点 C は y 軸について点 B と対称なので、点 C の座標は $(1, 2)$

点 D は y 軸について点 A と対称なので、点 D の座標は $(2, 8)$

図より、 $AD = 2 - (-2) = 4, BC = 1 - (-1) = 2, EF = 8 - 2 = 6$

$$\text{よって、(四角形 } ABCD \text{ の面積)} = \frac{1}{2} \times (\text{上底 } BC + \text{下底 } AD) \times (\text{高さ } EF) = \frac{1}{2} \times (2 + 4) \times 6 = 18$$



次に、右上図のように AD 上に、 $AP=b$ である点 P をとる。

BP が四角形 ABCD の面積を二等分するとき、 $\triangle BAP$ の面積は $18 \div 2 = 9$ になる。

よって、 $(\triangle BAP \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 AP}) \times (\text{高さ BH}) = 9$

$BH = EF = 6$ なので、 $\frac{1}{2} \times b \times 6 = 9$, $3b = 9$, $b = 9 \div 3 = 3$

(点 P の x 座標) = (点 A の x 座標) + $b = -2 + 3 = 1$ なので、点 P の座標は (1, 8)

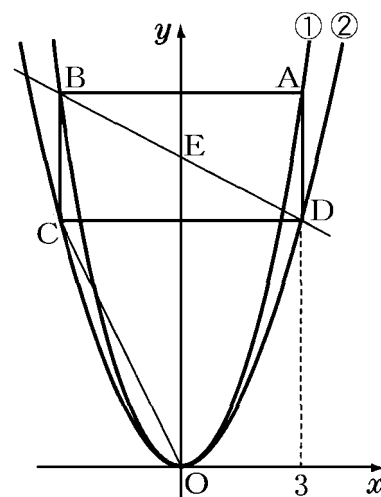
点 B の座標は (-1, 2) である。

$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って、2 点 P, B を通る直線の式を求める。

$y = \frac{8-2}{1-(-1)}(x-1)+8$, $y = 3(x-1)+8$, $y = 3x+5$

[問題]

右の図のように、2 つの関数 $y = x^2 \cdots \textcircled{1}$, $y = ax^2$ (a は定数) $\cdots \textcircled{2}$ のグラフと長方形 ABCD がある。2 点 A, B は関数①のグラフ上にあり、A の x 座標は 3 であって、辺 AB は x 軸に平行である。2 点 C, D は関数②のグラフ上にあり、C の x 座標は負で、C の y 座標は B の y 座標よりも小さい。点 E は直線 BD と y 軸との交点であり、点 O は原点である。また、長方形 ABCD において、 $AB : AD = 2 : 1$ である。このとき、次の各問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 直線 BD の式を求めよ。

(3) 線分 OC 上に 2 点 O, C とは異なる点 P をとる。線分 EP が四角形 ODBC の面積を 2 等分するときの P の x 座標を求めよ。

(熊本県改)(****)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
-----	-----	-----

[ヒント]

(1) 点 A, B の x 座標 → AB の長さ → AD = AB ÷ 2

→ 点 D の座標 → $y = ax^2$ に代入

(2) 点 B, D の座標 → 直線 BD の式

(3) まず, (四角形 ODBC の面積) = (△BCD) + (△OCD)

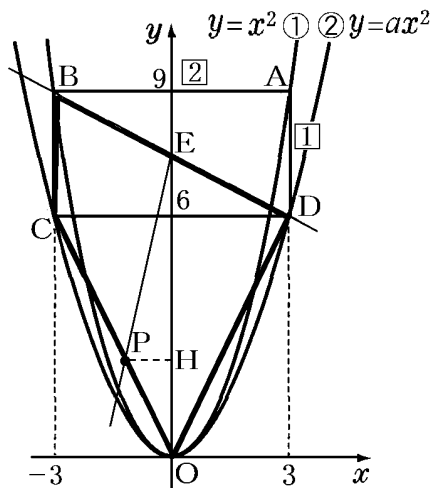
で, 四角形 ODBC の面積の面積を計算する。

次に, △OED の面積を計算する。

$$\rightarrow (\triangle OED) + (\triangle OEP) = (\text{四角形 ODBC}) \times \frac{1}{2}$$

より, △OEP の面積を求める。

→ △OEP の面積, 底辺 OE → 高さ PH → 点 P の x 座標



[解答] (1) $\frac{2}{3}$ (2) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$ (3) $-\frac{3}{5}$

[解説]

(1) 点 B は y 軸について点 A と対称なので, 点 B の x 座標

は -3 である。よって, $AB = 3 - (-3) = 6$

$AB : AD = 2 : 1$ なので, $AD = 6 \div 2 = 3$

$x = 3$ を $y = x^2$ に代入すると $y = 9$ なので, 点 A の y 座標は 9 である。したがって, 点 D の y 座標は $9 - 3 = 6$ になる。

点 D(3, 6) は $y = ax^2$ 上にあるので, $x = 3, y = 6$ を $y = ax^2$

に代入して, $6 = 9a, a = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

(2) (1) より点 B の座標は (-3, 9), 点 D の座標は (3, 6) で

ある。 $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って, 2 点 B, D を通る直線の式を求める。

$$y = \frac{6-9}{3-(-3)}(x-3)+6, \quad y = -\frac{1}{2}(x-3)+6, \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 6, \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$$

(3) まず, 四角形 ODBC の面積を計算する。

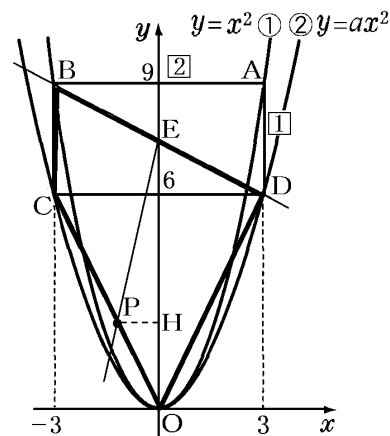
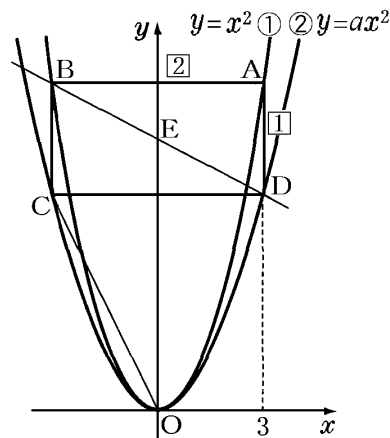
△BCD の底辺 CD は $3 - (-3) = 6$, 高さは $9 - 6 = 3$ なので,

$$(\triangle BCD \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$

△OCD の底辺 CD は 6, 高さは 6 なので,

$$(\triangle OCD \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$$

よって, (四角形 ODBC の面積) = $9 + 18 = 27$



次に、 $\triangle OED$ の面積を計算する。

点 E は 2 点 B, D の中点なので、y 座標は $\frac{9+6}{2} = \frac{15}{2}$

よって、 $OE = \frac{15}{2}$ $\triangle OED$ の底辺を OE とすると高さは 3 なので、

$$(\triangle OED \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times \frac{15}{2} \times 3 = \frac{45}{4}$$

線分 EP が四角形 ODBC の面積を 2 等分するので、

$$(\triangle OED \text{ の面積}) + (\triangle OEP \text{ の面積}) = (\text{四角形 ODBC の面積}) \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{45}{4} + (\triangle OEP \text{ の面積}) = 27 \times \frac{1}{2}$$

$$(\triangle OEP \text{ の面積}) = 27 \times \frac{1}{2} - \frac{45}{4} = \frac{54}{4} - \frac{45}{4} = \frac{9}{4}$$

$\triangle OEP$ の底辺を $OE = \frac{15}{2}$ とすると、高さは図の PH なので、

$$(\triangle OEP \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times \frac{15}{2} \times PH = \frac{9}{4}$$

$$\frac{15}{4} PH = \frac{9}{4}, \quad PH = \frac{9}{4} \div \frac{15}{4} = \frac{9}{4} \times \frac{4}{15} = \frac{3}{5}$$

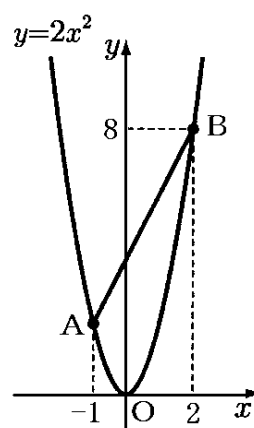
点 P の x 座標は負なので、 $-\frac{3}{5}$ である。

【】 等積変形の利用

[問題]

関数 $y = 2x^2$ のグラフ上に 2 点 A, B がある。点 A の x 座標は -1 , 点 B の座標は $(2, 8)$ である。このとき, 次の各問いに答えよ。

- (1) 点 A の y 座標を求めよ。
- (2) 直線 AB の式を求めよ。
- (3) 関数 $y = 2x^2$ のグラフ上の点で, 2 点 O, B の間にある点 P をとると, $\triangle PAB$ の面積は $\triangle OAB$ の面積に等しくなった。このとき, 点 P の座標を求めよ。ただし, 点 P は, 点 O とは異なるものとする。



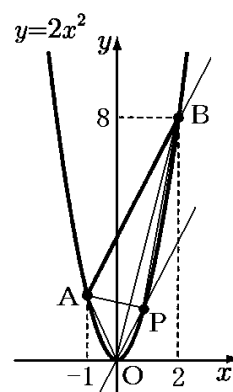
(沖縄県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
-----	-----	-----

[ヒント]

- (1) 点 A の x 座標は $-1 \rightarrow y = 2x^2$ に代入
- (2) 点 A, B の座標 \rightarrow 直線 AB の式
- (3) 右図のように, 補助線 OP を, $OP \parallel AB$ となるように引く。
 $\triangle PAB$ と $\triangle OAB$ の共通の底辺を AB とすると, $OP \parallel AB$ なので,
 2 つの三角形の高さは等しくなり, 2 つの三角形の面積が等しくなる。
 \rightarrow (直線 OP の傾き) = (直線 AB の傾き) \rightarrow 直線 OP の式
 \rightarrow 直線 OP と $y = 2x^2$ の交点を求める。



[解答] (1) 2 (2) $y = 2x + 4$ (3) (1, 2)

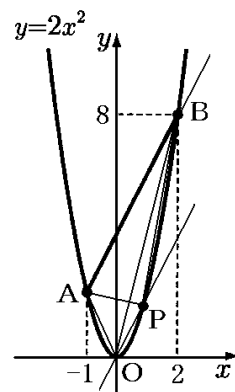
[解説]

(1) $x = -1$ を $y = 2x^2$ に代入すると $y = 2$ である。したがって, 点 A の座標は $(-1, 2)$ になる。

(2) $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って 2 点 A $(-1, 2)$, B $(2, 8)$ を通る直線の式を求める。

$$y = \frac{8 - 2}{2 - (-1)}(x - 2) + 8, \quad y = 2(x - 2) + 8, \quad y = 2x + 4$$

- (3) 右図のように, 補助線 OP を, $OP \parallel AB$ となるように引く。
 $\triangle PAB$ と $\triangle OAB$ の共通の底辺を AB とすると, $OP \parallel AB$ なので,
 2 つの三角形の高さは等しくなり, 2 つの三角形の面積が等しくなる。
 (2) より, 直線 AB ($y = 2x + 4$) の傾きは 2 なので, 直線 OP の傾きも 2 になる。OP は原点を通るので, $y = 2x$ の式で表すことができる。
 交点 P の座標を求めるには, $y = 2x^2$ と $y = 2x$ を連立方程式として解く。
 $y = 2x^2$ を $y = 2x$ に代入すると, $2x^2 = 2x$



$$2x^2 - 2x = 0, \quad x(x-1) = 0 \quad \text{よって, } x = 0, 1$$

点 P は原点以外の点なので, $x = 1$

$x = 1$ を $y = 2x$ に代入すると, $y = 2$

したがって, 点 P の座標は $(1, 2)$ であることがわかる。

[問題]

右の図で, 曲線は関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフである。曲線上に x 座標

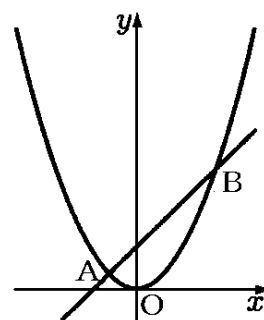
が $-1, 3$ である 2 点 A, B をとる。このとき, 次の各問いに答えよ。

(1) 直線 AB の式を求めよ。

(2) 曲線上を, x 座標が $x < -1$ の範囲で動く点 P を考える。△PAB

と△POB の面積が等しくなるとき, 点 P の座標を求めよ。

(埼玉県)(***)



[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

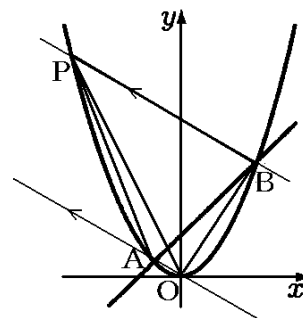
[ヒント]

(1) 点 A, B の座標を計算→直線 AB の式を求める。

(2) 右図のように B 点を通して, 直線 OA と平行な補助線 BP を引く。△PAB と△POB で, PB を共通な底辺とすると, OA // BP で, 2 つの三角形の高さが等しくなるので, △PAB と△POB の面積が等しくなる。

(BP の傾き) = (OA の傾き), 点 B の座標 → BP の式

BP の式と $y = \frac{1}{2}x^2$ を連立させて, 交点 P の座標を求める。



[解答](1) $y = x + \frac{3}{2}$ (2) $(-4, 8)$

[解説]

(1) $x = -1$ を $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入すると $y = \frac{1}{2}$ なので, 点 A の座標は $(-1, \frac{1}{2})$

$x = 3$ を $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入すると $y = \frac{9}{2}$ なので, 点 B の座標は $(3, \frac{9}{2})$

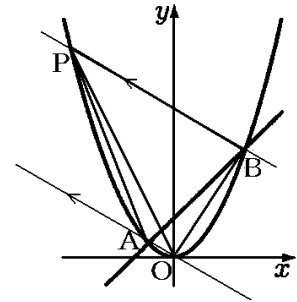
$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って, 2 点 A, B を通る直線の式を求める。

$$y = \frac{\frac{9}{2} - \frac{1}{2}}{3 - (-1)}(x - (-1)) + \frac{1}{2}, \quad y = \frac{4}{4}(x+1) + \frac{1}{2}, \quad y = x + \frac{3}{2}$$

(2) 右図のように B 点を通して、直線 OA と平行な補助線を引

き $y = \frac{1}{2}x^2$ との交点を P とする。

$\triangle PAB$ と $\triangle POB$ で、PB を共通な底辺とすると、
OA // BP で、2 つの三角形の高さが等しくなるので、 $\triangle PAB$ と $\triangle POB$ の面積が等しくなる。



$$(\text{直線 OA の傾き}) = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2}$$

直線 BP の傾きは直線 OA と同じ $-\frac{1}{2}$ で、点 B の座標は $(3, \frac{9}{2})$ なので、直線 BP の式は、

$y = a(x - x_1) + y_1$ の公式を使って、

$$y = -\frac{1}{2}(x-3) + \frac{9}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{9}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}x + 6 \text{ と求めることができる。}$$

交点 P の座標は、 $y = \frac{1}{2}x^2$ と $y = -\frac{1}{2}x + 6$ の連立方程式を解いて求めることができる。

$$y = \frac{1}{2}x^2 \text{ を } y = -\frac{1}{2}x + 6 \text{ に代入すると、} \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x + 6, \quad x^2 = -x + 12, \quad x^2 + x - 12 = 0,$$

$$(x+4)(x-3) = 0, \quad x = -4, 3$$

$x < -1$ なので $x = -4$

$$x = -4 \text{ を } y = \frac{1}{2}x^2 \text{ に代入すると、} y = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

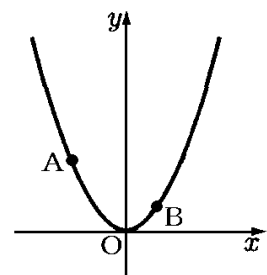
よって、点 P の座標は $(-4, 8)$ であることがわかる。

[問題]

右の図のように、関数 $y = x^2$ のグラフ上に、2 点 A, B がある。
点 A の x 座標を -2 、点 B の x 座標を 1 とする。x 軸上に点 P をとり、 $\triangle OAB$ と $\triangle OBP$ の面積が等しくなるようにするとき、点 P の座標を求めよ。ただし、点 P の x 座標は負であるものとする。

(北海道)(***)

[解答欄]



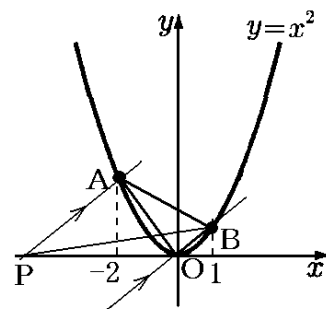
[ヒント]

右図のように、補助線 PA を $OB \parallel PA$ となるように引く。

$\triangle OAB$ と $\triangle OBP$ で、 OB を共通の底辺と考えると、 $OB \parallel PA$ なので、2 つの三角形の高さは等しくなり、2 つの三角形の面積が等しくなる。

点 A, B の座標を求める $\rightarrow OB$ の傾き = AP の傾き

\rightarrow 直線 AP の式 \rightarrow 点 P の座標



[解答](-6, 0)

[解説]

右図のように、補助線 PA を $OB \parallel PA$ となるように引く。

$\triangle OAB$ と $\triangle OBP$ で、 OB を共通の底辺と考えると、 $OB \parallel PA$ なので、2 つの三角形の高さは等しくなり、2 つの三角形の面積が等しくなる。そこで、まず、A, B の座標を求めておく。

$x = -2$ を $y = x^2$ に代入すると $y = 4$ なので、点 A の座標は (-2, 4)

$x = 1$ を $y = x^2$ に代入すると $y = 1$ なので、点 B の座標は (1, 1)

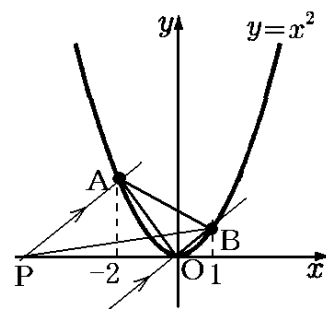
(OB の傾き) = $\frac{1}{1} = 1$ なので、AP の傾きも 1 になる。

直線 AP の式は、傾きが 1 で (-2, 4) を通るので、 $y = a(x - x_1) + y_1$ の公式を使って、

$y = (x - (-2)) + 4$, $y = x + 6$ と求めることができる。

点 P の y 座標は 0 なので、 $y = 0$ を $y = x + 6$ に代入して、 $0 = x + 6$, $x = -6$

よって、点 P の座標は (-6, 0) となる。



[問題]

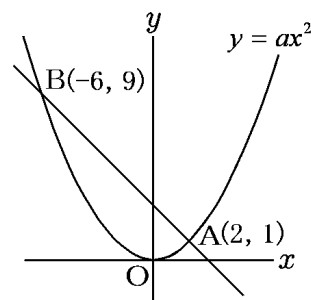
右の図のように、関数 $y = ax^2$ のグラフ上に 2 点 A(2, 1), B(-6, 9) がある。原点を O として、次の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 直線 AB の式を求めよ。

(3) 関数 $y = ax^2$ のグラフ上に点 P をとり、直線 AB と直線 OP が平行になるようにする。このとき、三角形 ABP の面積を求めよ。

(長崎県)(***)

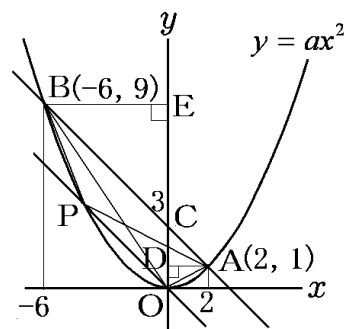


[解答欄]

(1)	(2)	(3)
-----	-----	-----

[ヒント]

- (1) 点 A(または点 B)の座標を $y = ax^2$ に代入。
 (2) A, B の座標→直線 AB の式
 (3) $\triangle ABP$ と $\triangle ABO$ で, AB を共通の底辺とすると,
 $AB \parallel OP$ なので, 2つの三角形の高さは等しくなり,
 $(\triangle ABP \text{ の面積}) = (\triangle ABO \text{ の面積})$ となる。
 $\triangle ABO$ の面積を, 右図の $\triangle ACO$ と $\triangle BCO$ に分割して求める。



[解答](1) $\frac{1}{4}$ (2) $y = -x + 3$ (3) 12

[解説]

(1) 点 A(2, 1)は $y = ax^2$ 上にあるので, $y = ax^2$ に $x = 2$, $y = 1$ を代入して,

$$1 = a \times 4, \text{ よって, } a = \frac{1}{4}$$

(2) $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ の公式を使って 2 点 A(2, 1), B(-6, 9) を通る直線の式を求める。

$$y = \frac{1-9}{2-(-6)}(x-2)+1, \quad y = \frac{-8}{8}(x-2)+1, \quad y = -x+2+1, \quad y = -x+3$$

(3) $\triangle ABP$ と $\triangle ABO$ で, AB を共通の底辺とすると,
 $AB \parallel OP$ なので, 2つの三角形の高さは等しくなり,
 $(\triangle ABP \text{ の面積}) = (\triangle ABO \text{ の面積})$ となる。

そこで, $\triangle ABO$ の面積を, 右図の $\triangle ACO$ と $\triangle BCO$ に分割して求める。

直線 AB の式は $y = -x + 3$ なので, y 切片は 3 で, $OC = 3$

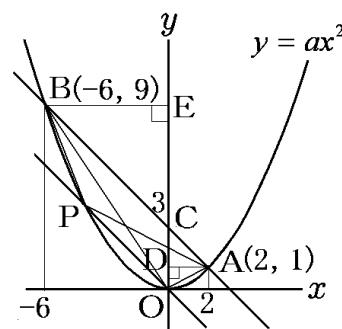
点 A の x 座標は 2 なので, $\triangle ACO$ の底辺を $OC = 3$ とすると,
 高さは $AD = 2$

$$\text{よって, } (\triangle ACO \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OC) \times (\text{高さ } AD) = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$$

$$\text{同様にして, } (\triangle BCO \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times (\text{底辺 } OC) \times (\text{高さ } BE) = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9$$

$$\text{よって, } (\triangle ABO \text{ の面積}) = (\triangle ACO \text{ の面積}) + (\triangle BCO \text{ の面積}) = 3 + 9 = 12$$

$$\text{ゆえに, } (\triangle ABP \text{ の面積}) = (\triangle ABO \text{ の面積}) = 12$$



[問題]

右の図は、関数 $y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフである。このグラフ上に 2 点 A, B があり, x 座標はそれぞれ $-4, 2$ である。 $\triangle AOC$ の面積が $\triangle AOB$ の面積の 2 倍となるように, y 軸上に点 $C(0, c)$ をとる。このときの c の値を求めよ。ただし, $c > 0$ とする。

(富山県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

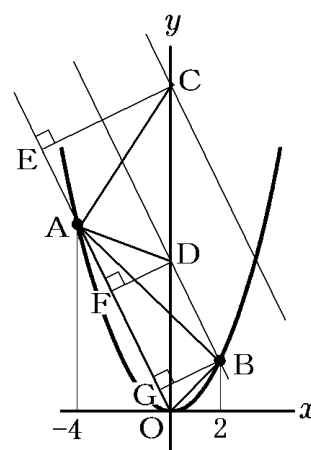
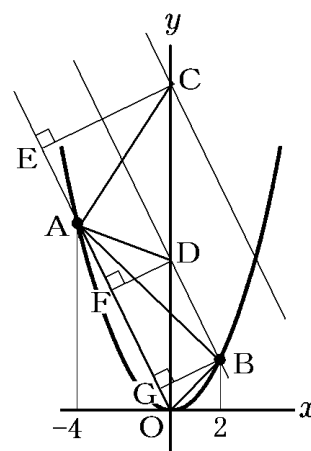
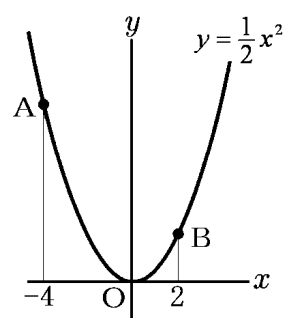
まず, 右図のように, 点 B を通って直線 AO に平行な直線 BD をひく。 $\triangle AOB$ と $\triangle AOD$ で, AO を共通の底辺とすると, $AO \parallel BD$ なので, それぞれの三角形の高さ(BG と DF)は等しくなる。よって, $(\triangle AOB \text{ の面積}) = (\triangle AOD \text{ の面積})$ となる。次に, y 軸上の正の部分に $CO = 2DO$ となる点 C をとる。 $\triangle AOC$ と $\triangle AOB$ で, AO を共通の底辺とすると, $\triangle AOC$ の高さ CE は, $\triangle AOB$ の高さ BG の 2 倍になる。したがって, $(\triangle AOC \text{ の面積}) = (\triangle AOB \text{ の面積}) \times 2$ になる。点 C の y 座標は, 点 D の y 座標の 2 倍になる。直線 BD の式を求める(AO と平行で, 点 B を通る)
→ 点 D の y 座標 → 点 C の y 座標

[解答]12

[解説]

まず, 右図のように, 点 B を通って直線 AO に平行な直線 BD をひく。 $\triangle AOB$ と $\triangle AOD$ で, AO を共通の底辺とすると, $AO \parallel BD$ なので, それぞれの三角形の高さ(BG と DF)は等しくなる。よって, $(\triangle AOB \text{ の面積}) = (\triangle AOD \text{ の面積})$ となる。次に, y 軸上の正の部分に $CO = 2DO$ となる点 C をとる。 $\triangle AOC$ と $\triangle AOB$ で, AO を共通の底辺とすると, $\triangle AOC$ の高さ CE は, $\triangle AOB$ の高さ BG の 2 倍になる。したがって, $(\triangle AOC \text{ の面積}) = (\triangle AOB \text{ の面積}) \times 2$ になる。点 C の y 座標は, 点 D の y 座標の 2 倍になる。そこで, 直線 BD の式を求める。

点 A の x 座標は -4 なので, $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入して, $y = \frac{1}{2} \times (-4)^2 = 8$



点 B の x 座標は 2 なので、 $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入して、 $y = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$

よって、(直線 BD の傾き)=(直線 AO の傾き) $= \frac{8-0}{-4-0} = -2$

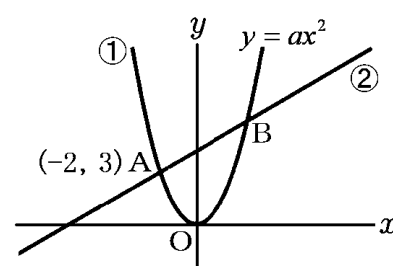
直線 BD は傾きが -2 で、点 B(2, 2) を通るので、 $y = m(x - x_1) + y_1$ の公式より、
 $y = -2(x - 2) + 2$ 、 $y = -2x + 6$ となるのがわかる。

点 D は $y = -2x + 6$ の切片 (y 切片) なので、点 D の y 座標は 6 になる。

点 C の y 座標は点 D の y 座標の 2 倍なので、 $c = 6 \times 2 = 12$ となる。

[問題]

右の図において、①は関数 $y = ax^2$ のグラフで、②は傾きが $\frac{1}{2}$ の直線であり、①と②は 2 点 A, B で交わっている。



点 A の座標が $(-2, 3)$ であるとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 定数 a の値を求めよ。
- (2) x 軸上に x 座標が正である点 P をとり、 $\triangle PAB$ の面積が $\triangle OAB$ の面積の 2 倍となるようにしたい。このときの点 P の x 座標を求めよ。

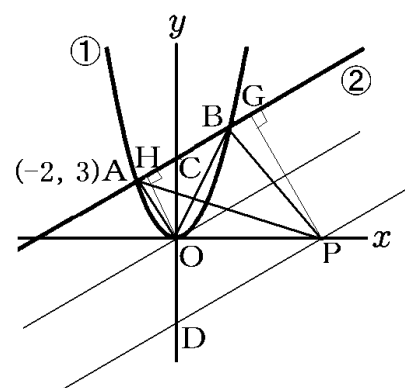
(高知県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]

- (1) 点 A の座標を $y = ax^2$ に代入。
- (2) 直線 ② の式を求める \rightarrow 点 C の座標 $CO = DO$ となる点 D をとる。点 D を通り ② に平行な直線 DP をひく。
 $\triangle OAB$ と $\triangle PAB$ で、AB を共通の底辺とすると、
 $\triangle OAB$ の高さは OH、 $\triangle PAB$ の高さは PG となる。
 $CO = DO$ なので、 $PG = OH \times 2$ となる。
したがって、 $(\triangle PAB \text{ の面積}) = (\triangle OAB \text{ の面積}) \times 2$ になる。
点 P の座標を求めるために直線 DP の式を求める。



[解答](1) $a = \frac{3}{4}$ (2) 8

【解説】

(1) 点 $A(-2, 3)$ は $y = ax^2$ 上にあるので,

$x = -2, y = 3$ を $y = ax^2$ に代入して,

$$3 = a \times (-2)^2, 4a = 3 \quad \text{よって, } a = \frac{3}{4}$$

(2) まず, 直線②の式を求めておく。

直線②の傾きは $\frac{1}{2}$ で, 点 $A(-2, 3)$ を通るので, $y = a(x - x_1) + y_1$ の公式より,

$$y = \frac{1}{2}(x - (-2)) + 3, \quad y = \frac{1}{2}x + 4 \quad \text{と計算できる。}$$

よって, ②と y 軸との交点を C とすると, 点 C の座標は $(0, 4)$ となる。

ここで, 右図のように, $CO = DO$ となる点 $D(0, -4)$

をとる。点 D を通り②に平行な直線 DP をひく。

$\triangle OAB$ と $\triangle PAB$ で, AB を共通の底辺とすると,

$\triangle OAB$ の高さは OH , $\triangle PAB$ の高さは PG となる。

$CO = DO$ なので, $PG = OH \times 2$ となる。

したがって, $(\triangle PAB \text{ の面積}) = (\triangle OAB \text{ の面積}) \times 2$ になる。

点 P の座標を求めるために直線 DP の式を求める。

直線 DP は②と平行なので傾きは $\frac{1}{2}$ である。また点 D

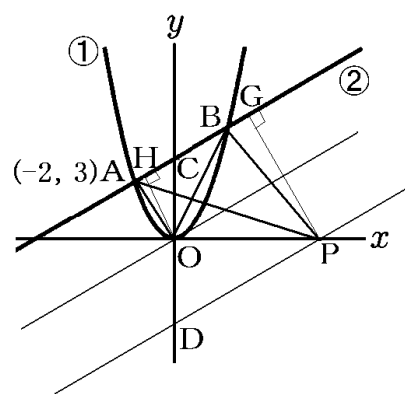
の座標は $(0, -4)$ なので, y 切片は -4 である。したがって, 直線 DP の式は, $y = \frac{1}{2}x - 4$ で

ある。

点 P の y 座標は 0 なので, $y = \frac{1}{2}x - 4$ に $y = 0$ を代入して, $0 = \frac{1}{2}x - 4$

両辺を 2 倍すると, $x - 8 = 0$ よって $x = 8$

よって, 点 P の x 座標は 8 になる。



【FdData 入試製品版のご案内】

詳細は、[\[FdData 入試ホームページ\]](#)に掲載 ([Shift]+左クリック→新規ウィンドウ)

姉妹品：[\[FdData 中間期末ホームページ\]](#) ([Shift]+左クリック→新規ウィンドウ)

◆印刷・編集

この PDF ファイルは、FdData 入試を PDF 形式に変換したサンプルで、印刷はできないように設定しております。製品版の FdData 入試は Windows パソコン用のマイクロソフト Word(Office)の文書ファイルで、印刷・編集を自由に行うことができます。

◆FdData 入試の特徴

FdData 入試は、公立高校入試問題の全傾向を網羅することを基本方針に編集したワープロデータ(Word 文書)です。入試理科・社会・数学ともに、過去に出題された公立高校入試の問題をいったんばらばらに分解して、細かい單元ごとに再編集して作成しております。

◆サンプル版と製品版の違い

ホームページ上に掲載しておりますサンプルは、製品の Word 文書を PDF ファイルに変換したもので印刷や編集はできませんが、製品の全内容を掲載しており、どなたでも自由に閲覧できます。問題を「目で解く」だけでもある程度の効果をあげることができます。

しかし、FdData 入試がその本来の力を発揮するのは印刷や編集ができる製品版においてです。また、製品版は、すぐ印刷して使える「問題解答分離形式」、編集に適した「問題解答一体形式」、などの形式を含んでいますので、目的に応じて活用することができます。

※[FdData 入試の特徴\(QandA 方式\)](#) ([Shift]+左クリック→新規ウィンドウ)

◆FdData 入試製品版(Word 版)の価格(消費税込み)

※以下のリンクは[Shift]キーをおしながら左クリックすると、新規ウィンドウが開きます

[数学 1 年](#)(4400 円), [数学 2 年](#)(6400 円), [数学 3 年](#)(9600 円) : (統合版は 16,200 円)

[理科 1 年](#)(6800 円), [理科 2 年](#)(6800 円), [理科 3 年](#)(6800 円) : (統合版は 16,200 円)

[社会地理](#)(6800 円), [社会歴史](#)(6800 円), [社会公民](#)(6800 円) : (統合版は 16,200 円)

※Windows パソコンにマイクロソフト Word がインストールされていることが必要です。
(Mac の場合はお電話でお問い合わせください)。

◆ご注文は、メール(info2@fdtext.com), または電話(092-811-0960)で承っております。

※[注文→インストール→編集・印刷の流れ](#) ([Shift]+左クリック)

※[注文メール記入例](#) ([Shift]+左クリック)

【Fd 教材開発】 Mail : info2@fdtext.com Tel : 092-811-0960