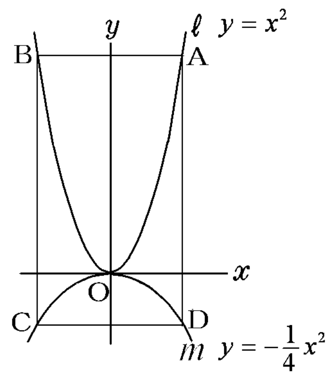
【FdData 高校入試：中学数学 3 年：2 次関数 2】

[二次関数と図形：正方形など／長方形／平行四辺形／三平方の定理を利用／最短距離／二次関数の利用：動点／距離・速さのグラフ／図形の移動による重なる面積／その他／FdData 入試製品版のご案内]

【】二次関数と図形
【】正方形など
[問題]

右の図において，l は $y=x^2$ のグラフを，m は $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ のグラフを表している。A は l 上を動く点で，A の x 座標は正の範囲にあるものとする。A を通り x 軸に平行な直線をひき，これが，l と再び交わる点を B とする。また，m 上に 2 点 C，D をとり，長方形 ABCD をつくる。O は原点であり，x 軸の 1 目もりと y 軸の 1 目もりとの長さは等しい。長方形 ABCD が正方形になるように点 A をとるとき，A の x 座標を求めよ。

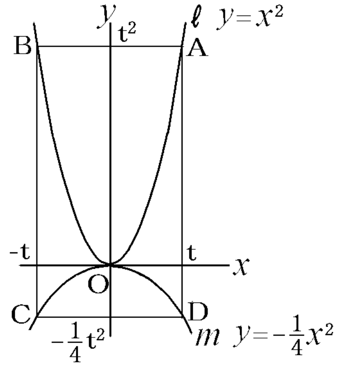


(大阪府)(***)
[解答欄]

[ヒント]
点 A の x 座標を $x=t$ とおくと，点 B の x 座標は $x=-t$ となる。
したがって，AB$=t-(-t)=2t$

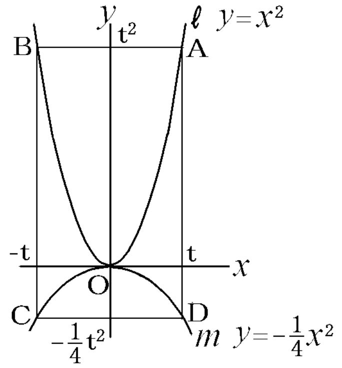
点 A の y 座標は $y=t^2$，点 D の y 座標は $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ に $x=t$ を代入して，$y=-\dfrac{1}{4}t^2$　これから，AD を t を使って表すことができる。

正方形という条件から，AB＝AD が成り立つ。



[解答] $\dfrac{8}{5}$

[解説]



点 A の x 座標を $x=t$ とおくと，AB は x 軸に平行なので，B は y 軸について A と対称になる。よって，点 B の x 座標は $x=-t$ となる。したがって，AB＝$t-(-t)=2t$ $\cdots$①である。

点 A の y 座標は，$y=x^2$ に $x=t$ を代入して，$y=t^2$

AD は y 軸に平行なので点 D の x 座標も $x=t$ となる。

よって，点 D の y 座標は，

$y=-\dfrac{1}{4}x^2$ に $x=t$ を代入して，$y=-\dfrac{1}{4}t^2$

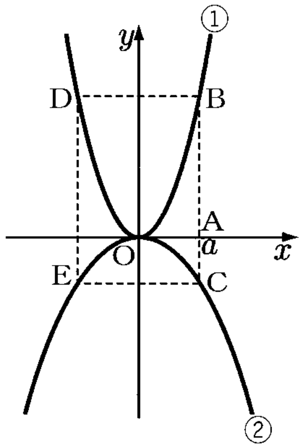
したがって，AD＝$t^2-\left(-\dfrac{1}{4}t^2\right)=t^2+\dfrac{1}{4}t^2=\dfrac{5}{4}t^2$ $\cdots$②

長方形 ABCD が正方形になるためには，AD＝AB

①，②より，$\dfrac{5}{4}t^2=2t$，$5t^2=8t$，$5t^2-8t=0$，$5t\left(t-\dfrac{8}{5}\right)=0$，$t=0,\ \dfrac{8}{5}$

$t>0$ なので，$t=\dfrac{8}{5}$

[問題]



右の図のように，関数 $y=x^2$ のグラフ…①と関数 $y=-\dfrac{1}{3}x^2$ のグラフ…②がある。x 座標が a である点 A を x 座標上にとり，点 A を通り，x 軸に垂直な直線と①，②との交点をそれぞれ B，C とする。また，点 B，C と y 軸について対称な点をそれぞれ D，E とする。四角形 BDEC が正方形になるとき，a の値を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

(富山県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

四角形 BDEC が正方形になるとき，BD＝BC が成り立つ。

[解答] $a=\dfrac{3}{2}$

[解説]

四角形 BDEC が正方形になるとき，BD＝BC が成り立つ。

点 B の x 座標は a，点 D の x 座標は $-a$ なので，BD＝$a-(-a)=2a$

点 B の y 座標は，$x=a$ を $y=x^2$ に代入して，$y=a^2$

点 C の y 座標は，$x=a$ を $y=-\dfrac{1}{3}x^2$ に代入して，$y=-\dfrac{1}{3}a^2$

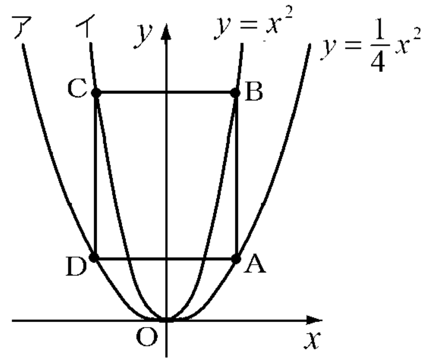
よって，BC＝$a^2-\left(-\dfrac{1}{3}a^2\right)=a^2+\dfrac{1}{3}a^2=\dfrac{4}{3}a^2$

BD＝BC なので，$2a=\dfrac{4}{3}a^2$，$4a^2=6a$, $4a^2-6a=0$, $a^2-\dfrac{3}{2}a=0$, $a\left(a-\dfrac{3}{2}\right)=0$，$a=0,\ \dfrac{3}{2}$

$a>0$ なので，$a=\dfrac{3}{2}$

[問題]

右の図において，アは関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$，イは関数 $y=x^2$ のグラフであり，点 A はア上の点で x 座標が正である。点 A を通り y 軸に平行な直線とイの交点を B とする。点 B を通り x 軸に平行な直線とイの交点のうち，x 座標が負である点を C とし，点 C を通り y 軸に平行な直線とアの交点を D とする。四角形 ABCD が正方形であるとき，点 A の x 座標を求めよ。



(秋田県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

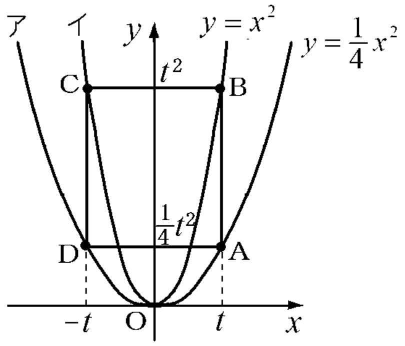
点 A の x 座標を t とおく(ただし，$t>0$)

四角形 ABCD が正方形になるとき，AD＝BA が成り立つ。

AD，BA の長さを t を使って表して，方程式をつくる。

[解答] $\dfrac{8}{3}$

[解説]



点 A の x 座標を t とおく(ただし，$t>0$)。
四角形 ABCD が正方形であるためには，
AD＝BA が成り立てばよい。
そこで，AD，BA の長さを t を使って表す。

点 A： $x=t$， $y=\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}t^2$

点 D： $x=-t$， $y=\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}(-t)^2=\frac{1}{4}t^2$

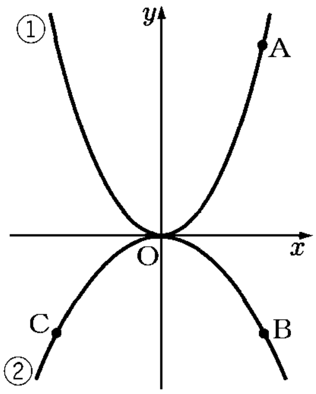
点 B： $x=t$， $y=x^2=t^2$

よって，AD＝$t-(-t)=2t$，BA＝$t^2-\frac{1}{4}t^2=\frac{3}{4}t^2$

AD＝BA なので， $2t=\frac{3}{4}t^2$， $3t^2=8t$， $t^2-\frac{8}{3}t=0$， $t\left(t-\frac{8}{3}\right)=0$， $t=0,\ \frac{8}{3}$

$t>0$ なので， $t=\frac{8}{3}$　よって，点 A の x 座標は $\frac{8}{3}$

[問題]



右の図において，①は関数 $y=x^2$，②は関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ のグラフである。点 A は①のグラフ上にあり，点 B，C は②のグラフ上にある。点 A，B の x 座標は等しく，点 B，C の y 座標は等しい。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 点 A の x 座標が 1 のとき，点 C の座標を求めよ。

(2) 三角形 ABC が直角二等辺三角形となるとき，点 A の x 座標を求めよ。

(高知県)(***)

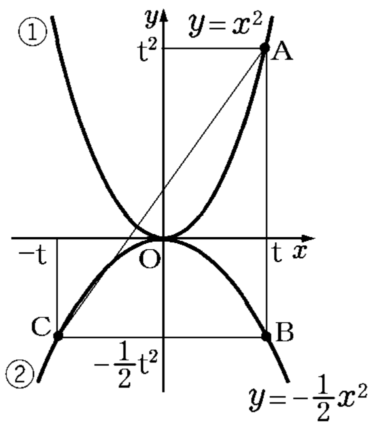
[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(1) 点 A の x 座標が 1→点 B の x 座標も 1→点 B の y 座標→点 C は y 軸につて点 B と対称なので，座標が求まる。

(2) 点 A の x 座標を t とおく→点 A，B，C の座標を t で表す。→AB と BC を t で表す→AB＝BC の条件から t の方程式をつくる。



[解答](1) $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$　(2) $\dfrac{4}{3}$

[解説]

(1) 点 A の x 座標が 1 のとき，点 B の x 座標も 1 になる。

$y=-\dfrac{1}{2}x^2$ に $x=1$ を代入すると，$y=-\dfrac{1}{2}$ なので，点 B の座標は $\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$

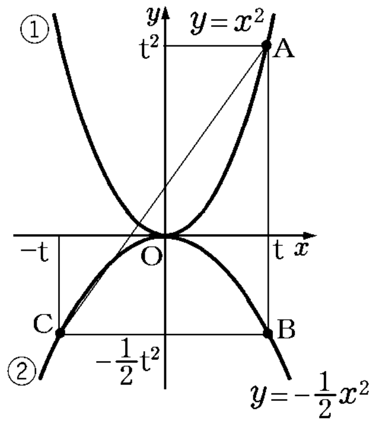
点 C は y 軸について点 B と対称なので，点 C の座標は $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$ である。

(2) 点 A の x 座標を t とおくと，点 A の座標は $\left(t, t^2\right)$,

点 B の座標は $\left(t, -\dfrac{1}{2}t^2\right)$

点 C の座標は $\left(-t, -\dfrac{1}{2}t^2\right)$ なので,

AB＝$t^2-\left(-\dfrac{1}{2}t^2\right)=\dfrac{3}{2}t^2$，BC＝$t-(-t)=2t$

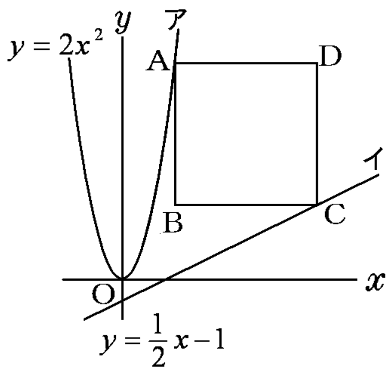


三角形 ABC が直角二等辺三角形となるとき，AB＝BC なので，$\dfrac{3}{2}t^2=2t$，$3t^2=4t$，$t^2-\dfrac{4}{3}t=0$，$t\left(t-\dfrac{4}{3}\right)=0$，$t=0, \dfrac{4}{3}$

t は 0 ではないので，$t=\dfrac{4}{3}$

[問題]

次の図で，曲線アは関数$y=2x^2$のグラフで，直線イは関数$y=\frac{1}{2}x-1$のグラフである。正方形 ABCD において，辺 AD，AB はそれぞれx軸，y軸に平行で，頂点 A は曲線アの上に，頂点 C は直線イの上にある。A のx座標が 2 のとき，C のx座標を求めよ。

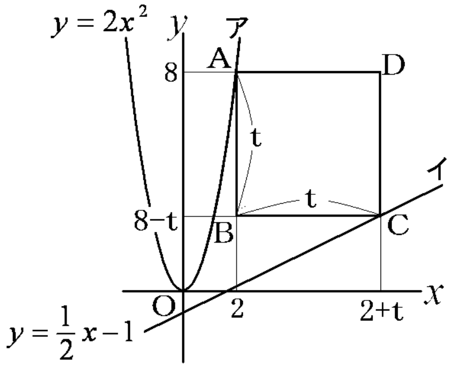


(茨城県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

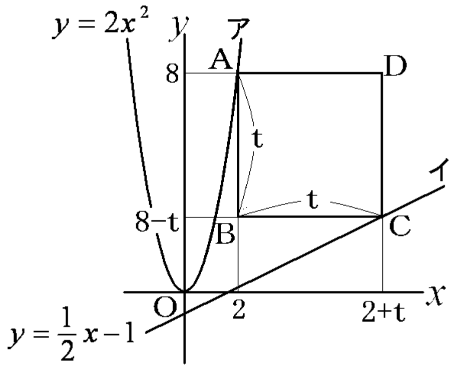
正方形 ABCD の 1 辺の長さをtとおくと，
右図から，点 C のx座標は$x=2+t$となる。
また，A のy座標は$y=2\times2^2=8$で，AB＝tなので，
点 B のy座標は$y=8-t$となる。
したがって，点 C のy座標も$y=8-t$となる。
点 C のx座標$x=2+t$，y座標$y=8-t$を
$y=\frac{1}{2}x-1$に代入すると，tの方程式ができる。



[解答]$\frac{22}{3}$

[解説]

正方形 ABCD の 1 辺の長さをtとおくと，
右図から，点 C のx座標は$x=2+t$となる。
また，点 A のy座標は$y=2\times2^2=8$で，AB＝tなので，点 B のy座標は$y=8-t$となる。
したがって，点 C のy座標も$y=8-t$となる。
点 C のx座標$x=2+t$，y座標$y=8-t$を
$y=\frac{1}{2}x-1$に代入すると，$8-t=\frac{1}{2}(2+t)-1$



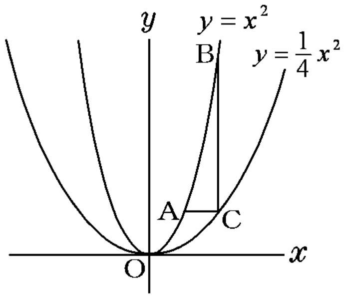
両辺を 2 倍して，$16-2t=2+t-2$, $-2t-t=2-2-16$, $-3t=-16$

よって，$t=\frac{16}{3}$　点 C のx座標は，$x=2+t=2+\frac{16}{3}=\frac{22}{3}$

[問題]

右の図で，2 点 A，B は関数 $y=x^2$ のグラフ上の点であり，点 C は関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上の点である。線分 AC が x 軸に平行で，線分 BC が y 軸に平行で，2 点 A，B の x 座標は正である。AC：BC＝1：9 であるとき点 A の座標を求めよ。

(千葉県)(***)



AC：BC＝1：9

[解答欄]

[ヒント]

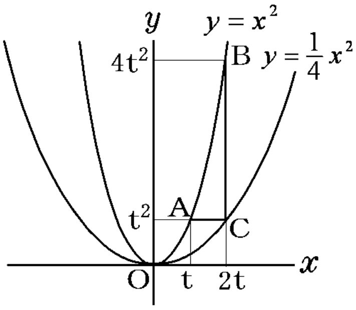
点 A の x 座標を t とおく($t>0$)→点 A の y 座標

→点 C の y 座標→点 C の x 座標

→点 B の x 座標→点 B の y 座標

A，B，C の座標(t で表したもの)→AC，BC を t で表す。

→AC：BC＝1：9 より，t の方程式をつくる。



AC：BC＝1：9

[解答](3，9)

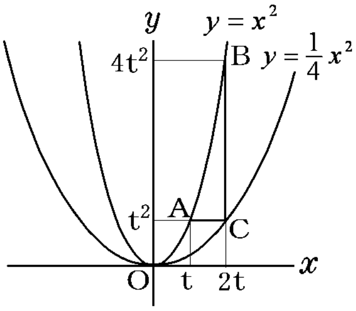
[解説]

点 A の x 座標を t とおく($t>0$)。

点 A は $y=x^2$ のグラフ上にあるので，y 座標は，$y=t^2$

点 C の y 座標は点 A の y 座標と同じ $y=t^2$

そこで，点 C の x 座標を求める。



AC：BC＝1：9

点 C は関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上にあるので，$y=t^2$

を代入して，$t^2=\frac{1}{4}x^2$，$x^2=4t^2$

$t>0$，$x>0$ なので，$x=2t$

点 B の x 座標は，点 C の x 座標と同じ $x=2t$ である。

点 B は $y=x^2$ のグラフ上にあるので，y 座標は，$y=(2t)^2=4t^2$

よって，BC＝$4t^2-t^2=3t^2$，AC＝$2t-t=t$

AC：BC＝1：9 なので，$t:3t^2=1:9$

比の内項の積は外項の積に等しいので，

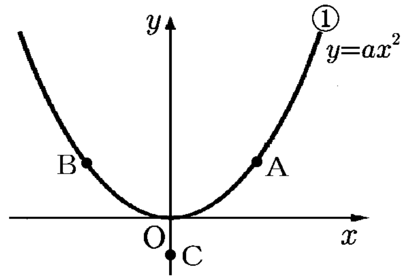
$3t^2\times1=t\times9$，$3t^2=9t$，$t^2=3t$，$t^2-3t=0$，$t(t-3)=0$，$t=0,\ 3$

$t>0$ なので，$t=3$

$t^2=3^2=9$ なので，点 A の座標は(3，9)

[問題]

　右の図のように，関数 $y=ax^2$（a は正の定数)…①のグラフ上に点 A がある。点 A の x 座標は 2 とする。点 A と y 軸について対称な点を B とする。 y 軸上に点 C を，y 座標が－1 となるようにとる。△ABC が直角二等辺三角形となるとき，a の値を求めよ。



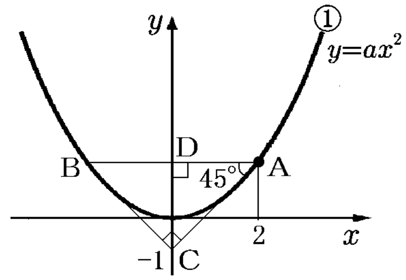
(北海道)(***)

[解答欄]

[ヒント]

右図のように，△ABC が直角二等辺三角形となるとき，△ACD も直角二等辺三角形となる。

したがって，AD＝DC である。

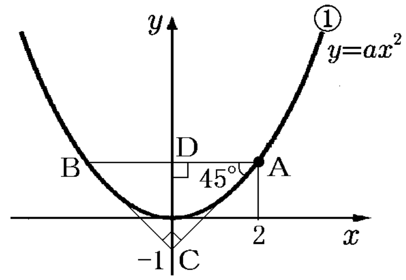


[解答] $a=\frac{1}{4}$

[解説]

右図のように，△ABC が直角二等辺三角形となるとき，△ACD も直角二等辺三角形となる。

したがって，AD＝DC である。



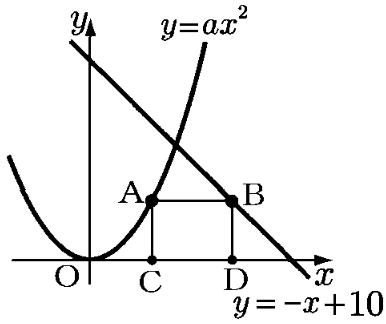
点 A の y 座標は，$y=ax^2$ に $x=2$ を代入して，$y=4a$ である。したがって，点 D の y 座標も $y=4a$ である。

よって，DC＝ $4a-(-1)$＝ $4a+1$

AD＝DC なので，$2=4a+1$，$4a=1$，$a=\frac{1}{4}$

[問題]

　右の図で，O は原点，A は関数 $y=ax^2$（a は定数)のグラフ上の点，B は直線 $y=-x+10$ 上の点である。また，C，D は x 軸上の点であり，四角形 ACDB は長方形である。ただし，点 C，D の x 座標はともに正で，点 C の x 座標は点 D の x 座標より小さいものとする。関数 $y=ax^2$ は x の値が 3 から 6 まで増加するときの変化の割合が 3 である。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) CD＝4 のとき，点 B の座標を求めよ。

(愛知県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(1) (変化の割合)＝$\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}$

(2) 点 C の x 座標を t とする。まず，点 A と点 B の座標を t を使って表す。

点 A と B の y 座標は等しいことに注目して等式をつくる。

[解答](1) $a=\dfrac{1}{3}$　(2) (7，3)

[解説]

(1) 関数 $y=ax^2$ において，$x=3$ のとき $y=9a$ で，$x=6$ のときは $y=36a$ なので，

(x の増加量)＝6－3＝3，(y の増加量)＝$36a-9a=27a$

(変化の割合)＝$\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}=\dfrac{27a}{3}=9a$

「x の値が 3 から 6 まで増加するときの変化の割合が 3 である」ので，

$9a=3$，$a=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

(2) 点 C の x 座標を t とする。まず，点 A と点 B の座標を t を使って表す。

点 A の x 座標は点 C と同じなので $x=t$ である。

点 A は $y=\dfrac{1}{3}x^2$ 上にあるので，$x=t$ を $y=\dfrac{1}{3}x^2$ に代入して，$y=\dfrac{1}{3}t^2$ となる。

よって，点 A の座標は $\left(t,\ \dfrac{1}{3}t^2\right)$ である。･･･①

次に，点 B の座標を t を使って表す。

CD＝4 なので，点 B の x 座標は $x=t+4$ である。

点 B は直線 $y=-x+10$ 上の点であるので，$x=t+4$ を $y=-x+10$ に代入して，

$y=-(t+4)+10=-t+6$

よって，点 B の座標は $(t+4,-t+6)$ ･･･②

点 A と B の y 座標は等しいので，①，②より，

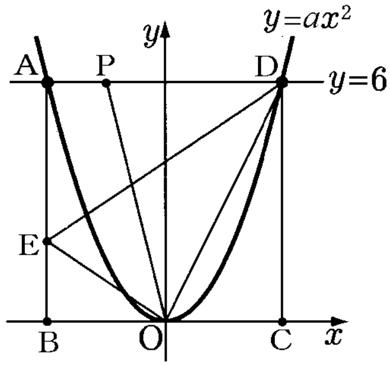
$\dfrac{1}{3}t^2=-t+6$，$t^2=-3t+18$，$t^2+3t-18=0$，$(t+6)(t-3)=0$，$t=-6,\ 3$

$t>0$ なので，$t=3$

②に $t=3$ を代入すると，点 B の座標は(7，3)である。

[問題]

右の図で，O は原点，A，D は関数 $y=ax^2$（a は定数，$a>0$)のグラフと直線 $y=6$ との交点で，点 A の x 座標は負である。B，C は x 軸上の点で，四角形 ABCD は正方形である。また，E は線分 AB 上の点で，その y 座標は 2，P は直線 $y=6$ 上の点で，その x 座標は負である。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) △EOD と△POD の面積が等しくなるとき，点 P の座標を求めよ。

(愛知県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(1) 四角形 ABCD は正方形であるので，AD＝CD である。

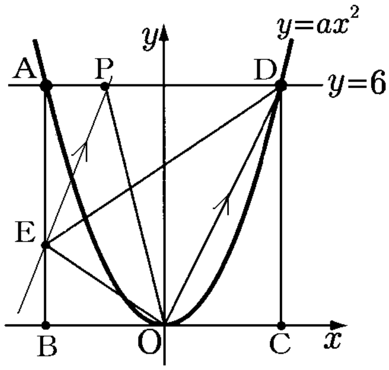
点 D の y 座標は 6 なので，CD＝6

点 A, D の x 座標を求めるために $y=6$ を $y=ax^2$ に代入する。

(2) 「△EOD と△POD の面積が等しくなるとき」とある。

OD をこの 2 つの三角形の共通の底辺とすると，

それぞれの高さ(E と OD の距離，P と OD の距離)は等しくなるので，EP // OD になる(等積変形)。



[解答](1) $a=\dfrac{2}{3}$ (2) P(－1，6)

[解説]

(1) 四角形 ABCD は正方形であるので，AD＝CD である。

点 D の y 座標は 6 なので，CD＝6

点 A，D の x 座標を求めるために $y=6$ を $y=ax^2$ に代入すると，

$6=ax^2$， $x^2=\dfrac{6}{a}$， $x=\pm\sqrt{\dfrac{6}{a}}$

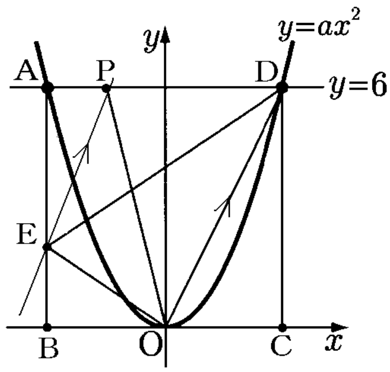
よって，点 A の x 座標は $-\sqrt{\dfrac{6}{a}}$，点 D の x 座標は $\sqrt{\dfrac{6}{a}}$ なので，

AD＝$\sqrt{\dfrac{6}{a}}-\left(-\sqrt{\dfrac{6}{a}}\right)=2\sqrt{\dfrac{6}{a}}$

AD＝CD なので，$2\sqrt{\dfrac{6}{a}}=6$，$\sqrt{\dfrac{6}{a}}=3$，

両辺を 2 乗して $\dfrac{6}{a}=9$，$9a=6$，$a=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$

(2)　「△EOD と△POD の面積が等しくなるとき」とある。
OD をこの 2 つの三角形の共通の底辺とすると，
それぞれの高さ(E と OD の距離，P と OD の距離)は等しくなるので，EP // OD になる(等積変形)。



(1)より，点 D の x 座標は $\sqrt{\dfrac{6}{a}}$ で，$a=\dfrac{2}{3}$ なので，

$x=\sqrt{\dfrac{6}{a}}=\sqrt{6\times\dfrac{1}{a}}=\sqrt{6\times\dfrac{3}{2}}=\sqrt{9}=3$ である。

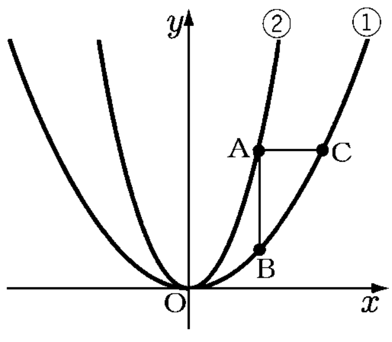
よって，点 D の座標は(3，6)である。

したがって，(直線 OD の傾き)＝$\dfrac{6}{3}$＝2

EP // OD なので，(直線 EP の傾き)＝(直線 OD の傾き)＝2
点 D の x 座標が 3 なので，点 A の x 座標は－3 で，点 E の x 座標は－3 になる。
仮定より，点 E の y 座標は 2 なので，点 E の座標は(－3，2)である。
直線 EP の式は，$y=m(x-x_1)+y_1$（m は傾き)の公式より，
$y=2(x-(-3))+2$，$y=2(x+3)+2$，$y=2x+8$
点 P の y 座標は 6 なので，$y=6$ を $y=2x+8$ に代入して，
$6=2x+8$，$2x=-2$，$x=-1$
よって，点 P の座標は(－1，6)である。

[問題]

右の図において，放物線①，②はそれぞれ関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$，$y=x^2$ のグラフである。また，点 A は②上の $x>0$ の範囲を動く点である。点 A を通り y 軸に平行な直線と①との交点を B とし，点 A を通り x 軸に平行な直線と①との交点を C とする。線分 AB，AC を 2 辺とする長方形 ABDC をつくる。点 A の x 座標を t とするとき，次の各問いに答えよ。



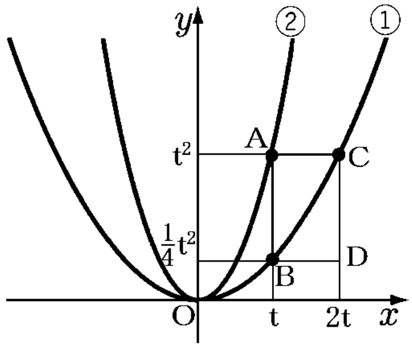
(1)　点 D の x 座標，y 座標をそれぞれ t を使って表せ。
(2)　長方形 ABDC が正方形となるような t の値を求めよ。
(3)　点 P(3，2)が長方形 ABDC の周上にあるのは，t＝(　ア　)のときと，t＝(　イ　)のときである。ア，イに当てはまる数を，それぞれ書け。

(愛媛県)(****)

[解答欄]

(1) x 座標：	y 座標：	(2)
(3)ア	イ	

[ヒント]



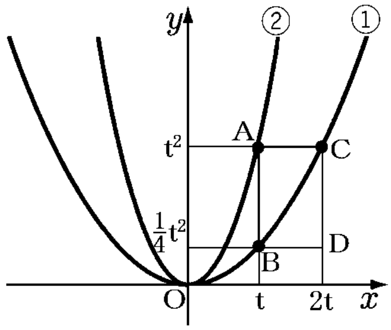
(1) 点A，Bでは $x=t \to y$ 座標
→点Cの y 座標→点Cの x 座標

(2) 長方形ABDCが正方形となるとき，AB＝ACが成り立つ。

(3) P(3，2)がAB上にあるとき，CD上にあるとき，AC上にあるとき，BD上にあるときに分けて考える。
例えば，PがAB上にあるとき，$t=3$ になるので，
A(3，9)，B(3，$\dfrac{9}{4}$) $\dfrac{9}{4}>2$ なので，PはBより下側に来るので，不適。

[解答](1) x 座標：$2t$　y 座標：$\dfrac{1}{4}t^2$　(2) $t=\dfrac{4}{3}$　(3)ア $\dfrac{3}{2}$　イ $2\sqrt{2}$ (ア，イは順不同)

[解説]



(1) 点A，B，C，Dの座標を求める。

点A：$x=t$，$y=x^2=t^2$　よって，$(t,\ t^2)$

点B：$x=t$，$y=\dfrac{1}{4}x^2=\dfrac{1}{4}t^2$　よって，$\left(t,\ \dfrac{1}{4}t^2\right)$

点C：$y=t^2$，$y=\dfrac{1}{4}x^2$ に $y=t^2$ を代入すると，

$t^2=\dfrac{1}{4}x^2$，$x^2=4t^2$，$x>0$，$t>0$ なので，$x=2t$

よって，$(2t,\ t^2)$

点D：x 座標は点Cと同じ $2t$，y 座標は点Bと同じ $\dfrac{1}{4}t^2$　よって，$\left(2t,\ \dfrac{1}{4}t^2\right)$

(2) 長方形ABDCが正方形となるとき，AB＝ACが成り立つ。

AB＝$t^2-\dfrac{1}{4}t^2=\dfrac{3}{4}t^2$，AC＝$2t-t=t$

よって，$\dfrac{3}{4}t^2=t$，$3t^2-4t=0$，$3t\left(t-\dfrac{4}{3}\right)=0$，$t>0$ なので，$t=\dfrac{4}{3}$

(3) P(3，2)とする。次のように場合を分けて考える。

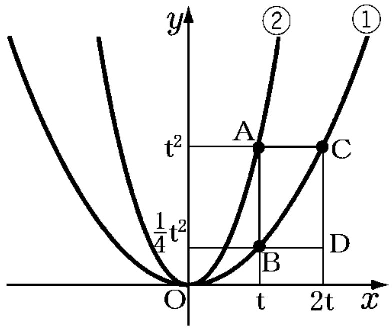
ⅰ) P が AB 上にあるとき

$t=3$ になるので，A(3，9)，B(3，$\dfrac{9}{4}$)　$\dfrac{9}{4}$ >2 なので，P は B より下側に来る。不適。

ⅱ) P が CD 上にあるとき

$2t=3$，$t=\dfrac{3}{2}$ になるので，C$\left(3,\ \dfrac{9}{4}\right)$，D$\left(3,\ \dfrac{9}{16}\right)$

$\dfrac{9}{16}<2<\dfrac{9}{4}$ なので，P は CD 上にある。適する。



ⅲ)P が AC 上にあるとき

$t^2=2$，$t=\sqrt{2}$ なので，A$\left(\sqrt{2},\ 2\right)$，C$\left(2\sqrt{2},\ 2\right)$

$2\sqrt{2}<3$ なので P は C より右側にあり，不適。

ⅳ)P が BD 上にあるとき

$\dfrac{1}{4}t^2=2$，$t^2=8$，$t=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ なので，

B$\left(2\sqrt{2},\ 2\right)$，D$\left(4\sqrt{2},\ 2\right)$

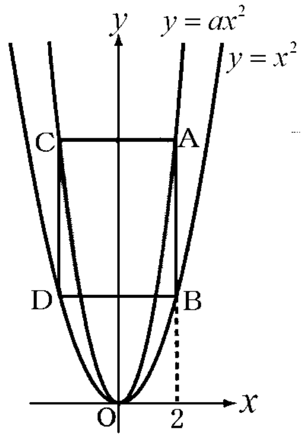
$2\sqrt{2}<3<4\sqrt{2}$ なので P は BD 間にある。適する。

よって，点 P が長方形 ABDC の周上にあるのは，$t=\dfrac{3}{2}$ のときと，$t=2\sqrt{2}$ のとき

【】長方形

[問題]

右の図のように，2 つの関数 $y=ax^2\ (a>1)$， $y=x^2$ のグラフ上で， x 座標が 2 である点をそれぞれ A，B とする。また，点 A を通り x 軸に平行な直線が，関数 $y=ax^2$ のグラフと交わる点のうち，点 A と異なる点を C とし，点 B を通り x 軸に平行な直線が，関数 $y=x^2$ のグラフと交わる点のうち，点 B と異なる点を D とする。長方形 ACDB の面積が 24 であるとき， a の値を求めよ。



(栃木県)(**)

[解答欄]

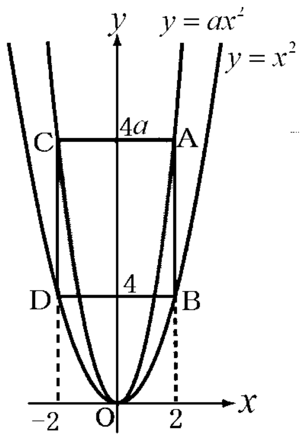
[ヒント]

AB の長さと BD の長さを a をふくんだ式などで表せれば, a を使って面積を表すことができる。そこで，まず A，B，D の座標を求める。

[解答] $a=\dfrac{5}{2}$

[解説]

AB の長さと BD の長さを a をふくんだ式などで表せれば, a を使って面積を表すことができる。そこで，まず A，B，D の座標を求める。



点 A： $x=2$， $y=ax^2=a\times2^2=4a$

点 B： $x=2$， $y=x^2=2^2=4$

点 D： $x=-2$， $y=x^2=(-2)^2=4$

よって，AB＝ $4a-4$，BD＝ $2-(-2)=4$

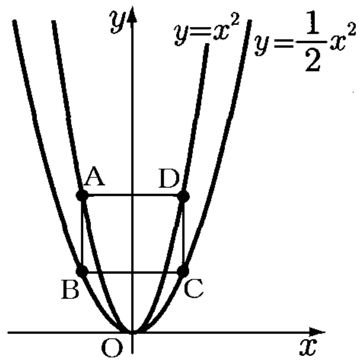
(長方形 ACDB の面積)＝AB×AD＝ $(4a-4)\times4=16a-16$

長方形 ACDB の面積は 24 なので,

$16a-16=24$， $16a=40$， $a=\dfrac{40}{16}=\dfrac{5}{2}$

[問題]

右の図のように, 関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に 2 点 B, C を, 関数 $y=x^2$ のグラフ上に 2 点 A, D をとり長方形 ABCD を作る。ただし，辺 AB，DC は y 軸に平行，辺 AD，BC は x 軸に平行とし，点 A，B の x 座標は負，点 C，D の x 座標は正である。長方形 ABCD の周の長さが 45 であるとき，点 D の座標を求めよ。



(沖縄県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

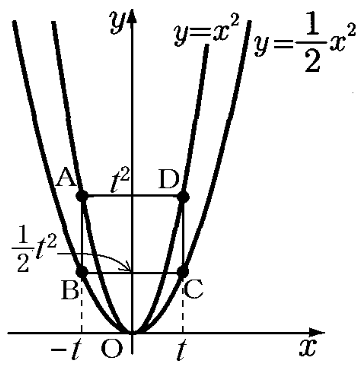
点 D の x 座標を t とおく($t>0$)。AD，DC の長さを t をふくんだ式などで表せれば，t を使って長方形 ABCD の周の長さを表すことができる。そこで，D，A，C の座標を求める。

[解答]D(5，25)

[解説]

点 D の x 座標を t とおく($t>0$)。

AD, DC の長さを t をふくんだ式などで表せれば，t を使って長方形 ABCD の周の長さを表すことができる。そこで，D，A，C の座標を求める。



点 D： $x=t$， $y=x^2=t^2$

点 A： $x=-t$， $y=x^2=(-t)^2=t^2$

点 C： $x=t$， $y=\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}t^2$

よって，AD＝$t-(-t)=t+t=2t$，DC＝$t^2-\frac{1}{2}t^2=\frac{1}{2}t^2$

(長方形 ABCD の周の長さ)＝(AD＋DC)×2＝$\left(2t+\frac{1}{2}t^2\right)\times 2=4t+t^2$

長方形 ABCD の周の長さは 45 なので,

$4t+t^2=45$， $t^2+4t-45=0$

$(t-5)(t+9)=0$， $t=5,\ -9$

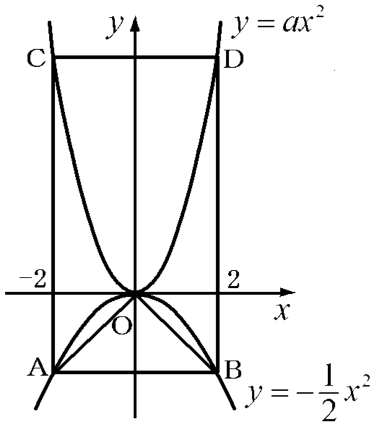
$t>0$ なので， $t=5$

よって，点 D の x 座標は 5，点 D の y 座標は， $y=t^2=5^2=25$

ゆえに，点 D の座標は(5，25)である。

[問題]

右の図のように，関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に，x 座標がそれぞれ－2，2 となる点 A，B と，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に，x 座標がそれぞれ－2, 2 となる点 C, D をとるとき，次の各問いに答えよ。ただし，$a>0$ とする。



(1) △OAB の面積を求めよ。

(2) 四角形 CABD の面積が△OAB の 8 倍となるとき，a の値を求めよ。

(新潟県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

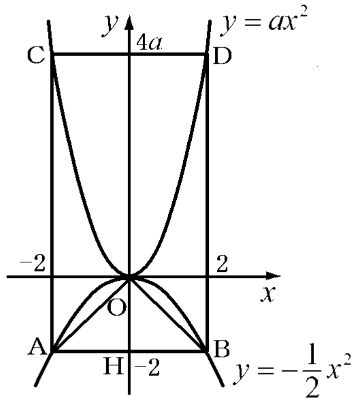
[ヒント]

(1) A，B，O の座標→AB，OH の長さ→△OAB の面積

(2) D の y 座標（a を使って表す)，B の y 座標→DB の長さ

→四角形 CABD の面積を a を使って表す

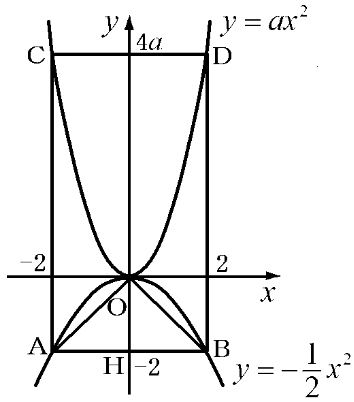
→「四角形 CABD の面積が△OAB の 8 倍」→a の方程式



[解答](1) 4　(2) $a=\frac{3}{2}$

[解説]

(1) まず，△OAB の面積を求めるために，AB，OH の長さを計算する。



点 A： $x=-2$， $y=-\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}\times(-2)^2=-2$

点 B： $x=2$， $y=-\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}\times 2^2=-2$

よって，AB＝ $2-(-2)=4$，OH＝ $0-(-2)=2$

(△OAB の面積)＝ $\frac{1}{2}$ ×AB×OH＝ $\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$

(2) 四角形 CABD の面積を求めるために，DB の長さを計算する。

点 D： $x=2$， $y=ax^2=a\times 2^2=4a$

よって，DB＝ $4a-(-2)=4a+2$

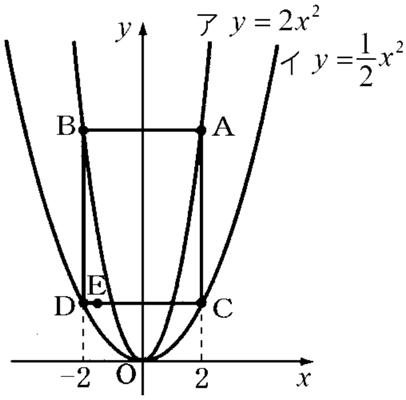
(四角形 CABD の面積)＝AB×DB＝ $4\times(4a+2)=16a+8$

四角形 CABD の面積は△OAB の 8 倍なので，

$16a+8=4\times8$，$16a=32-8$，$16a=24$，$a=\dfrac{24}{16}=\dfrac{3}{2}$

[問題]

右の図において，曲線アは関数 $y=2x^2$ のグラフであり，曲線イは関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフである。曲線ア上の点で x 座標が 2，－2 である点をそれぞれ A，B とし，曲線イ上の点で x 座標が 2，－2 である点をそれぞれ C，D とする。また，線分 CD 上の点を E とする。△ACE の面積が四角形 ABDC の面積の $\dfrac{2}{5}$ 倍であるとき，点 E の座標を求めよ。



(茨城県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

点 A，C，D の座標→CD，CA の長さ→長方形の面積

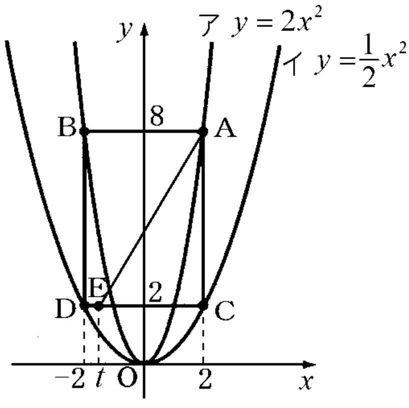
次に，点 E の x 座標を $x=t$ とおき，△ACE の面積を t を使って表す。

△ACE の面積は四角形 ABDC の面積の $\dfrac{2}{5}$ 倍→t の方程式

[解答]$\left(-\dfrac{6}{5},\ 2\right)$

[解説]

まず，四角形 ABDC の面積を求めるために，CD，CA の長さを計算する。



点 C： $x=2$，$y=\dfrac{1}{2}x^2=\dfrac{1}{2}\times2^2=2$

点 D： $x=-2$，$y=\dfrac{1}{2}x^2=\dfrac{1}{2}\times(-2)^2=2$

点 A： $x=2$，$y=2x^2=2\times2^2=8$

よって，CD＝$2-(-2)=4$，CA＝$8-2=6$

(四角形 ABDC の面積)＝CA×CD＝6×4＝24

次に，点 E の x 座標を $x=t$ とおき，△ACE の面積を t を使って表す。

CE＝ $2-t$，CA＝ $8-2=6$ なので，

(△ACE の面積)＝ $\dfrac{1}{2}$ ×CE×CA＝ $\dfrac{1}{2}\times(2-t)\times 6=3(2-t)$

△ACE の面積は四角形 ABDC の面積の $\dfrac{2}{5}$ 倍であるので，

$3(2-t)=24\times\dfrac{2}{5}$， $2-t=\dfrac{16}{5}$， $t=2-\dfrac{16}{5}$， $t=-\dfrac{6}{5}$

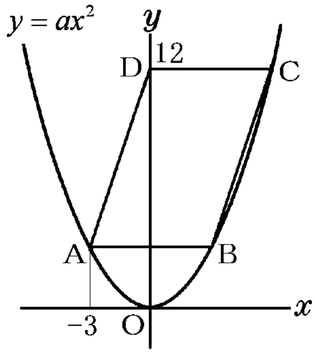
点 E の y 座標は 2 なので，点 E の座標は $\left(-\dfrac{6}{5},\ 2\right)$ である。

【】平行四辺形

[向かいあう辺が平行で長さが等しい]

[問題]

右の図のように，関数 $y=ax^2\ (a>0)$ のグラフ上に 2 点 A，B がある。線分 AB は x 軸に平行で，点 A の x 座標は－3 である。いま， $y=ax^2$ のグラフ上に点 C， y 軸上に点 D を，四角形 ABCD が平行四辺形になるようにとったところ，点 D の y 座標は 12 になった。関数 $y=ax^2$ の a の値を求めよ。



(岩手県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

点 A の x 座標は－3→点 B の x 座標→AB の長さ

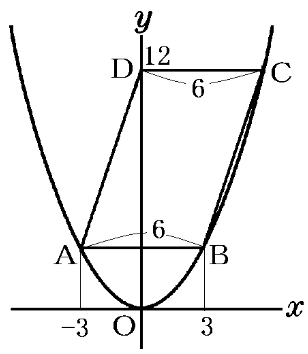
平行四辺形なので DC＝AB→点 C の x 座標

点 C の x 座標， y 座標 12 を $y=ax^2$ に代入

[解答] $a=\dfrac{1}{3}$

[解説]

<Point>平行四辺形→対辺が平行で長さが等しい



点 A の x 座標は－3 で，点 B は A と y 軸について対称なので，点 B の x 座標は 3 になる。

よって，AB＝3－(－3)＝3＋3＝6

四角形 ABCD は平行四辺形なので，DC＝AB＝6

したがって，点 C の x 座標は 6 になる。

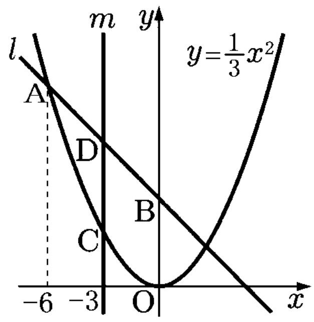
点 D の y 座標は 12 で，DC // AB なので，点 C の y 座標も 12 になる。

点 C は $y=ax^2$ 上の点なので， $x=6,\ y=12$ を $y=ax^2$ に代入して，

$12=a\times 6^2$，$36a=12$，$a=12\div 36=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

[問題]

右の図で，曲線は関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフである。曲線上に x 座標が－6 である点 A をとり，点 A を通る直線 l と y 軸との交点を B とする。ただし，点 B の y 座標は正とする。また，曲線上に x 座標が－3 である点 C をとり，点 C を通って y 軸に平行な直線 m と直線 l との交点を D とする。四角形 DCOB が平行四辺形となるとき，直線 l の式を求めよ。



(埼玉県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

四角形 DCOB が平行四辺形となるとき，BD // OC である。

点 C の座標→OC の傾き→AB の傾き→傾きと点 A の座標から AB の式

[解答] $y=-x+6$

[解説]

四角形 DCOB が平行四辺形となるとき，BD // OC である。

点 C の x 座標は－3 なので，y 座標は $x=-3$ を $y=\frac{1}{3}x^2$ に代入して，$y=\frac{1}{3}\times(-3)^2=3$ である。

よって，(直線 OC の傾き)＝$\frac{0-3}{0-(-3)}=-\frac{3}{3}=-1$

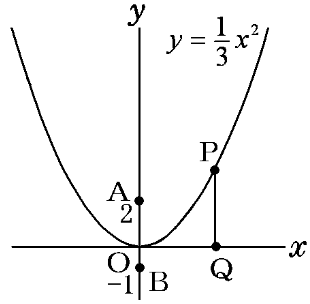
BD // OC なので，(直線 BD の傾き)＝(直線 OC の傾き)＝－1

点 A の x 座標は－6 なので，y 座標は $x=-6$ を $y=\frac{1}{3}x^2$ に代入して $y=\frac{1}{3}\times(-6)^2=12$ である。

直線 l は点 A(－6，12)を通り，傾きが－1 であるので，その式は，$y=a(x-x_1)+y_1$ の公式より，$y=-(x-(-6))+12$，$y=-x+6$

[問題]

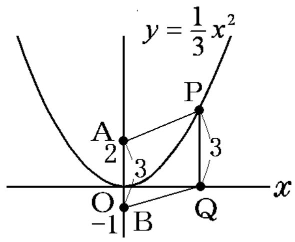
右の図のように，関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフ上に x 座標が正である点 P をとる。この点 P から x 軸にひいた垂線と x 軸との交点を Q とする。また，y 軸上の 2 つの点 A，B の座標を，それぞれ(0，2)，(0，－1)とする。直線 AP と線分 BQ が平行になるように点 P をとるとき，点 P の座標を求めよ。



(新潟県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

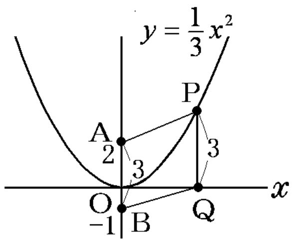


AO // PQ, AP // OQ なので，四角形 AOQP は平行四辺形になる。
したがって，PQ＝AO

[解答]P(3，3)

[解説]

<Point>平行四辺形→対辺が平行で長さが等しい



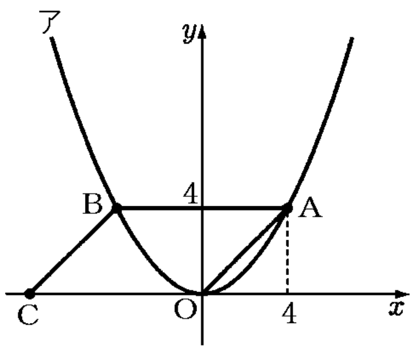
AO // PQ, AP // OQ なので，四角形 AOQP は平行四辺形になる。
したがって，PQ＝AO＝2－(－1)＝2＋1＝3
したがって，点 P の y 座標は 3 になる。

点 P は $y=\frac{1}{3}x^2$ 上にあるので，$y=3$ を $y=\frac{1}{3}x^2$ に代入して，

$3=\frac{1}{3}x^2$，$x^2=9$　点 P の x 座標は正なので，$x=3$　よって，点 P の座標は(3，3)

[問題]

右の図のように，関数 $y=ax^2$ …アのグラフ上に点 A(4，4)がある。点 A を通り，x 軸に平行な直線をひき，関数アのグラフと交わる点を B とする。四角形 OABC が平行四辺形となるように x 軸上に点 C をとる。このとき，次の各問いに答えよ。ただし，原点を O とし，座標の 1 目もりを 1cm とする。



(1) a の値を求めよ。

(2) 関数アについて，x の変域が－6≦ x ≦4 のときの y の変域を求めよ。

(3) 2 点 A，C を通る直線の式を求めよ。

(4) 2 点 B，C を通る直線と y 軸との交点を D とするとき，△ADC の面積を求めよ。

(三重県)(***)

[解答欄]

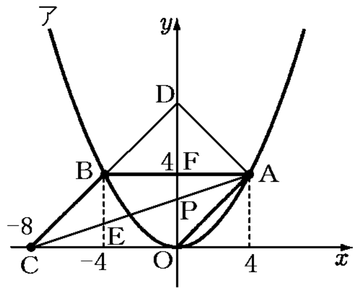
(1)	(2)	(3)
(4)		

[ヒント]

(1) 点 A(4，4)は $y=ax^2$ 上にある。

(2) $x=-6,\ 0,\ 4$ のときの y 座標を比較。

(3) 四角形 OABC は平行四辺形で，向かいあう辺が等しいので，CO＝AB＝8 である。



(4) 右図のように，CE＝EO なので点 B は線分 CD の中点である。よって，点 D の y 座標は 8 である。

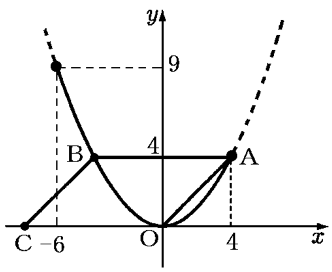
(△ADC の面積)＝(△DAB の面積)＋(△CAB の面積)

[解答](1) $\dfrac{1}{4}$　(2) $0\leqq y\leqq 9$　(3) $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{8}{3}$　(4) 32cm²

[解説]

(1) 点 A(4，4)は $y=ax^2$ 上にあるので，$x=4,\ y=4$ を $y=ax^2$ に代入すると，

$4=16a$，$a=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$



(2) $y=\dfrac{1}{4}x^2$ で，x の変域が$-6\leqq x\leqq 4$ のとき，

右図のように，$x=-6$ のとき y は最大値 9

$x=0$ のとき y は最小値 0 をとる。

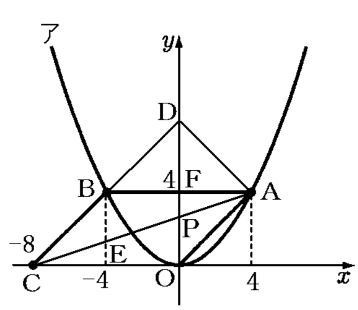
よって，y の変域は $0\leqq y\leqq 9$ である。

(3) 四角形 OABC は平行四辺形で，向かいあう辺が等しいので，CO＝AB＝8 である。よって，点 C の座標は(−8，0)である。

点 A の座標は(4，4)なので，直線 AC の式は，$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)+y_1$ の公式より，

$y=\dfrac{4-0}{4-(-8)}(x-4)+4$，$y=\dfrac{1}{3}(x-4)+4$，$y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{4}{3}+\dfrac{12}{3}$，$y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{8}{3}$

(4) 右図のように，CE＝EO なので点 B は線分 CD の中点である。よって，点 D の y 座標は 8 である。



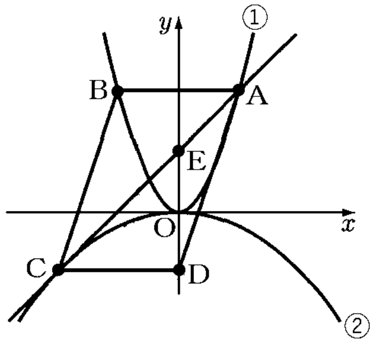
(△ADC の面積)＝(△DAB の面積)＋(△CAB の面積)

$=\dfrac{1}{2}\times AB\times DF+\dfrac{1}{2}\times AB\times OF=\dfrac{1}{2}\times 8\times 4+\dfrac{1}{2}\times 8\times 4$

＝32(cm²)

[問題]

右の図において，放物線①は関数 $y=x^2$ のグラフであり，①上の x 座標が 2 である点を A，点 A を通り x 軸に平行な直線と①との交点のうち，点 A と異なる点を B とする。放物線②は関数 $y=ax^2$ ($a<0$)のグラフであり，②上に点 C，y 軸上に点 D を，四角形 ABCD が平行四辺形となるようにとり，直線 AC と y 軸との交点を E とすると，点 E の y 座標が 2 となった。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) 点 B の座標を求めよ。

(2) 直線 AC の式を求めよ。

(3) a の値を求めよ。

(4) 点 P は，放物線①上を，原点 O から点 B まで動く点とする。点 P を通り y 軸に平行な直線と放物線②との交点を Q とする。△ABP の面積と△CDQ の面積が等しくなるとき，点 P の x 座標を求めよ。

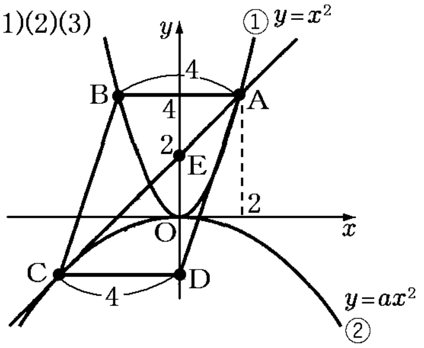
(愛媛県)(****)

[解答欄]

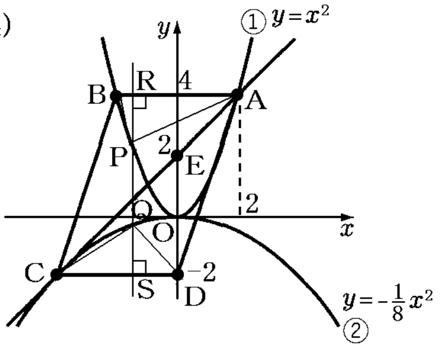
(1)	(2)	(3)
(4)		

[ヒント]

(1)(2)(3)



(4)



(1) 点 B は y 軸について点 A と対称。

(2) 直線 AC は 2 点 A，E の座標を通る。

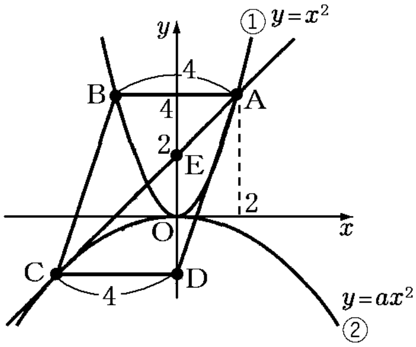
(3) CD＝BA より点 C の x 座標がわかる。その x 座標を直線 AC の式に代入すれば y 座標もわかる。

(4) 図で，△ABP の底辺を AB，△CDQ の底辺を CD とする。四角形 ABCD は平行四辺形なので，向かいあう辺が等しいから，AB＝CD になる。したがって，△ABP の面積と△CDQ の面積が等しくなるとき，それぞれの三角形の高さ PR と QS が等しくなる。

[解答](1) (−2，4)　(2)　$y=x+2$　(3)　$-\frac{1}{8}$　(4)　$-\frac{4\sqrt{7}}{7}$

[解説]

(1) 点 A は $y=x^2$ 上にあり，$x=2$ なので，



$y=x^2=2^2=4$ だから，点 A の座標は(2，4)

点 B は y 軸について点 A と対称なので，点 B の座標は(−2，4)である。

(2) 直線 AC は A(2，4)，E(0，2)を通るので，式は

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)+y_1$ の公式より，

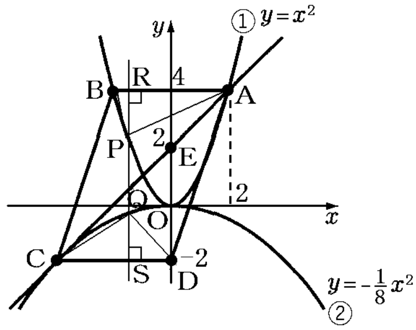
$y=\frac{4-2}{2-0}\left(x-0\right)+2$，$y=x+2$ である。

(3) 四角形 ABCD は平行四辺形なので，向かいあう辺が等しいから，CD＝AB＝4 で，点 C の x 座標は−4 である。点 C は直線 AC 上にあるので，$y=x+2$ に $x=-4$ を代入すると，$y=-4+2=-2$ になる。

点 C(−4，−2)は $y=ax^2$ 上にあるので，$y=ax^2$ に $x=-4$，$y=-2$ を代入して，

$-2=a\times16$，$a=-\frac{2}{16}=-\frac{1}{8}$

(4) 右図で，△ABP の底辺を AB，△CDQ の底辺を CD とする。四角形 ABCD は平行四辺形なので，向かいあう辺が等しいから，AB＝CD になる。



したがって，△ABP の面積と△CDQ の面積が等しくなるとき，それぞれの三角形の高さ PR と QS が等しくなる。

点 P の x 座標を t とする(ただし，$t<0$)。

$x=t$ を $y=x^2$ に代入すると，$y=t^2$ なので，PR＝ $4-t^2$

$x=t$ を $y=-\frac{1}{8}x^2$ に代入すると，$y=-\frac{1}{8}t^2$ なので，QS＝ $-\frac{1}{8}t^2-\left(-2\right)=-\frac{1}{8}t^2+2$

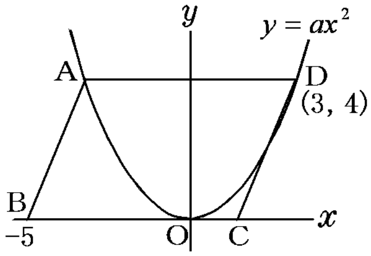
PR＝QS なので，$4-t^2=-\frac{1}{8}t^2+2$，$32-8t^2=-t^2+16$，$8t^2-t^2=32-16$，$7t^2=16$，$t^2=\frac{16}{7}$

$t<0$ なので，$t=-\frac{4}{\sqrt{7}}=-\frac{4\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=-\frac{4\sqrt{7}}{7}$

[平行四辺形の面積の二等分]

[問題]

右の図のように，平行四辺形 ABCD の頂点 A，D は放物線 $y=ax^2$ 上にあり，頂点 B，C は x 軸上にある。B，D の座標が(−5，0)，(3，4)であるとき，次の各問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 点(2，4)を通り，平行四辺形 ABCD の面積を 2 等分する直線の方程式を求めよ。

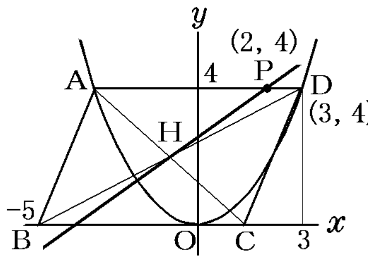
(北海道)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(2) 平行四辺形の対角線の交点(右図の H)を通る直線は平行四辺形の面積を二等分する。



H は点 B(−5，0)と点 D(3，4)の中点なので，

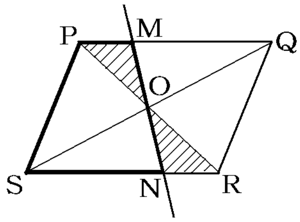
H の座標は，$\left(\dfrac{-5+3}{2},\ \dfrac{0+4}{2}\right)$＝(−1，2)となる。

[解答](1) $\dfrac{4}{9}$　(2) $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}$

[解説]

<Point>平行四辺形の対角線の交点を通る直線

→平行四辺形の面積を二等分



右の平行四辺形で，△OPM≡△ORN なので，

(△OPM の面積)＝(△ORN の面積)

よって，

(PSNM の面積)＝(PSNO の面積)＋(△OPM の面積)＝(PSNO の面積)＋(△ORN の面積)

＝(△PSR の面積)＝(平行四辺形 PSRQ)÷2

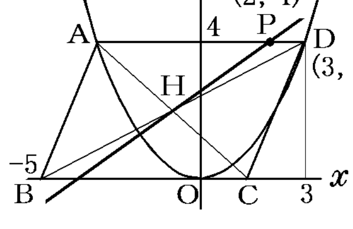
(1) 点 D(3，4)は $y=ax^2$ 上にあるので， $x=3$， $y=4$ を代入して， $4=a\times3^2$， $4=9a$

よって， $a=4\div9=\dfrac{4}{9}$

(2) 平行四辺形 ABCD の対角線 AC，BD の交点を H とすると，直線 PH は平行四辺形 ABCD の面積を 2 等分する。H は点 B(−5，0)と点 D(3，4)の中点なので，

A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) の中点の座標

$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$



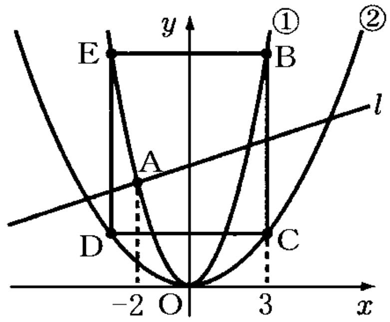
Hの座標は，$\left(\frac{-5+3}{2},\ \frac{0+4}{2}\right)$＝(－1，2)となる。

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$の公式を使って，2点H(－1，2)，P(2，4)を通る直線の式を求める。

$y=\frac{4-2}{2-(-1)}(x-2)+4$，$y=\frac{2}{3}(x-2)+4$，$y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}+4$，$y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$

[問題]

右の図で，①は関数$y=x^2$で，②は$y=ax^2(0<a<1)$のグラフである。①上に2点A，Bがあり，そのx座標はそれぞれ－2，3である。また，点Aを通る直線をlとする。②のグラフ上に点Bとx座標が等しい点Cをとる。さらに，四角形BCDEが長方形となるように，点D，Eをグラフ②とグラフ①上にそれぞれとる。次の各問いに答えよ。



(1) 長方形BCDEが正方形となるとき，aの値を求めよ。

(2) 直線lが長方形BCDEの面積を2等分するとき，直線lは点Aのほかにどのような点を通る直線であるか，次の形式に合うように答えよ。

直線lは点Aと(　　　)を通る直線である。

(島根県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

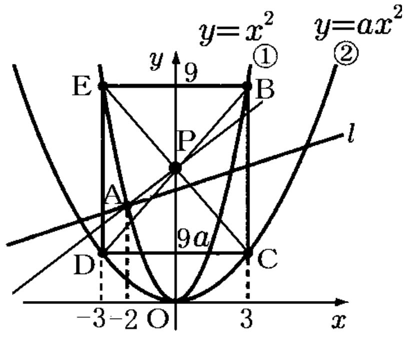
(1) 長方形BCDEが正方形となるとき，BE＝BCが成り立つ。

[解答](1) $a=\frac{1}{3}$　(2) 長方形BCDEの対角線BD，CEの交点

[解説]

(1) 点Eはy軸について点Bと対称なので，点Eのx座標は－3である。したがって，BE＝3－(－3)＝3＋3＝6

$y=x^2$に$x=3$を代入すると$y=9$なので，点Bのy座標は9である。また，$y=ax^2$に$x=3$を代入すると$y=9a$なので，点Cのy座標は$9a$である。よって，BC＝$9-9a$となる。長方形BCDEが正方形となるとき，BE＝BCが成り立つので，$6=9-9a$，$9a=3$，$a=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

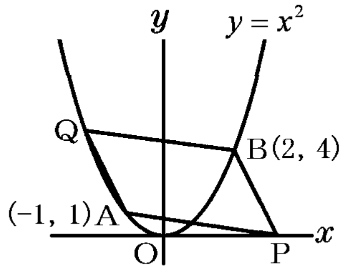


(2) 平行四辺形の対角線の交点を通る直線は平行四辺形の面積を 2 等分する。長方形も平行四辺形の一種なので，l が長方形 BCDE の対角線 BD，CE の交点 P を通るとき，長方形の面積を 2 等分する。

[辺が軸に平行でないとき]

[問題]

右の図で，曲線は関数 $y=x^2$ のグラフであり，グラフ上に 2 点 A(−1，1)，B(2，4)をとる。また，x 軸上に x 座標が正である点 P をとり，グラフ上に点 Q をとって，四角形 APBQ をつくる。この四角形 APBQ が平行四辺形になるとき，点 Q の座標を求めよ。



(埼玉県)(***)

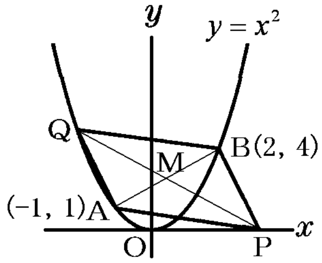
[解答欄]

[ヒント]

対角線 AB，PQ の交点 M を A，B の座標から求める。

M は PQ の中点でもあり，点 P の y 座標は 0 であるので，

点 Q の y 座標を求めることができる。



[解答] $\left(-\sqrt{5},\,5\right)$

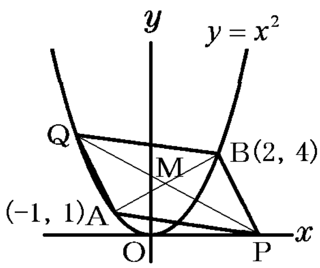
[解説]

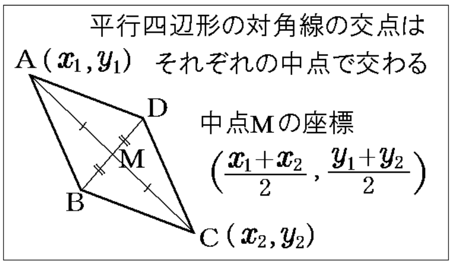
右図のように対角線 AB，PQ の交点を M とする。

対角線の交点はそれぞれの中点になるので，M の座標は A(−1，1)，B(2，4)から，

$\left(\dfrac{-1+2}{2},\,\dfrac{1+4}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2},\,\dfrac{5}{2}\right)$ と

計算できる。





また，M は PQ の中点でもある。

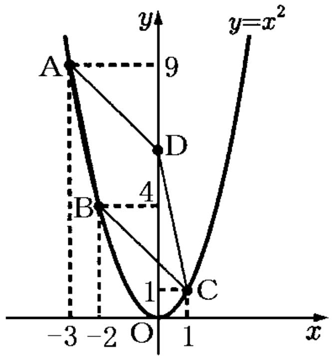
点 P の y 座標は 0 である。点 Q の y 座標を b とすると，$\dfrac{0+b}{2}=\dfrac{5}{2}$，$b=5$

点 Q は $y=x^2$ 上にあるので，$y=5$ を $y=x^2$ に代入すると，

$5=x^2$，点 Q の x 座標は負なので，$x=-\sqrt{5}$　よって，点 Q の座標は $\left(-\sqrt{5},\,5\right)$

[問題]

右の図のように，関数 $y=x^2$ のグラフ上に 3 点 A(−3，9)，B(−2，4)，C(1，1)があり，四角形 ABCD が平行四辺形となるように， y 軸上に点 D がある。次の各問いに答えよ。



(1) 点 D の座標を求めよ。

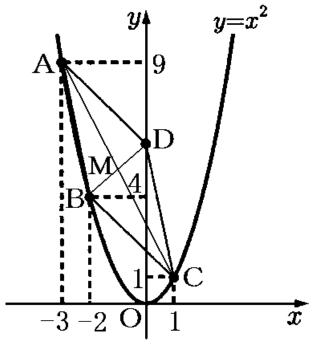
(2) 点(3，3)を通り，平行四辺形 ABCD の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。

(徳島県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]



(1) AC と BD の交点の座標を M とする。

点 A，C の座標→中点 M の座標

D の座標を $(X,\ Y)$ とすると，D$(X,\ Y)$ と B(−2，4)の中点 M の座標は $\left(\dfrac{X-2}{2},\ \dfrac{Y+4}{2}\right)$ となる。

(2) 平行四辺形 ABCD の面積を 2 等分する直線は対角線の交点 M を通る→M の座標と点(3，3)から式を求める。

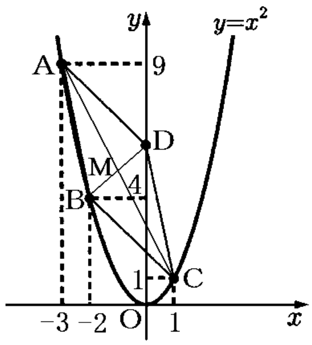
平行四辺形の対角線は，それぞれの中点で交わる。

A(−3，9)，C(1，1)なので，M の座標は $\left(\dfrac{-3+1}{2},\ \dfrac{9+1}{2}\right)$，

(−1，5)になる。D の座標を $(X,\ Y)$ とすると，D$(X,\ Y)$ と

[解答](1) (0，6)　(2)　$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{2}$

[解説]



(1) AC と BD の交点の座標を M とする。

平行四辺形の対角線は，それぞれの中点で交わる。

A(−3，9)，C(1，1)なので，M の座標は $\left(\dfrac{-3+1}{2},\ \dfrac{9+1}{2}\right)$，

(−1，5)になる。D の座標を $(X,\ Y)$ とすると，D$(X,\ Y)$ と

B(−2，4)の中点 M の座標は $\left(\dfrac{X-2}{2},\ \dfrac{Y+4}{2}\right)$ となる。

したがって， $\dfrac{X-2}{2}=-1$， $X-2=-2$， $X=0$

$$\frac{Y+4}{2}=5,\ \ Y+4=10,\ \ Y=6$$

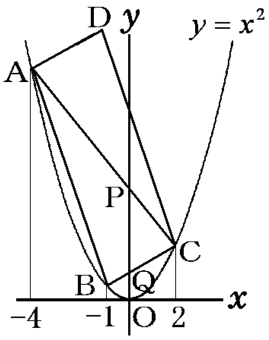
よって，点Dの座標は(0，6)である。

(2) 点(3，3)を通り，平行四辺形ABCDの面積を2等分する直線は平行四辺形ABCDの対角線の交点M(−1，5)を通る。この直線の式は，$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式より，

$$y=\frac{3-5}{3-(-1)}(x-3)+3,\ \ y=-\frac{1}{2}(x-3)+3,\ \ y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$$

[問題]

右の図は，関数 $y=x^2$ のグラフである。このグラフ上に3点A，B，Cがあり，それぞれの x 座標は−4，−1，2である。点Dを四角形ABCDが平行四辺形になるようにとり，線分AC，BCが y 軸と交わる点をそれぞれP，Qとする。このとき，△CPQと平行四辺形ABCDの面積の比を求めよ。



(岩手県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

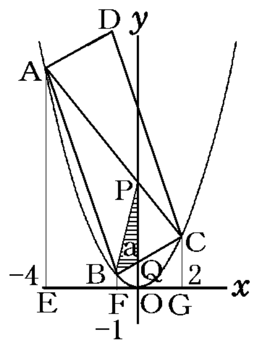
右図の△PBQの面積をaとおく。

△PBQの底辺をBQ，△PQCの底辺をQCとすると，高さは共通なので，面積比は底辺の比と等しくなり，

(△PBQの面積) : (△PQCの面積)＝BQ : QC＝FO : OG＝1 : 2 より，

(△PQCの面積)＝2a

同様にして，△ABPと△BCPの面積比から△ABPの面積をaを使って表し，さらに，(平行四辺形ABCDの面積)＝(△ABCの面積)×2 より，平行四辺形ABCDの面積をaを使って表す。

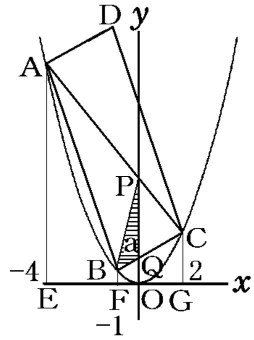


[解答]1 : 9

[解説]

<Point> x座標の比→底辺の比→面積比

右図のように，x軸に A，B，C からそれぞれ垂線 AE，BF，CG をひく。また，右図の△PBQ の面積を a とおく。



△PBQ の底辺を BQ，△PQC の底辺を QC とすると，高さは共通なので，面積比は底辺の比と等しくなり，

(△PBQ の面積)：(△PQC の面積)＝BQ：QC

BF // QO // CG なので，BQ：QC＝FO：OG＝1：2

よって，(△PBQ の面積)：(△PQC の面積)＝1：2

(△PBQ の面積)＝a なので，(△PQC の面積)＝2a

したがって，(△BCP の面積)＝a＋2a＝3a

次に，△ABP の面積を a を使って表す。

△ABP の底辺を AP，△BCP の底辺を PC とすると，高さは共通なので，面積比は底辺の比と等しくなり，(△ABP の面積)：(△BCP の面積)＝AP：PC

AE // PO // CG なので，AP：PC＝EO：OG＝4：2＝2：1

よって，(△ABP の面積)：(△BCP の面積)＝2：1

(△BCP の面積)＝3a なので，(△ABP の面積)＝6a

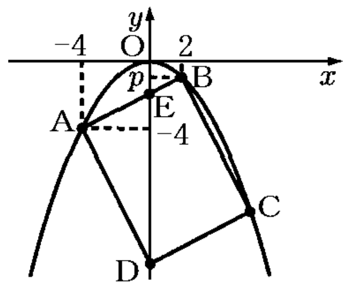
よって，(△ABC の面積)＝(△ABP の面積)＋(△BCP の面積)＝6a＋3a＝9a

(平行四辺形 ABCD の面積)＝(△ABC の面積)×2＝9a×2＝18a

よって，(△CPQ の面積)：(平行四辺形 ABCD の面積)＝2a：18a＝1：9

[問題]

　右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に 3 点 A，B，C を，y 軸上に点 D を，四角形 ABCD が平行四辺形となるようにとり，四角形 ABCD の辺 AB と y 軸との交点を E とする。点 A の座標が(−4，−4)，点 B の座標が(2，p)のとき，次の各問いに答えよ。



(1) a，p の値を求めよ。

(2) 2 点 A，B を通る直線の式を求めよ。

(3) 点 D の座標を求めよ。

(三重県改)(***)

[解答欄]

(1) $a=$	$p=$	(2)
(3)		

[ヒント]

(3) 点 D の座標を(0, d)とおく。四角形 ABCD は平行四辺形なので，DC は AB と長さが等しく平行になる。A→B は x 方向に＋6, y 方向に＋3 増加しているので，D→C も x 方向に＋6, y 方向に＋3 増加する。したがって，点 C の座標は(0＋6, d ＋3)，(6, d ＋3)となる。

[解答](1) $a=-\dfrac{1}{4}$　$p=-1$　(2) $y=\dfrac{1}{2}x-2$　(3) D(0, －12)

[解説]

(1) 点 A(－4, －4)は $y=ax^2$ 上にあるので, $x=-4$, $y=-4$ を $y=ax^2$ に代入して,

$-4=16a$, $a=-\dfrac{4}{16}=-\dfrac{1}{4}$

点 B(2, p)は $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ 上にあるので，$x=2$，$y=p$ を $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ に代入して，$p=-\dfrac{1}{4}\times 4=-1$

(2) 2 点 A(－4, －4)，B(2, －1)を通る直線の式は, $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)+y_1$ の公式より,

$y=\dfrac{-1-\left(-4\right)}{2-\left(-4\right)}\left(x-2\right)-1$, $y=\dfrac{1}{2}\left(x-2\right)-1$, $y=\dfrac{1}{2}x-2$

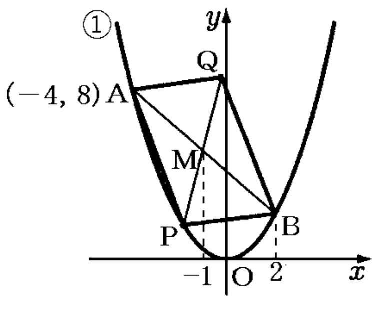
(3) 点 D の座標を(0, d)とおく。四角形 ABCD は平行四辺形なので，DC は AB と長さが等しく平行になる。A→B は x 方向に＋6, y 方向に＋3 増加しているので，D→C も x 方向に＋6, y 方向に＋3 増加する。したがって，点 C の座標は(0＋6, d ＋3)，(6, d ＋3)となる。

点 C は $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ 上にあるので, $x=6$, $y=d+3$ を $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ に代入して,

$d+3=-\dfrac{1}{4}\times 36$, $d=-9-3=-12$　よって，点 D の座標は(0, －12)である。

[問題]

右の図において，①は関数 $y=ax^2$ のグラフであり，点 A, B は①上の点で，点 A の座標は(－4, 8)，点 B の x 座標は 2 である。また，①上において点 A と点 B の間(点 A, B を除く)を動く点 P を考え，点 Q を四角形 APBQ が平行四辺形になるようにとる。点 M は対角線 AB, PQ の交点で，その x 座標は－1 である。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 点 Q の y 座標が最大になるとき，点 Q の座標を求めよ。

(山梨県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(2) 点Mの座標はABの中点で定まっている。点MはPQの中点でもあるので，点Qのy座標が最大になるのは，点Pのy座標が最小になるときである。

[解答](1) $\frac{1}{2}$　(2) (−2，10)

[解説]

(1) 点A(−4，8)は$y=ax^2$上にあるので，$x=-4$，$y=8$を$y=ax^2$に代入すると，

$8=16a$，$a=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

(2) まず，点Mの座標を計算しておく。点Bのx座標は2なので，$x=2$を$y=\frac{1}{2}x^2$に代入して，$y=\frac{1}{2}\times 4=2$　よって，点Bの座標は(2，2)である。

MはA(−4，8)，B(2，2)の中点なので，Mの座標は$\left(\frac{-4+2}{2},\frac{8+2}{2}\right)$=(−1，5)になる。

次に，点Pのx座標をtとおく。MがPQの中点である性質を使って点Qの座標をtで表す。

Pは$y=\frac{1}{2}x^2$上にあるので，$y=\frac{1}{2}t^2$　よって，点Pの座標は$\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$

点Qの座標を$(X,\ Y)$とおくと，M(−1，5)はP$\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$とQの中点なので，

M$\left(\frac{X+t}{2},\frac{Y+\frac{1}{2}t^2}{2}\right)$と表すことができる。

y座標に注目すると，$\frac{1}{2}\left(Y+\frac{1}{2}t^2\right)=5$，$Y+\frac{1}{2}t^2=10$，$Y=10-\frac{1}{2}t^2$

この式からYが最大になるのは$t=0$のときであることがわかる。このとき，$Y=10$になる。

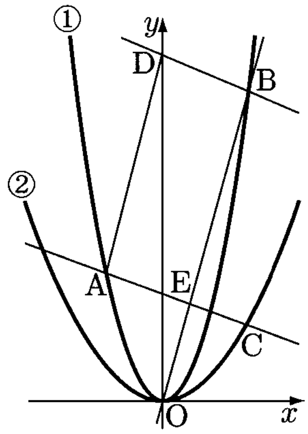
x座標に注目すると，$\frac{X+t}{2}=-1$，$X+t=-2$，$X=-2-t$

$t=0$のとき，$X=-2$

よって，点Qのy座標が最大になるとき，点Qの座標は(−2，10)である。

[問題]

右の図において，①は関数 $y=ax^2\ (a>\frac{1}{3})$ のグラフであり，②は関数 $y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフである。点 A は，放物線①上の点であり，その x 座標は－2 である。また，2 点 B，C は，それぞれ放物線①，②上の点であり，その x 座標はともに 3 である。点 B を通り，直線 CA に平行な直線と y 軸との交点を D とし，直線 CA と直線 OB との交点を E とする。四角形 DAEB が平行四辺形となるときの，a の値を求めよ。



(静岡県)(****)

[解答欄]

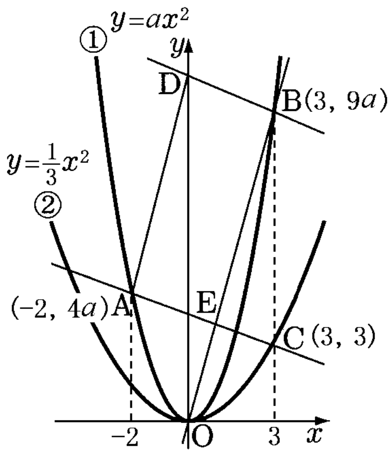
[ヒント]

まず，点 A，B，C の座標を a などを使って表す。

次に直線 AD の式を，(AD の傾き)＝(OB の傾き)，点 A の座標から求める(a などを使って表す)。→点 D の座標

DB // AC なので，(AC の傾き)＝(DB の傾き)

→a についての方程式をつくる。



[解答] $a=\frac{9}{7}$

[解説]

まず，点 A，B，C の座標を a などを使って表しておく。

点 A は $y=ax^2$ 上にあるので，$x=-2$ を代入して $y=4a$

よって，点 A の座標は(－2， $4a$)

点 B は $y=ax^2$ 上にあるので，$x=3$ を代入して $y=9a$

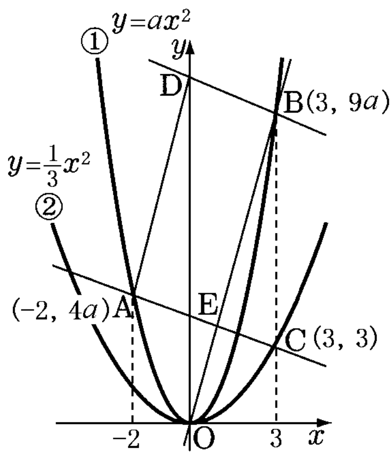
よって，点 B の座標は(3， $9a$)

点 C は $y=\frac{1}{3}x^2$ 上にあるので，$x=3$ を代入して $y=\frac{1}{3}\times 9=3$

よって，点 C の座標は(3，3)

次に点 D の座標を求めるために直線 AD の式を求める。

四角形 DAEB は平行四辺形なので，AD // OB である。



OB の傾きは $\frac{9a}{3}=3a$ なので，直線 AD は傾きが $3a$ である。点 A の座標が

$(-2,\ 4a)$であるので，$y=m(x-x_1)+y_1$（mは傾き)の公式より，$y=3a(x+2)+4a$である。
点Dのx座標は0なので，$x=0$を$y=3a(x+2)+4a$に代入して，$y=6a+4a=10a$
よって，点Dの座標は$(0,\ 10a)$である。
四角形DAEBは平行四辺形なので，AC // DBである。

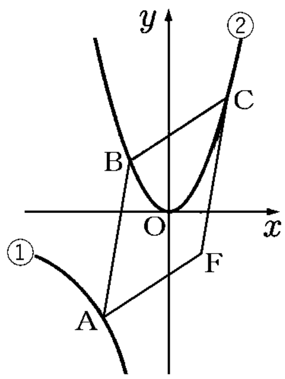
(ACの傾き)＝$\dfrac{3-4a}{3-(-2)}=\dfrac{-4a+3}{5}$，(DBの傾き)＝$\dfrac{9a-10a}{3-0}=-\dfrac{a}{3}$

(ACの傾き)＝(DBの傾き)なので，

$\dfrac{-4a+3}{5}=-\dfrac{a}{3}$，$-12a+9=-5a$，$7a=9$，$a=\dfrac{9}{7}$

[問題]

右の図において，点Aの座標は(−4，−5)であり，①は，点Aを通り，xの変域が$x<0$であるときの反比例のグラフである。また，②は，関数$y=ax^2$（$a>0$)のグラフである。2点B，Cは放物線②上の点であり，そのx座標は，それぞれ−2，3である。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) 曲線①をグラフとする関数について，yをxの式で表せ。
(2) 点Fは四角形AFCBが平行四辺形となるようにとった点である。3点B，O，Fが一直線上にあるときの，aの値と点Fの座標を求めよ。

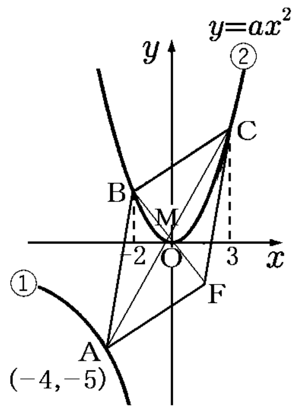
(静岡県)(****)

[解答欄]

(1)	(2) aの値：	点F：

[ヒント]

(2) $y=ax^2$上にある点Bのx座標が−2なので，y座標は$y=a\times(-2)^2=4a$である。したがって，B(−2，$4a$)とO(0，0)を通る直線の式は，$y=\dfrac{0-4a}{0-(-2)}x$，$y=-2ax$になる。



平行四辺形AFCBの対角線の交点をMとする。
平行四辺形の対角線の交点は中点で交わるので，MはACの中点である。Cのx座標は3なので，y座標は，$y=a\times3^2=9a$である。

C(3, $9a$), A(−4, −5)の中点Mは$\left(\dfrac{3-4}{2},\ \dfrac{9a-5}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{9a-5}{2}\right)$

である。3点B，O，Fが一直線上で，Mは$y=-2ax$上にあるから，

$\dfrac{9a-5}{2}=-2a\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$がなりたつ。

[解答](1)　$y=\dfrac{20}{x}$　(2) a の値：$\dfrac{5}{7}$　点 F：$\left(1,\ -\dfrac{10}{7}\right)$

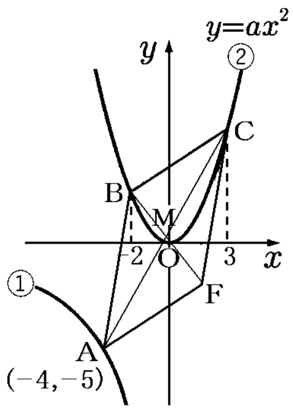
[解説]

(1)①は反比例のグラフなので，$y=\dfrac{b}{x}$ とおくことができる。

点 A(−4，−5)が①上にあるので，$x=-4$，$y=-5$ を $y=\dfrac{b}{x}$ に代入すると，

$-5=\dfrac{b}{-4}$，$b=(-5)\times(-4)=20$　よって，①の式は $y=\dfrac{20}{x}$ である。

(2)　$y=ax^2$ 上にある点 B の x 座標が−2 なので，y 座標は
$y=a\times(-2)^2=4a$ である。したがって，B(−2，$4a$)と O(0，0)
を通る直線の式は，$y=\dfrac{0-4a}{0-(-2)}x$，$y=-2ax$ になる。



平行四辺形 AFCB の対角線の交点を M とする。
平行四辺形の対角線の交点は中点で交わるので，M は AC の中点
である。C の x 座標は 3 なので，y 座標は，$y=a\times3^2=9a$ である。
C(3, $9a$), A(−4, −5)の中点 M は$\left(\dfrac{3-4}{2},\ \dfrac{9a-5}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{9a-5}{2}\right)$
である。
3 点 B，O，F が一直線上で，M は $y=-2ax$ 上にあるから，

$\dfrac{9a-5}{2}=-2a\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$9a-5=2a$，$7a=5$，$a=\dfrac{5}{7}$

$\dfrac{9a-5}{2}=\dfrac{1}{2}\left(9\times\dfrac{5}{7}-5\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{10}{7}=\dfrac{5}{7}$ なので，M の座標は$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{7}\right)$である。

F の座標を$(X,\ Y)$とすると，M は B(−2，$4a$)と F の中点なので，

$\left(\dfrac{X-2}{2},\ \dfrac{Y+4a}{2}\right)$と$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{7}\right)$が一致する。

よって，$\dfrac{X-2}{2}=-\dfrac{1}{2}$，$X-2=-1$，$X=1$

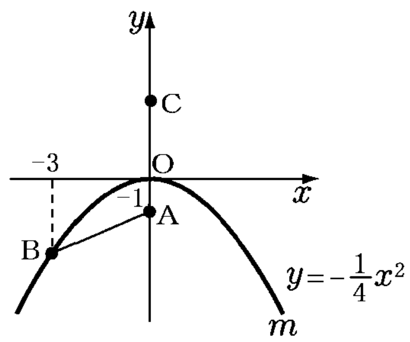
$\dfrac{Y+4a}{2}=\dfrac{5}{7}$，$Y+4a=\dfrac{10}{7}$，$Y=\dfrac{10}{7}-4a=\dfrac{10}{7}-4\times\dfrac{5}{7}=-\dfrac{10}{7}$

したがって，点 F の座標は$\left(1,\ -\dfrac{10}{7}\right)$である。

【】三平方の定理を利用

[問題]

右図において，m は $y=-\frac{1}{4}x^2$ のグラフを表す。A は y 軸上の点であり，A の y 座標は－1 である。B は m 上の点であり，B の x 座標は－3 である。A と B とを結ぶ。C は y 軸上の点であり，C の y 座標は A の y 座標より大きく，CA＝BA である。このとき，C の y 座標を求めよ。ただし，x 軸の 1 目もりの長さと y 軸の 1 目もりの長さとは等しいものとする。



(大阪府)(**)

[解答欄]

[ヒント]

座標上の 2 点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ の距離は，

AB＝$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

[解答] $\frac{9}{4}$

[解説]

点 B の x 座標は－3 なので，$x=-3$ を $y=-\frac{1}{4}x^2$ に代入して，$y=-\frac{1}{4}\times 9=-\frac{9}{4}$

よって，点 B の座標は $\left(-3,\ -\frac{9}{4}\right)$ である。点 A の座標は(0，－1)なので，三平方の定理より，

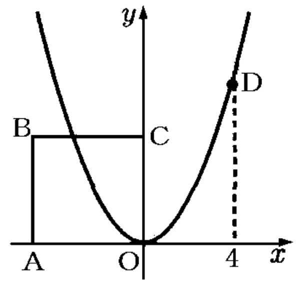
AB＝$\sqrt{(-3-0)^2+\left(-\frac{9}{4}-(-1)\right)^2}=\sqrt{9+\frac{25}{16}}=\sqrt{\frac{169}{16}}=\frac{13}{4}$

点 C の y 座標を t とすると，

CA＝AB なので，$t-(-1)=\frac{13}{4}$，$t=\frac{13}{4}-1=\frac{9}{4}$

[問題]

右の図のように，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフと，1 辺の長さが a の正方形 OABC がある。点 A は x 軸上の点であり，点 A の x 座標は負である。点 C は y 軸上の点であり，点 C の y 座標は正である。点 D は関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上の点であり，点 D の x 座標は 4 である。



このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 点 D の座標を求めよ。

(2) CO＝CD のとき，a の値を求めよ。

(高知県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

(2) 四角形 OABC は 1 辺の長さが a の正方形なので，CO＝a で，点 C の座標は(0，a)である。点 D の座標は(4，8)なので，三平方の定理より，

CD＝$\sqrt{(4-0)^2+(8-a)^2}=\sqrt{16+a^2-16a+64}=\sqrt{a^2-16a+80}$

[解答](1) (4，8)　(2) 5

[解説]

(1) $x=4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると，$y=\frac{1}{2}\times16=8$ なので，点 D の座標は(4，8)である。

(2) 四角形 OABC は 1 辺の長さが a の正方形なので，CO＝a で，点 C の座標は(0，a)である。点 D の座標は(4，8)なので，三平方の定理より，

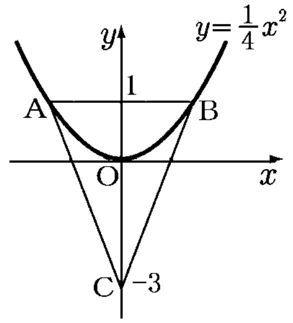
CD＝$\sqrt{(4-0)^2+(8-a)^2}=\sqrt{16+a^2-16a+64}=\sqrt{a^2-16a+80}$

CO＝CD より，$a=\sqrt{a^2-16a+80}$

両辺を 2 乗すると，$a^2=a^2-16a+80$，$16a=80$，$a=5$

[問題]

右の図のように，関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に 2 点 A，B がある。A，B の y 座標はどちらも 1 である。また，点 C が y 軸上にあり，y 座標は－3 である。△ABC で，辺 BC を底辺とするときの高さを求めよ。

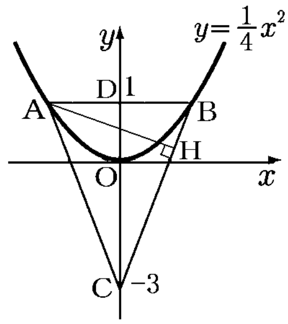


(岩手県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

まず，△ABC の底辺を AB，高さを CD として，△ABC の面積を求めておく。△ABC の底辺を BC とすると，高さは AH になる。BC の長さがわかれば，面積と BC から AH を求めることができる。

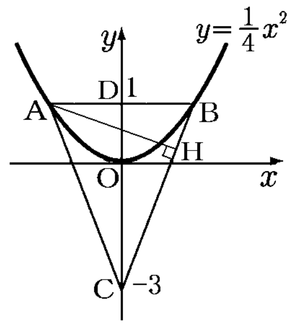


[解答] $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

[解説]

まず，A，B の座標を求める。A，B の y 座標はどちらも 1 であるので，

$y=1$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入して，$1=\frac{1}{4}x^2$，$x^2=4$，$x=\pm 2$



よって，点 A(－2，1)，点 B(2，1)

よって，AB＝2－(－2)＝4

△ABC の底辺を AB とすると, 高さは CD＝1－(－3)＝4 なので,

(△ABC の面積)＝$\frac{1}{2}\times 4\times 4$＝8

次に，図のように，△ABC の底辺を BC とすると，高さは AH になる。

BC の長さがわかれば，面積と BC から AH を求めることができる。

B(2，1)，C(0，－3)なので，三平方の定理より，

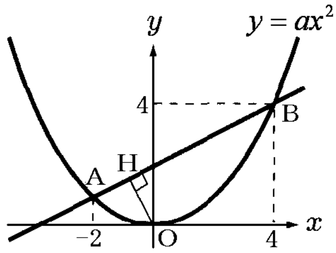
BC＝$\sqrt{(2-0)^2+(1-(-3))^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}=2\sqrt{5}$

(△ABC の面積)＝$\frac{1}{2}$×BC×AH＝8

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}$×AH＝8，$\sqrt{5}$AH＝8，AH＝$\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$

[問題]

右の図のように，原点を O とし， $y=ax^2$ のグラフ上に 2 点 A，B がある。点 A，B の x 座標はそれぞれ－2，4 であり，点 B の y 座標は 4 である。原点 O から直線 AB に垂線 OH をひく。このとき，次の(1)～(4)の各問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 直線ABの式を求めよ。

(3) 線分ABの長さを求めよ。

(4) 線分OHの長さを求めよ。

(佐賀県)(***)

[解答欄]

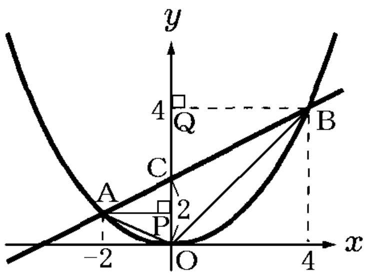
(1)	(2)	(3)
(4)		

[ヒント]

(4) △OAB の面積を使って OH の長さを求める。

まず，△OAB の面積を求める(△OAB を△OAC と△OBC に分けて求める)。

次に，△OAB の面積を AB を底辺として考える。このとき，高さは OH である。△OAB の面積と AB から OH を求めることができる。



[解答](1) $\dfrac{1}{4}$　(2) $y=\dfrac{1}{2}x+2$　(3) $3\sqrt{5}$　(4) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

[解説]

(1) $y=ax^2$ は点 B(4，4)を通るので， $x=4,\ y=4$ を $y=ax^2$ に代入して，

$$4=a\times16,\ a=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

(2) 点 A の x 座標 $x=-2$ を $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に代入すると， $y=\dfrac{1}{4}\times4=1$

よって点 A の座標は(－2，1)

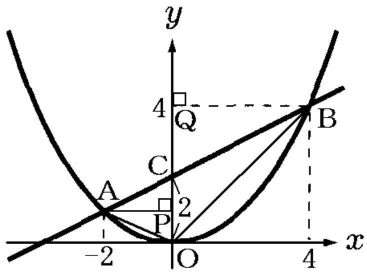
$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)+y_1$ の公式を使って，2 点 A(－2，1)，B(4，4)を通る直線の式を求める。

$$y=\frac{4-1}{4-(-2)}(x-4)+4,\quad y=\frac{1}{2}(x-4)+4,\quad y=\frac{1}{2}x+2$$

(3) 2 点(x_1, y_1), (x_2, y_2)の長さは三平方の定理より，$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ である。

A(−2，1)，B(4，4)なので，

(線分 AB の長さ)$=\sqrt{(4-(-2))^2+(4-1)^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=3\sqrt{5}$



(4) △OAB の面積を使って OH の長さを求める。
まず，△OAB の面積を求める。
右図のように，△OAB を△OAC と△OBC に分ける。
△OAC の底辺を OC とすると，高さは AP になる。

直線ABの式は $y=\frac{1}{2}x+2$ なので, 点Cの y 座標は2になる。

よって，OC＝2　高さは AP で，点 A の x 座標が−2 であることより，AP＝2

よって，(△OAC の面積)＝$\frac{1}{2}$×OC×AP＝$\frac{1}{2}$×2×2＝2

同様にして，(△OBC の面積)＝$\frac{1}{2}$×OC×BQ＝$\frac{1}{2}$×2×4＝4

ゆえに，(△OAB の面積)＝(△OAC の面積)＋(△OBC の面積)＝2＋4＝6
次に，△OAB の面積を AB を底辺として考える。このとき，高さは OH なので，

(△OAB の面積)＝$\frac{1}{2}$×AB×OH　よって，$\frac{1}{2}$×AB×OH＝6,

AB＝$3\sqrt{5}$ なので，$\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}$ ×OH＝6，$\frac{3\sqrt{5}}{2}$×OH＝6

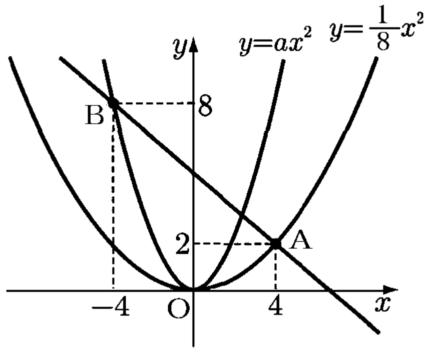
OH＝$6\div\frac{3\sqrt{5}}{2}=6\times\frac{2}{3\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

[問題]

右の図のように，2 つの関数 $y=\frac{1}{8}x^2$ と $y=ax^2\ (a>\frac{1}{8})$

のグラフがある。関数 $y=\frac{1}{8}x^2$ のグラフ上に点 A(4，2)，

関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点 B(−4，8)があり，直線 AB をひいた。次の各問いに答えよ。



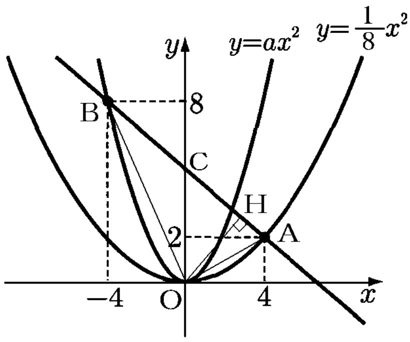
(1) a の値を求めよ。
(2) 直線 AB の式を求めよ。
(3) 原点 O から直線 AB までの距離を求めよ。
(徳島県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(3) 原点Oから直線ABまでの距離は右図のOHである。
△OABの面積を使って間接的にOHを求める。
△OABの底辺をABとするとOHが高さなので,
△OABの面積とABの長さがわかれば,OHを計算できる。



[解答](1) $a=\frac{1}{2}$ (2) $y=-\frac{3}{4}x+5$ (3) 4

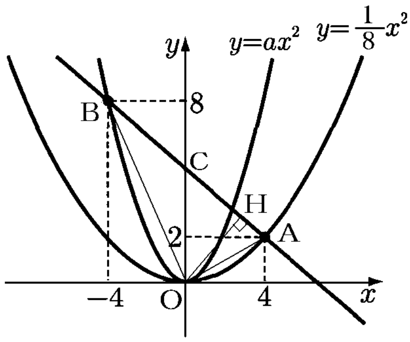
[解説]

(1) 点B(−4, 8)は$y=ax^2$のグラフ上にあるので, $x=-4$, $y=8$を$y=ax^2$に代入する。

$8=16a$, $a=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

(2) A(4, 2), B(−4, 8)を通る直線の式は, $y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$の公式より,

$y=\frac{2-8}{4-(-4)}(x-4)+2$, $y=-\frac{3}{4}(x-4)+2$, $y=-\frac{3}{4}x+5$



(3) 原点Oから直線ABまでの距離は右図のOHである。
△OABの面積を使って間接的にOHを求める。
△OABの底辺をABとするとOHが高さなので,
△OABの面積とABの長さがわかれば,OHを計算できる。
まず,ABの長さを求める。A(4, 2), B(−4, 8)なので,
三平方の定理より,

AB$=\sqrt{(4-(-4))^2+(2-8)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$・・・①

次に,△OABの面積を求める。
△AOCと△BOCでOCを共通の底辺と考えると,△AOCの高さは4,△BOCの高さは4である。また,ABの式$y=-\frac{3}{4}x+5$より,切片(y切片)が5なので,OC=5である。

よって,

(△OABの面積)=(△AOCの面積)+(△BOCの面積)$=\frac{1}{2}\times5\times4+\frac{1}{2}\times5\times4=20$・・・②

△OABの底辺をABとするとOHは高さである。また,①,②より,

(△OABの面積)＝$\dfrac{1}{2}$×AB×OH＝20

$\dfrac{1}{2}\times 10$ ×OH＝20，5OH＝20，OH＝4

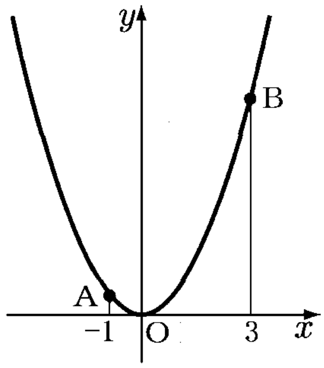
[問題]

関数 $y=x^2$ のグラフ上に 2 点 A，B があり，点 A の x 座標は－1，点 B の x 座標は 3 である。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 原点を O とするとき，△OAB の面積を求めよ。

(2) 原点 O から直線 AB に下ろした垂線と直線 AB との交点を H とするとき，線分 OH の長さを求めよ。

(沖縄県)(***)



[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 6　(2) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

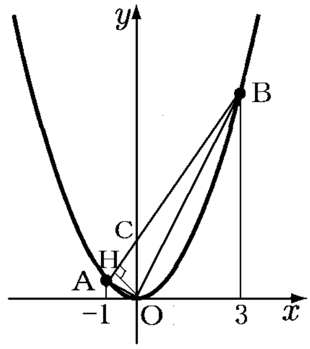
[解説]

(1) まず，点 A，B の座標→AB の式→C の座標の順で求める。

$x=-1$ を $y=x^2$ に代入すると $y=1$ なので，点 A の座標は(－1，1)

$x=3$ を $y=x^2$ に代入すると $y=9$ なので，点 B の座標は(3，9)

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，2 点 A(－1，1)，B(3，9)を通る直線の式を求める。



$y=\dfrac{9-1}{3-(-1)}(x-3)+9$，$y=2(x-3)+9$，$y=2x+3$

$y=2x+3$ の切片(y 切片)は 3 なので，点 C の y 座標は 3 になり，CO＝3 となる。

△AOC，△BOC の共通の底辺を CO とすると，高さはそれぞれ，1 と 3 になる。

(△AOB の面積)＝(△AOC の面積)＋(△BOC の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times 3\times 1+\dfrac{1}{2}\times 3\times 3$＝$\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{2}$＝$\dfrac{12}{2}$＝6

(2) △AOB の底辺を AB とすると高さは OH になる。(1)より面積がわかっているので，AB の長さがわかれば，OH を求めることができる。

2 点$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$の長さは三平方の定理より，$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ となる。

A(−1，1)，B(3，9)なので，

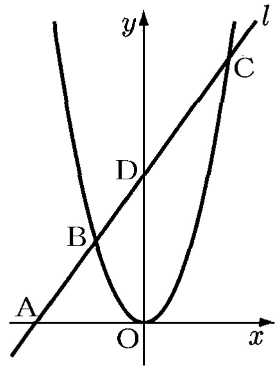
(線分 AB の長さ)＝$\sqrt{(3-(-1))^2+(9-1)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=\sqrt{16\times5}=4\sqrt{5}$

(△AOB の面積)＝$\frac{1}{2}$×AB×OH　よって，$\frac{1}{2}$×AB×OH＝6

$\frac{1}{2}\times4\sqrt{5}$×OH＝6，$2\sqrt{5}$OH＝6，OH＝$\frac{6}{2\sqrt{5}}=\frac{6\times\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{10}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

[問題]

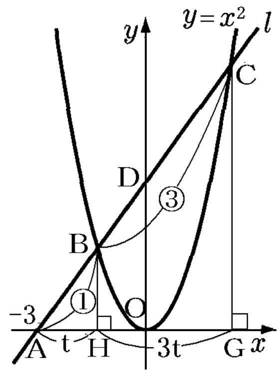
右の図で，曲線は関数 $y=x^2$ のグラフである。x 軸上に x 座標が−3 である点 A をとり，点 A を通り傾きが正の直線 l をひく。直線 l と曲線との交点のうち x 座標が負のものを B，正のものを C とし，直線 l と y 軸との交点を D とする。AB : BC＝1 : 3 のとき，BC の長さを求めよ。ただし，座標軸の単位の長さを 1cm とする。



(埼玉県)(****)

[解答欄]

[ヒント]



右図で，AH＝t ($t>0$)とおく。

BH // CG で，AH : HG＝AB : BC＝1 : 3 なので，HG＝3t

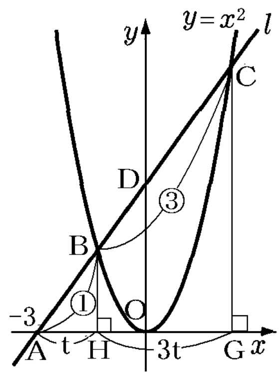
→点 B，C の y 座標(t の式)→BH，CG の長さ(t の式)

AB : AC＝1 : 4 なので，CG＝4BH→t の方程式

→三平方の定理より AC の長さ→BC の長さ

[解答]$\frac{9}{4}\sqrt{13}$ cm

[解説]



右図で，AH＝t ($t>0$)とおくと，

点 B の x 座標は $x=-3+t$ である。$y=x^2$ に $x=-3+t$ を代入すると，

$y=(t-3)^2$ なので，BH＝$(t-3)^2$ である。・・・①

右図で，BH // CG で AB : BC＝1 : 3 なので，AH : HG＝1 : 3 で，

AH＝t なので，HG＝3t で，点 C の x 座標は $x=-3+t+3t=-3+4t$ である。$y=x^2$ に $x=-3+4t$ を代入すると，$y=(4t-3)^2$ なので，

CG＝$(4t-3)^2$ である。・・・②

BH // CG で，AB : AC＝1 : (1＋3)＝1 : 4 なので，

BH：CG＝1：4，CG＝4BH･･･③

①，②，③より，$(4t-3)^2=4(t-3)^2$

$16t^2-24t+9=4t^2-24t+36$，$12t^2=27$，$t^2=\frac{27}{12}$，$t^2=\frac{9}{4}$，$t>0$ なので，$t=\frac{3}{2}$

AG＝$4t=4\times\frac{3}{2}=6$(cm)

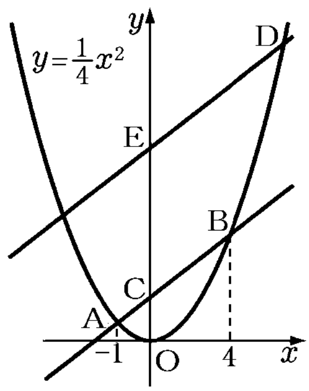
②より，CG＝$(4t-3)^2=\left(4\times\frac{3}{2}-3\right)^2=(6-3)^2=9$(cm)

三平方の定理より，AC＝$\sqrt{AG^2+CG^2}=\sqrt{36+81}=\sqrt{117}=\sqrt{3^2\times13}=3\sqrt{13}$(cm)

BC＝$\frac{3}{4}$AC＝$\frac{3}{4}\times3\sqrt{13}=\frac{9\sqrt{13}}{4}$(cm)

[問題]

右の図で，曲線は関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフである。曲線上に，x 座標が－1，4 である点 A，B をとり，直線 AB と y 軸との交点を C とする。また，曲線上に，x 座標が 4 より大きい点 D をとり，点 D を通り直線 AB と平行な直線をひき，y 軸との交点を E とする。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) 直線 AB の式を求めよ。

(2) EC＝ED のとき，点 D の x 座標を求めよ。

(埼玉県)(****)

[解答欄]

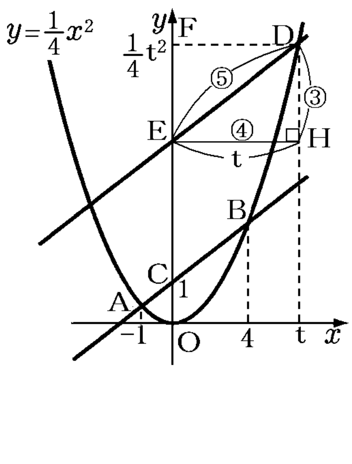
(1)	(2)

[ヒント]

(2) 点 D の x 座標を $x=t$ とおくと，ED＝$\frac{5}{4}t$，DH＝$\frac{3}{4}t$

よって，FE＝DH＝$\frac{3}{4}t$，EC＝ED＝$\frac{5}{4}t$

FE＋EC＋CO＝FO なので，$\frac{3}{4}t+\frac{5}{4}t+1=\frac{1}{4}t^2$



[解答](1) $y=\frac{3}{4}x+1$ (2) $4+2\sqrt{5}$

[解説]

(1) 点Aのx座標$x=-1$を$y=\frac{1}{4}x^2$に代入すると$y=\frac{1}{4}$なので，点Aの座標は$\left(-1,\ \frac{1}{4}\right)$，

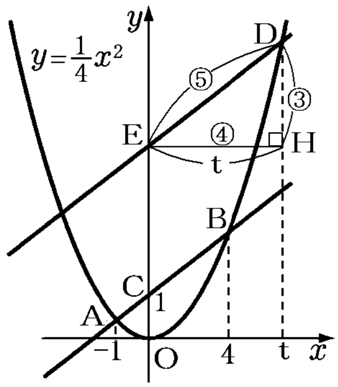
点Bのx座標$x=4$を$y=\frac{1}{4}x^2$に代入すると$y=4$なので，点Bの座標は(4，4)である。

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$の公式を使って，2点A，Bを通る直線の式を求める。

$y=\frac{4-\frac{1}{4}}{4-(-1)}(x-4)+4$，$y=\frac{\frac{15}{4}}{5}(x-4)+4$，$y=\frac{15}{20}(x-4)+4$，$y=\frac{3}{4}(x-4)+4$

$y=\frac{3}{4}x+1$

(2) 点Dのx座標を$x=t$とおく。



右図の△DEHで，DE // ABなので，直線DEの傾きは直線AB($y=\frac{3}{4}x+1$)の傾き$\frac{3}{4}$と等しい。

よって，EH：DH＝4：3になる。

三平方の定理より，$\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

なので，EH：ED＝4：5になる。EH＝tなので，

t：ED＝4：5，4ED＝5t，ED＝$\frac{5}{4}t$

EC＝EDなので，EC＝$\frac{5}{4}t$である。

ここで，点Dのy座標に注目する。

$x=t$を$y=\frac{1}{4}x^2$に代入すると$y=\frac{1}{4}t^2$なので，(点Dのy座標)＝$\frac{1}{4}t^2$になる。･･･①

また，(点Dのy座標)＝DH＋EC＋COも成り立つ。

EH：DH＝4：3，t：DH＝4：3，4DH＝3t，DH＝$\frac{3}{4}t$なので,

(点Dのy座標)＝DH＋EC＋CO＝$\frac{3}{4}t+\frac{5}{4}t+1=2t+1$･･･②

①，②より，$\frac{1}{4}t^2=2t+1$，$t^2-8t-4=0$

因数分解できないので，解の公式を使う。

解の公式：$ax^2+bx+c=0$ の解は，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

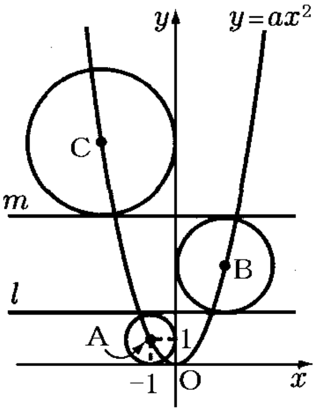
で，$a=1$，$b=-8$，$c=-4$ なので，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{8\pm\sqrt{64-4\times1\times(-4)}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{80}}{2}=\frac{8\pm4\sqrt{5}}{2}=4\pm2\sqrt{5}$$

$t>4$ なので，$t=4+2\sqrt{5}$　よって，点 D の x 座標は，$4+2\sqrt{5}$ である。

[問題]

右図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上の点 A，B，C を中心とする 3 つの円がある。直線 l，m は x 軸に平行で，点 A を中心とする円は x 軸，y 軸，直線 l に，点 B を中心とする円は y 軸，直線 l，m に，点 C を中心とする円は y 軸，直線 m にそれぞれ接しており，点 A の座標は(－1，1)である。次の各問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 点 B の座標を求めよ。

(3) 3 点 A，B，C を通る円の半径は何 cm か。ただし，座標軸の単位の長さは 1cm とする。

(兵庫県)(****)

[解答欄]

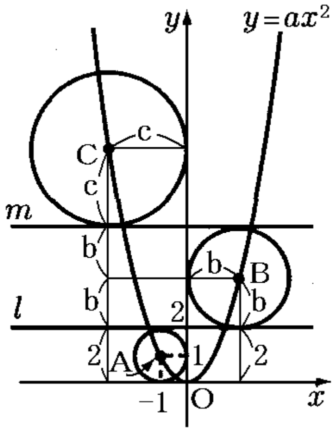
(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(2) B を中心とする円の半径を b $(b>0)$ とすると，右図より，点 B の座標は $(b,\ b+2)$ である。点 B が $y=x^2$ 上にあることから，b の値を求める。

(3) 図より，直線 AB と x 軸のなす角は 45° である。また，直線 BC と x 軸のなす角も 45° である。

したがって，△ABC は∠ABC＝90° の直角三角形になり，AC は 3 点 A，B，C を通る円の直径になる。



[解答](1) 1　(2) (2，4)　(3) $\sqrt{17}$ cm

[解説]

(1) 点 A(−1, 1)は $y=ax^2$ 上にあるので, $x=-1$, $y=1$ を $y=ax^2$ に代入して,

$1=a\times 1$, $a=1$

(2) B を中心とする円の半径を $b\,(b>0)$ とすると, 右図より,

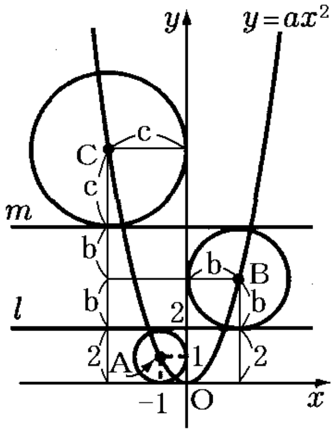
点 B の座標は $(b,\ b+2)$ である。点 B は $y=x^2$ 上にあるので,

$x=b$, $y=b+2$ を $y=x^2$ に代入して,

$b+2=b^2$, $b^2-b-2=0$, $(b+1)(b-2)=0$, $b=-1,\ 2$

$b>0$ なので, $b=2$

よって, 点 B の座標は(2, 2+2), (2, 4)である。



(3) 図より, 直線 AB と x 軸のなす角は 45° である。また,

直線 BC と x 軸のなす角も 45° である。

したがって, △ABC は∠ABC=90° の直角三角形になり,

AC は 3 点 A, B, C を通る円の直径になる。

よって, 点 C の座標がわかれば AC の長さを計算できる。

C を中心とする円の半径を c ($c>0$)とすると, 右上図より,

点 C の x 座標は $x=-c$ で, y 座標は $y=c+b+b+2=c+2+2+2=c+6$ である。

点 C は $y=x^2$ 上にあるので, $x=-c$, $y=c+6$ を $y=x^2$ に代入して,

$c+6=c^2$, $c^2-c-6=0$, $(c+2)(c-3)=0$, $c=-2,\ 3$

$c>0$ なので, $c=3$

よって, 点 C の座標は(−3, 3+6), (−3, 9)になる。

そこで, A(−1, 1), C(−3, 9)の長さを求める。

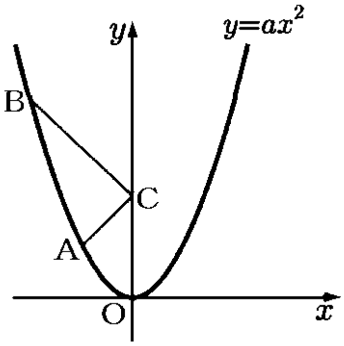
三平方の定理より, AC= $\sqrt{(-1-(-3))^2+(1-9)^2}=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}=\sqrt{4\times 17}=2\sqrt{17}$ (cm)

AC は 3 点 A, B, C を通る円の直径なので, 半径は $2\sqrt{17}\div 2=\sqrt{17}$ (cm)になる。

【】最短距離

[問題]

右の図のように, 関数 $y=ax^2$ $(a>0)$のグラフ上に 2 点 A, B があり，点 A の座標は(−3，3)，点 B の x 座標は−6 である。また，y 軸上に点 C があり，点 C の y 座標は正である。次の各問いに答えよ。



(1) a の値を求めよ。

(2) 線分 AC と線分 BC の長さの和 AC＋BC がもっとも小さくなるときの，点 C の y 座標を求めよ。

(大分県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

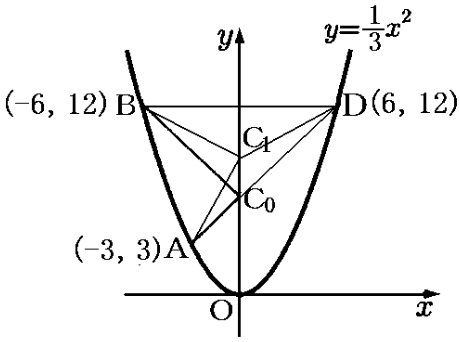
(2) 右図で，点 C が C_1 の位置にあるとき，

$AC_1+BC_1=AC_1+C_1D$ である。点 C が C_0 の位置にあるとき，$AC_0+BC_0=AC_0+C_0D=AD$

$\triangle AC_1D$ で，三角形の 2 辺の和は他の 1 辺より長いので，$AC_1+C_1D>AD$

よって，$AC_1+C_1D>AC_0+C_0D$,

$AC_1+BC_1>AC_0+BC_0$ となる。



よって，C が C_0 の位置にあるとき，AC＋BC がもっとも小さくなる。

[解答](1) $\dfrac{1}{3}$　(2) 6

[解説]

(1) 点 A(−3，3)は $y=ax^2$ 上にあるので，$x=-3$，$y=3$ を $y=ax^2$ に代入すると，

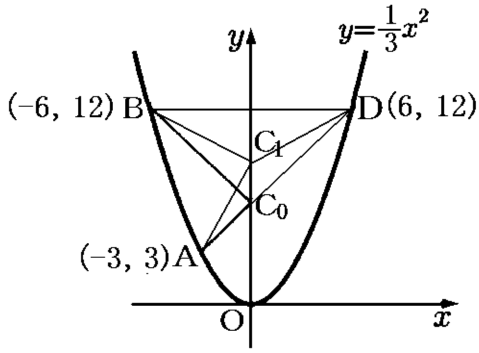
$3=9a$，$a=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

(2) 点 B の x 座標は−6 なので，$y=\dfrac{1}{3}x^2$ に $x=-6$ を代入すると，$y=\dfrac{1}{3}\times 36=12$ である。よって，点 B の座標は(−6，12)である。

点 B と y 軸について対称な点 D(6，12)をとる。

右図で，点 C が C_1 の位置にあるとき，

$AC_1+BC_1=AC_1+C_1D$



点 C が C_0 の位置にあるとき，AC_0＋BC_0＝AC_0＋C_0D＝AD

△AC_1D で，三角形の 2 辺の和は他の 1 辺より長いので，AC_1＋C_1D＞AD

よって，AC_1＋C_1D＞AC_0＋C_0D，AC_1＋BC_1＞AC_0＋BC_0 となる。

よって，C が C_0 の位置にあるとき，AC＋BC がもっとも小さくなる。

点 C_0 の y 座標を求めるために，直線 AB の式を計算する。

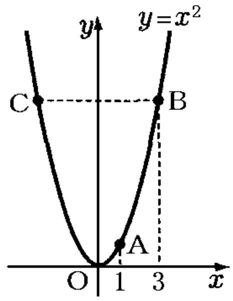
A(－3，3)，D(6，12)を通る直線の式は，$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式より，

$y=\dfrac{12-3}{6-(-3)}(x-6)+12$，$y=x-6+12$，$y=x+6$

点 C_0 の y 座標は，$y=x+6$ の切片(y 切片)の 6 になる。

[問題]

右の放物線は $y=x^2$ のグラフで，放物線上に x 座標がそれぞれ 1，3 となる 2 点 A，B をとる。さらに，点 B と y 座標が等しく x 座標が異なる放物線上の点を C とする。次の各問いに答えよ。



(1) 点 C の x 座標を求めよ。

(2) y 軸上に，点 P を AP＋PB が最小となるようにとるとき，点 P の座標を求めよ。

(宮城県)(***)

[解答欄]

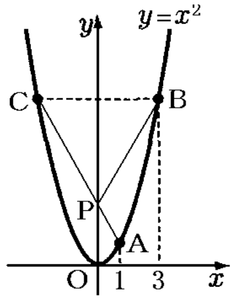
(1)	(2)

[ヒント]

(2) 直線 AC と y 軸の交点が点 P である。

点 P がこの位置にあるとき，AP＋PB＝AP＋PC は最小になる。

点 A，C の座標→直線 AC の式→点 P の座標



[解答](1) －3　(2) (0，3)

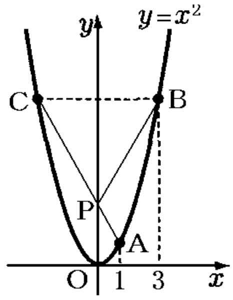
[解説]

(1) 点 C は y 軸について点 B と対称なので，点 C の x 座標は－3 である。

(2) 直線 AC と y 軸の交点が点 P である。

点 P がこの位置にあるとき，AP＋PB＝AP＋PC は最小になる。

そこで，直線 AC の式を求める。



点 A の x 座標は 1 なので，$x=1$ を $y=x^2$ に代入すると $y=1$ だから，

点 A の座標は(1，1)である。

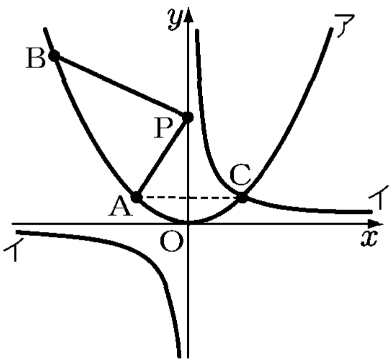
点 C の x 座標は－3 なので， $x=-3$ を $y=x^2$ に代入すると $y=9$ だから，点 C の座標は(－3，9)である。

直線 AC の式は， $y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式より，

$y=\frac{1-9}{1-(-3)}(x-1)+1$， $y=-2(x-1)+1$， $y=-2x+3$

点 P は $y=-2x+3$ の切片(y 切片)なので，その座標は(0，3)である。

[問題]



右の図において，曲線アは関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフであり，曲線イは関数 $y=\frac{a}{x}$ のグラフである。曲線ア上の点で x 座標が－2 である点を A，x 座標が－6 である点を B とする。また，曲線アと曲線イの交点を C とし，点 C の y 座標は点 A の y 座標と等しいものとする。さらに， y 軸上の点を P とする。このとき，次の各問いに答えよ。$a>0$ で，O は原点とする。

(1) a の値を求めよ。

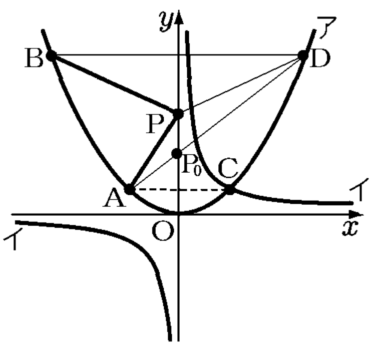
(2) AP＋PB が最小となるとき，点 P の座標を求めよ。

(茨城県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]



(2) 右図のように y 軸について点 B と対称な点 D をとると，AP＋PB＝AP＋PD となる。

右図で，AD＜AP＋PD，すなわち，AP_0+P_0D＜AP＋PD なので，点 P が P_0 の位置に来るとき，AP＋PD は最小になる。P_0 の座標を求めるために，直線 AD の式を計算する。

[解答](1) $a=2$　(2) (0，3)

[解説]

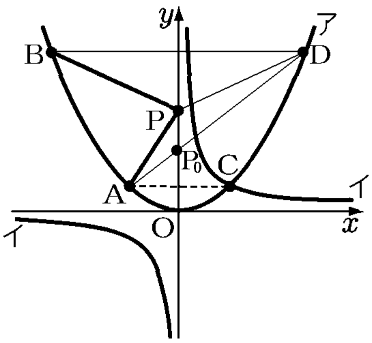
(1) $y=\frac{1}{4}x^2$ 上の点 A の x 座標は－2 なので，$x=-2$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入すると，$y=\frac{1}{4}\times4=1$

よって，点 A の座標は(－2，1)である。

点 C は y 軸について点 A と対称なので，点 C の座標は(2，1)である。

点 C は $y=\frac{a}{x}$ 上にあるので，$x=2$，$y=1$ を $y=\frac{a}{x}$ に代入して，$1=\frac{a}{2}$，$a=2$

(2) 右図のように y 軸について点 B と対称な点 D をとると，AP＋PB＝AP＋PD となる。



右図で，AD＜AP＋PD，すなわち，AP_0+P_0D＜AP＋PD なので，点 P が P_0 の位置に来るとき，AP＋PD は最小になる。そこで，P_0 の座標を求めるために，直線 AD の式を計算する。点 B の x 座標が－6 なので, 点 D の x 座標は 6 になる。

$x=6$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入すると，$y=\frac{1}{4}\times36=9$ なので，点 D の座標は(6，9)である。点 A の座標は(－2，1)なので，直線 AD の式は，

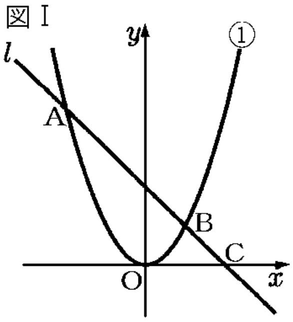
$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式より，$y=\frac{9-1}{6-(-2)}(x-6)+9$，$y=x+3$

P_0 は $y=x+3$ の切片(y 切片)なので，P_0 の座標は(0，3)である。

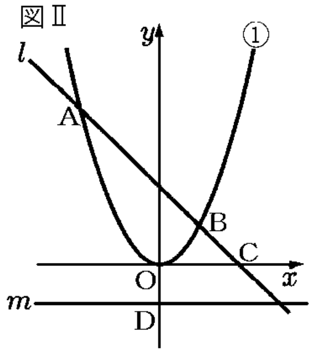
[問題]

図Ⅰのように，関数 $y=ax^2$ ･･･①のグラフと直線 l が 2 点 A，B で交わっている。点 A の x 座標は－4，点 B の座標は(2, 2)であり, 点 C は直線 l と x 軸との交点である。このとき，次の各問いに答えよ。

図Ⅰ



図Ⅱ



(1) a の値を求めよ。

(2) 直線 l の式を求めよ。

(3) 図Ⅱは，図Ⅰにおいて，点 D(0，－1)を通り，x 軸に平行な直線 m をひいたものである。直線 m 上に点 P をとり，△APC の周の長さが最も短くなるようにする。このとき，点 P の x 座標を求めよ。

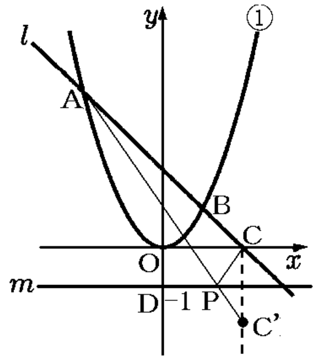
(宮崎県)(****)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[ヒント]

(3) 右図のように，直線 m について C と対称な点 C'をとる。直線 AC'と直線 m の交点に点 P があるとき，AP＋PC は最小になる。AC は一定なので，このとき，△APC の周の長さが最も短くなる。



[解答](1) $\frac{1}{2}$　(2) $y=-x+4$　(3) $\frac{16}{5}$

[解説]

(1) 点 B(2，2)は $y=ax^2$ 上にあるので，$x=2$，$y=2$ を $y=ax^2$ に代入して，

$2=4a$，$a=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

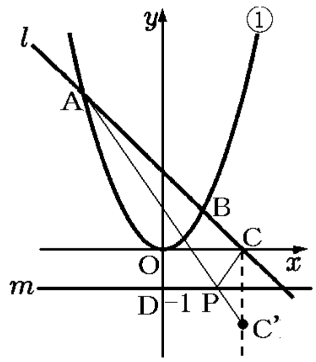
(2) $y=\frac{1}{2}x^2$ 上にある点 A の x 座標は－4 なので，$x=-4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して $y=\frac{1}{2}\times16=8$

よって，点 A の座標は(－4，8)である。点 A と点 B(2，2)を通る直線 l の式は，

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式より，

$y=\frac{2-8}{2-(-4)}(x-2)+2$，$y=-(x-2)+2$，$y=-x+4$ となる。

(3) 右図のように，直線 m について C と対称な点 C'をとる。直線 AC'と直線 m の交点に点 P があるとき，AP＋PC は最小になる。AC は一定なので，このとき，△APC の周の長さが最も短くなる。



点 C の x 座標は，$y=-x+4$ に $y=0$ を代入して，

$0=-x+4$，$x=4$ となる。OD＝1 より CC'＝2 なので，

C'の座標は(4，－2)になる。

そこで，点 A(－4，8)と C'を通る直線の式を求める。

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式より，$y=\frac{-2-8}{4-(-4)}(x-4)-2$，$y=-\frac{5}{4}(x-4)-2$，$y=-\frac{5}{4}x+3$

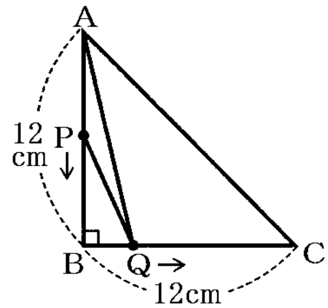
直線 m との交点を求めるために，$y=-1$ を $y=-\frac{5}{4}x+3$ に代入すると，

$-1=-\frac{5}{4}x+3$，$\frac{5}{4}x=4$，$x=4\div\frac{5}{4}=4\times\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$　よって，点 P の x 座標は $\frac{16}{5}$ である。

【】二次関数の利用

【】動点

[問題]



右の図のように，AB＝BC＝12cm，∠ABC＝90°の直角二等辺三角形 ABC がある。点 P は頂点 A を出発し，毎秒 2cm の速さで辺 AB, 辺 BC 上を通って, 頂点 C に向かって移動する。また，点 Q は，点 P と同時に頂点 B を出発し，毎秒 1cm の速さで辺 BC 上を通り，頂点 C に向かって移動する。このとき，点 P，Q は途中で止まることなく移動し，点 P が点 Q に追いついたところで止まるものとする。点 P，Q がそれぞれ頂点 A，B を出発してから，x 秒後の 3 点 A，P，Q を結んでできる△APQ の面積を y cm² とするとき，次の各問いに答えよ。ただし，点 P，Q がそれぞれ頂点 A，B にあるときと，点 P が点 Q に追いついたときは，$y=0$ とする。

(1) 3 秒後の△APQ の面積を答えよ。

(2) 次の①，②について，y を x の式で表せ。

① $0 \leqq x \leqq 6$ のとき

② $6 \leqq x \leqq 12$ のとき

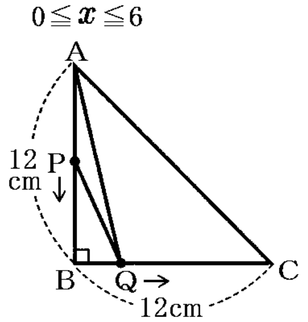
(3) △APQ の面積が 16cm² となるのは，何秒後か，すべて求めよ。

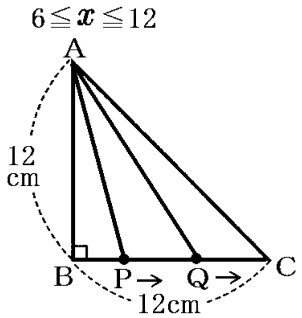
(新潟県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)①	②
(3)		

[ヒント]





[解答](1) 9cm²　(2)①　$y=x^2$　②　$y=-6x+72$　(3) 4 秒後，$\dfrac{28}{3}$ 秒後

[解説]

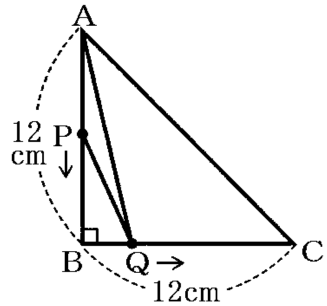
(1) 3 秒後 P は AB 間にあって，AP＝2(cm／秒)×3(秒)＝6(cm)である。

3 秒後 Q は BC 間にあって，BQ＝1(cm／秒)×3(秒)＝3(cm)である。

△APQ の底辺を AP とすると，高さは BQ なので，

(△APQ の面積)＝$\frac{1}{2}$×AP×BQ＝$\frac{1}{2}\times 6\times 3=9$(cm²)

(2)① $0\leqq x\leqq 6$ のとき



P は AB 間にあって，AP＝2(cm／秒)× x (秒)＝ $2x$ (cm)である。

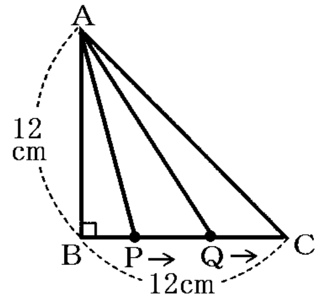
Q は BC 間にあって，BQ＝1(cm／秒)× x (秒)＝ x (cm)である。

△APQ の底辺を AP とすると，高さは BQ なので，

(△APQ の面積)＝$\frac{1}{2}$×AP×BQ＝$\frac{1}{2}\times 2x\times x=x^2$ (cm²)

よって， $y=x^2$

② $6\leqq x\leqq 12$ のとき，右図のように，P，Q ともに BC 上にある。



P は x 秒間で $2x$ (cm)進んでいるので，

AB＋BP＝ $2x$，12＋BP＝ $2x$，BP＝ $2x-12$ (cm)

Q は x 秒間で x (cm)進んでいるので，BQ＝ x (cm)

BQ－BP＝ $x-(2x-12)=-x+12$ で，$6\leqq x\leqq 12$ なので，

BQ－BP＝ $-x+12\geqq 0$ となり，BQ≧BP である。

よって，PQ＝ $-x+12$ (cm)

△APQ の底辺を PQ とすると，高さは AB＝12(cm)である。

(△APQ の面積)＝$\frac{1}{2}$×PQ×AB＝$\frac{1}{2}\times(-x+12)\times 12=-6x+72$ (cm²)

よって， $y=-6x+72$

(3) (2)より，$0\leqq x\leqq 6$ のとき $y=x^2$ である。

$y=16$ を代入すると，$16=x^2$， $x\geqq 0$ なので $x=4$

$x=4$ は $0\leqq x\leqq 6$ を満たすので問題に適する。

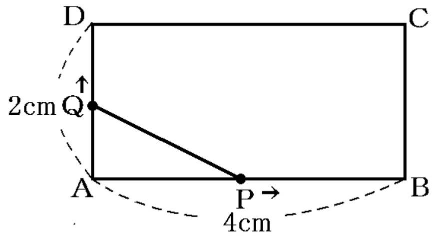
また，$6\leqq x\leqq 12$ のとき， $y=-6x+72$ である。

$y=16$ を代入すると，$16=-6x+72$， $6x=56$， $x=\frac{56}{6}=\frac{28}{3}$

$x=\frac{28}{3}$ は $6\leqq x\leqq 12$ を満たすので問題に適する。

よって，△APQ の面積が 16cm² となるのは，4 秒後と $\frac{28}{3}$ 秒後である。

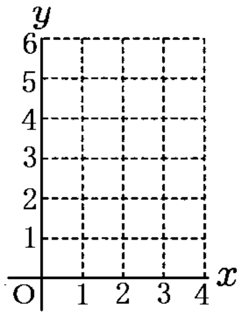
[問題]



右の図のような AB＝4cm，AD＝2cm の長方形 ABCD と，辺上を動く点 P，Q がある。点 P，Q は，A を同時に出発して，それぞれ次のように動く。

(点 P)

A を出発して毎秒 2cm の速さで辺 AB 上を B に向かって進み，B に到着すると，毎秒 2cm の速さで辺 BA 上を A に向かって進み，A を出発してから 4 秒後に，A に戻り停止する。



(点 Q)

A を出発して毎秒 1cm の速さで辺 AD 上を D に向かって進み，D に到着すると，毎秒 2cm の速さで辺 DC 上を C に向かって進み，A を出発してから 4 秒後に，C で停止する。点 P，Q が A を出発してから x 秒後の△APQ の面積を y cm² とする。ただし x＝0，4 のとき，y＝0 とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 次のそれぞれの場合について，y を x の式で表せ。

① $0 \leqq x \leqq 2$ のとき

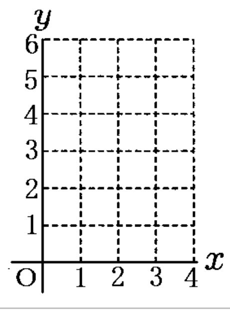
② $2 \leqq x \leqq 4$ のとき

(2) (2)のグラフをかけ。

(3) $0 < x < 4$ で，△APQ が QA＝QP の二等辺三角形になるとき，x の値を求めよ。

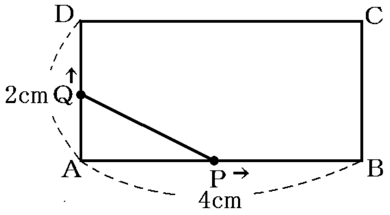
(愛媛県)(***)

[解答欄]

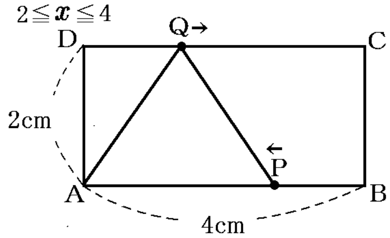
(1)①	②	(3)
(2) 		

[ヒント]

$0 \leqq x \leqq 2$

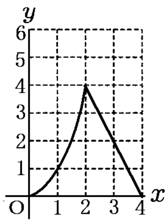


$2 \leqq x \leqq 4$



[解答](1)① $y=x^2$　② $y=-2x+8$

(2)



(3) $\frac{8}{3}$

[解説]

図1

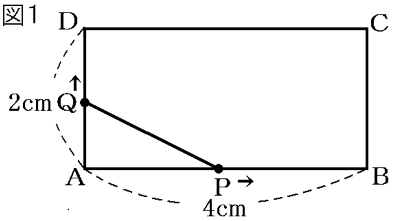
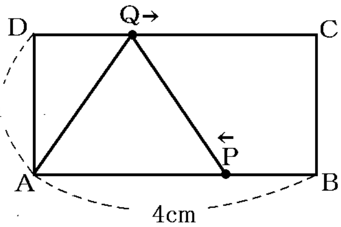


図2



(1)(2)① $0\leqq x\leqq 2$ のとき，P，Q は上の図 1 のような位置にあり，
AP＝$2x$(cm)，AQ＝x(cm)である。

$(\triangle\text{APQ の面積})=\frac{1}{2}\times\text{AP}\times\text{AQ}=\frac{1}{2}\times 2x\times x=x^2$

よって，$y=x^2$
② $2\leqq x\leqq 4$ のとき，P，Q は上の図 2 のような位置にある。
(P が進んだ距離)＝AB＋BP＝$2x$ なので，4＋BP＝$2x$，BP＝$2x-4$
よって，AP＝4－BP＝$4-(2x-4)=-2x+8$
△APQ の底辺を AP とすると高さは 2cm なので，

$(\triangle\text{APQ の面積})=\frac{1}{2}\times\text{AP}\times 2=\frac{1}{2}\times(-2x+8)\times 2=-2x+8$

よって，$y=-2x+8$
(3) 図 1 のように，$0\leqq x\leqq 2$ のときは QA＝QP になることはない。

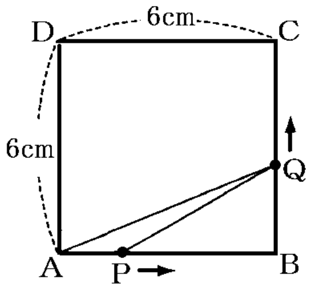
図 2 のように，$2\leqq x\leqq 4$ のとき，QA＝QP になるのは DQ＝$\frac{1}{2}$AP のときである。

(1)②より，AP＝$-2x+8$ である。
Q は最初の 2 秒で A→D と進み，残りの $x-2$(秒)で D→Q と進む。D→Q 間は毎秒 2cm の速さで進むので，DQ＝$2\times(x-2)=2x-4$

DQ＝$\frac{1}{2}$AP なので，$2x-4=\frac{1}{2}(-2x+8)$，$2x-4=-x+4$，$3x=8$，$x=\frac{8}{3}$

[問題]

図 1 の正方形 ABCD は，1 辺の長さが 6cm である。点 P，Q は，同時にそれぞれ点 A，B を出発し，点 P は正方形の辺上を点 B を通って点 C に向かって毎秒 p cm，点 Q は正方形の辺上を点 C，D の順に通って点 A まで毎秒 1cm の速さで動くものとする。点 P，Q が出発してから，x 秒後の△APQ の面積を y cm² とする。また，図 2 は，点 Q が点 A まで動いたとき，x と y の関係を表したグラフの一部である。次の各問いに答えよ。



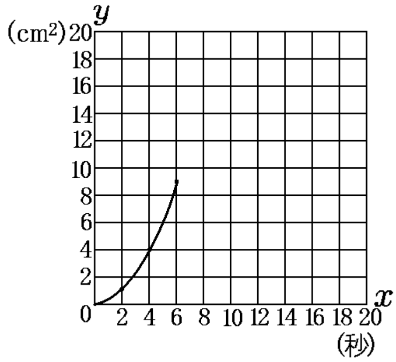
(1) 0≦ x ≦6 のとき，次の①，②に答えよ。

① 図 2 は, 関数 $y = ax^2$ のグラフである。このとき，a の値を求めよ。

② p の値を求めよ。

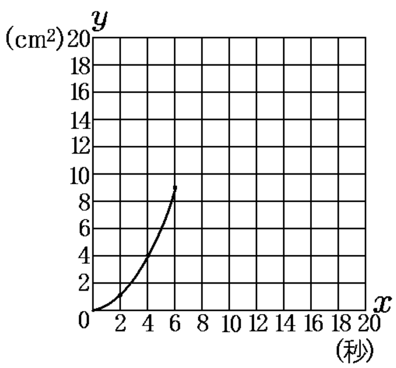
(2) 6≦ x ≦12 のとき，y を x の式で表せ。

(3) 点 Q が点 A まで動くとき，x と y の関係を表すグラフを図 2 にかき加えよ。



(青森県)(***)

[解答欄]

(1)①	②	(2)
(3) 		

[ヒント]

(1)① グラフより，$y = ax^2$ は点(4，4)を通る。

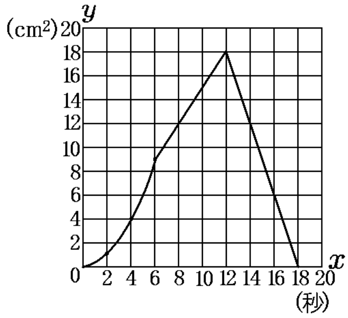
② AP＝ $p \times x = px$，BQ＝$1 \times x = x$ なので，(△APQ の面積)＝$\frac{1}{2}px^2$

(2) (1)より点 P は毎秒 $\frac{1}{2}$ cm の速さで動くので，$6 \div \frac{1}{2} = 12$ (秒)後に B に到着する。したがって，6≦ x ≦12 のときは，AB 間にある。点 Q は CD 間にある。

(3) 点 Q が B→C→D→A と進んで A に到着するのは 18 秒後である。12≦ x ≦18 のとき，点 P は BC 間，点 Q は DA 間にある。

[解答](1)① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　(2) $y=\frac{3}{2}x$

(3)

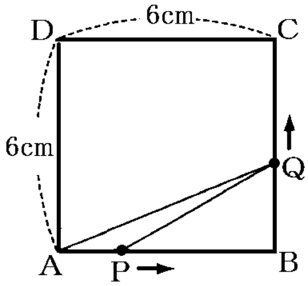


[解説]

(1)① グラフより，$y=ax^2$ は点(4，4)を通るので，$x=4$，$y=4$ を $y=ax^2$ に代入して，

$4=16a$，$a=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

② AP＝$p\times x=px$，BQ＝$1\times x=x$ なので，



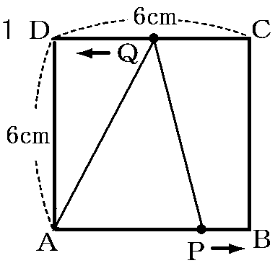
(△APQ の面積)＝$\frac{1}{2}$×AP×BQ＝$\frac{1}{2}\times px\times x=\frac{1}{2}px^2$

よって，$y=\frac{1}{2}px^2$

$\frac{1}{2}p=a$ で，①より $a=\frac{1}{4}$ なので，$\frac{1}{2}p=\frac{1}{4}$，$p=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

(2) 点 P は毎秒 $\frac{1}{2}$cm の速さで動くので，$6\div\frac{1}{2}=12$(秒)後に B に到着する。したがって，$6\leqq x\leqq 12$ のときは，図 1 のように AB 間にある。点 Q は，図 1 のように CD 間にある。

図1

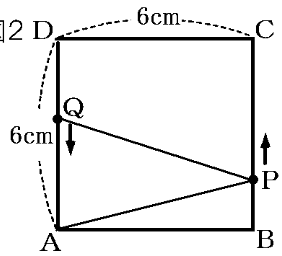


△APQ の底辺を AP＝$\frac{1}{2}x$(cm)とすると，高さは 6cm なので，

(△APQ の面積)＝$\frac{1}{2}$×AP×6＝$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}x\times 6=\frac{3}{2}x$

よって，$y=\frac{3}{2}x$ になる。

図2



(3) 点 Q が B→C→D→A と進んで A に到着するのは 18 秒後である。$12\leqq x\leqq 18$ のとき，図 2 のように，点 P は BC 間，点 Q は DA 間にある。
△APQ の底辺を AQ とすると，高さは 6cm である。
点 Q は毎秒 1cm の速さで進み，x 秒では $1\times x=x$(cm)進むので，
BC＋CD＋DQ＝x が成り立つ。
BC＋CD＋DQ＋AQ＝6＋6＋6 なので，x＋AQ＝18，AQ＝18－x(cm)

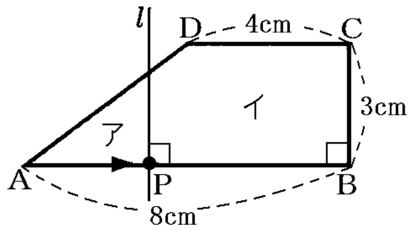
よって，(△APQ の面積)＝$\frac{1}{2}$×AQ×6＝$\frac{1}{2}\times(18-x)\times 6=-3x+54$，　$y=-3x+54$

以上より，0≦ x ≦6： $y=\frac{1}{4}x^2$，6≦ x ≦12： $y=\frac{3}{2}x$，12≦ x ≦18： $y=-3x+54$

これをもとにグラフをかく。

[問題]

右の図は，台形 ABCD で AB＝8cm，BC＝3cm，CD＝4cm，AB⊥BC，AB // DC である。点 P は A を出発し，毎秒 1cm の速さで辺 AB 上を B まで動き，B に到着したら停止する。点 P を通り，辺 AB に垂直な直線を l とする。直線 l が台形 ABCD を 2 つの部分に分けるとき，A を含む側をア，B を含む側をイとする。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) 点 P が A を出発してから 4 秒後のアの面積は何 cm² か。

(2) アとイの面積が等しくなるのは，点 P が A を出発してから何秒後か。

(3) 点 P が A を出発してから経過した時間を x 秒とするとき，次の①，②の問いに答えよ。

① アとイの面積のうち，小さい方を y cm² とする。このとき， x と y の関係を表すグラフをかけ。ただし，アとイの面積が等しくなるときは，その面積を y cm² とし，点 P が A または B にあり，台形 ABCD を 2 つの部分に分けられないときは y ＝0 とする。

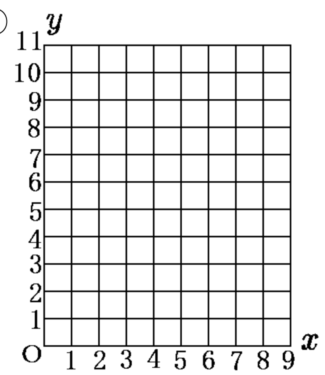
② アとイの面積のうち，大きい方が小さい方の 5 倍になるときの x の値をすべて求めよ。

(鹿児島県)(****)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)②

(3)①



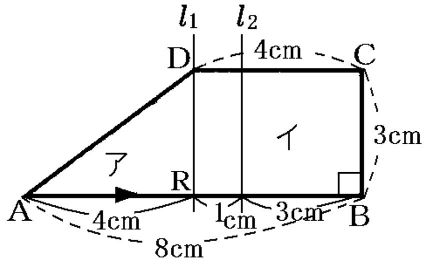
[ヒント]

(2) (台形 ABCD の面積)＝18(cm²)なので，アとイの面積が等しくなるとき，ア，イの面積はともに 18÷2＝9(cm²)である(右図の l_2)。

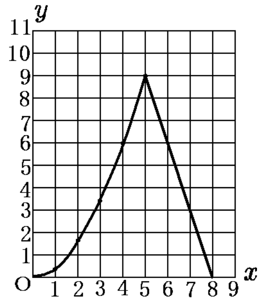
(3) l が右図の l_1 より左にあるとき，面積が小さいのはアである。

l が右図の l_1 と l_2 の間にあるとき，面積が小さいのはアである。

l が右図の l_2 よりも右側にあるとき，面積が小さいのはイである。



[解答](1) 6cm²　(2) 5 秒後　(3)①

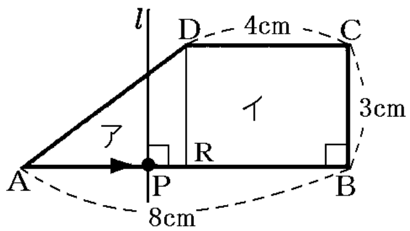


②　$2\sqrt{2}$，7

[解説]

(1) 4 秒後には，AP＝4cm なので，l は D 点を通り，アは右図の直角三角形 ADR になる。

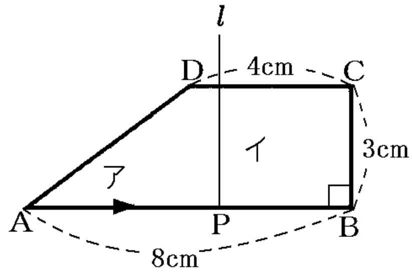
(直角三角形 ADR の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times 4\times 3$＝6(cm²)



(2) (台形 ABCD の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times(4+8)\times 3$＝18(cm²)

アとイの面積が等しくなるとき，ア，イの面積はともに 18÷2＝9(cm²)である。(1)の結果より，このとき，l は DC 間にある。(イの部分の面積)＝3×PB＝9

よって，PB＝9÷3＝3(cm)なので，AP＝8－3＝5(cm)である。点 P の速さは毎秒 1cm なので，AP＝5cm になるのは 5 秒後である。



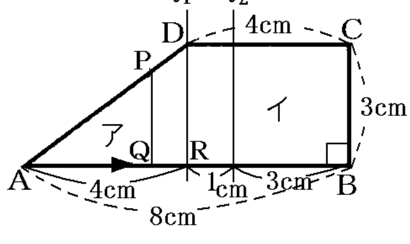
(3)①1) l が右図の l_1 より左にあるとき，

すなわち，0＜x≦4 のとき，面積が小さいのはアである。

右図で AQ＝x(cm)

AQ：PQ＝AR：DR＝4：3

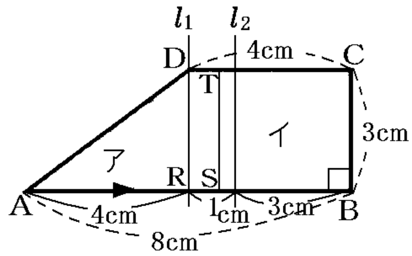
x：PQ＝4：3，4PQ＝3x，PQ＝$\dfrac{3}{4}x$



(アの面積)＝$\frac{1}{2}$×AQ×PQ

$y=\frac{1}{2}\times x\times\frac{3}{4}x$， $y=\frac{3}{8}x^2$

2) l が右図の l_1 と l_2 の間にあるとき



すなわち, 4≦ x ≦5 のとき, 面積が小さいのはアである。

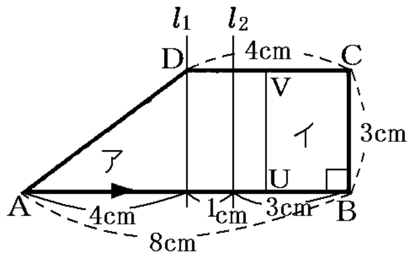
(△ADR の面積)＝$\frac{1}{2}$×AR×DR＝$\frac{1}{2}\times4\times3$ ＝6(cm²)

RS＝AS－AR＝ x －4(cm)なので,

(長方形 DRST の面積)＝RS×DR＝ $(x-4)\times3$ ＝ $3x-12$ (cm²)

よって， $y=6+(3x-12)$， $y=3x-6$

3) l が右図の l_2 よりも右側にあるとき



すなわち, 5≦ x ≦8 のとき, 面積が小さいのはイである。

UB＝AB－AU＝8－ x (cm)なので,

(イの面積)＝UB×BC＝ $(8-x)\times3$ ＝ $-3x+24$ (cm²)

よって， $y=-3x+24$

② (台形 ABCD の面積)＝$\frac{1}{2}\times(4+8)\times3$ ＝18(cm²)

1) 0≦ x ≦4 のとき

面積が小さい方(ア)：$\frac{3}{8}x^2$，面積が大きい方(イ)：$18-\frac{3}{8}x^2$

「大きい方が小さい方の 5 倍」なので,

$18-\frac{3}{8}x^2=\frac{3}{8}x^2\times5$， $\frac{18}{8}x^2=18$， $x^2=8$， $x>0$ なので， $x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ (cm)

0≦ $2\sqrt{2}$ ≦4 なので， $x=2\sqrt{2}$ は問題に適する。

2) 4≦ x ≦5 のとき

面積が小さい方(ア)：$3x-6$，面積が大きい方(イ)：$18-(3x-6)=-3x+24$

「大きい方が小さい方の 5 倍」なので,

$-3x+24=(3x-6)\times5$， $-3x+24=15x-30$， $18x=54$， $x=3$

4≦ x ≦5 なので， $x=3$ は不適

3) 5≦ x ≦8 のとき

面積が小さい方(イ)：$-3x+24$，面積が大きい方(ア)：$18-(-3x+24)=3x-6$

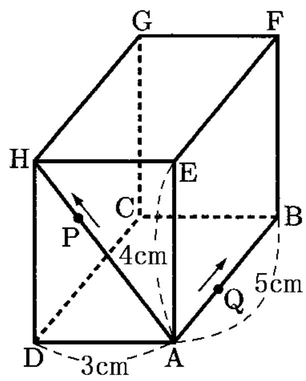
「大きい方が小さい方の 5 倍」なので,

$3x-6=(-3x+24)\times5$， $3x-6=-15x+120$， $18x=126$， $x=7$

$x=7$ は 5≦ x ≦8 を満たすので，適する。

よって，大きい方が小さい方の 5 倍になるときの x の値は， $2\sqrt{2}$ と 7 である。

[問題]



右の図のように，AB＝5cm，AD＝3cm，AE＝4cm の直方体がある。点 P は，頂点 A を出発して，対角線 AH，辺 HG，GF，FE，EA 上を A→H→G→F→E→A の順に毎秒 2cm の速さで動き，頂点 A に達したところで停止する。点 Q は，頂点 A を出発して，辺 AB，BC 上を A→B→C→B の順に毎秒 1cm の速さで動き，点 P が停止すると同時に停止する。2 点 P，Q が同時に頂点 A を出発し，出発してから x 秒後の三角錐 PDAQ の体積を y cm^3 とする。ただし，$x=0$ のとき，$y=0$ とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 点 P が対角線 AH 上にあるとき，

① x の変域を求めよ。

② $x=2$ のときの y の値を求めよ。

③ y を x の式で表せ。

(2) 点 P が辺 HG 上にあるとき，① x の変域を求めよ。②また，y を x の式で表せ。

(3) $5 \leqq x \leqq 9$ のとき，x の値に関係なく，y の値は一定になることを言葉や数，式などを使って説明せよ。

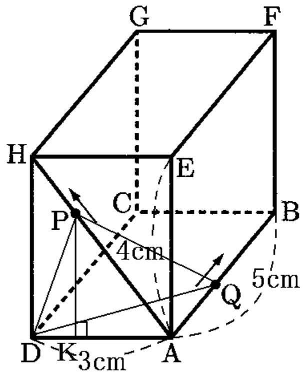
(4) 三角錐 PDAQ の体積が 4cm^3 となるのは何秒後か。

(福井県)(****)

[解答欄]

(1)①	②	③
(2)①	②	
(3)		
(4)		

[ヒント]



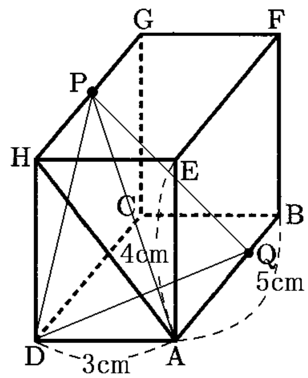
(1) AH＝$\sqrt{AD^2+DH^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ (cm)

点 P は毎秒 2cm で動くので，AH を移動するのにかかる時間は，

$5 \div 2=\dfrac{5}{2}$ (秒)である。

三角錐 PDAQ の底面を△ADQ とすると，高さは，右図の PK である。

(2) P が辺 HG 上にあるとき，点 Q は AB 上にある。
三角錐 PDAQ の底面を△ADQ とすると，高さは P と面 ABCD の距離 4cm である。
(3) $5 \leqq x \leqq 9$ のとき，点 P は辺 GF，FE 上を動く。点 Q は辺 BC 上を動く。



[解答](1)① $0 \leqq x \leqq \frac{5}{2}$　② $\frac{16}{5}$　③ $y=\frac{4}{5}x^2$　(2)① $\frac{5}{2} \leqq x \leqq 5$　② $y=2x$

(3) 三角錐 PDAQ の底面を△DAQ とすると，点 P は辺 GF，FE 上を動くので，三角錐の高さは 4cm で一定である。また，点 Q は辺 BC 上を動くとき，底面積は $\frac{1}{2}\times3\times5=\frac{15}{2}$ (cm²)である。したがって，$y=\frac{1}{3}\times\frac{15}{2}\times4=10$ (cm³)で一定である。　(4) $\sqrt{5}$ 秒後と $\frac{51}{5}$ 秒後

[解説]

(1)① 直角三角形 AHD で，三平方の定理より，

AH＝$\sqrt{AD^2+DH^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ (cm)

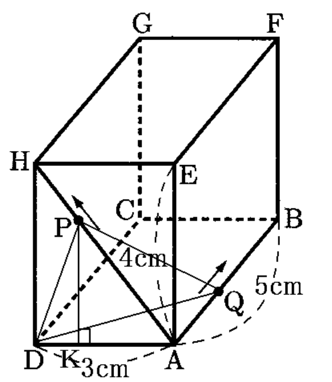
点 P は毎秒 2cm で動くので，AH を移動するのにかかる時間は，5÷2＝$\frac{5}{2}$ (秒)である。

よって，点 P が対角線 AH 上にあるときの x の変域は，$0 \leqq x \leqq \frac{5}{2}$ である。

② $x=2$ のとき，AP＝2×2＝4(cm)，AQ＝1×2＝2(cm)である。
三角錐 PDAQ の底面を△ADQ とすると，高さは，右図の PK である。

PK：HD＝AP：AH なので，

PK：4＝4：5，5PK＝16，PK＝$\frac{16}{5}$ (cm)



(三角錐 PDAQ の体積)＝$\frac{1}{3}$×($\frac{1}{2}$×AD×AQ)×PK

＝$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times2\times\frac{16}{5}=\frac{16}{5}$ (cm³)　よって，$y=\frac{16}{5}$

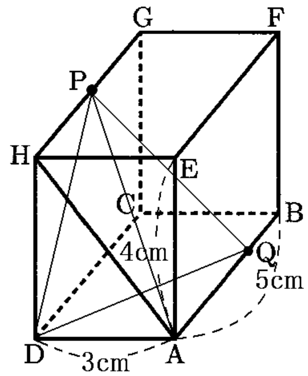
③ ②と同様に考えていく。AP＝2×x＝$2x$ (cm)，AQ＝1×x＝x (cm)である。
三角錐 PDAQ の底面を△ADQ とすると，高さは，図の PK である。
PK：HD＝AP：AH なので，

$PK:4=2x:5$，$5PK=8x$，$PK=\dfrac{8}{5}x$

(三角錐 PDAQ の体積)$=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times AD\times AQ)\times PK=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times x\times\dfrac{8}{5}x=\dfrac{4}{5}x^2$ (cm³)

よって，$y=\dfrac{4}{5}x^2$

(2)① AH＋HG＝5＋5＝10 なので，P が G に着くのは 10÷2＝5(秒)後である。よって，x の変域は，$\dfrac{5}{2}\leqq x\leqq5$ である。



② $\dfrac{5}{2}\leqq x\leqq5$ のとき，点 Q は AB 上にあり，

AQ＝1× $x=x$ (cm)である。

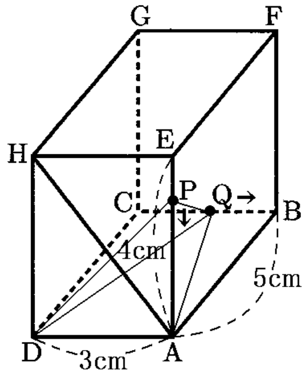
三角錐 PDAQ の底面を△ADQ とすると，高さは P と面 ABCD の距離 4cm である。

(三角錐 PDAQ の体積)$=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times AD\times AQ)\times4$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times x\times4=2x$ (cm³)

よって，$y=2x$

(4) まず，$9\leqq x\leqq11$ のときの y を求める。



点 P は E→A 上に，点 Q は C→B 上にある。

点 P は x 秒で $2x$ cm 移動するので，

AH＋HG＋GF＋FE＋EP＝ $2x$

5＋5＋3＋5＋EP＝ $2x$，EP＝ $2x-18$ (cm)

PA＝EA－EP＝ $4-(2x-18)=-2x+22$ (cm)

(三角錐 PDAQ の体積)$=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times AD\times BA)\times PA$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times5\times(-2x+22)=-5x+55$ (cm³)

よって，$y=-5x+55$

そこで，「三角錐 PDAQ の体積が 4cm³ となるのは何秒後か」について考える。

1) $0\leqq x\leqq\dfrac{5}{2}$ のとき $y=\dfrac{4}{5}x^2$

$y=4$ を $y=\dfrac{4}{5}x^2$ に代入すると，$4=\dfrac{4}{5}x^2$，$x^2=5$，$x>0$ なので $x=\sqrt{5}$

$0 \leqq \sqrt{5} \leqq \frac{5}{2}$ なので，$x=\sqrt{5}$ は適する。

2) $\frac{5}{2} \leqq x \leqq 5$ のとき $y=2x$

$y=4$ を $y=2x$ に代入すると，$4=2x$，$x=2$

$\frac{5}{2} \leqq x \leqq 5$ なので，$x=2$ は不適

3) $5 \leqq x \leqq 9$ のとき，$y=10$ なので，条件を満たす x は存在しない。

4) $9 \leqq x \leqq 11$ のとき，$y=-5x+55$

$y=4$ を $y=-5x+55$ に代入すると，

$4=-5x+55$，$5x=51$，$x=\frac{51}{5}$

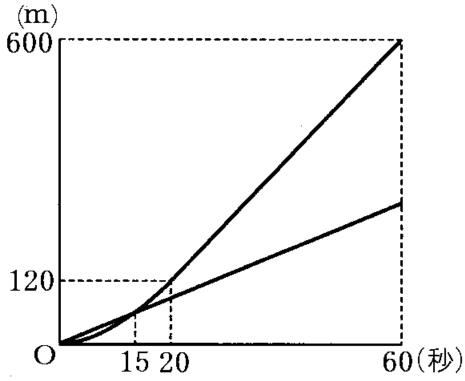
$9 \leqq \frac{51}{5} \leqq 11$ なので， $x=\frac{51}{5}$ は適する。

以上より，三角錐 PDAQ の体積が 4cm^3 となるのは，$\sqrt{5}$ 秒後と $\frac{51}{5}$ 秒後

【】距離・速さのグラフ

[問題]

東西に一直線にのびた道路上のP地点にバスが停車している。バスはこの道路を東に向かって進むものとし，バスがP地点を出発してからx秒後までに進む道のりをy m とする。yをxの式で表すと，xの変域が$0 \leqq x \leqq 20$のとき，$y = \frac{3}{10}x^2$であり，xの変域が$20 \leqq x \leqq 60$のとき，$y = ax + b$（a，bは定数)である。ただし，$x=60$のとき$y=600$である。Aさんはバスが進む道路と同じ道路を東に向かって，一定の速さで自転車に乗って進んでいる。バスがP地点を出発すると同時にAさんはP地点を通過し，バスがP地点を出発してから15秒後にAさんはバスに追いつかれた。右上の図は，バスがP地点を出発してから60秒後までの時間とバスが進む道のりの関係をグラフに表したものに，Aさんの進むようすをかき入れたものである。次の各問いに答えよ。



(1) バスがP地点を出発してから20秒後までの，バスの平均の速さは秒速何mか。

(2) バスがP地点を出発してから20秒後にバスとAさんは何m離れているか。

(3) P地点から東に向かって600m進んだところにQ地点がある。Bさんはバスが進む道路と同じ道路を西に向かって，秒速3mの一定の速さで走っている。BさんはバスがP地点を出発する10秒前にQ地点を通過し，P地点まで走る途中でこのバスとすれちがった。Bさんがバスとすれちがったのは，バスがP地点を出発してから何秒後か。

(福岡県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[ヒント]

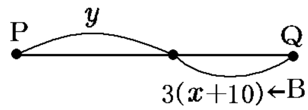
(2) Aさんは，一定の速さで進んでいるので，$y = cx$とおくことができる。

「バスがP地点を出発してから15秒後にAさんはバスに追いつかれた」とあるので，

$x=15$を$y = \frac{3}{10}x^2$に代入してyの値を求める。このx，yを$y = cx$に代入すればcを求めることができる。

(3) まず，$y = ax + b$のa，bの値を，$x = 20$ $y = 120$，$x = 60$ $y = 600$を代入して求める。

次に，バスがP地点を出発してからx秒後のBさんのP地点からの距離y mを求める。



2つの式を連立方程式として解く。

[解答](1) 6m／s　(2) 30m　(3) 46 秒後

[解説]

(1)　$x=20$ のとき, バスの進んだ道のりは, $x=20$ を $y=\frac{3}{10}x^2$ に代入して, $y=\frac{3}{10}\times400=120$

(平均の速さ)$=\frac{120}{20}=6$(m／s)

(2) まず, x 秒後までに A さんが進む道のり y m を求める。

A さんは, 一定の速さで進んでいるので, $y=cx$ とおくことができる。

「バスが P 地点を出発してから 15 秒後に A さんはバスに追いつかれた」とあるので,

$x=15$ を $y=\frac{3}{10}x^2$ に代入すると, $y=\frac{3}{10}\times15^2=\frac{135}{2}$

$x=15$, $y=\frac{135}{2}$ を $y=cx$ に代入すると, $\frac{135}{2}=15c$, $c=\frac{9}{2}$

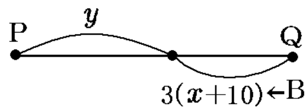
よって, x 秒後までに A さんが進む道のり y m は, $y=\frac{9}{2}x$

$x=20$ を $y=\frac{9}{2}x$ に代入すると, $y=\frac{9}{2}\times20=90$

バスは $x=20$ のとき, $y=120$

したがって, バスが P 地点を出発してから 20 秒後にバスと A さんは 120－90＝30(m)離れている。

(3) まず, $y=ax+b$ の a, b の値を求めておく。



$x=20$, $y=120$ を $y=ax+b$ に代入すると,

$120=20a+b$ ･･･①

$x=60$, $y=600$ を $y=ax+b$ に代入すると,

$600=60a+b$ ･･･②

②－①　$40a=480$, $a=12$

$a=12$ を①に代入すると, $120=20\times12+b$, $b=120-240=-120$

よって, $20\leqq x\leqq60$ のとき, バスの進んだ距離距離 y m は, $y=12x-120$ ･･･③

次に, バスが P 地点を出発してから x 秒後の B さんの P 地点からの距離 y m を求める。

「B さんはバスが P 地点を出発する 10 秒前に Q 地点を通過し」とあるので,

$x+10$(秒)の間, 秒速 3m で, $3\times(x+10)=3x+30$ (m)進んでいる。

このとき, P 地点からの距離 y m は, $y=600-(3x+30)$, $y=-3x+570$ ･･･④

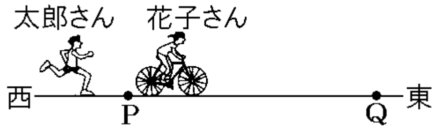
B さんがバスとすれちがったとき y が等しくなるので, ③, ④より,

$12x-120=-3x+570$, $15x=690$, $x=46$

よって, B さんがバスとすれちがったのは, バスが P 地点を出発してから 46 後である。

[問題]

右の図のように，東西にのびるまっすぐな道路上に地点 P と地点 Q がある。太郎さんは地点 Q に向かって, この道路の地点 P より西へ秒速 3m で走っていた。



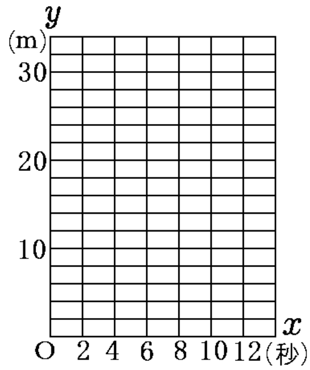
花子さんは地点 P に止まっていたが，太郎さんが地点 P に到着する直前に，この道路を地点 Q に向かって自転車で出発した。花子さんは地点 P を出発してから 8 秒間はしだいに速さを増していき，その後は一定の速さで走行し，地点 P を出発してから 12 秒後に地点 Q に到着した。花子さんが地点 P を出発してから x 秒後の距離を y m とすると， x と y との関係は次の表のようになり，

x(秒)	0	・・・	ア	・・・	8	・・・	10	・・・	12
y(m)	0	・・・	4	・・・	16	・・・	24	・・・	イ

$0 \leqq x \leqq 8$ の範囲では， x と y との関係は $y = ax^2$ で表されるという。次の各問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 表中のア，イにあてはまる数を求めよ。



(3) x の変域が $8 \leqq x \leqq 12$ のとき, x と y との関係を式で表せ。

(4) x と y との関係を表すグラフをかけ。($0 \leqq x \leqq 12$)

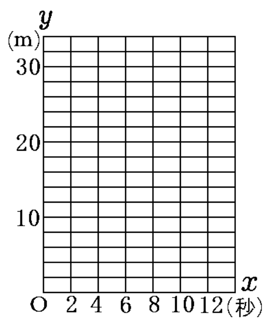
(5) 花子さんは地点 P を出発してから 2 秒後に，太郎さんに追いつかれた。

① 花子さんが地点 P を出発したとき，花子さんと太郎さんの距離は何 m であったか。

② 花子さんは太郎さんに追いつかれ，一度は追い越されたが，その後，太郎さんに追いついた。花子さんが太郎さんに追いついたのは，花子さんが地点 P を出発してから何秒後であったか。

(岐阜県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)ア	イ
(3)	(5)①	②
(4) 		

[ヒント]

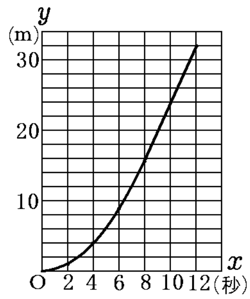
(1) $x=8$, $y=16$ を $y=ax^2$ に代入する。

(3) 8≦x≦12 では，一定の速さで走行しているので，一次関数の式 $y=bx+c$ で表すことができる。表の x, y の値を代入して b, c を求める。

(5) 花子さんが地点 P を出発してから x 秒後の太郎さんの P 地点からの距離(Q 方向が＋)を y m とする。太郎さんは一定の速さ(秒速 3m)で走っているので，y は x の一次関数になり，$y=3x+d$ とおくことができる。

[解答](1) $\dfrac{1}{4}$ (2)ア 4 イ 32 (3) $y=4x-16$ (5)① 5m ② 11 秒後

(4)



[解説]

(1) $x=8$, $y=16$ を $y=ax^2$ に代入すると，$16=a\times 64$, $a=\dfrac{16}{64}=\dfrac{1}{4}$

(2)(3)(4)ア (1)より，0≦x≦8 では $y=\dfrac{1}{4}x^2$ が成り立つ。

$y=4$ を $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に代入すると，$4=\dfrac{1}{4}x^2$, $x^2=16$, $x>0$ なので $x=4$

8≦x≦12 では，一定の速さで走行しているので，一次関数の式 $y=bx+c$ で表すことができる。表より，$x=8$ のとき $y=16$ なので，$16=8b+c$ ･･･①

$x=10$ のとき $y=24$ なので，$24=10b+c$ ･･･② が成り立つ。

②－①より，$8=2b$, $b=4$

$b=4$ を①に代入すると，$16=32+c$, $c=-16$

よって，式は，$y=4x-16$ である。

$x=12$ を $y=4x-16$ に代入すると，$y=48-16=32$ したがって，イは 32

(5)① 花子さんが地点 P を出発してから x 秒後の太郎さんの P 地点からの距離(Q 方向が＋)を y m とする。太郎さんは一定の速さ(秒速 3m)で走っているので，y は x の一次関数になり，$y=3x+d$ とおくことができる。

「花子さんは地点 P を出発してから 2 秒後に，太郎さんに追いつかれた」とある。

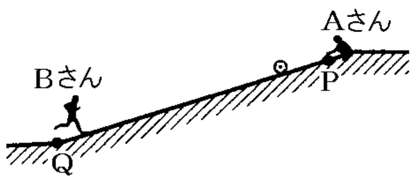
花子さんの 2 秒後の位置は，$x=2$ を $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に代入すると，$y=\dfrac{1}{4}\times 4=1$ である。

したがって，太郎さんも $x=2$ のとき $y=1$ なので，$y=3x+d$ に代入すると，

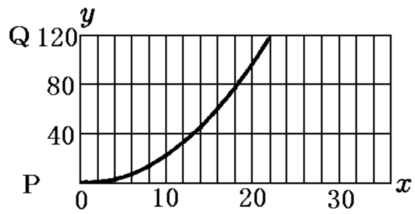
$1=6+d$，$d=-5$　よって，$y=3x-5$
$x=0$ を $y=3x-5$ に代入すると，$y=-5$
したがって,花子さんが地点Pを出発したとき,花子さんと太郎さんの距離は5mであった。
②1) $0\leqq x\leqq 8$ のとき

$y=\frac{1}{4}x^2$ と $y=3x-5$ を連立方程式として解くと，$\frac{1}{4}x^2=3x-5$
$x^2-12x+20=0$，$(x-2)(x-10)=0$，$0\leqq x\leqq 8$ なので，$x=2$
これは，花子さんが太郎さんに追いつかれたときである。
2) $8\leqq x\leqq 12$ のとき
$y=4x-16$ と $y=3x-5$ を連立方程式として解くと，$4x-16=3x-5$，$x=11$
よって，花子さんが太郎さんに追いついたのは，花子さんが地点Pを出発してから11秒後である。

[問題]
　右の図のような,P地点からQ地点までの長さが120mの坂がある。Aさんが，P地点に置いたボールから手をそっと離すと，ボールはQ地点に向かって転がり始め，最初の8秒間で16m進んだ。また，Bさんは，Aさんがボールから手を離して6秒後に,毎秒4mの速さでQ地点からP地点に向かってまっすぐに坂を進み始めた。次の各問いに答えよ。



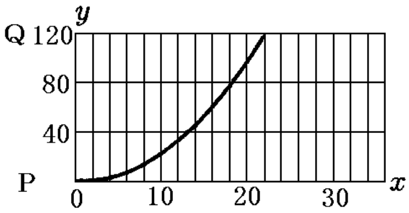
(1) Aさんがボールから手を離して10秒後には，Bさんは何m坂を進んでいるか。
(2) Aさんがボールから手を離して x 秒後のP地点からの距離を y mとして，ボールとBさんが進んだようすを考える。次の①～③の問いに答えよ。
　① ボールが坂を転がるときの時間と距離の関係は,距離が時間の2乗に比例している。ボールが進んだようすについて，y を x の式で表せ。
　② 右の図は，ポールが進んだようすをグラフに表したものである。Bさんが進み始めてからP地点に到達するまでのようすを表すグラフをかき入れよ。



　③ ボールとBさんが出会うのは，Aさんがボールから手を離して何秒後か。
(鹿児島県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)①	③

②


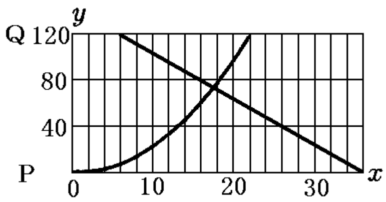
[ヒント]

(2)①「距離が時間の 2 乗に比例している」とあるので，$y=ax^2$ とおくことができる。

② B さんは，毎秒 4m の速さで Q 地点から P 地点に向かって進んでいる。y の方向は P→Q なので，B さんの変化の割合(速さ)は－4 である。そこで，$y=-4x+b$ とおく。B さんは，A さんがボールから手を離して 6 秒後に Q 地点から進み始めたので，$x=6$ のとき，$y=120$ である。これを代入して b の値を求める。

③ ①，②で求めた $y=ax^2$ と $y=-4x+b$ を連立方程式として解く。

[解答](1) 16m　(2)① $y=\frac{1}{4}x^2$　③ $-8+8\sqrt{10}$ (秒後)

②


[解説]

(1) 「B さんは，A さんがボールから手を離して 6 秒後に，毎秒 4m の速さで Q 地点から P 地点に向かってまっすぐに坂を進み始めた」とあるので，4×(10－6)＝16(m)

(2)①「距離が時間の 2 乗に比例している」とあるので，$y=ax^2$ とおくことができる。

「最初の 8 秒間で 16m 進んだ」ので，$x=8$，$y=16$ を $y=ax^2$ に代入して，

$16=64a$，$a=\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$　よって，式は $y=\frac{1}{4}x^2$ になる。

② B さんは，毎秒 4m の速さで Q 地点から P 地点に向かって進んでいる。y の方向は P→Q なので，B さんの変化の割合(速さ)は－4 である。

そこで，$y=-4x+b$ とおく。

B さんは，A さんがボールから手を離して 6 秒後に Q 地点から進み始めたので，

$x=6$ のとき，$y=120$ である。

$x=6$，$y=120$ を $y=-4x+b$ に代入すると，$120=-24+b$，$b=144$

よって，B さんの式は，$y=-4x+144$ になる。

$y=0$ を $y=-4x+144$ に代入すると，$0=-4x+144$，$4x=144$，$x=36$

よって，$y=-4x+144$ のグラフは，(6，120)，(36，0)の 2 点をとって，線分で結べばよい。

③ ボールと B さんが出会うとき，$y=\dfrac{1}{4}x^2$ と $y=-4x+144$ の y が等しくなるので，

$\dfrac{1}{4}x^2=-4x+144$ とおく。$x^2+16x-576=0$

左辺は因数分解できないので解の公式で解くと，

$$x=\frac{-16\pm\sqrt{16^2-4\times1\times(-576)}}{2}=\frac{-16\pm\sqrt{256+2304}}{2}=\frac{-16\pm\sqrt{2560}}{2}=\frac{-16\pm\sqrt{16^2\times10}}{2}$$

$$=\frac{-16\pm16\sqrt{10}}{2}=-8\pm8\sqrt{10}$$

$x>0$ なので，$x=-8+8\sqrt{10}$

したがって，ボールと B さんが出会うのは，A さんがボールから手を離して $-8+8\sqrt{10}$ 秒後である。

【】図形の移動による重なる面積

[問題]

図 1 のように，直角をはさむ 2 辺の長さが 10cm である直角二等辺三角形 ABC と，1 辺の長さが 10cm である正方形 DEFG が直線 l 上にある。図 2 のように，正方形は固定し，△ABC を直線 l にそって矢印の方向に秒速 1cm で移動させる。点 C が点 E の位置にきたときから x 秒後の 2 つの図形が重なってできる部分の面積を y cm² とするとき，次の各問いに答えよ。

図1

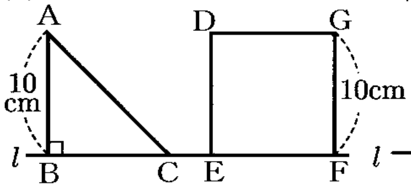
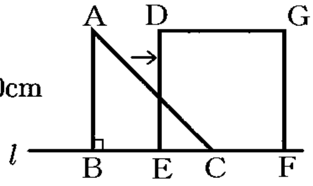


図2



(1) 点 C が点 F まで動くとき，次の①～③に答えよ。

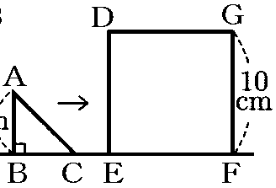
① x の変域を求めよ。

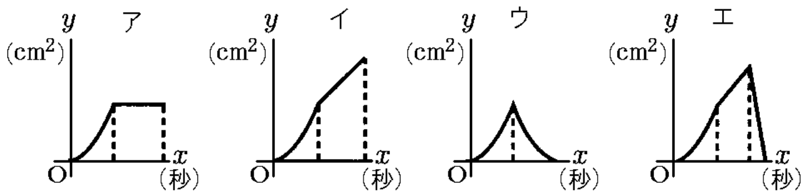
② y を x の式で表せ。

③ 重なる部分の面積が△ABC の面積の半分になるときの x の値を求めよ。

(2) 図 3 は, 図 1 の△ABC の直角をはさむ 2 辺の長さをそれぞれ 5cm に変えたものを表している。点 C が点 E の位置にきたときから点 F まで動くとき，x と y の関係を表したグラフとして適切なものを，次の中から 1 つ選べ。

図3





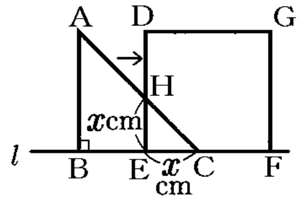
(青森県)(***)

[解答欄]

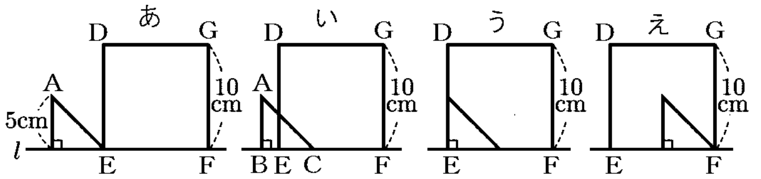
(1)①	②	③
(2)		

[ヒント]

(1) 点Cが点Fまで動くときのときの位置関係は右図のようになっている。x秒後の2つの図形が重なってできる部分は，△CEHである。



(2)



[解答](1)① $0 \leqq x \leqq 10$　② $y=\dfrac{1}{2}x^2$　③ $5\sqrt{2}$　(2) ア

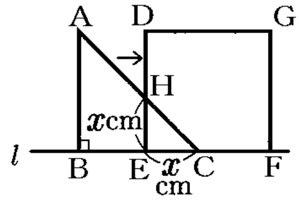
[解説]

(1)①点Cが点Eにあるとき$x=0$で，点Fに来るのは$x=10$なので，

xの変域は$0 \leqq x \leqq 10$ である。

② $0 \leqq x \leqq 10$のときの位置関係は右図のようになっている。

x秒後の2つの図形が重なってできる部分は，△CEHで，その面積yは，$\dfrac{1}{2}\times$CE$\times$HE$=\dfrac{1}{2}\times x\times x=\dfrac{1}{2}x^2$である。よって，$y=\dfrac{1}{2}x^2$



③ (△ABCの面積)$=\dfrac{1}{2}\times10\times10=50$(cm²)なので，$y=\dfrac{1}{2}\times50=25$

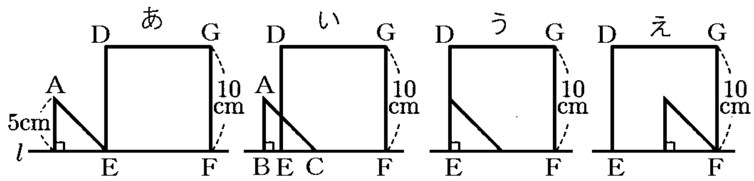
とおくと，

$\dfrac{1}{2}x^2=25$，$x^2=50$，$x>0$なので，$x=\sqrt{50}=\sqrt{25\times2}=5\sqrt{2}$

(2) 右図の「あ」は$x=0$のときである。

「い」は$0 \leqq x \leqq 5$のときで，

重なる部分の面積yは，



$y=\dfrac{1}{2}\times x\times x=\dfrac{1}{2}x^2$である。

「う」は$x=5$，「え」は$x=10$のときで，「う」～「え」のとき，すなわち，$5 \leqq x \leqq 10$のとき，重なる部分の面積は，三角形ABCの面積$\dfrac{1}{2}\times5\times5=\dfrac{25}{2}$(cm²)で一定である。

このとき$y=\dfrac{25}{2}$になる。よって，グラフはアのようになる。

[問題]

平面上において，AB＝4cm，BC＝6cm の長方形 ABCD，FG＝GE＝4cm の直角二等辺三角形 EFG がある。図 1～図 3 のように，長方形 ABCD の辺 BC と，直角二等辺三角形 EFG の辺 FG は直線 l 上にある。図 1 は頂点 C，F が重なっていることを表しており，図 3 は頂点 B，P が重なっていることを表している。直角二等辺三角形 EFG は固定されており，長方形 ABCD は次の《ルール》にしたがって移動する。

《ルール》

長方形 ABCD は，図 1 の状態から動き始め，図 2，図 3 のように直線 l に沿って矢印(→)の方向に毎秒 1cm の速さで移動する。

図1

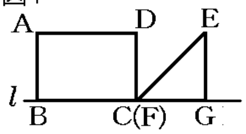


図2

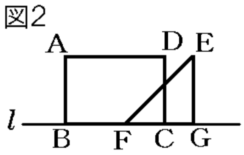
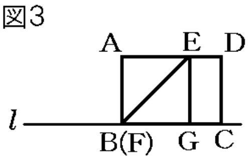
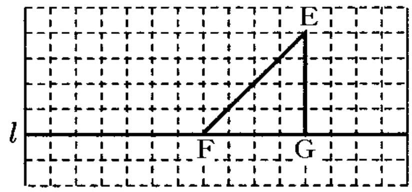


図3



長方形 ABCD が移動を始めてから x 秒後に長方形 ABCD と直角二等辺三角形 EFG が重なってできる部分の面積を y cm² とする。ただし，図 1 のときは y ＝0 とする。次の各問いに答えよ。



(1) x ＝2 のとき，

① 長方形 ABCD をかけ。ただし，長方形 ABCD の内側をぬりつぶさなくてもよい。

② y の値を求めよ。

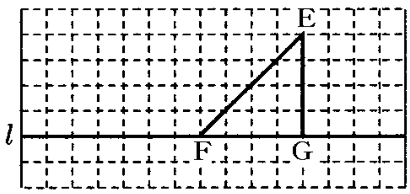
(2) 図 1 から図 3 の状態になるまでの間で， y の値が一定であるときの x の変域を求めよ。

(3) 図 1 から図 3 の状態になるまでの間で， $y=\dfrac{9}{8}$ のときの x の値を求めよ。

(秋田県)(***)

[解答欄]

(1)①

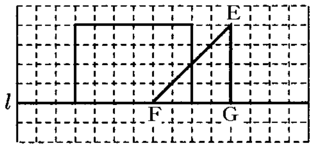


②	(2)	(3)

[ヒント]

$0 \leqq x \leqq 4$ のとき，$y=\frac{1}{2}\times x\times x=\frac{1}{2}x^2$

$4 \leqq x \leqq 6$ のとき，重なる部分は△EFG なので，$y=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$ で y の値は一定である。

[解答](1)① 

② $y=2$ (2) $4 \leqq x \leqq 6$ (3) $x=\frac{3}{2}$

[解説]

(1) $x=2$ のときは，図 2 のような状態である。このときの重なる部分は，2 辺の長さが CF の直角二等辺三角形で，その面積 y は，$y=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$ になる。

(2)(3) $0 \leqq x \leqq 4$ のとき，$y=\frac{1}{2}\times x\times x=\frac{1}{2}x^2$

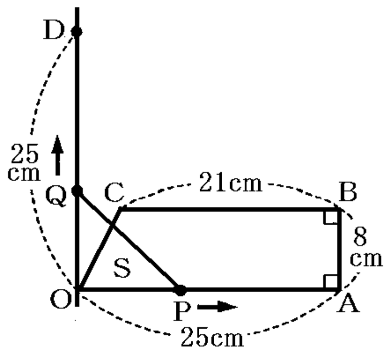
$4 \leqq x \leqq 6$ のとき，重なる部分は△EFG なので，$y=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$ で y の値は一定である。

$y=\frac{9}{8}$ になるのは，$0 \leqq x \leqq 4$ のときである。

$y=\frac{1}{2}x^2$ に $y=\frac{9}{8}$ を代入すると，$\frac{9}{8}=\frac{1}{2}x^2$，$x^2=\frac{9}{4}$，$x>0$ なので，$x=\frac{3}{2}$

[問題]

右の図のような，OA // CB である台形 OABC があり，OA＝25cm，AB＝8cm，BC＝21cm，∠OAB＝∠ABC＝90°である。点 O を通り，線分 OA に垂直な直線をひく。この直線上に，直線 OA について 2 点 B，C と同じ側に OD＝25cm となる点 D をとる。点 P は，点 O を出発して，毎秒 1cm の速さで，線分 OA 上を点 A まで動く点である。点 Q は，点 O を点 P と同時に出発して，OQ＝OP となるように，線分 OD 上を動く点である。2 点 P，Q が点 O を出発してから x 秒後に，台形 OABC を線分 PQ が分けてできる図形のうち，点 O を含む図形を S とするとき，次の各問いに答えよ。



(1) 点 P が点 O を出発してから 25 秒後にできる図形 S の面積は何 cm^2 か。

(2) $0 \leqq x \leqq 12$ の場合について，図形 S の面積は何 cm^2 か。x を使った式で表せ。

(3) $12 \leqq x \leqq 25$ の場合について，図形 S の面積は何 cm^2 か。x を使った式で表せ。

(香川県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[ヒント]

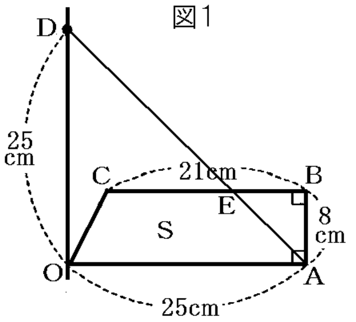


図1

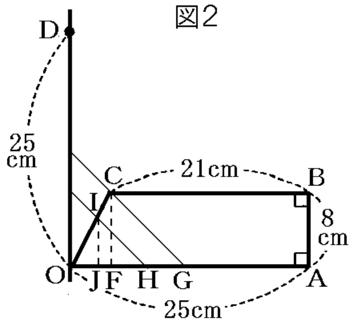


図2

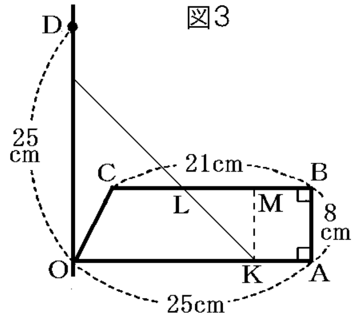


図3

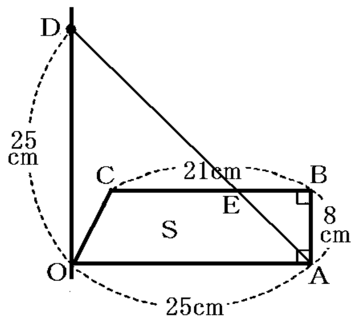
(1) 点 P が点 O を出発してから 25 秒後にできる図形 S は図 1 のようになっている。

(2) 図 2 のように，線分 PQ が点 C を通るとき，OG＝12(cm)である。よって，$0 \leqq x \leqq 12$ の場合の図形 S は図 2 の△IOH のようになっている。

(3) $12 \leqq x \leqq 25$ のとき，図 3 のような状態になる。

[解答](1) 152cm^2　(2) $\frac{1}{3}x^2$(cm^2)　(3) $8x-48$(cm^2)

[解説]



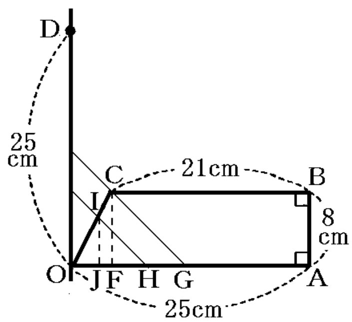
(1) 点 P が点 O を出発してから 25 秒後にできる図形 S は右図のようになっている。

BE＝AB＝8(cm)，CE＝21－BE＝21－8＝13(cm)

S は台形なので，

(S の面積)＝$\frac{1}{2}$×(CE＋OA)×BA＝$\frac{1}{2}\times(13+25)\times 8$

＝152(cm^2)



(2) 線分 PQ が点 C を通るとき，右図で，

OF＝25－21＝4(cm)，FG＝FC＝AB＝8(cm)なので，

OG＝OF＋FG＝4＋8＝12(cm)である。

よって，$0 \leqq x \leqq 12$ の場合の図形 S は右図の△IOH のようになっている。

このとき，OH＝x である。

IJ：CF＝OH：OG

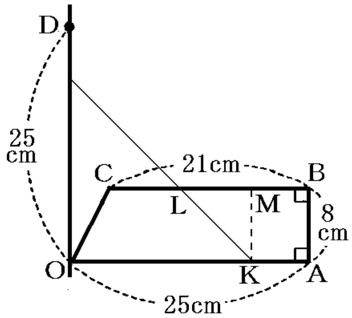
IJ：8＝x：12

$12\mathrm{IJ}=8x$，$\mathrm{IJ}=\dfrac{8}{12}x=\dfrac{2}{3}x$(cm)

よって，(S の面積)$=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{OH}\times\mathrm{IJ}=\dfrac{1}{2}\times x\times\dfrac{2}{3}x=\dfrac{1}{3}x^2$(cm^2)

(3) $12\leqq x\leqq 25$ のとき，右図のような状態になる。

図形 S は右図の台形 COKL である。



$\mathrm{OK}=x$(cm)

$\mathrm{LM}=\mathrm{MK}=8$(cm)

$\mathrm{MB}=\mathrm{KA}=\mathrm{OA}-\mathrm{OK}=25-x$(cm)

$\mathrm{CL}=\mathrm{CB}-\mathrm{LM}-\mathrm{MB}=21-8-(25-x)=x-12$(cm)

(台形 COKL の面積)$=\dfrac{1}{2}\times(\mathrm{CL}+\mathrm{OK})\times\mathrm{BA}=\dfrac{1}{2}(x-12+x)\times 8$

$=4(2x-12)=8x-48$ (cm^2)

【】その他

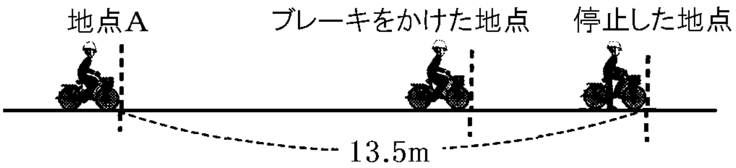
[問題]

自転車に乗っている人がブレーキをかけるとき，ブレーキがきき始めてから自転車が止まるまでに走った距離を制動距離といい，この制動距離は速さの 2 乗に比例することが知られている。太郎さんの乗った自転車が秒速 2m で走るときの制動距離は 0.5m であった。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 太郎さんの乗った自転車が秒速 x m で走るときの制動距離を y m とする。y を x の式で表せ。

(2) x が 5 から 7 まで変化するとき，y の増加量は x の増加量の何倍か求めよ。

(3) 次の図のように，太郎さんの乗った自転車が一定の速さで走っており，地点 A を越えてから 1.5 秒後にブレーキをかけると，自転車は地点 A から 13.5m のところで停止した。このとき，ブレーキをかける直前の自転車の速さは秒速何 m か求めよ。ただし，自転車の大きさについては考えないものとし，ブレーキはかけた直後からきき始めるものとする。



(京都府)(**)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)

[解答](1) $y=\frac{1}{8}x^2$　(2) $\frac{3}{2}$ 倍　(3) 秒速 6m

[解説]

(1) 「制動距離は速さの 2 乗に比例する」ので，$y=ax^2$ とおくことができる。

「秒速 2m で走るときの制動距離は 0.5m であった」とあるので，$x=2$，$y=0.5$ を $y=ax^2$ に代入すると，$0.5=4a$，$1=8a$，$a=\frac{1}{8}$

よって，$y=\frac{1}{8}x^2$

(2) $x=5$ のとき $y=\frac{1}{8}\times 25=\frac{25}{8}$，$x=7$ のとき $y=\frac{1}{8}\times 49=\frac{49}{8}$

(x の増加量)＝$7-5=2$

(y の増加量)＝$\frac{49}{8}-\frac{25}{8}=\frac{24}{8}=3$

(y の増加量)÷(y の増加量)＝3÷2＝$\frac{3}{2}$(倍)

(3) 「地点 A を越えてから 1.5 秒後にブレーキをかける」とあるが，秒速 x m で 1.5 秒間に進んだ距離は， $x \times 1.5 = 1.5x$ (m)である。

秒速 x m のとき，ブレーキをかけてから止まるまでに進む距離は $\frac{1}{8}x^2$ (m)である。

「自転車は地点 A から 13.5m のところで停止した」とあるので，

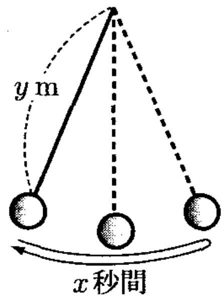
$1.5x + \frac{1}{8}x^2 = 13.5$， $12x + x^2 = 108$， $x^2 + 12x - 108 = 0$， $(x-6)(x+18) = 0$

$x > 0$ なので， $x = 6$

よって，ブレーキをかける直前の自転車の速さは秒速 6m である。

[問題]

　往復するのに x 秒かかる振り子の長さを y m とすると， $y = \frac{1}{4}x^2$ という関係が成り立つものとする。1 往復するのに 2 秒かかる振り子を振り子 A とするとき，次の各問いに答えよ。



(1) 振り子 A の長さを求めよ。

(2) 長さが $\frac{1}{4}$ m の振り子 B は, 振り子 A が 1 往復する間に何往復するか。

(群馬県)(**)

[解答欄]

(1)	(2)

[解答](1) 1m　(2) 2 往復

[解説]

(1) $x = 2$ を $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入すると， $y = \frac{1}{4} \times 4 = 1$

よって，振り子 A の長さは 1m である。

(2) $y = \frac{1}{4}$ を $y = \frac{1}{4}x^2$ に代入すると， $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}x^2$， $x^2 = 1$， $x > 0$ なので $x = 1$

よって，B が 1 往復するのにかかる時間は 1 秒である。

したがって，振り子 B は，振り子 A が 1 往復する間に 2 往復する。

【FdData 入試製品版のご案内】
詳細は，[FdData 入試ホームページ]に掲載（[Shift]＋左クリック→新規ウィンドウ）
姉妹品：[FdData 中間期末ホームページ]（[Shift]＋左クリック→新規ウィンドウ）

◆印刷・編集
この PDF ファイルは，FdData 入試を PDF 形式に変換したサンプルで，印刷はできないように設定しております。製品版の FdData 入試は Windows パソコン用のマイクロソフト Word(Office)の文書ファイルで，印刷・編集を自由に行うことができます。

◆FdData 入試の特徴
FdData 入試は，公立高校入試問題の全傾向を網羅することを基本方針に編集したワープロデータ(Word 文書)です。 入試理科・社会・数学ともに，過去に出題された公立高校入試の問題をいったんばらばらに分解して，細かい単元ごとに再編集して作成しております。

◆サンプル版と製品版の違い
ホームページ上に掲載しておりますサンプルは，製品の Word 文書を PDF ファイルに変換したもので印刷や編集はできませんが，製品の全内容を掲載しており，どなたでも自由に閲覧できます。問題を「目で解く」だけでもある程度の効果をあげることができます。
しかし，FdData 入試がその本来の力を発揮するのは印刷や編集ができる製品版においてです。また，製品版は，すぐ印刷して使える「問題解答分離形式」，編集に適した「問題解答一体形式」，などの形式を含んでいますので，目的に応じて活用することができます。
※FdData 入試の特徴(QandA 方式)（[Shift]＋左クリック→新規ウィンドウ）

◆FdData 入試製品版(Word 版)の価格(消費税込み)
※以下のリンクは[Shift]キーをおしながら左クリックすると，新規ウィンドウが開きます
数学 1 年(4400 円)，数学 2 年(6400 円)，数学 3 年(9600 円)：(統合版は 16,200 円)
理科 1 年(6800 円)，理科 2 年(6800 円)，理科 3 年(6800 円)：(統合版は 16,200 円)
社会地理(6800 円)，社会歴史(6800 円)，社会公民(6800 円)：(統合版は 16,200 円)
※Windows パソコンにマイクロソフト Word がインストールされていることが必要です。
(Mac の場合はお電話でお問い合わせください)。

◆ご注文は，メール(info2@fdtext.com)，または電話(092-811-0960)で承っております。
※注文→インストール→編集･印刷の流れ （[Shift]＋左クリック）
※注文メール記入例 （[Shift]＋左クリック）

【Fd 教材開発】 Mail： info2@fdtext.com Tel ：092-811-0960