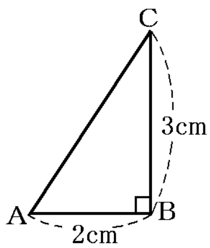
【FdData 高校入試：中学数学 3 年：三平方と平面図形】

[三平方の定理／特殊な直角三角形／座標／三平方の定理の逆／三平方と円／折り返し／1 つの辺を x とおく／その他／三平方と相似：長さ直角三角形／長さ：その他／面積：高さが共通・底辺比→面積比／面積：その他／辺の比→相似の証明／三平方と円と相似／FdData 入試製品版のご案内]

[FdData 入試ホームページ]掲載の pdf ファイル(サンプル)一覧]
※次のリンクは[Shift]キーをおしながら左クリックすると，新規ウィンドウが開きます
数学：[数学 1 年]，[数学 2 年]，[数学 3 年]
理科：[理科 1 年]，[理科 2 年]，[理科 3 年]
社会：[社会地理]，[社会歴史]，[社会公民]
※全内容を掲載しておりますが，印刷はできないように設定しております

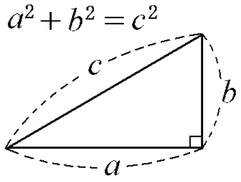
【】基本
【】三平方の定理
[三平方の定理]
[問題]
右の図のような，AB＝2cm，BC＝3cm，∠ABC＝90° の直角三角形 ABC がある。このとき，辺 AC の長さを求めよ。
(岡山県)(*)




[解答欄]

[ヒント]
三平方の定理(ピタゴラスの定理)

$a^2+b^2=c^2$

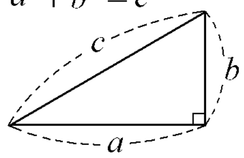



[解答] $\sqrt{13}$ cm

[解説]

<Point> 三平方の定理(ピタゴラスの定理)

$a^2+b^2=c^2$



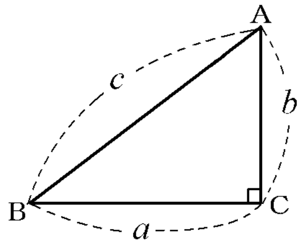

三平方の定理より，

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

AC＞0 だから，AC＝$\sqrt{13}$(cm)

[問題]

右の図のように，∠ACB＝90° の直角三角形 ABC があり，BC＝$a$，CA＝$b$，AB＝$c$ とする。この直角三角形の 3 辺の長さの間に成り立つ三平方の定理を，$a$, $b$. $c$ を使って式で表せ。



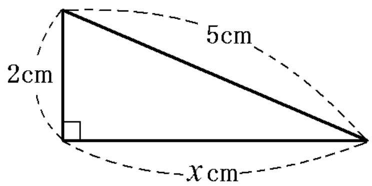

(長崎県)(*)

[解答欄]

[解答] $c^2 = a^2 + b^2$

[問題]

次の図の直角三角形において，$x$ の値を求めよ。




(栃木県)(*)

[解答欄]

[解答] $\sqrt{21}$

[解説]

三平方の定理より，$5^2 = x^2 + 2^2$，$x^2 = 25 - 4 = 21$

$x > 0$ だから，$x = \sqrt{21}$

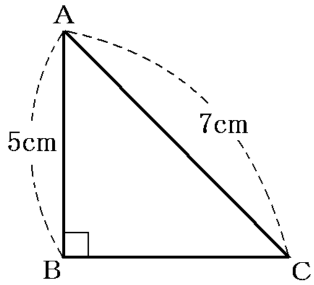
(別解)

三平方の定理より， $x=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$

＊これ以降の問題では，このように$\sqrt{\ }$を使って簡潔に計算する。

[問題]

右の図のような，∠ABC＝90°である直角三角形 ABC について，AB＝5cm，AC＝7cm のとき，△ABC の面積を求めよ。




(佐賀県)(*)

[解答欄]

[解答] $5\sqrt{6}$ cm²

[解説]

底辺を BC とすると，高さは AB＝5cm である。

BC の長さがわかれば，面積が計算できる。

三平方の定理より，

BC＝$\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{7^2-5^2}=\sqrt{49-25}=\sqrt{24}=\sqrt{4\times 6}=2\sqrt{6}$ (cm)

よって，(△ABC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×BC×AB＝$\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times 5=5\sqrt{6}$ (cm²)

[問題]

直角三角形 ABC で，辺 AB の長さは，辺 BC の長さより 2cm 長く，辺 BC の長さは辺 CA の長さより 7cm 長い。このとき，直角三角形 ABC の斜辺の長さを求めよ。

(秋田県)(**)

[解答欄]

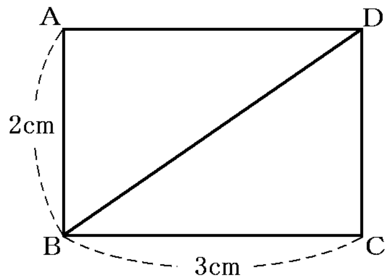
[ヒント]

辺 AB＞辺 BC，辺 BC＞辺 CA より，辺 AB＞辺 BC＞辺 CA なので，直角三角形 ABC の斜辺は辺 AB である。

[解答]17cm

[解説]
辺 AB＞辺 BC，辺 BC＞辺 CA より，辺 AB＞辺 BC＞辺 CA なので，直角三角形 ABC の斜辺は辺 AB である。
したがって，三平方の定理より，(辺 BC)²＋(辺 CA)²＝(辺 AB)²・・・①が成り立つ。
(辺 CA)＝$x$(cm)とおくと，「辺 BC の長さは辺 CA の長さより 7cm 長い」ので，
(辺 BC)＝$x+7$(cm)
また，「辺 AB の長さは，辺 BC の長さより 2cm 長い」ので，
(辺 AB)＝(辺 BC)＋2＝$x+7+2=x+9$(cm)
①より，$(x+7)^2+x^2=(x+9)^2$
$x^2+14x+49+x^2=x^2+18x+81$，$x^2-4x-32=0$，$(x+4)(x-8)=0$
$x>0$ なので，$x=8$
よって，(斜辺)＝$x+9=8+9=17$(cm)

[対角線]
[問題]
　右の図のように，AB＝2cm，BC＝3cm の長方形 ABCD がある。この長方形の対角線 BD の長さを求めよ。
(北海道)(*)




[解答欄]

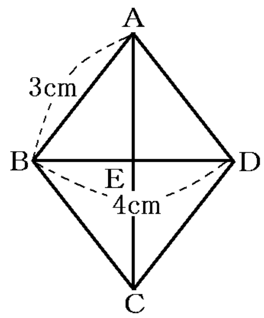
[解答]$\sqrt{13}$ cm

[解説]
△ABD は直角三角形で，AB＝2cm，AD＝BC＝3cm だから，三平方の定理より，

BD＝$\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$(cm)

[問題]

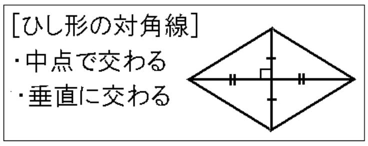
右の図はひし形 ABCD である。AB＝3cm，BD＝4cm のとき，対角線 AC の長さを求めよ。




(埼玉県)(**)

[解答欄]

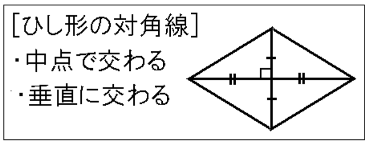
[ヒント]

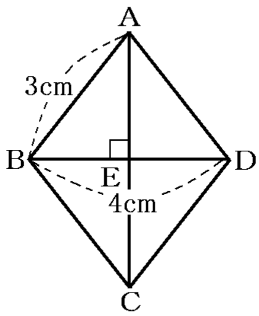



[解答] $2\sqrt{5}$ cm

[解説]

中 2 数学で習ったように，ひし形は平行四辺形の一種なので対角線は互いに中点で交わる。さらに，ひし形の対角線は垂直に交わる。



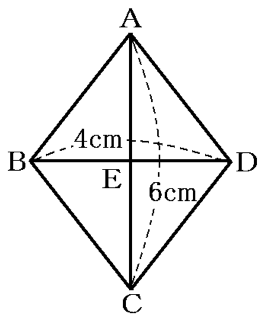

したがって，△ABE は直角三角形で，BE＝BD÷2＝4÷2＝2(cm)である。三平方の定理より，

AE＝$\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ (cm)

E は AC の中点なので，AC＝AE×2＝$\sqrt{5}$×2＝$2\sqrt{5}$ (cm)

[問題]

右の図のように 2 つの対角線の長さが 4cm，6cm のひし形 ABCD がある。このひし形の 1 辺の長さを求めよ。




(山口県)(**)

[解答欄]

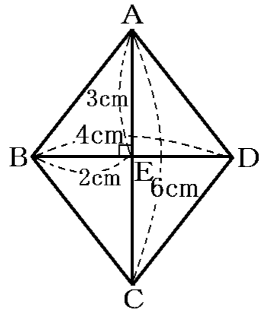
[ヒント]

△ABE は直角三角形になる。

[解答] $\sqrt{13}$ cm

[解説]

四角形 ABCD はひし形なので, 対角線は互いに中点で垂直に交わる。




したがって，△ABE は直角三角形で,

AE＝6(cm)÷2＝3(cm)

BE＝4(cm)÷2＝2(cm)となる。

三平方の定理より,

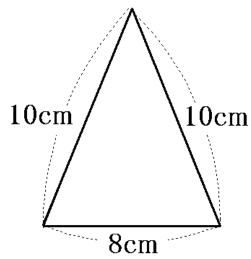
AB＝$\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$ (cm)

ひし形は，4 辺がすべて等しい四角形なので，このひし形の 1 辺は $\sqrt{13}$ cm である。

[二等辺三角形の面積]

[問題]

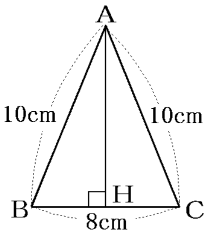
右の二等辺三角形の面積を求めよ。




(補充問題)(**)

[解答欄]

[ヒント]

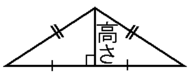



[解答] $8\sqrt{21}$ cm²

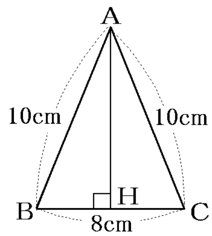
[解説]

<Point> 頂点から底辺へ垂線を引く

→高さを求める




右図の△ABC で，頂点 A から BC に垂線 AH を引く。




△ABC は AB＝BC の二等辺三角形なので，H は BC の中点になる。

よって，BH＝8÷2＝4(cm)

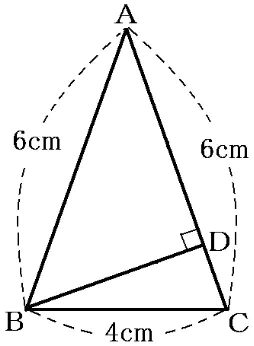
直角三角形 ABH で，三平方の定理より,

AH＝$\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{10^2-4^2}=\sqrt{100-16}=\sqrt{84}=\sqrt{4\times 21}=2\sqrt{21}$ (cm)

(△ABC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$ ×BC×AH＝$\dfrac{1}{2}\times 8\times 2\sqrt{21}=8\sqrt{21}$ (cm²)

[問題]

　右の図で，三角形 ABC は AB＝AC＝6cm，BC＝4cm の二等辺三角形である。次の各問いに答えよ。




(1)  △ABC の面積を求めよ。

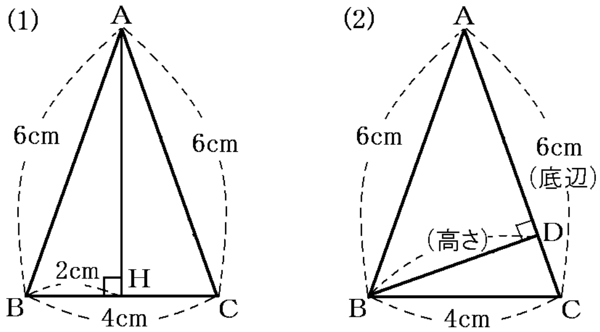
(2)  AC 上に D を，AC⊥BD となるようにとる。このとき，線分 BD の長さを求めよ。

(秋田県改)(**)

[解答欄]

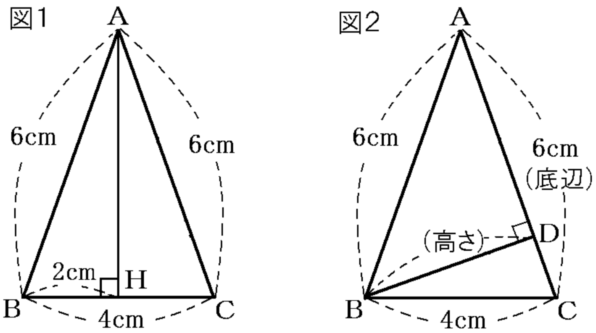
| (1) | (2) |
|---|---|

[ヒント]




[解答](1)  $8\sqrt{2}$ cm²　(2)  $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ cm

[解説]




(1)  二等辺三角形は 3 辺の長さがわかれば，面積を計算できる。上の図 1 のように，点 A から底辺 BC に垂線 AH をひくと，点 H は BC の中点になる。

よって，BH＝4÷2＝2(cm)である。

△ABH は直角三角形なので，三平方の定理より，

AH＝$\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{6^2-2^2}=\sqrt{36-4}=\sqrt{32}=\sqrt{16\times 2}=4\sqrt{2}$ (cm)

BC を底辺とすると，高さは AH なので，

(△ABC の面積)＝$\frac{1}{2}$×BC×AH＝$\frac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$(cm$^2$)

(2) 図 2 のように，AC を底辺とすると，高さは BD になるので，

(△ABC の面積)＝$\frac{1}{2}$×AC×BD＝$\frac{1}{2}$×6×BD＝3BD(cm$^2$)と表すことができる。

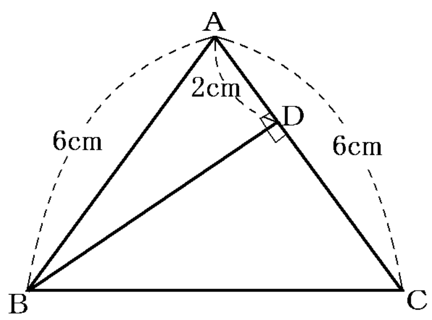
(1)より，(△ABC の面積)＝$8\sqrt{2}$(cm$^2$)なので，

3BD＝$8\sqrt{2}$　よって，BD＝$\frac{8\sqrt{2}}{3}$(cm)

[その他]

[問題]

　右の図のような，∠BAC が鋭角で，AB＝AC＝6cm である二等辺三角形 ABC がある。頂点 B から辺 AC に垂線 BD をひくと，AD＝2cm となった。このとき，BC の長さを求めよ。




(栃木県)(**)

[解答欄]

| |
|---|
| |

[ヒント]

まず BD の長さを求める。

[解答] $4\sqrt{3}$ cm

[解説]

△ABD は直角三角形なので，三平方の定理より，

BD＝$\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{6^2-2^2}=\sqrt{36-4}=\sqrt{32}=\sqrt{16\times 2}=4\sqrt{2}$ (cm)

△BCD は直角三角形なので，三平方の定理より，

BC＝$\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{32+(6-2)^2}=\sqrt{32+16}=\sqrt{48}=\sqrt{16\times 3}=4\sqrt{3}$ (cm)

[問題]

図 1 は，AB＝2cm，BC＝1cm の長方形 ABCD を，点 C を固定して右にたおしたようすである。長方形の頂点 A，B，D はそれぞれ頂点 A’，B’，D’に移るものとする。このとき，次の各問いに答えよ。

図1

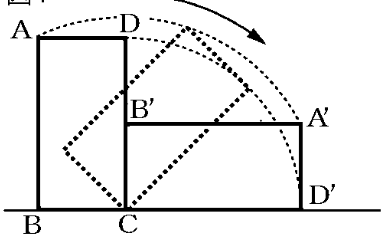
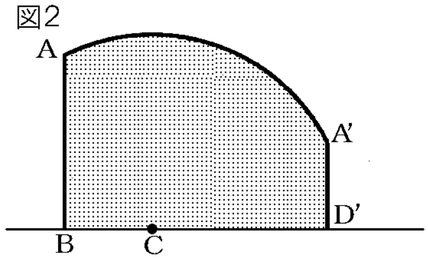



図2




(1) 長方形 ABCD の対角線の長さを求めよ。

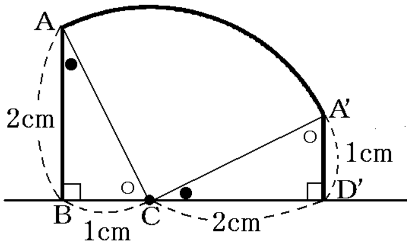
(2) 図 2 の の部分は，図 1 において長方形 ABCD が通過した部分を表している。 の部分の面積を求めよ。ただし，円周率は π とする。

(沖縄県)(**)

[解答欄]

| | |
|---|---|
| (1) | (2) |

[ヒント]

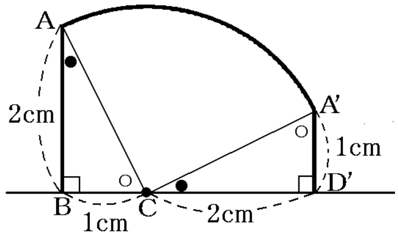



[解答](1) $\sqrt{5}$ cm　(2) $2+\dfrac{5}{4}\pi$ (cm²)

[解説]

(1) 右図の直角三角形 ACB で，三平方の定理より，

AC＝$\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$ (cm)




(2) (△ACB の面積)＝(△A’CD’の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times1\times2$ ＝1(cm²)

右図で，(●の角)＋(○の角)＝90°なので，中心角 ACA’は 180°－90°＝90°になる。

よって，(おうぎ形の面積)＝π×AC²×$\dfrac{90}{360}=\pi\times\left(\sqrt{5}\right)^2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}\pi$ (cm²)

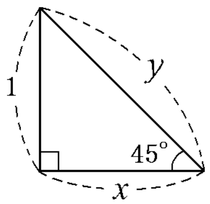
したがって，求める面積は，$1\times2+\dfrac{5}{4}\pi=2+\dfrac{5}{4}\pi$ (cm²)である。

【】特殊な直角三角形

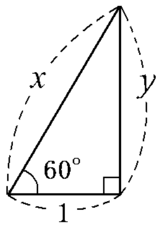
[問題]

次の $x$ $y$ を求めよ。

(1)




(2)

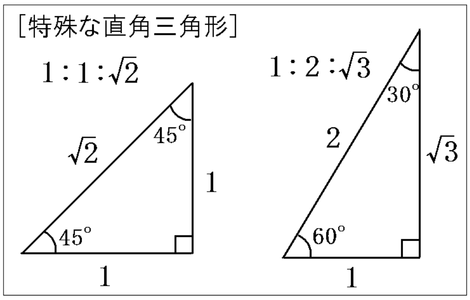



(補充問題)(*)

[解答欄]

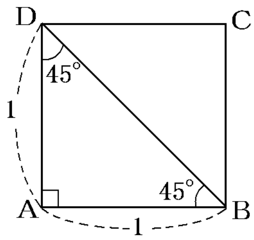
| | | |
|---|---|---|
| (1) $x=$ | $y=$ | (2) $x=$ |
| $y=$ | | |

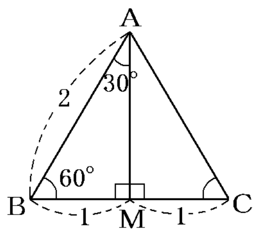
[ヒント]




[解答](1) $x=1$, $y=\sqrt{2}$　(2) $x=2$, $y=\sqrt{3}$

[解説]




(1) 右図のように, 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD があったとする。このとき,

BD$=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$　である。

一般に,　45°　45°　90°　の直角三角形の

3 辺の比は,　$1:1:\sqrt{2}$　となる。

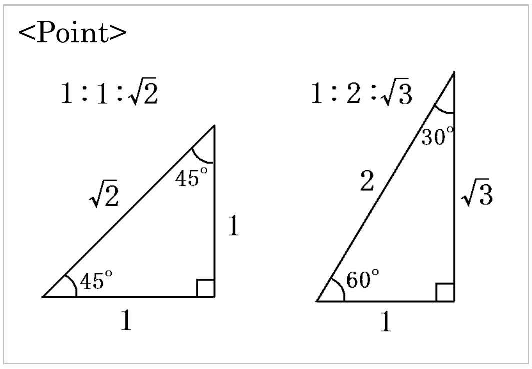
(2) 右上図のように, 1 辺の長さが 2 の正三角形があったとする。頂点 A から辺 BC に垂線 AM をひくと, M は BC の中点となる。

したがって, BM＝1 となる。

このとき, AM$=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$　となる。

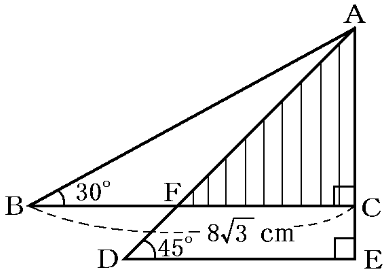
一般に, 30°　90°　60°　の直角三角形の 3 辺の比は,

$1:2:\sqrt{3}$　となる。



[問題]

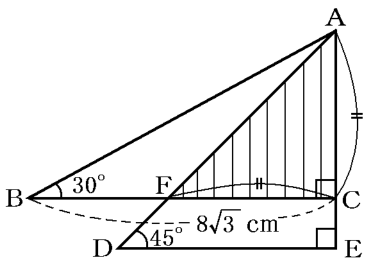
　数学の授業で三角定規を組み合わせて問題づくりをした。太郎君は，右の図のように1組の三角定規を重ねた。の部分の面積を求めよ。




(青森県)(**)

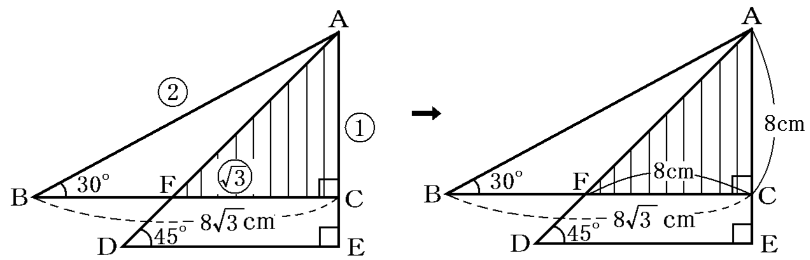
[解答欄]

[ヒント]




[解答]32cm²

[解説]




△ABC は 30°　90°　60°　の直角三角形なので，AC：AB：BC＝1：2：$\sqrt{3}$

BC＝$8\sqrt{3}$ cm なので，AC＝$8\sqrt{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=8$(cm)

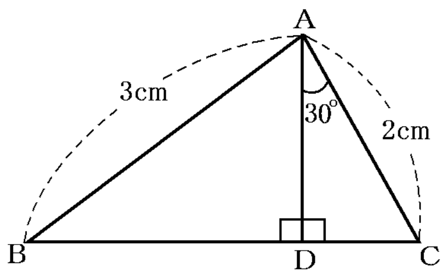
△AFC は 45°　45°　90°　の直角二等辺三角形なので，FC＝AC＝8(cm)

よって，(△AFC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×FC×AC＝$\dfrac{1}{2}\times8\times8=32$(cm²)

[問題]

　右の図のように，△ABC の辺 BC 上に点 D があり，∠CAD＝30°，AD⊥BC である。AB＝3cm，AC＝2cm のとき，辺 BC の長さは何 cm か。

(広島県)(**)



[解答欄]

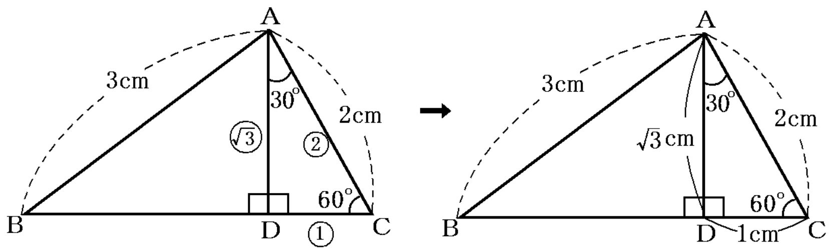
[ヒント]

△ACD は 30° 90° 60° の直角三角形→CD，AD の長さを求める。

直角三角形 ABD で BD を求める。

[解答]$1+\sqrt{6}$ (cm)

[解説]




△ACD は 30° 90° 60° の直角三角形なので，

CD：AC：AD＝1：2：$\sqrt{3}$

AC＝2cm なので，CD＝1cm，AD＝$\sqrt{3}$ cm

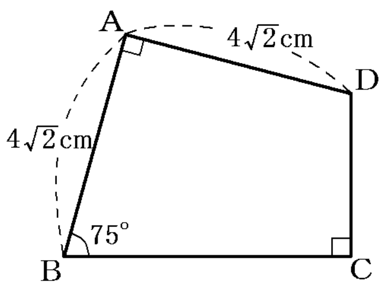
次に，直角三角形 ABD で，三平方の定理より，

BD＝$\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}$ (cm)

よって，BC＝CD＋BD＝$1+\sqrt{6}$ (cm)

[問題]

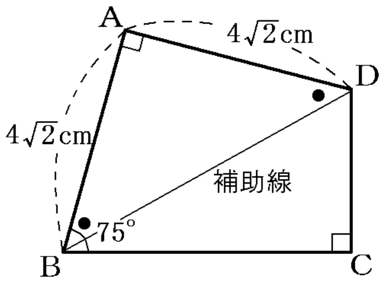
次の図で，辺 BC の長さを求めよ。




(青森県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

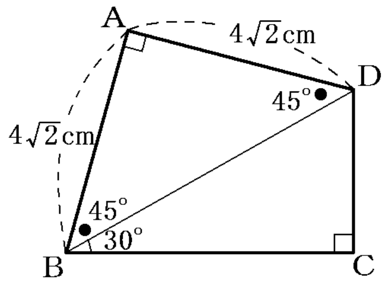



[解答] $4\sqrt{3}$ cm

[解説]

| <Point> 75° を分割するように補助線を引く |
|---|

BD を結んで 75° を分割する。




AB＝AD，∠BAD＝90° なので，△ABD は直角二等辺三角形で，∠ABD＝∠ADB＝45° になり，

△ABD の 3 辺は 1：1：$\sqrt{2}$ になる。

したがって，BD：AB＝$\sqrt{2}$ ：1 で，

BD＝AB×$\sqrt{2}$ ＝$4\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ ＝8(cm)になる。

また，∠DBC＝75° −45° ＝30° なので，

△DBC は 30° 60° 90° の直角三角形で，3 辺の比は 1：2：$\sqrt{3}$ になる。

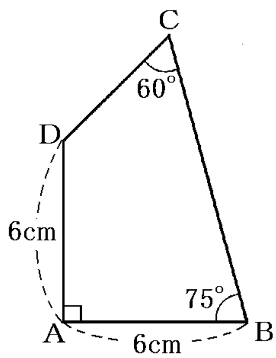
よって，BD：BC＝2：$\sqrt{3}$

BD＝8(cm)なので，8：BC＝2：$\sqrt{3}$，2BC＝$8\sqrt{3}$，

BC＝$8\sqrt{3}$ ÷2＝$4\sqrt{3}$ (cm)

[問題]

右の図の四角形 ABCD で，∠A＝90° ，∠B＝75° ，∠C＝60° である。AB＝AD＝6cm のとき，四角形 ABCD の面積を求めよ。




(長野県)

[解答欄]

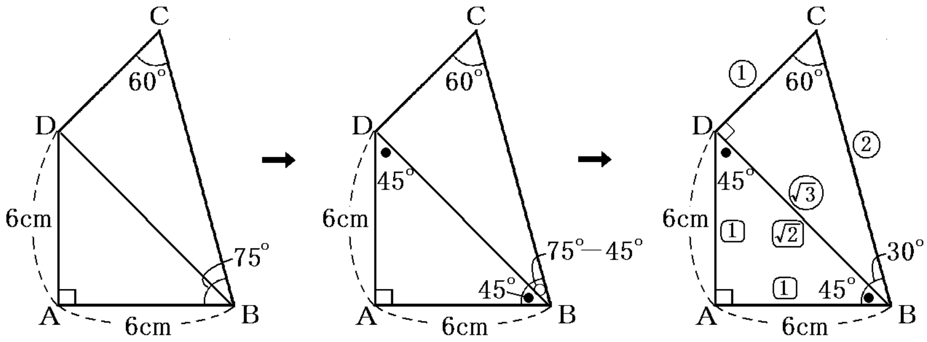
| |
|---|
| |

[ヒント]

BD を結んで 75° を分割。

[解答] $18+12\sqrt{3}$ (cm²)

[解説]




BD を結んで 2 つの三角形に分ける。

仮定より AB＝AD なので，△BDA は直角二等辺三角形になり，

∠DBA＝∠BDA＝45°になる。

△BCD で，∠CBD＝75°−45°＝30°と計算できる。

→△BCD は 90° 60° 30°の直角三角形になることがわかる。

△BDA は 90° 45° 45°の直角三角形なので，AB：AD：BD＝1：1：$\sqrt{2}$

AB＝AD＝6cm なので，BD＝$6\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$ (cm)

次に，△BCD は 90° 60° 30°の直角三角形なので，CD：BC：BD＝1：2：$\sqrt{3}$

よって，CD＝BD×$\dfrac{1}{\sqrt{3}}=6\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{6}}{3}=2\sqrt{6}$ (cm)

(四角形 ABCD の面積)＝(△BDA の面積)＋(△BCD の面積)

$$=\frac{1}{2}\times AB\times AD+\frac{1}{2}\times BD\times CD$$

$$=\frac{1}{2}\times6\times6+\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times2\sqrt{6}=18+6\sqrt{12}=18+6\sqrt{4\times3}=18+12\sqrt{3}\ (\mathrm{cm}^2)$$

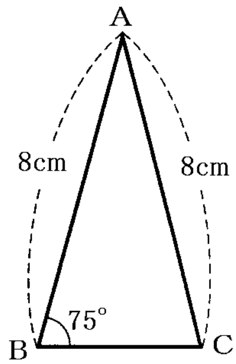
[問題]

右の図の△ABC は，AB＝AC＝8cm，∠B＝75°である。

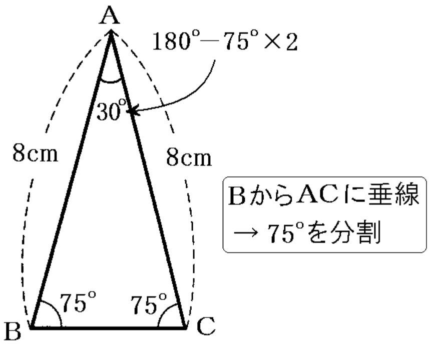
△ABC の面積を求めよ。

(青森県)

[解答欄]

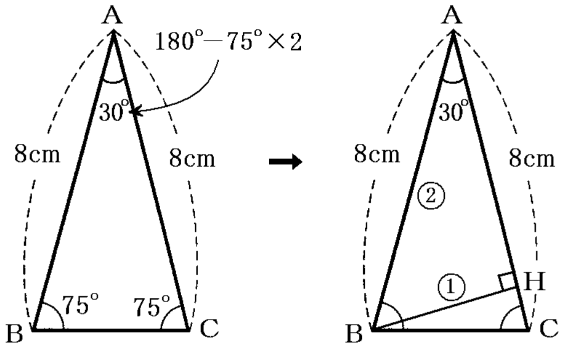


[ヒント]




[解答]16cm²

[解説]




75° は辺の比がわかる特殊な角(30° 60° 45° )ではないので，A から BC に垂線をおろしても，うまくいかない。

そこで，∠A を計算すると，180° −75° ×2＝30° となる。

B から辺 AC に垂線 BH をひいて，直角三角形 ABH をつくる。

△ABH は， 90° 60° 30° の直角三角形になるので，BH : AB : AH＝1 : 2 : $\sqrt{3}$

AB＝8cm なので，BH＝$8\times\frac{1}{2}=4$(cm)

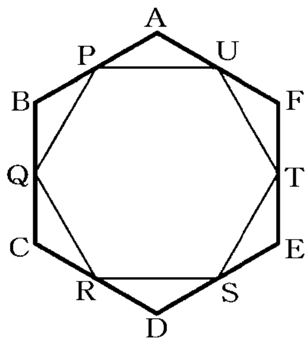
(△ABC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 AC)×(高さ BH)＝$\frac{1}{2}$×8×4＝16(cm²)

[問題]

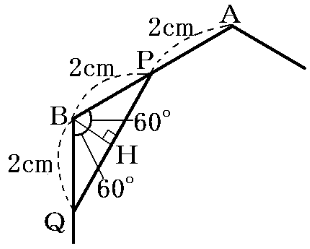
右の図のように，正六角形 ABCDEF の各辺の中点を結んだ正六角形 PQRSTU がある。AB＝4cm のとき，辺 PQ の長さを求めよ。

(北海道)(***)

[解答欄]

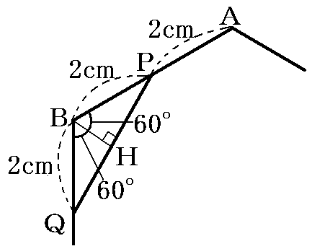


[ヒント]




[解答] $2\sqrt{3}$ cm

[解説]




右図は，この正六角形の一部を表している。

B から PQ に垂線 BH を引くと，PH＝QH である。

正六角形の 1 つの内角は，180°×(6－2)÷6＝120° である

(正六角形は 6－2＝4 つの三角形に分けられるので, 内角の和は 180°×4＝720° になり，1 つの内角は 720°÷6＝120° になる)。

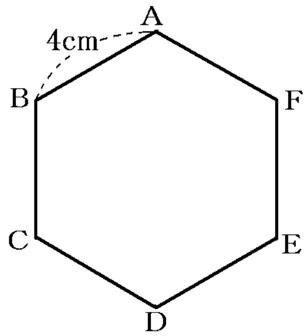
よって，∠PBQ＝120° で，∠PBH＝120°÷2＝60° になる。

したがって，△PBH は 30° 90° 60° の直角三角形になるので，3 辺の比は,

BH：PB：PH＝1：2：$\sqrt{3}$ で，PB＝2cm なので，PH＝$\sqrt{3}$ cm となる。

したがって，PQ＝PH×2＝$\sqrt{3}\times 2 = 2\sqrt{3}$ (cm)となる。

[問題]

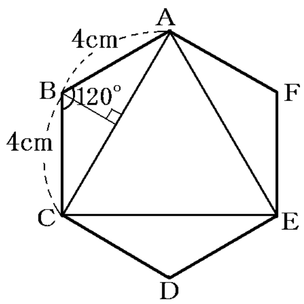



右の図のように，1 辺が 4cm の正六角形 ABCDEF がある。正六角形 ABCDEF の頂点 A，C，E を結んでできる三角形の面積を求めよ。

(北海道)(***)

[解答欄]

[ヒント]




[解答] $12\sqrt{3}$ cm²

[解説]

図1

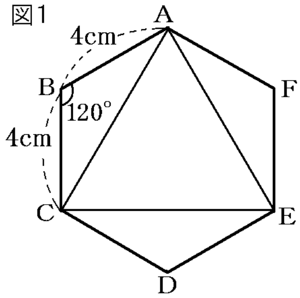



図2

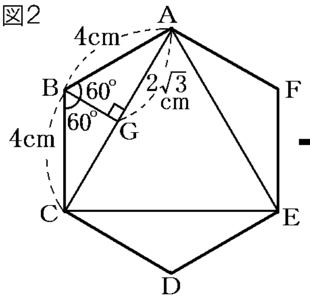



図3

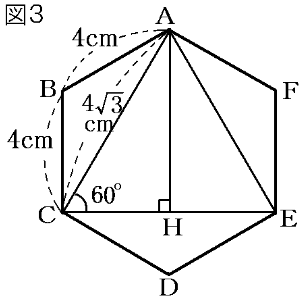



図 1 のように，頂点 A，C，E を結ぶ。△ABC，△CDE，△EFA は，すべて，2 辺が 4cm でその間の角が 120°の合同な三角形になる。したがって，△ACE は正三角形になる。正三角形の面積は 1 辺の長さがわかれば計算できる。

そこで，図 2 のように頂点 B から AC に垂線 BG をおろす。BG は∠ABC の二等分線になるので，∠ABG＝120°÷2＝60°である。したがって，△ABG は 30° 90° 60°の直角三角形になるので，3 辺の比は，BG : AB : AG＝1 : 2 : $\sqrt{3}$ になる。

AB＝4cm なので AG＝ $4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ (cm)になり，AC＝ $2\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$ (cm)になる。

図 3 で，正三角形 ACE の頂点 A から CE に垂線 AH をおろすと，△ACH は 30° 90° 60°の直角三角形になり，3 辺の比は，CH : AC : AH＝1 : 2 : $\sqrt{3}$ になる。

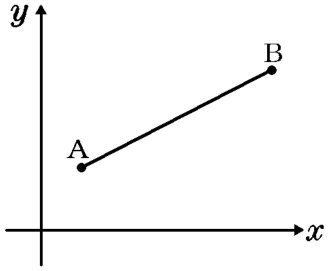
AC＝ $4\sqrt{3}$ (cm)なので，AH＝ $4\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6$ (cm)になる。CE＝AC＝ $4\sqrt{3}$ cm なので，

(△ACE の面積)＝ $\dfrac{1}{2}$ ×CE×AH＝ $\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times6=12\sqrt{3}$ (cm²)

【】座標

[問題]

右の図の 2 点 A(1，2)，B(7，5)間の距離を求めよ。




(栃木県)(*)

[解答欄]

[ヒント]

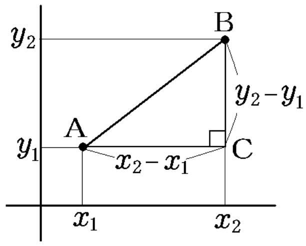
座標上の 2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$の距離は，

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

[解答] $3\sqrt{5}$

[解説]

右図のように，座標上の 2 点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$がある。




このとき，AC＝ $x_2-x_1$，BC＝ $y_2-y_1$

△ABC は直角三角形なので，三平方の定理より，

$AB^2=AC^2+BC^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

よって，$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

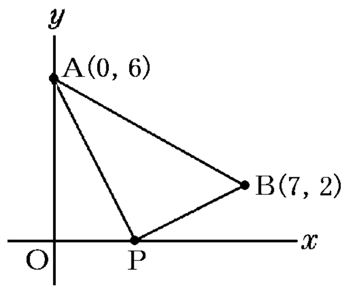
この問題では，A(1，2)，B(7，5)なので，

$$AB=\sqrt{(7-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=3\sqrt{5}$$

※$AB=\sqrt{(1-7)^2+(2-5)^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=3\sqrt{5}$ でもよい。

[問題]

右の図のように，$x$ 軸上の点 P と 2 点 A(0，6)，B(7，2)を結んで△ABP をつくる。このとき，△ABP が，∠APB＝90°の直角三角形となるような点 P の $x$ 座標をすべて求めよ。ただし，点 P の $x$ 座標は正とする。




(三重県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

点 P の座標を($a$，0)とおく。

△ABP が∠APB＝90°の直角三角形となることより，$AP^2+BP^2=AB^2$

[解答]3，4

[解説]

点Pの座標を$(a, 0)$とおく。

△ABPが∠APB＝90°の直角三角形となることより，$AP^2+BP^2=AB^2$

$AP^2=(a-0)^2+(0-6)^2=a^2+36$

$BP^2=(a-7)^2+(0-2)^2=a^2-14a+49+4=a^2-14a+53$

$AB^2=(7-0)^2+(2-6)^2=49+16=65$

よって，$a^2+36+a^2-14a+53=65$

$2a^2-14a+24=0,\ a^2-7a+12=0,\ (a-3)(a-4)=0$

よって，$a=3,\ 4$

【】三平方の定理の逆

[問題]

次の長さを 3 辺とする三角形のうち，直角三角形を，ア～オから 2 つ選べ。

ア　2cm，7cm，8cm

イ　3cm，4cm，5cm

ウ　3cm，5cm，$\sqrt{30}$ cm

エ　$\sqrt{2}$ cm，$\sqrt{3}$ cm，3cm

オ　$\sqrt{3}$ cm，$\sqrt{7}$ cm，$\sqrt{10}$ cm

(北海道)(*)

[解答欄]

| |
|---|
| |

[解答]イ，オ

[ヒント]

(1 番長い辺)$^2$＝(他の 1 辺)$^2$＋(他の 1 辺)$^2$ が成り立つとき直角三角形になる。

[解説]

| <Point>(1 番長い辺)$^2$＝(他の 1 辺)$^2$＋(他の 1 辺)$^2$ が成り立つとき直角三角形になる |
|---|

ア　$8^2 \neq 2^2 + 7^2$ なので直角三角形ではない。

イ　$5^2 = 3^2 + 4^2$ なので直角三角形である。

ウ　$\left(\sqrt{30}\right)^2 \neq 3^2 + 5^2$ なので直角三角形ではない。

エ　$3^2 \neq \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$ なので直角三角形ではない。

オ　$\left(\sqrt{10}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2$ なので直角三角形である。

[問題]

3 辺の長さが 2cm，3cm，$\sqrt{13}$ cm である三角形が直角三角形になる理由を，言葉や数，式を用いて説明せよ。

(福井県)(*)

[解答欄]

| |
|---|
| |

[解答]$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$，$\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$ なので，$2^2 + 3^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2$ という関係が成り立つから。

[問題]

2 辺の長さが 5cm，7cm の直角三角形がある。残りの 1 辺の長さとして考えられるものをすべて求めよ。

(福井県)(*)

[解答欄]

[ヒント]

残りの 1 辺の長さを $x$ cm とする。

$x$ が一番長い辺であるときと，7 が一番長い辺であるときの 2 通りに分けて考える。

[解答] $2\sqrt{6}$ cm，$\sqrt{74}$ cm

[解説]

残りの 1 辺の長さを $x$ cm とする。

$x>7$ のとき($x$ が一番長い辺であるとき)，

$x^2=5^2+7^2=25+49=74$，$x=\sqrt{74}$

$7>x$ のとき(7 が一番長い辺であるとき)，

$7^2=x^2+5^2$，$x^2=49-25=24$，$x=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

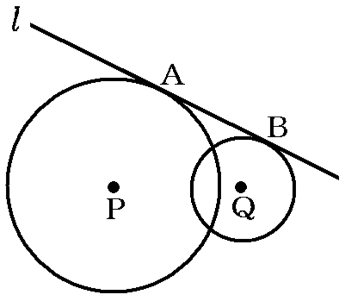
【】応用①

【】三平方と円

[円と接線]

[問題]

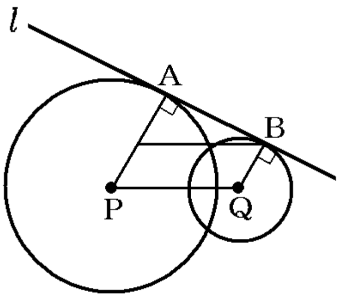
右図で，円 P，Q は直線 $l$ にそれぞれ点 A，B で接している。円 P，Q の半径がそれぞれ 4cm，2cm で，PQ＝5cm のとき，線分 AB の長さは何 cm か，求めよ。




(愛知県)(**)

[解答欄]

[ヒント]



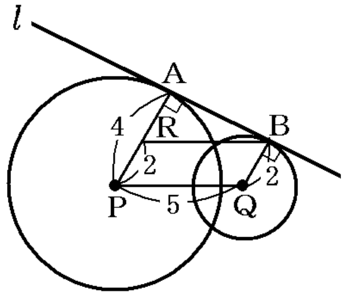

[解答] $\sqrt{21}$ cm

[解説]

<Point> 中心と接点を結ぶ→90°

右図のように，PA⊥ $l$，QB⊥ $l$ である。

RB // PQ となる点 R を AP 上にとると，四角形 RPQB は平行四辺形になる。




したがって，AR＝4－2＝2(cm)，RB＝PQ＝5(cm)

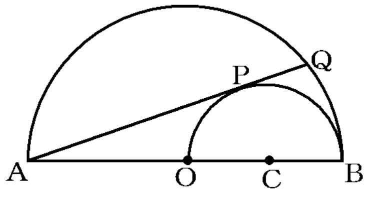
直角三角形 RBA で，三平方の定理より，

$AB^2+AR^2=RB^2$，$AB^2+2^2=5^2$，$AB^2=25-4=21$

よって，AB＝$\sqrt{21}$(cm)

[問題]

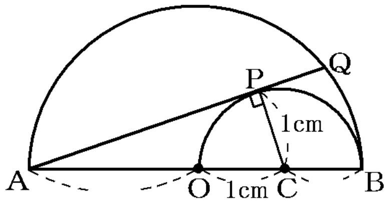
右の図のような，線分 AB を直径とし点 O を中心とする半円 O と，OB を直径とし点 C を中心とする半円 C がある。また，半円 O の弦 AQ は半円 C に点 P で接している。OC＝1cm とするとき，AP の長さを求めよ。



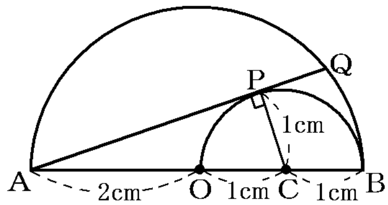

(栃木県)(**)

[解答欄]

[ヒント]
C と P を結ぶと，∠APC＝90° になる。



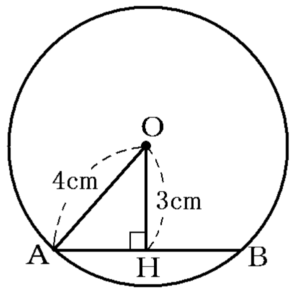

[解答] $2\sqrt{2}$ cm
[解説]




OC＝1cm なので円 C の半径は 1cm，
OB＝1＋1＝2cm なので円 O の半径は 2cm になる。
C と P を結ぶと，∠APC＝90° になる。
△ACP で，三平方の定理より，

AP＝$\sqrt{AC^2-CP^2}=\sqrt{3^2-1^2}=\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=2\sqrt{2}$ (cm)

[問題]
右の図のような半径 4cm の円 O がある。中心 O からの距離 OH が 3cm である弦 AB の長さを求めよ。
(栃木県)(*)




[解答欄]

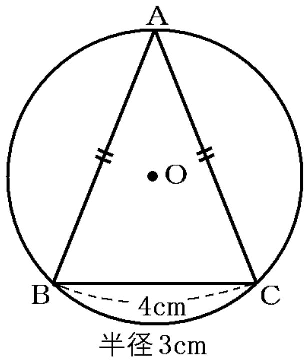
[ヒント]
円の中心 O から弦 AB に下ろした垂線 OH は弦 AB を二等分する。
[解答] $2\sqrt{7}$ cm
[解説]
円の中心 O から弦 AB に下ろした垂線 OH は弦 AB を二等分する。
三平方の定理より，

AH＝$\sqrt{OA^2-OH^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$ (cm)

AB＝2AH＝$2\sqrt{7}$ (cm)

[問題]

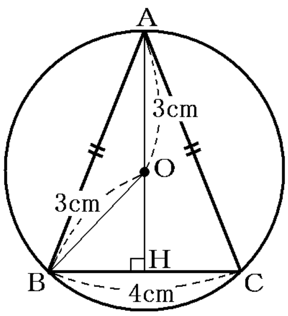
　半径 3cm の円 O がある。右の図のように，円 O の周上に 3 点 A，B，C を，BC＝4cm，AB＝AC，となるようにとり，△ABC をつくる。△ABC の面積を求めよ。




(福岡県)(**)

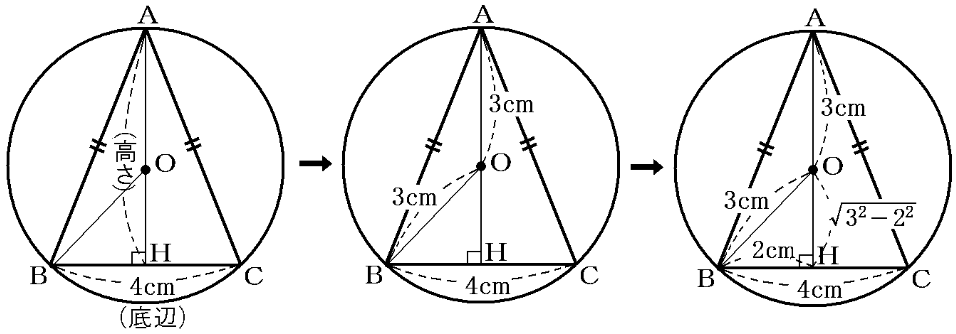
[解答欄]

[ヒント]




[解答] $6+2\sqrt{5}$ (cm²)

[解説]




A と O を通る直線が BC と交わる点を H とすると，AH⊥BC，BH＝CH となる。

直角三角形 OBH で，三平方の定理より，

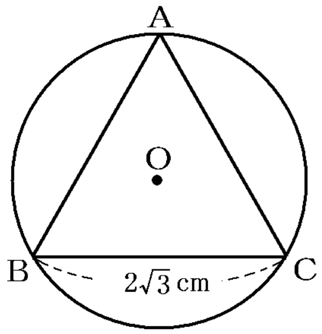
OH＝$\sqrt{OB^2-BH^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ (cm)

AH＝AO＋OH＝$3+\sqrt{5}$ (cm)

(△ABC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×BC×AH＝$\dfrac{1}{2}\times4\times\left(3+\sqrt{5}\right)=2\left(3+\sqrt{5}\right)=6+2\sqrt{5}$ (cm²)

[問題]

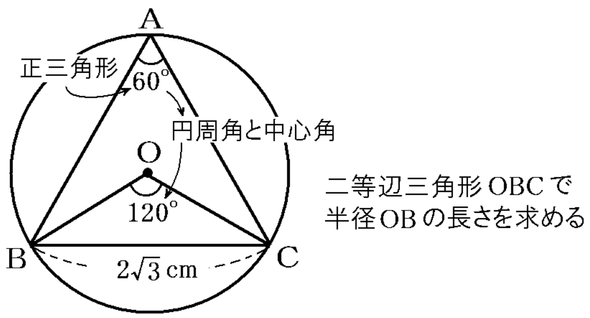
右の図のように，3 点 A，B，C は円 O の周上にあり，3 点を結んでできる三角形 ABC は 1 辺の長さが $2\sqrt{3}$ cm の正三角形である。このとき，点 A を含まないほうの弧 BC の長さを求めよ。




(高知県)(**)

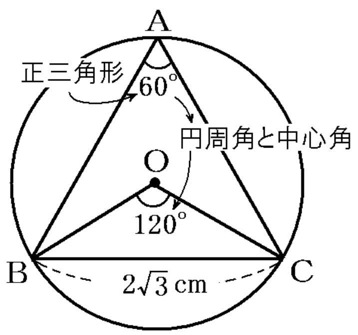
[解答欄]

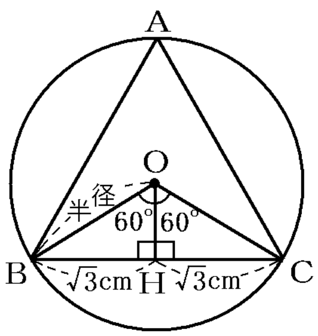
[ヒント]




[解答] $\dfrac{4}{3}\pi$ cm

[解説]




△ABC は正三角形なので，∠A＝60° である。

円の中心角は円周角の 2 倍なので，∠BOC＝∠A×2＝120°

中心 O から弦 BC に垂線 OH を下ろすと，H は BC の中点になる。

また，∠BOH＝∠COH＝120° ÷2＝60° になる。

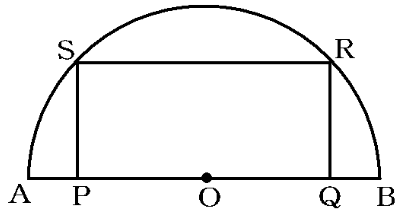
したがって，△OBH は 90° 60° 30° の直角三角形になり，OB : BH＝2 : $\sqrt{3}$ になる。

よって，OB＝ $\sqrt{3}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=2$ (cm)　半径が 2cm で中心角が 120° なので，

(弧 BC の長さ)＝2π×(半径)× $\dfrac{(中心角)}{360}=2\pi\times2\times\dfrac{120}{360}=4\pi\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}\pi$ (cm)

[問題]

右の図のように，線分 AB を直径とする半円 O がある。2 点 P，Q は線分 AB 上の点，2 点 R，S は弧 AB 上の点で，四角形 PQRS は PQ＝2QR の長方形である。半円 O の半径が 4cm のとき，四角形 PQRS の面積を求めよ。

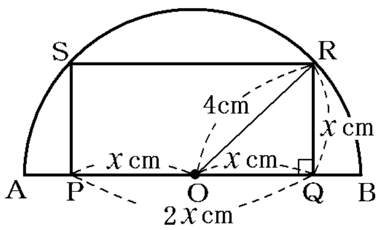


半円Oの半径4cm，PQ＝2QR

(秋田県)(**)

[解答欄]

[ヒント]




[解答]16cm²

[解説]

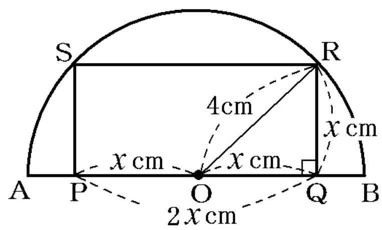
右図のように，RQ＝ $x$ cm とおくと，PQ＝ $2x$ cm になる。

O は PQ の中点になるので，PO＝OQ＝ $x$ cm になる。

直角三角形 ROQ で，三平方の定理より，

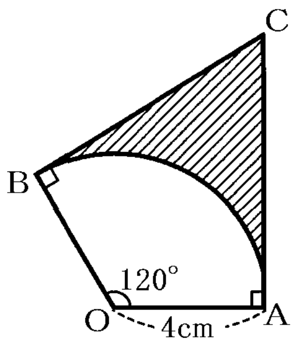
$x^2+x^2=4^2$， $2x^2=16$， $x^2=8$

(四角形 PQRS の面積)＝ $2x\times x=2x^2$ ＝16(cm²)




[問題]

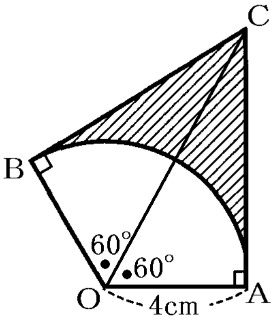
右の図のような，半径が 4cm，中心角が 120° のおうぎ形 OAB がある。点 A を通って線分 OA に垂直な直線と，点 B を通って線分 OB に垂直な直線をひき，その交点を C とする。次の各問いに答えよ。弧 AB と線分 AC，線分 BC とで囲まれた斜線部分の面積を求めよ。ただし，円周率を π とする。




(宮城県)(**)

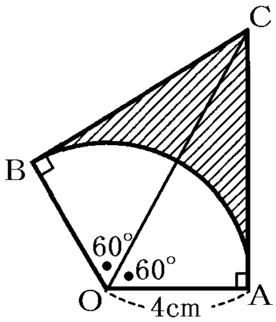
[解答欄]

[ヒント]




[解答] $16\sqrt{3}-\dfrac{16}{3}\pi$ (cm²)

[解説]




OC を結ぶと，△OAC≡△OBC なので，

∠AOC＝∠BOC＝120°÷2＝60°

よって，△OAC は 30° 60° 90° の直角三角形で，

3 辺の比は 1：2：$\sqrt{3}$ になる。

よって，OA：AC＝1：$\sqrt{3}$

AC＝OA×$\sqrt{3}$＝4×$\sqrt{3}$＝$4\sqrt{3}$ (cm)　したがって，

(△OAC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×OA×AC＝$\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ (cm²)

(おうぎ形 OAB の面積)＝π×(半径)²×$\dfrac{120}{360}=16\pi\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{16}{3}\pi$ (cm²)　よって，

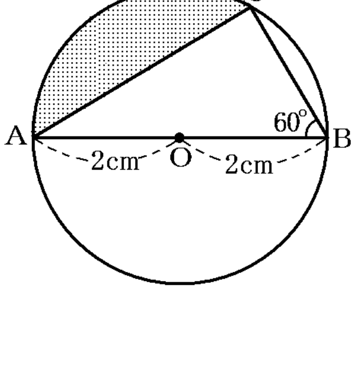
(斜線部分の面積)＝(四角形 OACB の面積)−(おうぎ形 OAB の面積)

$$=8\sqrt{3}\times 2-\frac{16}{3}\pi=16\sqrt{3}-\frac{16}{3}\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

[問題]

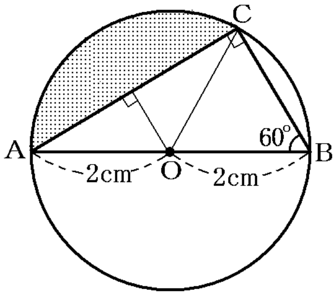
右の図のように，AB を直径とする円 O がある。円 O の半径が 2cm，∠CBA＝60° のとき，弧 AC と線分 AC とで囲まれた部分の面積を求めよ。円周率は π とする。

(栃木県)(**)




[解答欄]

[ヒント]




[解答] $\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$ (cm²)

[解説]

図1

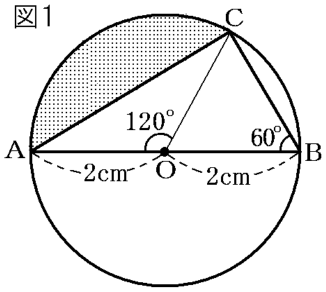
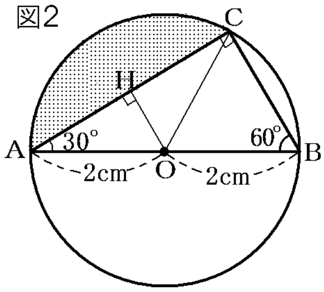



図2




(求める面積)＝(おうぎ形 OAC の面積)－(△OAC の面積)

図 1 で，中心角は円周角の 2 倍なので，∠AOC＝2∠ABC＝2×60° ＝120°

(おうぎ形 OAC の面積)$=\pi\times2^2\times\dfrac{120°}{360°}=\pi\times4\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}\pi$ (cm²)

図 2 のように，O から AC に垂線 OH を引くと，H は AC の中点になる。

△AOH は 30° 90° 60° の直角三角形になるので，OH：OA：AH＝1：2：$\sqrt{3}$

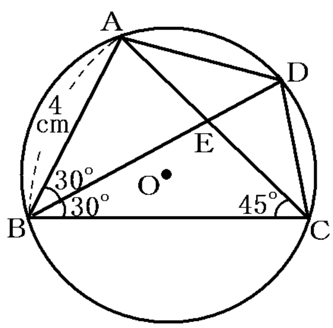
OA＝2cm なので，OH＝1cm，AH＝$\sqrt{3}$ cm になる。また，AC＝AH×2＝$2\sqrt{3}$ cm

(△OAC の面積)$=\dfrac{1}{2}$×(底辺 AC)×(高さ OH)$=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1=\sqrt{3}$ (cm²)

したがって，(求める面積)＝(おうぎ形 OAC の面積)－(△OAC の面積)$=\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$ (cm²)

[問題]

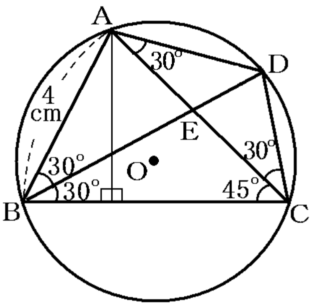
右の図のように，円 O の周上にある 4 点 A，B，C，D を頂点とする四角形 ABCD がある。線分 AC と線分 BD の交点を E とする。AB＝4cm，∠ABD＝∠DBC＝30°，∠ACB＝45°とする。△ACD の面積を求めよ。




(秋田県)(***)

[解答欄]

[ヒント]




まず, ACを求める

[解答] $2\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

[解説]

図1

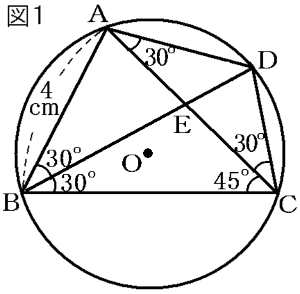



図2

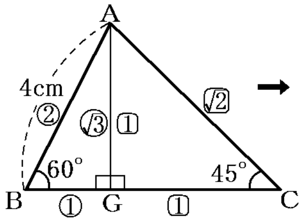



図3

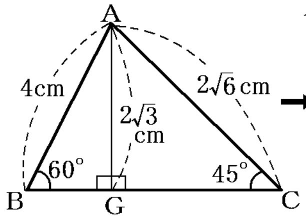
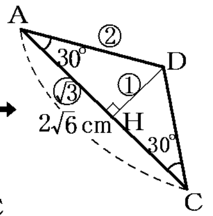



図4




まず，図 1 のように，円周角の定理を使って角度を移しておく。

次に，図 2，図 3 のように，辺の長さを，順番に計算していく。

図 2, 図 3 のような 60° 45° を 2 角とする三角形では垂線を引いて 2 つの直角三角形に分けるとうまくいく場合が多い。そこで，A から辺 BC に垂線 AG を引く。

△ABG は 30° 90° 60° の直角三角形なので，3 辺の比は 1：2：$\sqrt{3}$ になる。

よって，$\text{AG}=\text{AB}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\,(\text{cm})$である。

△ACG は 45° 45° 90° の直角三角形なので，3 辺の比は 1：1：$\sqrt{2}$ になる。

よって，$\text{AC}=\text{AG}\times\dfrac{\sqrt{2}}{1}=2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=2\sqrt{6}\,(\text{cm})$

次に，図 4 で，D から辺 AC に垂線 DH を引く。

△HAD は 30° 90° 60° の直角三角形なので，3 辺の比は 1：2：$\sqrt{3}$ になる。

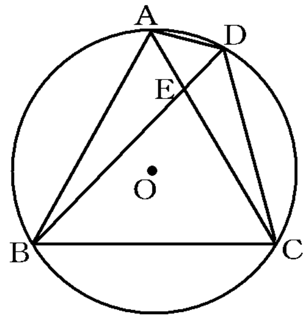
△DAC は二等辺三角形なので，$\text{AH}=2\sqrt{6}\div 2=\sqrt{6}\,(\text{cm})$

よって，$\text{DH}=\text{AH}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}\,(\text{cm})$

(△ACD の面積)$=\dfrac{1}{2}\times\text{AC}\times\text{DH}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$

[問題]

正三角形 ABC と，3 点 A，B，C を通る半径 2cm の円 O がある。この円 O の点 B を含まない弧 AC 上に 2 点 A，C と異なる点 D をとる。右図のように，点 D が，点 B を含まない弧 AC において，弧 AD と弧 DC の長さの比が 1：3 となるような位置にあるとする。また，線分 AC，BD の交点を E とする。このとき，次の各問いに答えよ。




(1) ∠ACD の大きさを求めよ。

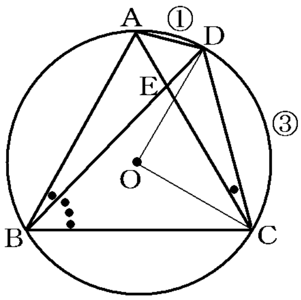
(2) 線分 CD の長さを求めよ。

(山梨県)(***)

[解答欄]

| | |
|---|---|
| (1) | (2) |

[ヒント]




[解答](1) 15°　(2) $2\sqrt{2}$ cm

[解説]

(1) 弧 AD：弧 DC＝1：3 より，弧 AD：弧 AC＝1：(1＋3)＝1：4 なので，

∠ABD：∠ABC＝1：4 である。△ABC は正三角形なので∠ABC＝60°である。

よって，∠ABD：60°＝1：4，4∠ABD＝60°，∠ABD＝60°÷4＝15°

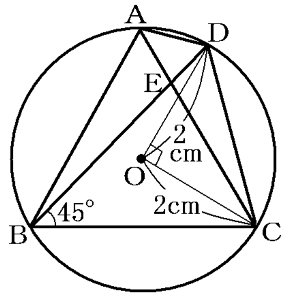
∠ACD＝∠ABD＝15°

(2) 弧 AD：弧 DC＝1：3　∠ABD＝15°なので，

∠DBC＝15°×3＝45°

∠DOC＝∠DBC×2＝45°×2＝90°

直角三角形 CDO で，三平方の定理より，




CD＝$\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2^2\times 2}=2\sqrt{2}$ (cm)

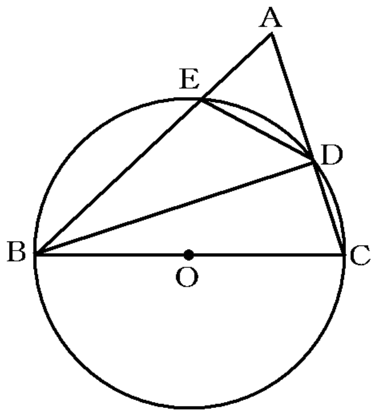
[問題]

右図で，BC は円 O の直径である。また，AE＝2cm，EB＝4cm，AD＝3cm，DC＝1cm である。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) BD の長さを求めよ。

(2) 四角形 BCDE の面積を求めよ。

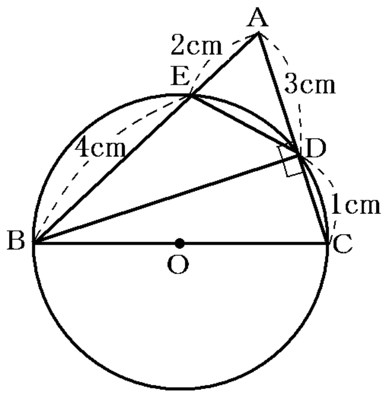
(沖縄県)(***)




[解答欄]

| | |
|---|---|
| (1) | (2) |

[ヒント]



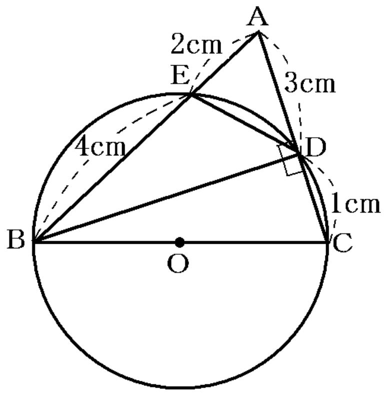

[解答](1) $3\sqrt{3}$ cm　(2) $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ cm²

[解説]

(1) 直角三角形 ABD で，三平方の定理より，

BD＝$\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{(4+2)^2-3^2}=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}$

＝$\sqrt{9\times 3}=3\sqrt{3}$ (cm)




(2) (△BCD の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×CD×BD＝$\dfrac{1}{2}\times 1\times 3\sqrt{3}$

＝$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (cm²)

(△ABD の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×AD×BD＝$\dfrac{1}{2}\times 3\times 3\sqrt{3}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ (cm²)

△DAE の底辺を AE，△DBE の底辺を BE とすると，高さが共通なので，

2 つの三角形の面積比は，底辺の比 AE：BE＝2：4＝1：2 と等しくなる。

よって，(△DBE の面積)＝(△ABD の面積)×$\dfrac{2}{1+2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2}{3}=3\sqrt{3}$ (cm²)

したがって，

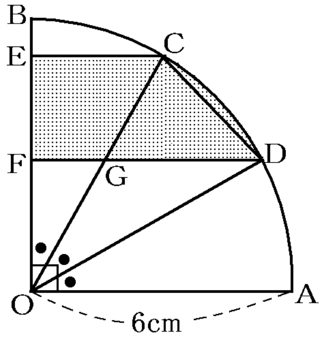
(四角形 BCDE の面積)＝(△BCD の面積)＋(△DBE の面積)＝$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{3}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ (cm$^2$)

[問題]

右の図で，C，D は，中心角が 90°のおうぎ形 OAB の弧 BA 上の点で，∠BOC＝∠COD＝∠DOA である。また，E，F は線分 BO 上の点で，EC // OA，FD // OA であり，G は線分 CO と FD との交点である。OA＝6cm のとき，次の各問いに答えよ。

(1) 線分 FG の長さは何 cm か。

(2) 線分 EC，EF，FD と弧 CD で囲まれた図のの部分の面積は，おうぎ形 OAB の面積の何倍か。



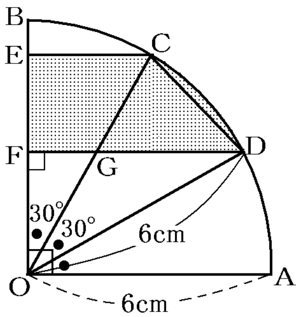

(愛知県)(****)

[解答欄]

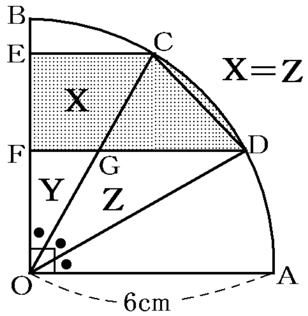
| (1) | (2) |
|---|---|

[ヒント]

(1)




(2)




[解答](1) $\sqrt{3}$ cm　(2) $\dfrac{1}{3}$ 倍

[解説]

図1

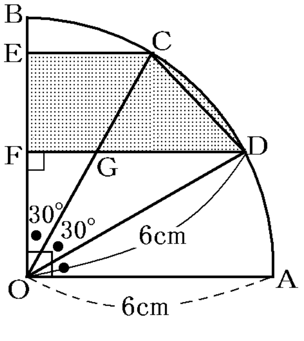
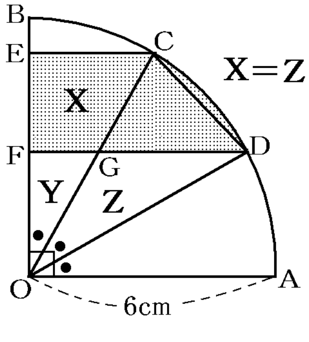



図2



(1) 図 1 で，△ODF は 30°  90°  60° の直角三角形なので，OD : OF＝2 : 1 になる。

OD＝6cm なので，OF＝ $6\times\frac{1}{2}$ ＝3(cm)である。

△OGF は 30°  90°  60° の直角三角形なので，OF : FG＝ $\sqrt{3}$ : 1 になる。

OF＝3cm なので，FG＝ $3\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$ (cm)

(2) 図 2 を使って考える。

X の部分の面積と Z の部分の面積が等しくなることに気づくかがポイントである。

△OCE と△ODF はともに斜辺の長さが 6cm で，30°  90°  60° の直角三角形なので合同である(斜辺と 1 つの鋭角が等しい)。

したがって，X＋Y＝Z＋Y で，X＝Z となる。

よって，の部分の面積は，おうぎ形 OCD の部分の面積と等しくなる。

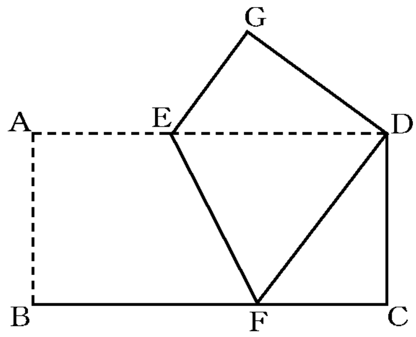
おうぎ形 OCD は半径が 6cm で中心角が 30°，おうぎ形 OAB は半径が 6cm で中心角が 90°なので，おうぎ形 OCD の面積はおうぎ形 OAB の面積の $\frac{1}{3}$ 倍になる。

【】折り返し

[問題]

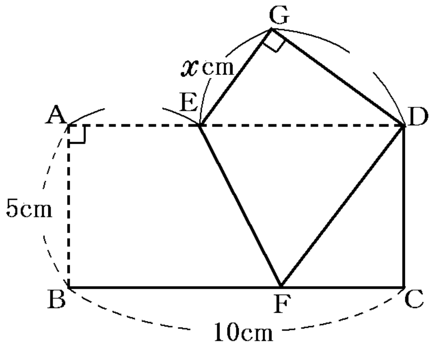
右の図のような長方形 ABCD を，頂点 B が頂点 D に重なるように折ったとき，折り目の線分を EF，頂点 A が移った点を G とする。AB＝5cm，BC＝10cm とするとき，線分 EG の長さを求めよ。

(愛媛県)(**)




[解答欄]

[ヒント]




[解答] $\dfrac{15}{4}$cm

[解説]

EG を $x$ cm とする。

折り返しているので，右図のように，

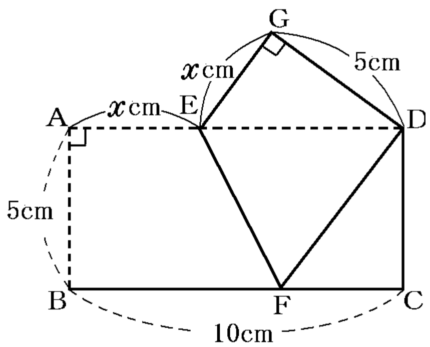
AE＝EG＝ $x$ cm

ED＝10－ $x$ (cm)

GD＝AB＝5cm

∠EGD＝∠BAE＝90°

になる。




直角三角形 EDG で，三平方の定理より，

$EG^2＋GD^2＝ED^2$，

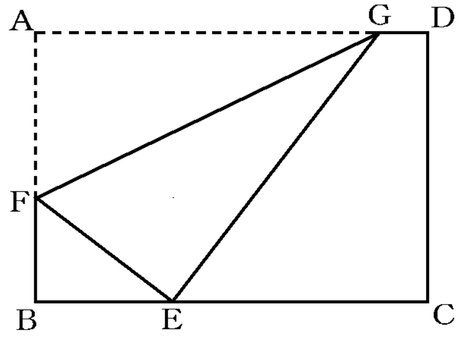
$x^2+5^2=(10-x)^2$， $x^2+25=x^2-20x+100$，

$20x=75$， $x=\dfrac{75}{20}=\dfrac{15}{4}$ (cm)

[問題]

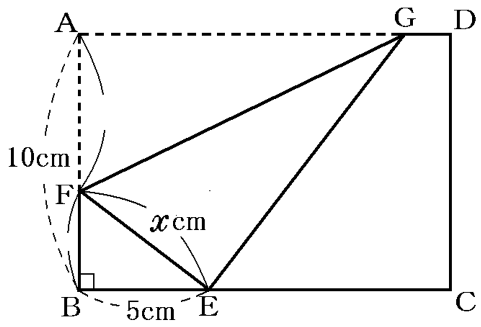
右の図のように，長方形 ABCD において，辺 BC 上に点 E をとり，頂点 A が点 E と重なるように折り曲げ，折り目を FG とする。AB＝10cm，BE＝5cm のとき，線分 EF の長さを求めよ。

(秋田県)(**)




[解答欄]

[ヒント]




[解答] $\dfrac{25}{4}$ cm

[解説]

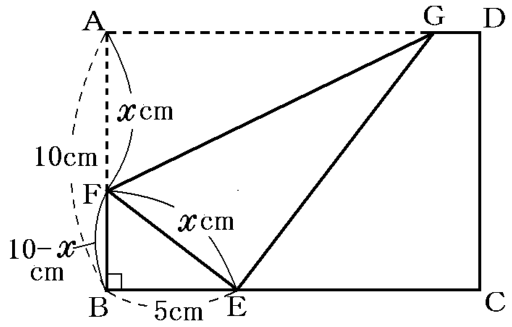
右図のように，EF＝$x$ cm とする。

直角三角形 EFB で，三平方の定理より，

$x^2=(10-x)^2+5^2$

$x^2=x^2-20x+100+25$

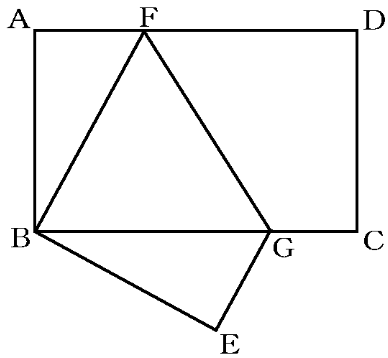
$20x=125$，　$x=\dfrac{125}{20}=\dfrac{25}{4}$ (cm)




[問題]

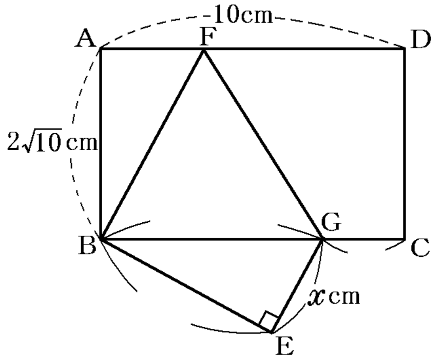
縦と横の長さが異なる長方形の紙 ABCD を，頂点 D が頂点 B と重なるように折った。頂点 C が移った点を E，折り目の線分を FG とする。右の図は，折る前の図形と折った後の図形を表したものである。AB＝ $2\sqrt{10}$ cm，AD＝10cm であるとき，EG の長さを求めよ。

(青森県改)(**)



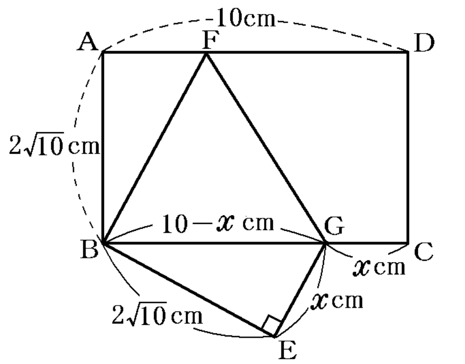
[解答欄]

[ヒント]




[解答]3cm

[解説]




CG＝$x$ cm とする。

右図の直角三角形 BEG で，

三平方の定理より，

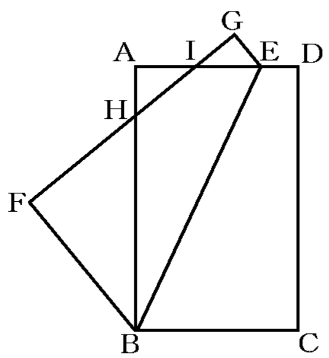
$$x^2+\left(2\sqrt{10}\right)^2=\left(10-x\right)^2$$

$$x^2+40=x^2-20x+100$$

$$20x=60$$

$$x=3\text{(cm)}$$

[問題]




右図において，四角形 ABCD は，CD＝13cm，BC＝8cm の長方形である。E は辺 AD 上にあって，A，D と異なる点である。四角形 EBFG は EG // BF の台形であって，台形 EBFG≡台形 EBCD であり，台形 EBFG の辺 FG は長方形 ABCD の 2 辺 AB，AD とそれぞれ H，I で交わっていて，AH＝3cm である。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 線分 FH の長さを求めよ。

(2) 線分 ED の長さを求めよ。

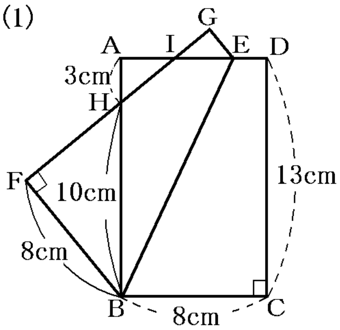
(大阪府改)(***)

[解答欄]

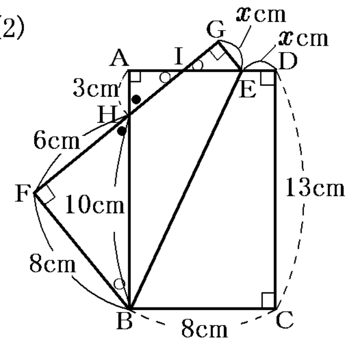
| | |
|---|---|
| (1) | (2) |

[ヒント]

(1)

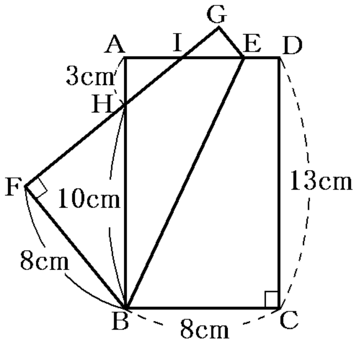



(2)




[解答](1) 6cm　(2) $\dfrac{3}{2}$cm

[解説]




(1) BH＝BA－AH＝13－3＝10(cm)，BF＝BC＝8(cm)，
直角三角形 BHF で，三平方の定理より，

FH＝$\sqrt{BH^2-BF^2}=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=6$(cm)

(2) △AHI∽△FHB(2 角が等しい)なので，

AI：FB＝AH：FH，AI：8＝3：6，

6AI＝24，AI＝4(cm)

ED＝$x$(cm)とおくと，EG＝$x$(cm)

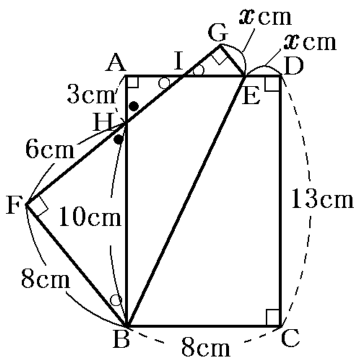
△GEI∽△FHB(2 角が等しい)なので，

IE：BH＝GE：FH，IE：10＝$x$：6

6IE＝10$x$，IE＝$\dfrac{10}{6}x=\dfrac{5}{3}x$

AD＝AI＋IE＋ED＝8，$4+\dfrac{5}{3}x+x=8$，$\dfrac{8}{3}x=4$，

$x=4\div\dfrac{8}{3}=4\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{2}$



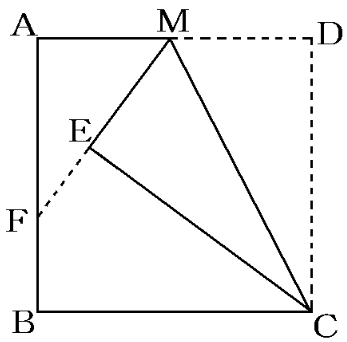

[問題]

右の図のように，正方形 ABCD を，AD の中点 M と頂点 C を結ぶ直線を折り目として折り返し，頂点 D が移る点を E，ME の延長と AB との交点を F とすし，AD＝2cm とする。

(1) FE＝FB であることを証明せよ。

(2) FE の長さを求めよ。

(石川県)(***)



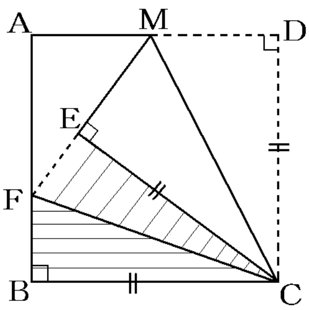
[解答欄]

| (1) |
|---|
| |

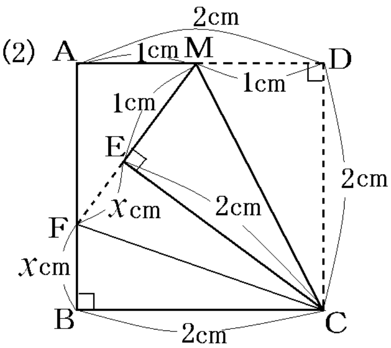
| (2) |
|---|
| |

[ヒント]

(1)




(2)




[解答]

(1) 補助線 CF を引く。

△CFE と△CFB で，

MC で折り返しているので，

　∠MEC＝∠MDC＝90°

よって，∠FEC＝90°

また，∠FBC＝90°

したがって，∠FEC＝∠FBC＝90°　･･･①

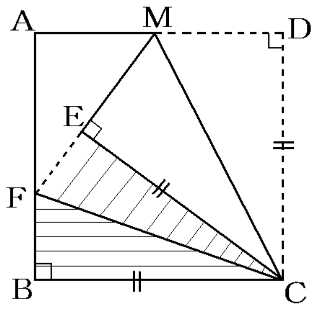
MC で折り返しているので，CE＝CD＝2cm

CB＝2cm なので，CE＝CB･･･②

CF は共通･･･③

①，②，③より，斜辺と他の一辺が等しいので，

△CFE≡△CFB　よって，FE＝FB




(2) $\dfrac{2}{3}$cm

[解説]

(2) 直角三角形 FMA に注目する。

M は AD の中点なので，AM＝DM＝1cm

MC で折り返しているので，EM＝DM＝1cm

EF＝$x$cm とおくと，FM＝$x$＋1(cm)

ところで，(1)より FB＝FE＝$x$cm

よって，AF＝AB－FB＝2－$x$(cm)

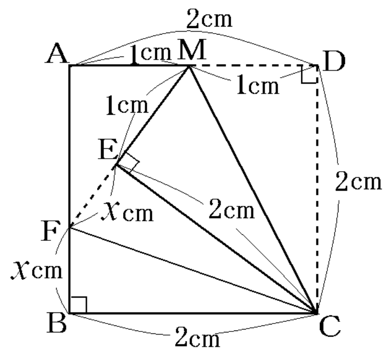
直角三角形 FMA において，三平方の定理より，

$AF^2+AM^2=FM^2$

$(2-x)^2+1^2=(x+1)^2$

$4-4x+x^2+1=x^2+2x+1$

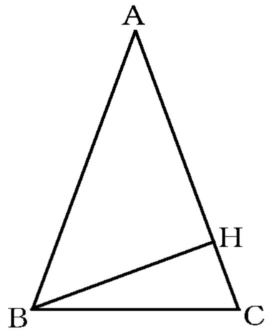
$-6x=-4,\ x=(-4)\div(-6)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$



【】1 つの辺を x とおく

[問題]

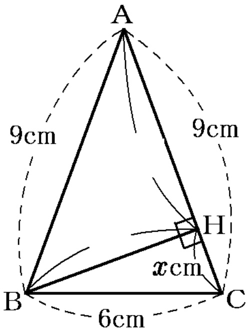
　右の図のような，AB＝AC＝9cm，BC＝6cm の二等辺三角形 ABC があり，点 B から辺 AC に垂線 BH をひく。このとき，線分 CH の長さを求めよ。




(神奈川県)(***)

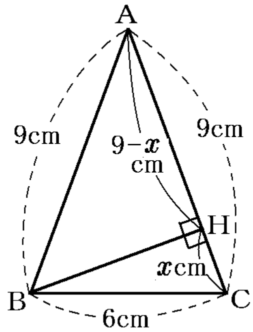
[解答欄]

[ヒント]




[解答]2cm

[解説]




右図のように，CH＝$x$ cm とすると，AH＝$9-x$(cm)

直角三角形 BCH で，三平方の定理より，

　$BH^2 = BC^2 - CH^2 = 36 - x^2$・・・①

直角三角形 ABH で，三平方の定理より，

　$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 81 - (9-x)^2$・・・②

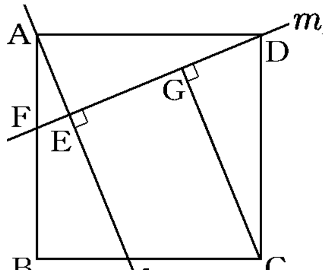
①，②より，

$36 - x^2 = 81 - (9-x)^2$，$36 - x^2 = 81 - (x^2 - 18x + 81)$，$18x = 36$，$x = 2$

よって，CH の長さは 2cm である。

[問題]

　右の図のように，正方形 ABCD と，点 A を通る直線 $l$ がある。点 D を通り，$l$ に垂直な直線 $m$ をひき，$l$ との交点を E，辺 AB との交点を F とする。また，点 C から $m$ に垂線 CG をひく。次の各問いに答えよ。




(1) △ADE≡△DCGを証明せよ。

(2) AD＝13cm，EG＝7cmのとき，AEの長さを求めよ。

(山口県改)(***)

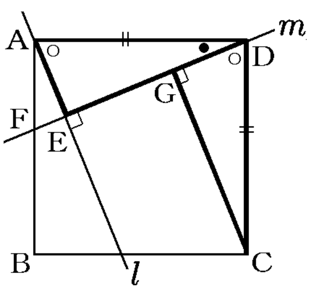
[解答欄]

(1)

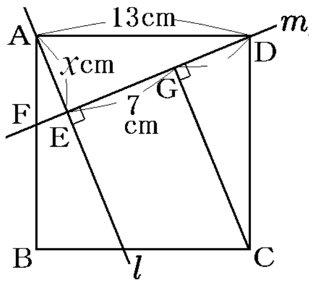
(2)

[ヒント]

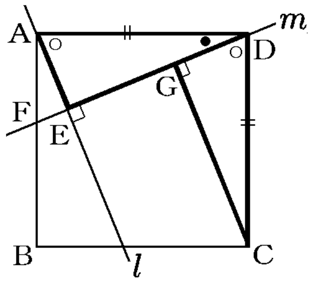
(1)




(2)




[解答]




(1) △ADE と△DCG において，

仮定より，∠AED＝∠DGC＝90°　･･･①

四角形 ABCD は正方形なので，AD＝DC･･･②

∠EAD＋∠ADE＝180°　－∠AED＝180°　－90°　＝90°　･･･③

∠CDG＋∠ADE＝∠ADC＝90°　･･･④

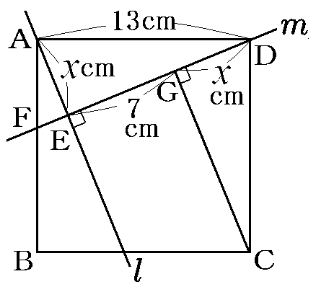
③，④より，∠EAD＝∠CDG･･･⑤

①，②，⑤より，2 つの直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので，

△ADE≡△DCG

(2) 5cm

[解説]




(2) 右図のように，AE＝ $x$ cm とする。

(1) より△ADE≡△DCG なので，GD＝AE＝ $x$ cm

直角三角形 ADE において，三平方の定理より，

$AE^2+DE^2=AD^2$

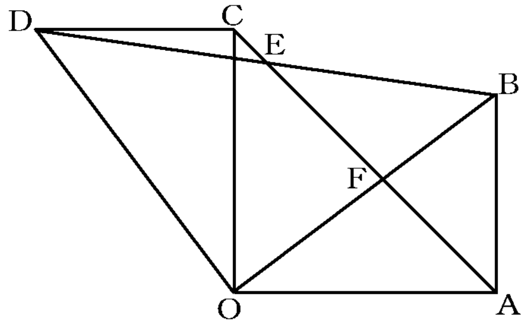
$x^2+(7+x)^2=13^2$，　$x^2+49+14x+x^2=169$

$2x^2+14x-120=0$,　$x^2+7x-60=0$

$(x-5)(x+12)=0$，　$x=5,\ -12$，　$x>0$ なので，　$x=5$

[問題]

右図で，△OAB は∠OAB＝90° の直角三角形であり，△OCD は，△OAB を，点 O を回転の中心として，時計の針の回転と逆向きに 90° だけ回転移動したものである。また，E，F はそれぞれ線分 CA と DB，BO との交点である。OA＝4cm，BA＝3cm であるとき，次の各問いに答えよ。




(1) 線分 FO の長さは何 cm か。

(2) △CDE の面積は何 $cm^2$ か。

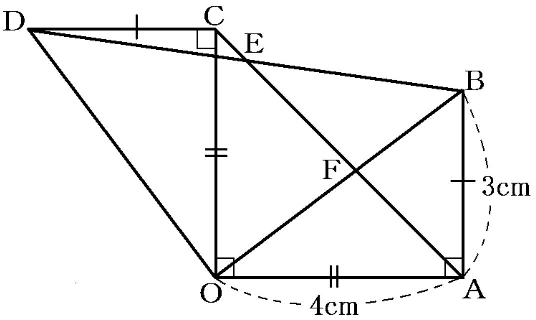
(愛知県)(****)

[解答欄]

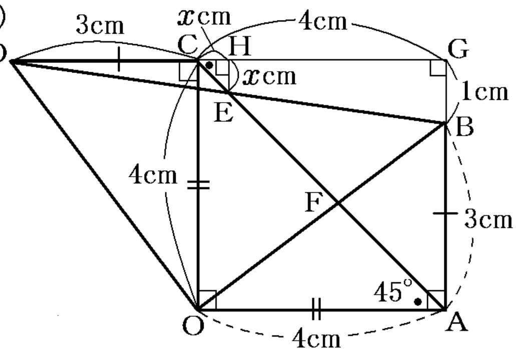
| | |
|---|---|
| (1) | (2) |

[ヒント]

(1)




(2)




[解答](1) $\dfrac{20}{7}$ cm　(2) $\dfrac{3}{4}$ $cm^2$

[解説]

(1) 直角三角形 BOA で，三平方の定理より，

OB＝$\sqrt{OA^2+AB^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}$＝5(cm)

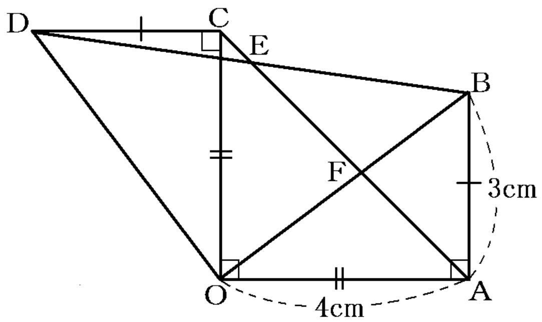
OC // AB なので平行線の性質より，

FO：FB＝OC：AB＝4：3 なので，

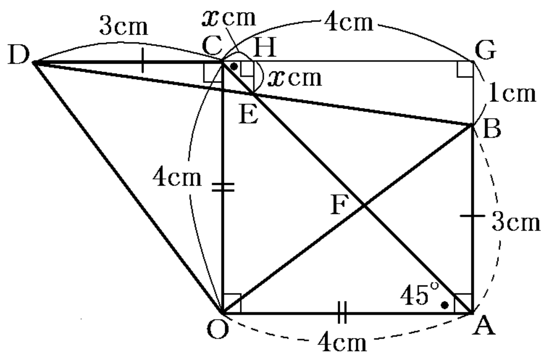
FO：OB＝4：(3＋4)，FO：5＝4：7

比の外項の積は内項の積に等しいので，

7FO＝5×4，FO＝$\dfrac{20}{7}$(cm)



(2) △CDE の底辺を CD とすると，高さは右図の EH である。EH＝$x$(cm)とおくと，∠ECH＝45° なので，△CEH は直角二等辺三角形で，CH＝$x$(cm)になる。




EH // BG なので平行線の性質より，

EH：BG＝DH：DG

$x$ ：1＝$(x+3)$ ：7

比の外項の積は内項の積に等しいので，

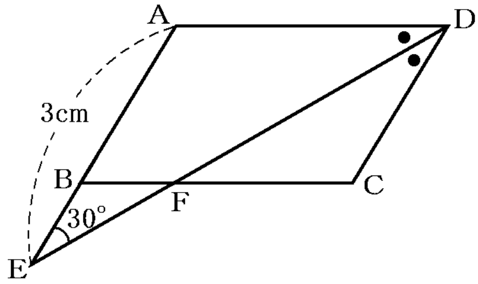
$7x=x+3$，　$6x=3$，　$x=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

よって，(△CDE の面積)＝$\dfrac{1}{2}$ ×DC×EH＝$\dfrac{1}{2}\times3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$ (cm$^2$)

【】その他

[問題]

右の図のような平行四辺形 ABCD において，∠ADC の二等分線と辺 AB を延長した線との交点を E とし，辺 BC と線分 DE の交点を F とする。∠AED＝30°，AE＝3cm のとき，次の各問いに答えよ。




(1) ∠ABC の大きさを求めよ。

(2) BC⊥AF であるとき，AB の長さを求めよ。

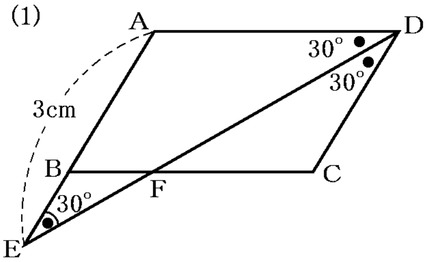
(佐賀県)(***)

[解答欄]

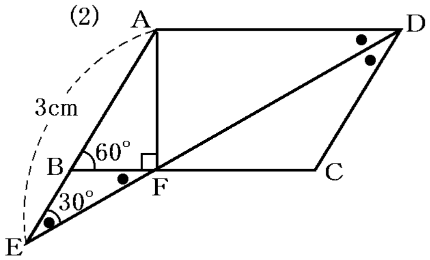
| | |
|---|---|
| (1) | (2) |

[ヒント]

(1)



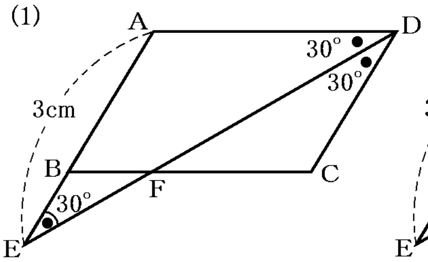

(2)



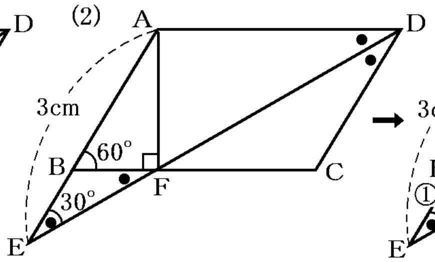

[解答](1) 60°　(2) 2cm

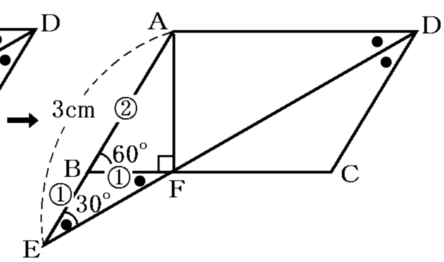
[解説]

(1)




(2)




(1) AE // DC で平行線の錯角は等しいので，∠CDF＝∠AED＝30°

仮定より，∠ADF＝∠CDF なので，∠ADF＝30°

よって，∠ADC＝30°＋30°＝60°

平行四辺形の向かいあう角は等しいので，∠ABC＝∠ADC＝60°

(2) AD // BC で平行線の同位角は等しいので，∠BFE＝∠ADF＝30°

∠BFE＝∠BEF＝30° なので，△BEF は二等辺三角形になり，BE＝BF･･･アとなる。

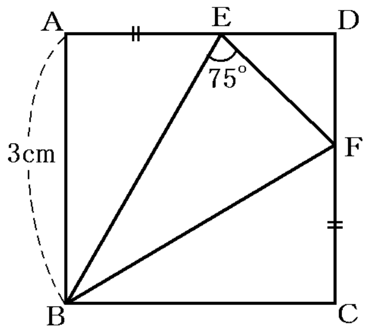
次に，△ABF は 30° 90° 60° の直角三角形なので，AB : BF＝2 : 1･･･イ

ア，イより，AB : BE＝2 : 1 になる。AB＋BE＝AE＝3cm なので，AB＝2cm，BE＝1cm

[問題]

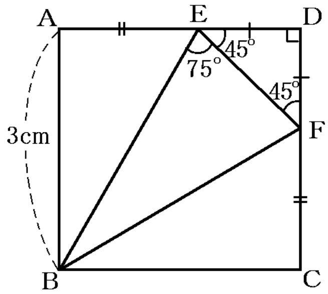
右の図のように，正方形 ABCD があり，AE＝CF となるように，点 E，F をそれぞれ辺 AD，CD 上にとる。AB＝3cm，∠BFE＝75°とするとき，線分 EF の長さを求めよ。

(富山県)(***)



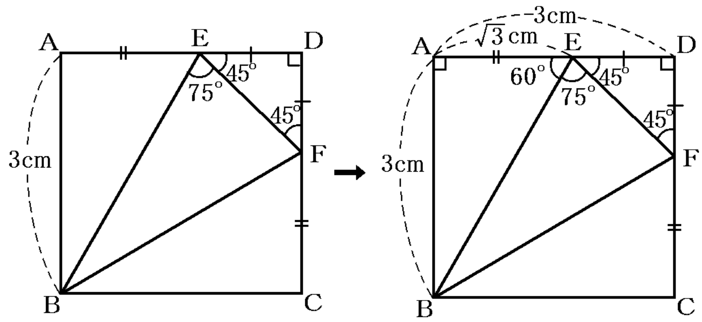

[解答欄]

[ヒント]




[解答] $3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ (cm)

[解説]




AD＝CD(正方形の辺)，AE＝CF(仮定)なので，DE＝DF になる。

よって，△EFD は直角二等辺三角形で，

∠FED＝∠EFD＝(180°－90°)÷2＝45°

したがって，∠AEB＝180°－(75°＋45°)＝60°

よって，△ABE は 30° 90° 60° の直角三角形で，

AE：BE：AB＝1：2：$\sqrt{3}$

AE＝AB×$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$＝$3\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ (cm)

ED＝AD－AE＝$3-\sqrt{3}$ (cm)

次に，△EFD は 45° 45° 90° の直角三角形なので，ED：FD：EF＝1：1：$\sqrt{2}$

よって，EF＝ED×$\sqrt{2}$＝$\left(3-\sqrt{3}\right)\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ (cm)

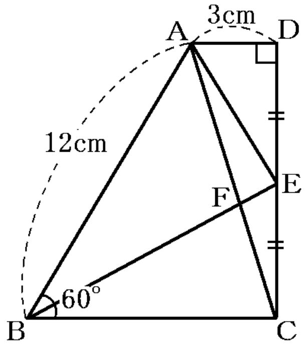
[問題]

右の図のように, AD // BC の台形 ABCD があり, AD＝3cm, AB＝12cm, ∠ADC＝90°, ∠ABC＝60° である。辺 CD の中点を E とし, 線分 AC と線分 BE の交点を F とする。次の各問いに答えよ。

(1) 線分 BE の長さを求めよ。

(2) ∠DAE の大きさを求めよ。

(秋田県)(***)

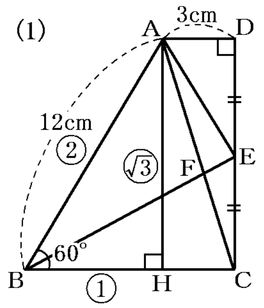



[解答欄]

| (1) | (2) |
|---|---|

[ヒント]

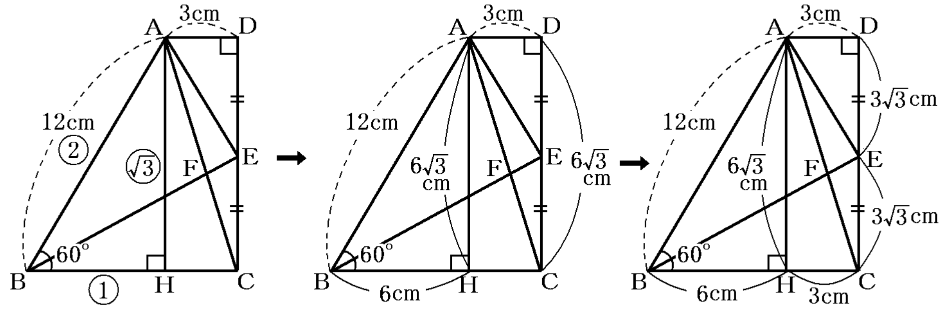
(1)




(2) AD：DE
に着目

[解答](1) $6\sqrt{3}$ cm　(2) 60°

[解説]




(1) A から BC に垂線 AH を下ろす。

△ABH は 90° 30° 60° の直角三角形なので, AB : BH : AH＝2 : 1 : $\sqrt{3}$

AB＝12cm なので, BH＝6cm, AH＝$6\sqrt{3}$ cm

DC＝AH＝$6\sqrt{3}$ cm で, E は CD の中点なので, DE＝EC＝$6\sqrt{3}\div 2=3\sqrt{3}$ (cm)

また, HC＝AD＝3cm なので, BC＝6＋3＝9(cm)

よって, 直角三角形 BEC で, BC＝9cm, EC＝$3\sqrt{3}$ cm なので,

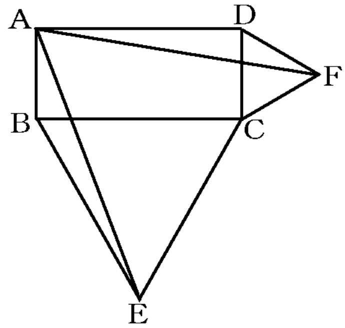
BE＝$\sqrt{BC^2+EC^2}=\sqrt{9^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{81+27}=\sqrt{108}=\sqrt{36\times 3}=6\sqrt{3}$ (cm)

(2) △AED で AD＝3cm, DE＝$3\sqrt{3}$ cm なので,

AE＝$\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{3^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9+27}=\sqrt{36}=6$ (cm)

よって，AD：AE：DE＝3：6：$3\sqrt{3}$＝1：2：$\sqrt{3}$
△AED は 1：2：$\sqrt{3}$ の直角三角形なので，角は 30°　90°　60°　になる。
したがって，∠DAE＝60°

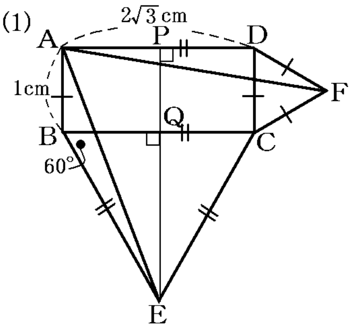
[問題]




　右の図のように，AB＝1cm，AD＝$2\sqrt{3}$ cm の長方形 ABCD があり，この長方形の外側に 2 つの正三角形△BEC と△DCF をつくる。このとき，次の各問いに答えよ。
(1) AE の長さを求めよ。
(2) △AEF の面積を求めよ。
(沖縄県)(***)
[解答欄]

| | |
|---|---|
| (1) | (2) |

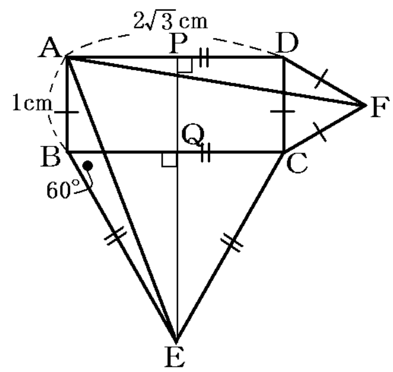
[ヒント]
(1)




(2)
△ABE，△FDA，△FCE
に着目

[解答](1) $\sqrt{19}$ cm　(2) $\dfrac{19\sqrt{3}}{4}$ cm$^2$

[解説]

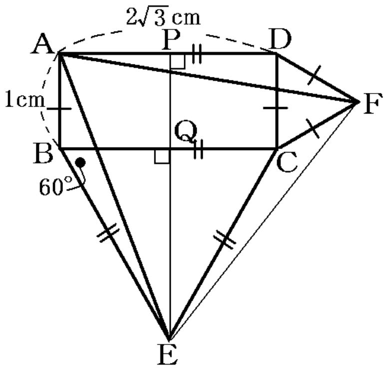



(1) 右図のように補助線 EP を引く。
△BEQ は 90°　30°　60°　の直角三角形で 3 辺の比は
2：1：$\sqrt{3}$ になるので，
EQ＝BE×$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$ (cm)
EP＝EQ＋QP＝3＋1＝4(cm)
直角三角形 AEP で，三平方の定理より，
AE＝$\sqrt{AP^2+EP^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+4^2}=\sqrt{3+16}=\sqrt{19}$ (cm)

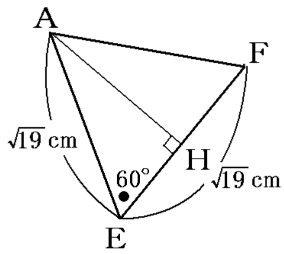
(2) E と F を結ぶ。

△ABE と△FDA と△FCE は，すべて合同になる(2 辺が等しく，その間の角がすべて 150° になるので)。

よって，AE＝AF＝EF になり，△AEF は正三角形になる。右図で，









$$\mathrm{AH}=\mathrm{AE}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{19}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(\triangle \mathrm{AEF}\text{ の面積})=\frac{1}{2}\times\mathrm{EF}\times\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\times\sqrt{19}\times\sqrt{19}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{19\sqrt{3}}{4}\ (\mathrm{cm}^2)$$

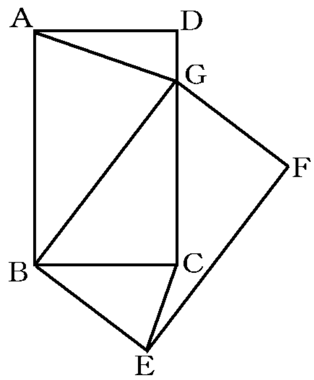
[問題]

右の図で，長方形 ABCD≡長方形 GBEF であり，点 G は辺 CD 上の点である。次の各問いに答えよ。

(1) △ABG∽△CBE であることを証明せよ。

(2) AB＝5cm，CG＝4cm のとき，△CBE の面積を求めよ。

(岐阜県)(***)



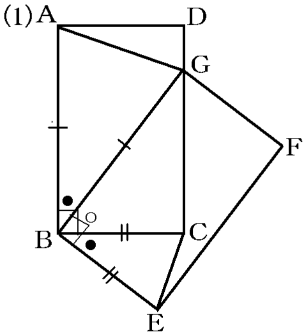


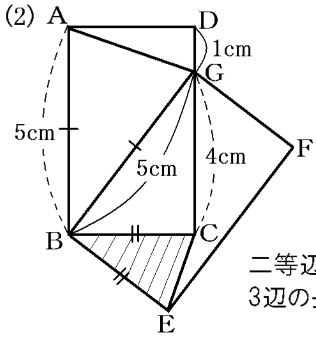
[解答欄]

| (1) |
|---|
| |

| (2) |
|---|
| |

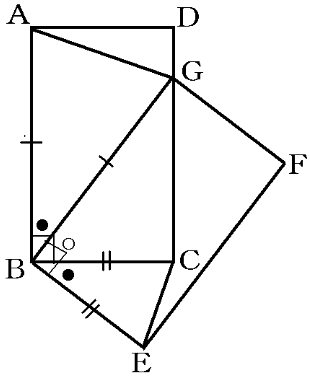
[ヒント]

(1)



(2)



二等辺三角形CBE
3辺の長さ→面積

[解答]




(1) △ABG と△CBE で,

∠ABG＝90° －∠GBC ･･･①

∠CBE＝90° －∠GBC ･･･②

①，②より，∠ABG＝∠CBE ⋯③

長方形 ABCD≡長方形 GBEF より，

AB：CB＝BG：BE ⋯④

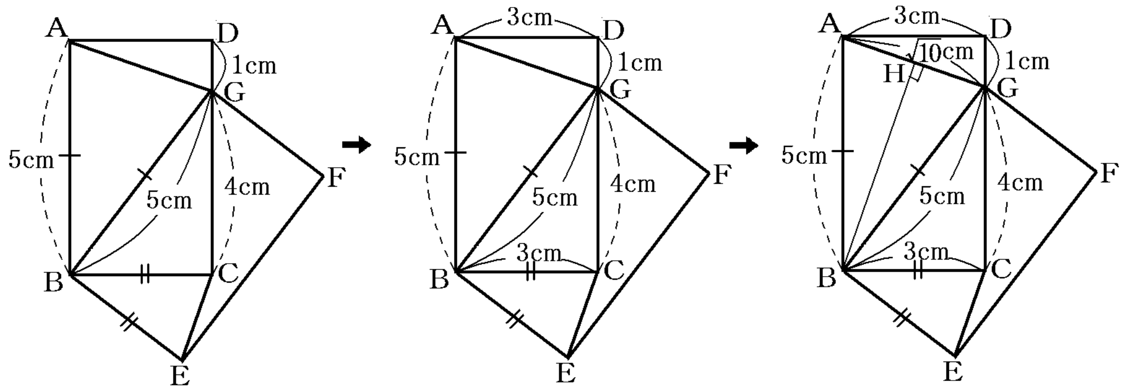
③，④より，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので，

△ABG∽△CBE

(2) $\dfrac{27}{10}$cm²

[解説]

(2)




まず，わかる長さを計算しておく。

BG＝BA なので BG＝5cm である。

直角三角形 GBC で，三平方の定理より，

BC＝$\sqrt{BG^2-CG^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$(cm)

AD＝BC なので AD＝3cm

直角三角形 AGD で，三平方の定理より，AG＝$\sqrt{AD^2+DG^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$(cm)

まず，△ABG の面積を求める。

B から AG に垂線 BH を引くと，二等辺三角形の性質より，AH＝$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ cm である。

直角三角形 ABH で，三平方の定理より，

BH＝$\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{25-\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}=\sqrt{25-\dfrac{10}{4}}=\sqrt{\dfrac{90}{4}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$ (cm)

(△ABG の面積)＝$\dfrac{1}{2}$ ×AG×BH＝$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{2}=\dfrac{30}{4}=\dfrac{15}{2}$ ($cm^2$)

△ABG と△CBE の相似比は 5：3 なので，面積比は $5^2：3^2$＝25：9 である。

よって，(△CBE の面積)＝(△ABG の面積)×$\dfrac{9}{25}=\dfrac{15}{2}\times\dfrac{9}{25}=\dfrac{27}{10}$ ($cm^2$)

[問題]

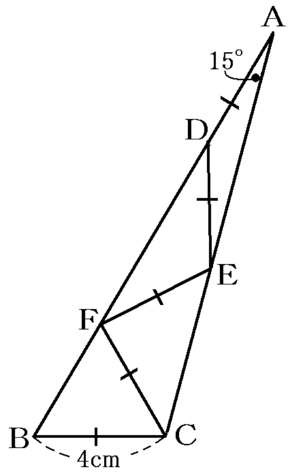
右の図のような△ABC において，∠BAC＝15° で，AD＝DE＝EF＝FC＝CB＝4cm とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) ∠EDF の大きさを求めよ。

(2) 線分 BF の長さを求めよ。

(3) △ABC の面積を求めよ。

(沖縄県)(****)

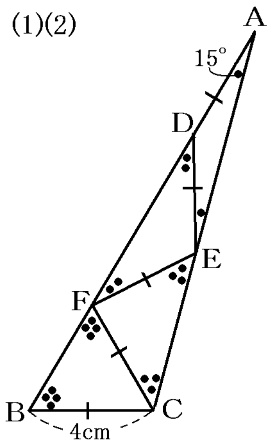



[解答欄]

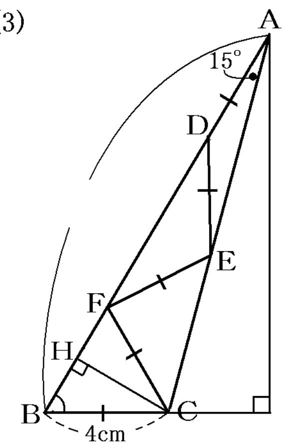
| (1) | (2) | (3) |
|---|---|---|

[ヒント]

(1)(2)

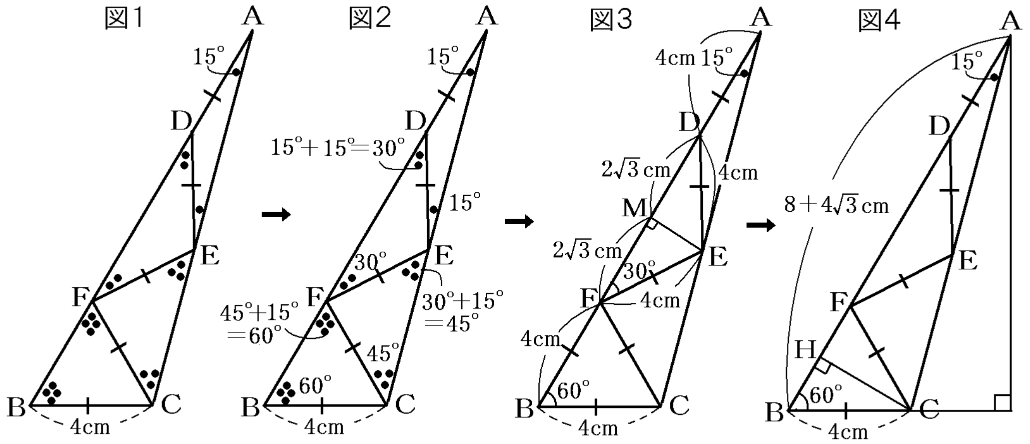



(3)



[解答](1) 30°　(2) 4cm　(3) $8\sqrt{3}+12$ (cm²)

[解説]




(1) △DAE は AD＝DE の二等辺三角形なので，∠DEA＝∠DAE＝15°

三角形の外角は，そのとなりにない 2 つの内角の和に等しいので，

∠EDF＝∠DEA＋∠DAE＝15°＋15°＝30°

(2) 図 2 のように角を次々に計算していく。

△EDF は ED＝EF の二等辺三角形なので，∠EFD＝∠EDF＝30°

△AFE で，三角形の外角は，そのとなりにない 2 つの内角の和に等しいので，

∠FEC＝∠FAE＋∠AFE＝15°＋30°＝45°

△FCE は二等辺三角形なので，∠FCE＝∠FEC＝45°

△AFC で，三角形の外角は，そのとなりにない 2 つの内角の和に等しいので，

∠CFB＝∠FAC＋∠ACF＝15°＋45°＝60°

△FBC で∠FCB＝180°－60°－60°＝60°

よって，△FBC は正三角形になるので，BF＝4cm

(3) 図 3 の△EDF の点 E から DF に垂線 EM を引く。

△EFM は 90° 60° 30° の直角三角形になるので，

$$\mathrm{FM}=\mathrm{EF}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$$

$\mathrm{DF}=2\mathrm{FM}=4\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$

よって，$\mathrm{AB}=\mathrm{AD}+\mathrm{DF}+\mathrm{FB}=4+4\sqrt{3}+4=8+4\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$

図 4 のように，C から AB に垂線 CH を引く。

△ABC の底辺を AB とすると，高さは CH になる。

△CBH は 90° 60° 30° の直角三角形になるので，$\mathrm{CH}=\mathrm{BC}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$

よって，(△ABC の面積)$=\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{CH}=\frac{1}{2}\times\left(8+4\sqrt{3}\right)\times2\sqrt{3}=8\sqrt{3}+12\,(\mathrm{cm}^2)$

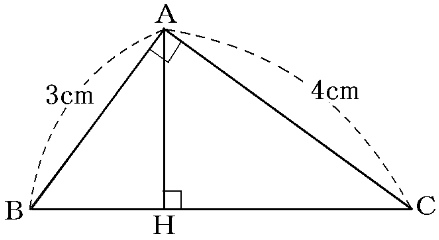
【】応用②：三平方と相似

【】長さ：直角三角形

[問題]

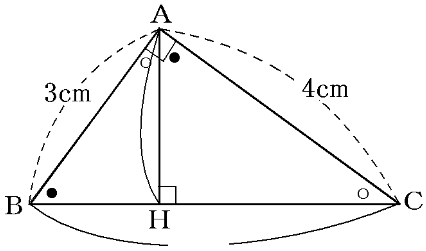
右の図で，△ABC は∠A＝90°の直角三角形で，点 H は辺 BC 上の点で，∠AHC＝90°である。AB＝3cm，AC＝4cm のとき，線分 AH の長さを求めよ。

(千葉県)(**)




[解答欄]

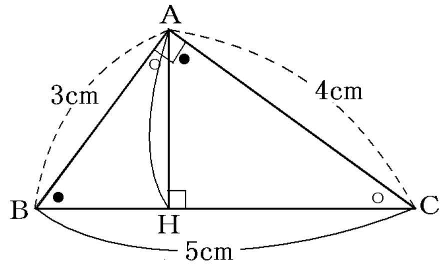
[ヒント]




[解答] $\dfrac{12}{5}$cm

[解説]

∠ABH を●，∠BAH を○で表して等しい角を調べる。
△ABH で，●＋○＝90°である。
∠BAH＋∠CAH＝90°で，∠BAH は○なので，
∠CAH は●になる。さらに，∠ACH は○になる。
したがって，△ABC，△HBA，△HAC は，対応する角が等しく互いに相似になるが，ここでは，△HBA と△ABC を使う。




相似な図形の対応する辺の比は等しいので，小(△HBA)；大(△ABC)をとると，
AH：CA＝AB：CB となる。(小の AH は○と直角→大の○と直角は CA)
AH：4＝3：CB

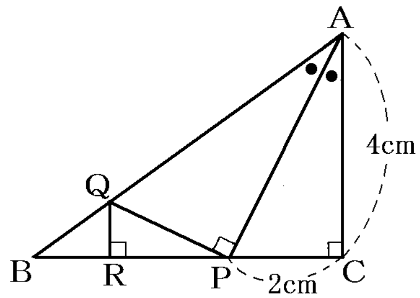
直角三角形 ABC で，三平方の定理より，CB＝$\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$(cm)

よって，AH：4＝3：5
比の外項の積は内項の積に等しいので，AH×5＝4×3

よって，AH＝4×3÷5＝$\dfrac{12}{5}$(cm)

[問題]

右の図のように，∠C＝90°の直角三角形 ABC の辺 BC 上に点 P をとる。また，AP⊥PQ となるように辺 AB 上に点 Q をとり，さらに，BC⊥QR となるように辺 BC 上に点 R をとる。AP が∠A の二等分線となるように点 P をとったとき，AC＝4cm，PC＝2cm であった。次の各問いに答えよ。




(1) 線分 AP の長さを求めよ。

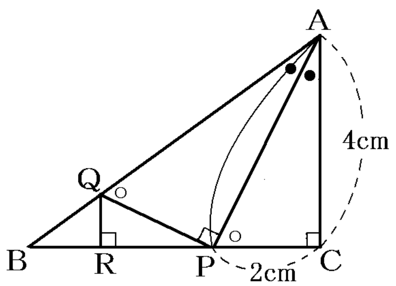
(2) 線分 PQ の長さを求めよ。

(島根県)(**)

[解答欄]

| (1) | (2) |
|---|---|

[ヒント]

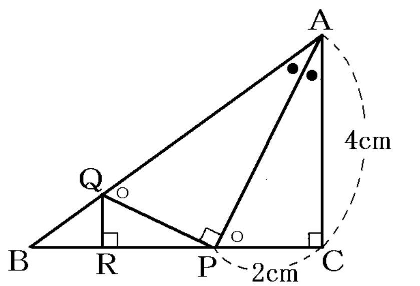



[解答](1) $2\sqrt{5}$ cm (2) $\sqrt{5}$ cm

[解説]

(1) △APC で三平方の定理より，

AP＝$\sqrt{AC^2+PC^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ (cm)




(2) △AQP∽△APC(2 角が等しい)より，

(大)：(小)

PQ：CP＝AP：AC

PQ：2＝$2\sqrt{5}$：4

比の外項の積は内項の積に等しいので，

4PQ＝$2\times2\sqrt{5}$，PQ＝$4\sqrt{5}\div4=\sqrt{5}$ (cm)

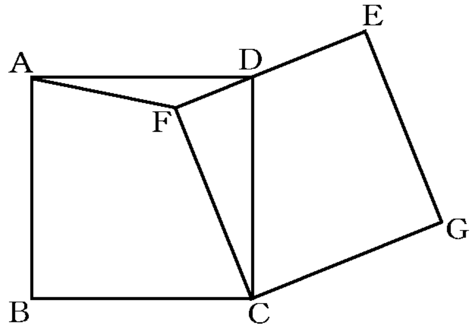
[問題]

右の図で，四角形 ABCD，EFCG はともに正方形で，点 D は辺 EF 上にある。AB＝13cm，EG＝12cm のとき，次の各問いに答えよ。

(1) 線分 ED の長さは何 cm か。

(2) △AFD の面積は何 $cm^2$ か。

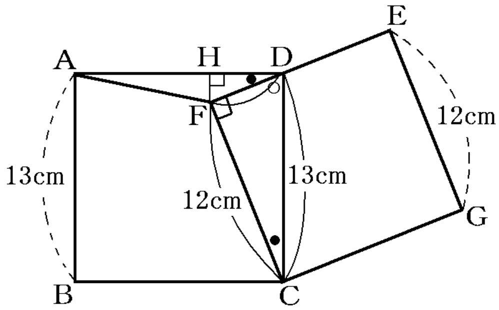
(愛知県)(***)




[解答欄]

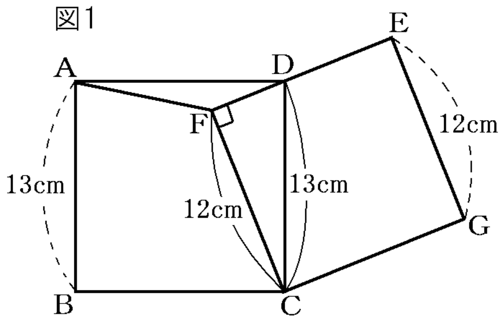
| (1) | (2) |
|---|---|

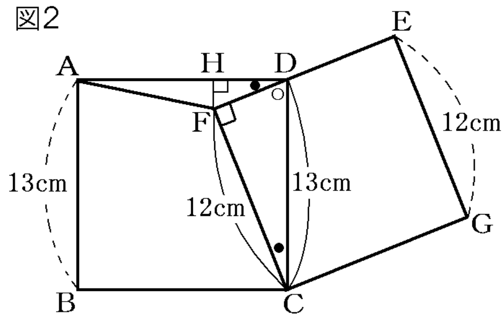
[ヒント]




[解答](1) 7cm　(2) $\dfrac{25}{2}$ $cm^2$

[解説]




(1) 図 1 の直角三角形 CDF で，三平方の定理より

DF＝$\sqrt{CD^2-CF^2}=\sqrt{13^2-12^2}=\sqrt{169-144}=\sqrt{25}=5$(cm)

ED＝EF−DF＝12−5＝7(cm)

(2) 図 2 のように F から AD に垂線 FH を引く。

△DFH∽△CDF(2 角が等しい)より，

DF：CD＝FH：DF，5：13＝FH：5

比の内項の積は外項の積に等しいので，

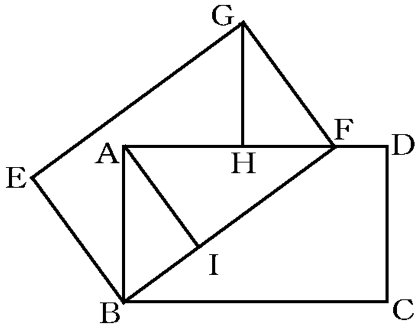
$13\text{FH}=5\times5$，$\text{FH}=\dfrac{25}{13}$ (cm)

(△AFD の面積)$=\dfrac{1}{2}\times\text{AD}\times\text{FH}=\dfrac{1}{2}\times13\times\dfrac{25}{13}=\dfrac{25}{2}$ (cm$^2$)

[問題]

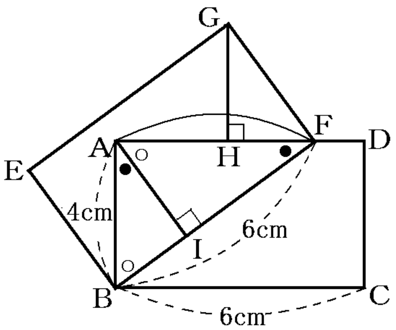
右の図のように，1 つの平面上に合同な 2 つの長方形 ABCD，EBFG があり，点 F は辺 AD 上の点である。また，線分 AF 上に点 H，辺 BF 上に点 I があり，GH⊥AF，AI⊥BF である。AB＝4cm，BC＝6cm のとき，線分 AI の長さは何 cm か。

(広島県)(***)




[解答欄]

[ヒント]

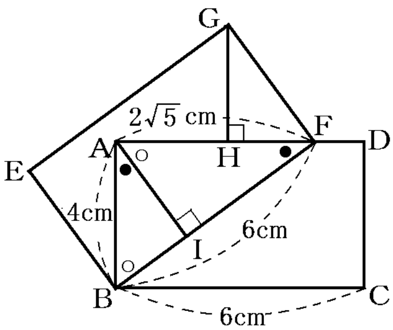



[解答] $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$ cm

[解説]

仮定より BF＝BC なので，BF＝6cm

△ABF で三平方の定理より，




$\text{AF}=\sqrt{BF^2-AB^2}=\sqrt{6^2-4^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ (cm)

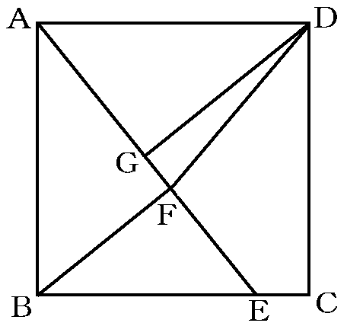
△ABI∽△FBA(2 角が等しい)より，AI：FA＝AB：FB

AI：$2\sqrt{5}$＝4：6　比の外項の積は内項の積に等しいので，

$6\text{AI}=2\sqrt{5}\times4$，$6\text{AI}=8\sqrt{5}$，$\text{AI}=\dfrac{8\sqrt{5}}{6}=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$ (cm)

[問題]

右の図において，四角形 ABCD は 1 辺の長さが 4cm の正方形である。E は，辺 BC 上にあって B，C と異なる点である。A と E とを結ぶ。F は，B から線分 AE にひいた垂線と線分 AE との交点である。G は，D から線分 AE にひいた垂線と線分 AE との交点である。D と F とを結ぶ。BE＝3cm であるとき，次の各問いに答えよ。




(1) 線分 BF の長さを求めよ。

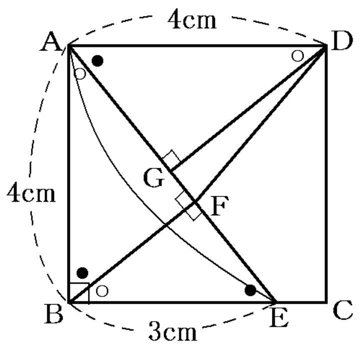
(2) 線分 DF の長さを求めよ。

(大阪府)(***)

[解答欄]

| | |
|---|---|
| (1) | (2) |

[ヒント]




[解答](1) $\dfrac{12}{5}$cm　(2) $\dfrac{4\sqrt{17}}{5}$cm

[解説]

図1

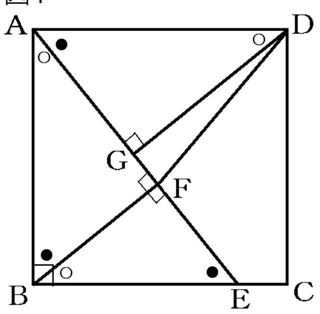



図2

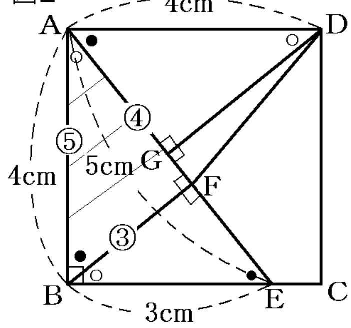
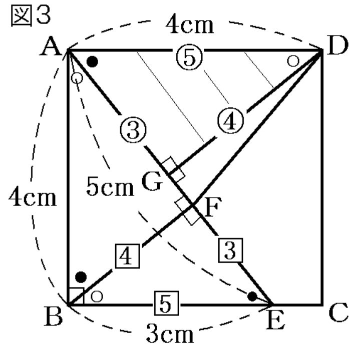



図3




∠BAE を○，∠BEA を●で表し，○＋●＝90° を使って等しい角を調べると図 1 のようになる。(例えば，△ABF で，∠BAF は○なので∠ABF は●になる。また，例えば，∠BAD は 90° で，∠BAE は○なので∠DAE は●になる。)

⑴ 三平方の定理より，AE＝$\sqrt{AB^2+EB^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$(cm)

図 2 で，2 角が等しいので，△ABF∽△AEB になる。
角(直角，○，●)の位置関係に注意して，それぞれの三角形の辺の比をくらべると，図 2 のように，△AEB で，AE : AB : EB＝5 : 4 : 3 なので，△ABF で，AB : AF : BF＝5 : 4 : 3 となることがわかる。

よって，BF＝AB×$\frac{3}{5}$＝$4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$(cm)

⑵ 図 3 で，2 角が等しいので，△DAG∽△AEB になる。
角(直角，○，●)の位置関係に注意して，それぞれの三角形の辺の比をくらべると，
AD : DG : AG＝5 : 4 : 3 となることがわかる。

AD＝4cm なので，DG＝$4\times\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$，AG＝$4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$

△BEF でも同様にして調べると，BE : BF : EF＝5 : 4 : 3 となることがわかる。

BE＝3cm なので，EF＝$3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$

よって，GF＝AE－AG－EF＝$5-\frac{12}{5}-\frac{9}{5}=\frac{25-12-9}{5}=\frac{4}{5}$

△DFG で，三平方の定理より，

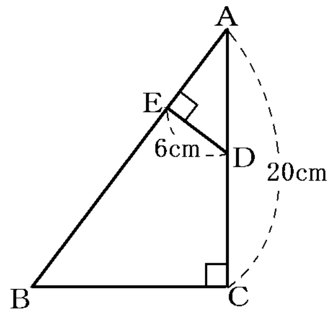
DF＝$\sqrt{GF^2+DG^2}=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{16}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{256}{25}}=\sqrt{\frac{272}{25}}=\frac{\sqrt{16\times17}}{5}=\frac{4\sqrt{17}}{5}$(cm)

【】長さ：その他

[問題]

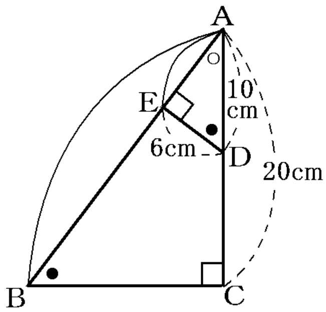
右の図のように，∠C＝90°，AC＝20cm の直角三角形 ABC がある。AC の中点 D から AB に垂線 DE をひくと，DE＝6cm であった。線分 BE の長さは何 cm か。

(兵庫県)(***)




[解答欄]

[ヒント]



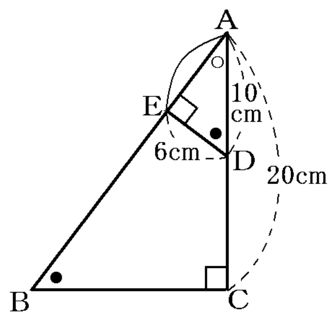

[解答]17cm

[解説]

この問題のポイントは，△ABC∽△ADE に気づくかどうかである。

まず，△ADE で，三平方の定理より，

$$AE=\sqrt{AD^2-DE^2}=\sqrt{10^2-6^2}=\sqrt{100-36}=\sqrt{64}=8\,(\text{cm})$$




AB の長さが求まれば，BE の長さがわかる。

直角三角形の 90° 以外の 2 つの角を●と○を使って表すと右図のようになる。∠A を○，∠B を●で表すと，○と●の和は 90° なので，∠ADE は●で表すことができる。

よって，2 角が等しいので，△ABC∽△ADE である。

2 つの三角形の辺の対応関係に注目して比例式を作る。

△ABC を(大)，△ADE を(小)と表すと，(大)：(小)の順で比例式を表すと，

AB(大)：AD(小)＝AC(大)：AE(小) となる。

AB：10＝20：8

比の外項の積は内項の積に等しいので，

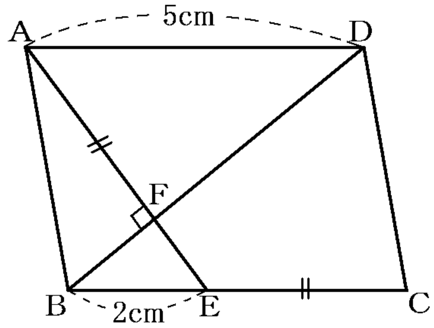
8AB＝10×20，AB＝200÷8＝25(cm)

よって，BE＝AB－AE＝25－8＝17(cm)

[問題]

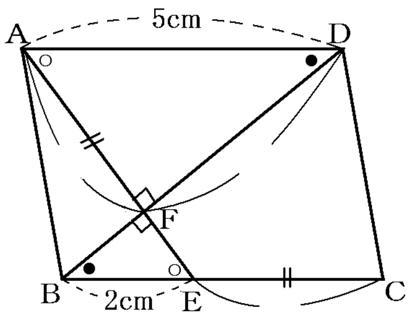
右の図のように，平行四辺形 ABCD の辺 BC 上に点 E があり，線分 AE と対角線 BD との交点を F とする。AF＝CE，∠AFD＝90°，AD＝5cm，BE＝2cm のとき，線分 BF の長さは何 cm か。

(広島県)(***)




[解答欄]

[ヒント]




[解答] $\frac{8}{5}$cm

[解説]

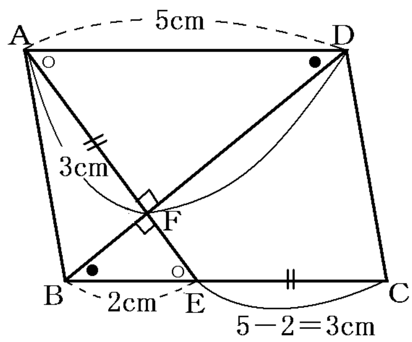
平行四辺形の向かいあう辺は等しいので，BC＝AD＝5cm

EC＝BC－BE＝5－2＝3(cm)

AF＝EC＝3cm

△ADF で，三平方の定理より，

DF＝$\sqrt{AD^2-AF^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$(cm)



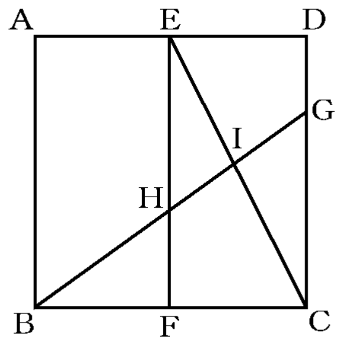

△ADF∽△EBF(2 角が等しい)より，BF：DF＝BE：DA

BF：4＝2：5，比の外項の積は内項の積に等しいので，

5BF＝4×2，BF＝8÷5＝$\frac{8}{5}$(cm)

[問題]

右の図のような正方形ABCDがあり，辺ADの中点をE，辺BCの中点をFとする。また，辺CD上に点GをCG：GD＝3：1となるようにとり，線分BGと線分EFとの交点をH，線分BGと線分CEとの交点をIとする。AB＝8cmのとき，線分HIの長さを求めよ。

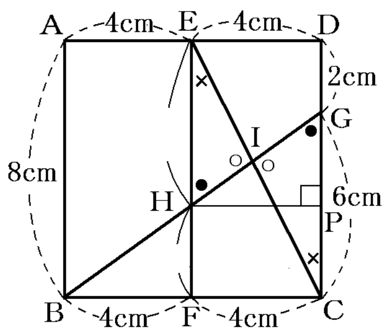



(神奈川県)(***)

[解答欄]

| |
|---|
| |

[ヒント]

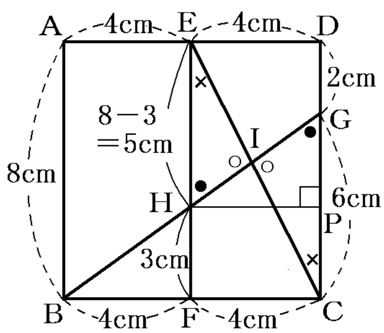



[解答] $\dfrac{25}{11}$ cm

[解説]

GHを求め，HIとGIの比からHIを求める。

右図の直角三角形GHPで，三平方の定理より，




GH＝$\sqrt{HP^2+GP^2}=\sqrt{4^2+(6-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ (cm)

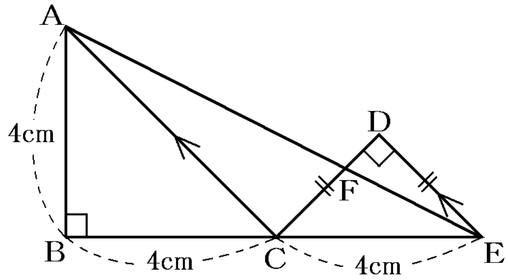
△EHI∽△CGI(2角が等しい)より，

HI：GI＝EH：CG＝5：6

よって，HI＝GH×$\dfrac{5}{5+6}$＝5×$\dfrac{5}{11}$＝$\dfrac{25}{11}$ (cm)

[問題]

右図で，△ABC は∠ABC＝90°，AB＝BC＝4cm の直角二等辺三角形であり，△DCE は∠CDE＝90°，CE＝4cm の直角二等辺三角形である。3 点 B，C，E はこの順に一直線上にあり，A，D は直線 BE について同じ側にある。このとき，AC // DE である。A と E とを結ぶ。F は，線分 AE と辺 CD との交点である。次の各問いに答えよ。




(1) 線分 AE の長さを求めよ。

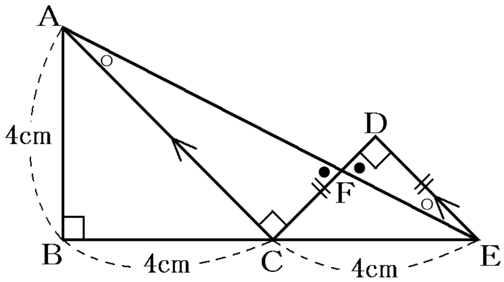
(2) 線分 CF の長さを求めよ。

(大阪府)(***)

[解答欄]

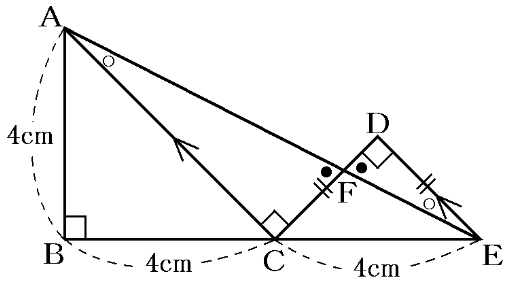
| (1) | (2) |
|---|---|

[ヒント]




[解答](1) $4\sqrt{5}$ cm　(2) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ cm

[解説]




(1) 直角三角形 AEB で，三平方の定理より，

AE＝$\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{4^2+8^2}=\sqrt{16+64}$

$=\sqrt{80}=\sqrt{16\times5}=4\sqrt{5}$ (cm)

(2) 45° 45° 90° の直角二等辺三角形の 3 辺の比は 1：1：$\sqrt{2}$ になるので，

△ACB で，AC＝$\sqrt{2}$ AB＝$\sqrt{2}\times4=4\sqrt{2}$ (cm)

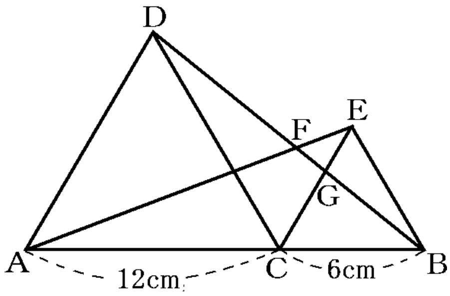
△CED で，CD＝ED＝CE×$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=4\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=\dfrac{4\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$ (cm)

△AFC∽△EFD(2 角が等しい)で，相似比は AC：ED＝$4\sqrt{2}$：$2\sqrt{2}$＝2：1 なので，

CF：DF＝2：1　よって，CF＝CD×$\dfrac{2}{3}=2\sqrt{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ (cm)

[問題]

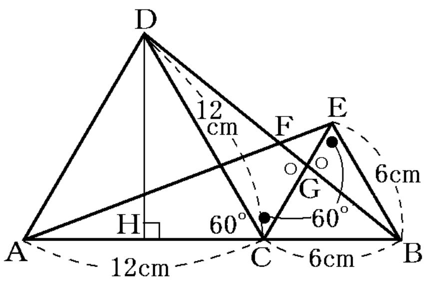
右の図のように，線分 AB 上に点 C をとり，AC，CB を，それぞれ 1 辺とする正三角形△ACD と△CBE を AB の同じ側につくる。また，AE と BD の交点を F，CE と BD の交点を G とする。AC＝12cm，CB＝6cm とする。BG の長さを求めよ。




(長野県)(***)

[解答欄]

[ヒント]




[解答] $2\sqrt{7}$ cm

[解説]

△DCG∽△BEG(2 角が等しい)で，

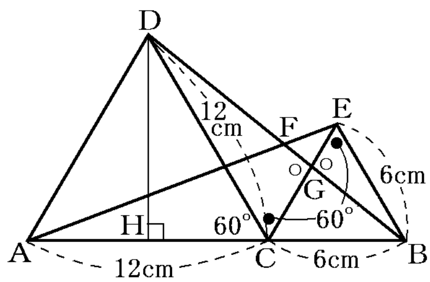
DC：BE＝12：6＝2：1 なので，

DG：BG＝2：1 になる。･･･①

したがって，DB の長さがわかれば BG の長さを求めることができる。

そこで，D から AC に垂線 DH を引く。

△CDH は 90° 30° 60° の直角三角形なので，3 辺の比は 2：1：$\sqrt{3}$ になる。




よって，CH＝$12\times\frac{1}{2}=6$ (cm)，DH＝$12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$ (cm)

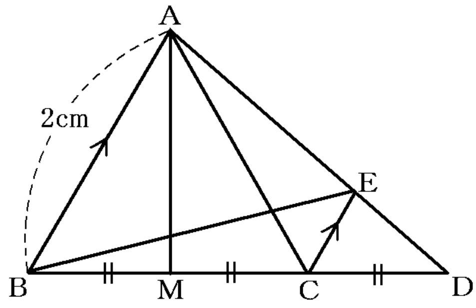
直角三角形 BDH で，BH＝6＋6＝12(cm)，DH＝$6\sqrt{3}$ cm なので，三平方の定理より，

DB＝$\sqrt{BH^2+DH^2}=\sqrt{12^2+\left(6\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{144+108}=\sqrt{252}=\sqrt{36\times7}=6\sqrt{7}$ (cm)

①より，BG＝DB×$\frac{1}{3}=6\sqrt{7}\times\frac{1}{3}=2\sqrt{7}$ (cm)

[問題]

右の図のように, 1 辺の長さが 2cm の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点を M とし，また，BC の延長上に点 D を，MC＝CD となるようにとる。さらに，点 C を通り辺 AB に平行な直線と線分 AD との交点を E とする。このとき，次の各問いに答えよ。




(1) △AMD の面積を求めよ。

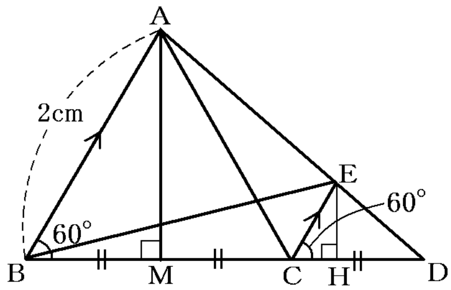
(2) 線分 BE の長さを求めよ。

(茨城県)(***)

[解答欄]

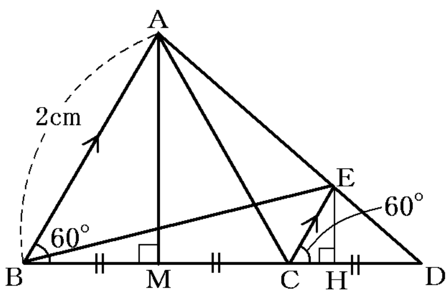
| (1) | (2) |
|---|---|

[ヒント]




[解答](1) $\sqrt{3}$ cm² (2) $\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$ cm

[解説]




(1) △ABM は 30° 90° 60° の直角三角形で,

3 辺の比は $1:2:\sqrt{3}$ になるので,

$AM=AB\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ (cm)

MD＝BC＝AB＝2(cm)

(△AMD の面積)$=\dfrac{1}{2}\times MD\times AM=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}$ (cm²)

(2) E から CD に垂線 EH を引く。

仮定より CE // AB で，DC : DB＝1 : 3 なので，CE : AB＝1 : 3

よって，$CE=AB\times\dfrac{1}{3}=2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ (cm)

△CFH は 30° 90° 60° の直角三角形で，3 辺の比は $1:2:\sqrt{3}$ になるので,

$CH=CE\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$ (cm)

$$\mathrm{EH}=\mathrm{CE}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{(cm)}$$

よって，△BEH で，BH＝BC＋CH＝$2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ (cm)，EH＝$\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm

三平方の定理より，

$$\mathrm{BE}=\sqrt{BH^2+EH^2}=\sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{3}{9}}=\sqrt{\frac{52}{9}}=\frac{\sqrt{4\times13}}{3}=\frac{2\sqrt{13}}{3}\ \mathrm{(cm)}$$

[問題]

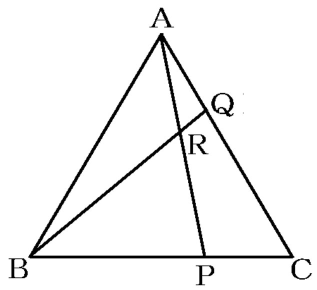
右の図の△ABC は正三角形で，CP＝AQ である。

次の各問いに答えよ。

(1) △APC≡△BQA であることを証明せよ。

(2) AB＝8cm，BP＝5cm のとき，線分 AR の長さは何 cm か。

(東京都)(****)



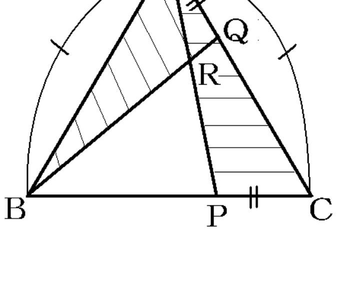

[解答欄]

| (1) |
| --- |
| |

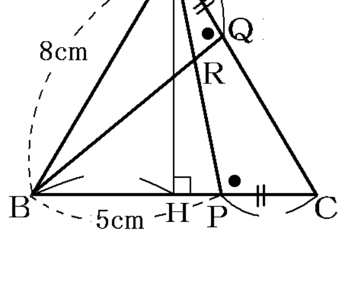
| (2) |
| --- |

[ヒント]

(1)




(2)



[解答]

(1) △APC と△BQA で,

仮定より,

CP＝AQ ・・・①

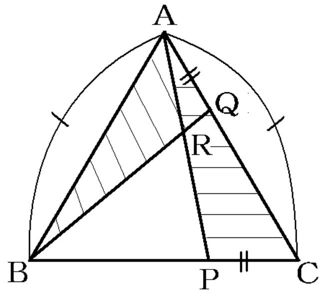
△ABC は正三角形なので,

AC＝BA ・・・②

∠ACP＝∠BAQ＝60° ・・・③

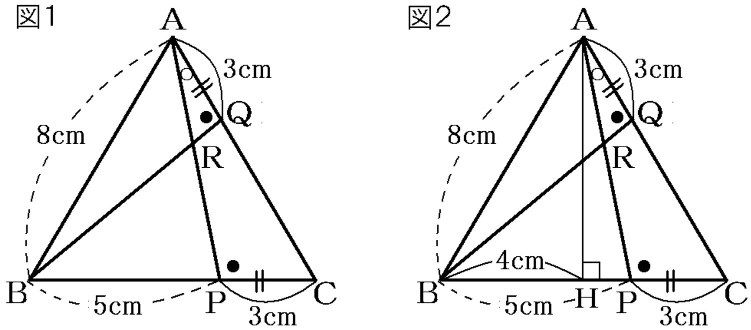
①, ②, ③から, 2 組の辺とその間の角が, それぞれ等しいので,

△APC≡△BQA




(2) $\dfrac{24}{7}$ cm

[解説]




(2) 図 1 の△AQR と△APC で,

∠CAP は共通

(1)より△APC≡△BQA で, 合同な図形の対応する角は等しいので, ∠AQR＝∠APC

よって, 2 角が等しいので,

△AQR∽△APC

よって, AR : AC＝AQ : AP, AR : 8＝3 : AP・・・④

AP の長さがわかれば, AR を求めることができる。

そこで, 図 2 のように, A から BC に垂線 AH を引く。

△ABH で三平方の定理より, AH＝$\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{64-16}=\sqrt{48}$ (cm)

△APH で三平方の定理より, AP＝$\sqrt{AH^2+PH^2}=\sqrt{48+1^2}=\sqrt{49}=7$ (cm)

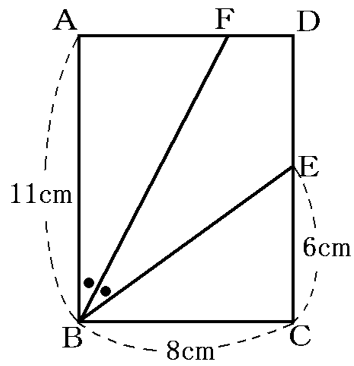
④に AP＝7 を代入すると, AR : 8＝3 : 7

比の外項の積は内項の積に等しいので,

7AR＝8×3, AR＝24÷7＝$\dfrac{24}{7}$ (cm)

[問題]

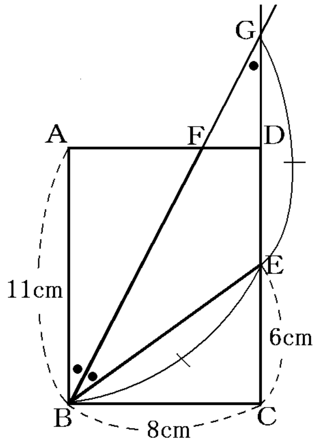
右の図のような長方形 ABCD があり，AB＝11cm，BC＝8cm である。点 E は辺 CD 上の点で，CE＝6cm である。∠ABE の二等分線をひき，辺 AD との交点を F とするとき，線分 DF の長さは何 cm か。




(香川県)(****)

[解答欄]

[ヒント]




[解答] $\dfrac{5}{2}$ cm

[解説]

図1

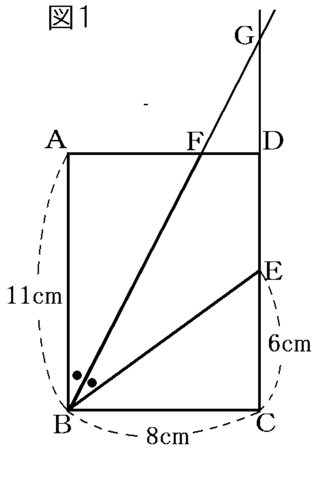



図2

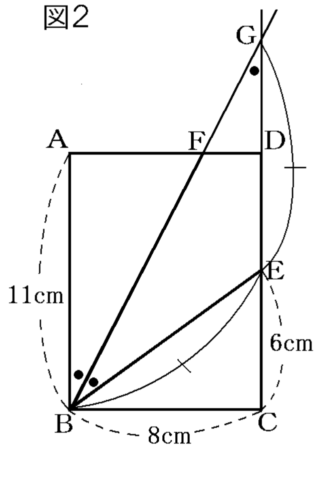



図3

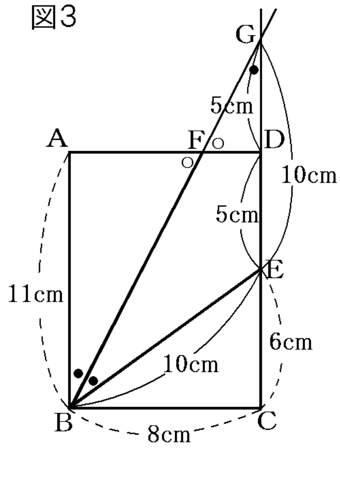



図1のように, BF の延長線と CD の延長線の交点を G とする(この補助線がポイントである)。

図2において，AB // GC で，平行線の錯角は等しいので，∠ABG＝∠BGC

∠EBG＝∠ABG＝∠BGC

よって，△EBG は2つの角が等しいので二等辺三角形になり，EB＝EG

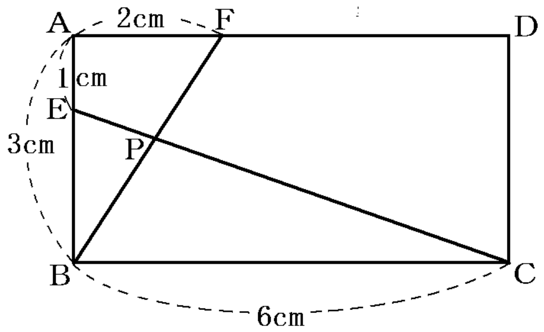
図2において，直角三角形 EBC で，三平方の定理より，

EB＝$\sqrt{BC^2+EC^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$(cm)

よって，EG＝EB＝10cm，
DE＝11－6＝5(cm)なので，GD＝EG－DE＝10－5＝5(cm)
△BFA∽△GFD(2 角が等しい)より，
AF：DF＝BA：GD，AF：DF＝11：5
よって，DF＝AD×$\dfrac{5}{11+5}=8\times\dfrac{5}{16}=\dfrac{5}{2}$(cm)

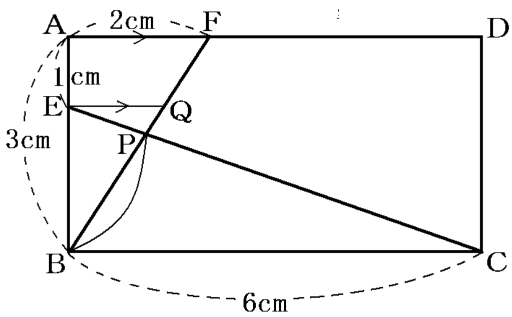
[問題]

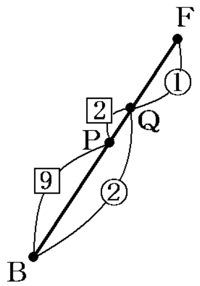
右図のように，AB＝3cm，BC＝6cm の長方形 ABCD がある。2 辺 AB，AD 上にそれぞれ点 E，F があり，AE＝1cm，AF＝2cm である。さらに，線分 BF と線分 CE の交点を P とする。線分 BP の長さは何 cm か。
(長崎県改)(****)




[解答欄]

[ヒント]



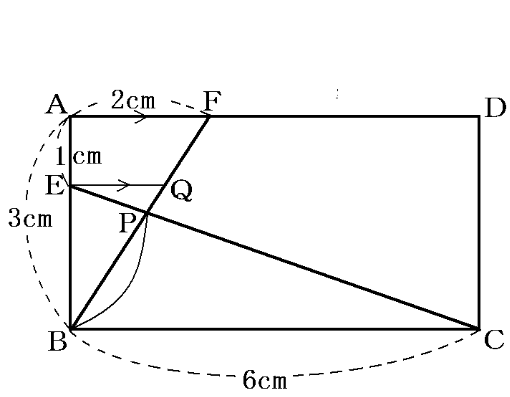

[解答] $\dfrac{6\sqrt{13}}{11}$cm

[解説]

右図のように，AD に平行な補助線 EQ を引く(この補助線がポイントである)。
△BFA で，三平方の定理より，

BF＝$\sqrt{BA^2+FA^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$(cm)･･･①

BP：PQ：QF がわかれば BP を計算できる。



AF // EQ なので，平行線の性質より，

BQ：QF＝BE：EA＝(3－1)：1＝2：1･･･②

また，EQ：AF＝BE：BA，EQ：2＝2：3

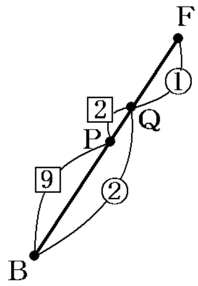
比の外項の積は内項の積に等しいので，3EQ＝2×2，EQ＝$\dfrac{4}{3}$

EQ // BC なので，平行線の性質より，

QP：BP＝EQ：BC＝$\dfrac{4}{3}$ ：6＝4：18＝2：9･･･③

②より BQ：QF＝2：1，③より QP：BP＝2：9

比の関係を数直線で表すと右図のようになる。PQ＝$4a$ とおく（$a$ とおいてもよい）




BP＝$4a\times\dfrac{9}{2}=18a$，BQ＝$4a+18a=22a$，QF＝$22a\times\dfrac{1}{2}=11a$

BF＝BQ＋QF＝$22a+11a=33a$

①より，BF＝$\sqrt{13}$ (cm)なので，$33a=\sqrt{13}$，$a=\dfrac{\sqrt{13}}{33}$

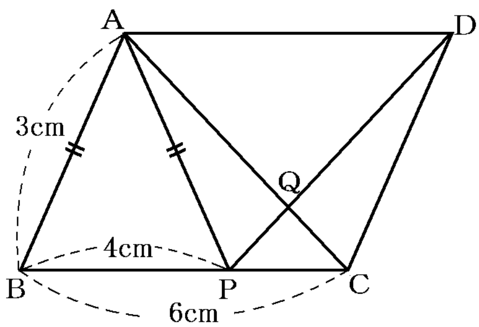
BP＝$18a$ ＝$18\times\dfrac{\sqrt{13}}{33}=\dfrac{6\sqrt{13}}{11}$ (cm)

【】面積：高さが共通・底辺比→面積比

[問題]

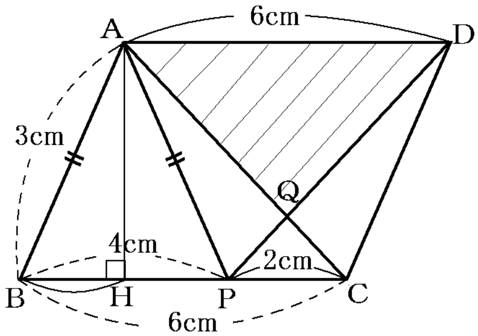
右の図の平行四辺形 ABCD において，AB＝AP となる点 P をとる。対角線 AC と線分 DP との交点を Q とする。AB＝3cm，BC＝6cm，BP＝4cm のとき，△AQD の面積は何 $\mathrm{cm}^2$ か。

(東京都)(***)




[解答欄]

[ヒント]

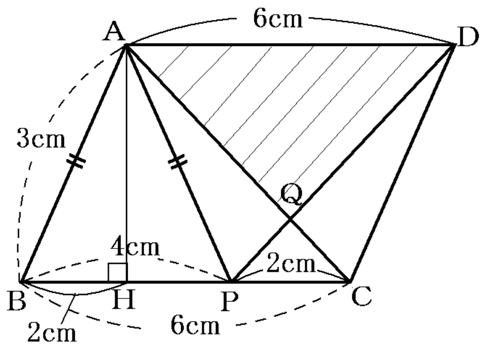



[解答] $\dfrac{9\sqrt{5}}{4}$ $\mathrm{cm}^2$

[解説]

まず，△APD の面積を求める。△APD の底辺を AD とすると，高さは AH と等しくなる。

△ABH で，三平方の定理より，




AH＝$\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ (cm)

(△APD の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×AD×AH＝$\dfrac{1}{2}\times 6\times\sqrt{5}$

＝$3\sqrt{5}$ ($\mathrm{cm}^2$)

次に，AD // PC なので，平行線の性質より，

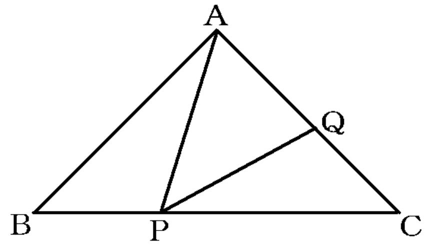
PQ：QD＝PC：AD＝2：6＝1：3

△APQ の底辺を PQ，△AQD の底辺を QD とすると，高さが共通なので，面積比は底辺の比と同じになる。PQ：QD＝1：3 なので，(△APQ の面積)：(△AQD の面積)＝1：3

よって，(△AQD の面積)＝(△APD の面積)×$\dfrac{3}{1+3}$＝$3\sqrt{5}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9\sqrt{5}}{4}$ ($\mathrm{cm}^2$)

[問題]

右の図のように，$\angle BAC=90°$，$AB=3\sqrt{2}$ cm の直角二等辺三角形 ABC がある。辺 BC 上に BP＝2cm となる点 P をとり，辺 CA 上に$\angle APQ=45°$ となる点 Q をとる。このとき，次の各問いに答えよ。




(1) BC の長さを求めよ。

(2) △ABP∽△PCQ であることを証明せよ。

(3) CQ の長さを求めよ。

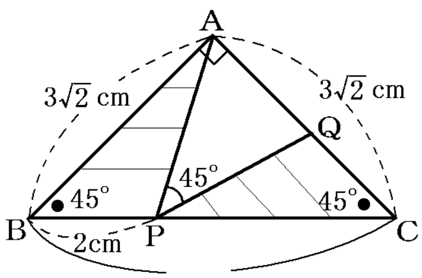
(4) △APQ の面積を求めよ。

(佐賀県)(***)

[解答欄]

| (1) | |
|---|---|
| (2) | |
| (3) | (4) |

[ヒント]



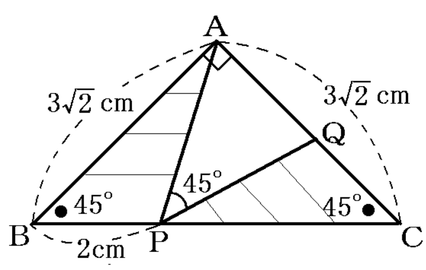

[解答](1) 6cm

(2) △ABP と△PCQ で，

仮定より△ABC は直角二等辺三角形なので，

$\angle ABP=\angle PCQ=45°$ ・・・①

△PCQ で，三角形の外角は，そのとなりにない 2 つの内角の和に等しいので，



∠PCQ＋∠PQC＝∠BPQ

45° ＋∠PQC＝∠APB＋45°

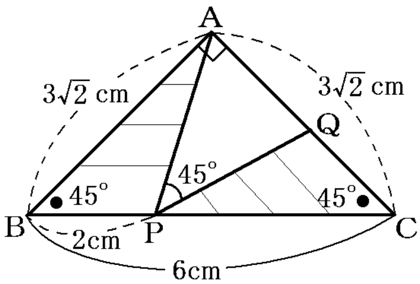
よって，∠PQC＝∠APB ･･･②

①，②より，2 組の角が，それぞれ等しいので，△ABP∽△PCQ

(3) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$cm　(4) $\dfrac{10}{3}$cm²

[解説]

(1) △ABC は 45° 45° 90° の直角三角形なので，3 辺の比は $1:1:\sqrt{2}$ になる。




よって，$BC=AB\times\dfrac{\sqrt{2}}{1}=3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=6$(cm)

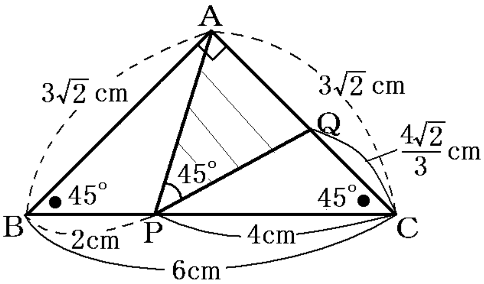
(3) (1)より BC＝6cm なので，CP＝6－2＝4(cm)

(2)より△ABP∽△PCQ で，相似な図形の対応する辺の比は等しいので，AB：CP＝BP：CQ，$3\sqrt{2}:(6-2)=2:CQ$

比の外項の積は内項の積に等しいので，

$3\sqrt{2}\times CQ=4\times2$，$CQ=\dfrac{8}{3\sqrt{2}}=\dfrac{8\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{8\sqrt{2}}{6}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$(cm)

(4) (△ABC の面積)$=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=9$(cm²)




△ABP の底辺を BP，△APC の底辺を PC とすると，2 つの三角形の高さは共通なので，面積比は底辺の比(2：4＝1：2)と等しくなる。

よって，(△APC の面積)＝(△ABC の面積)$\times\dfrac{2}{1+2}$

$=9\times\dfrac{2}{3}=6$(cm²)

次に，△PCQ と△APQ について考える。

△PCQ の底辺を CQ，△APQ の底辺を AQ とすると，2 つの三角形の高さは共通なので，面積比は底辺の比と等しくなる。

(3)より $CQ=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$cm なので，$AQ=3\sqrt{2}-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}=\dfrac{9\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{3}=\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$(cm)

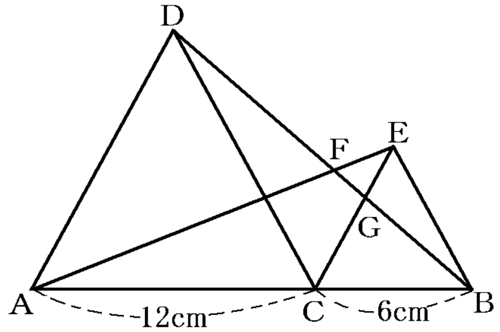
$CQ:AQ=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}:\dfrac{5\sqrt{2}}{3}=4:5$

したがって，(△PCQ の面積)：(△APQ の面積)＝4：5 になる。

よって，(△APQ の面積)＝(△APC の面積)$\times\dfrac{5}{4+5}=6\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{10}{3}$(cm²)

[問題]

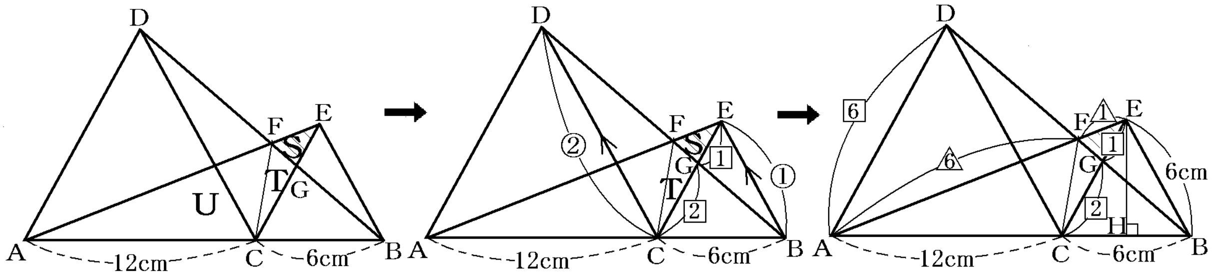
右の図のように，線分 AB 上に点 C をとり，AC，CB を，それぞれ 1 辺とする正三角形△ACD と△CBE を AB の同じ側につくる。また，AE と BD の交点を F，CE と BD の交点を G とする。AC＝12cm，CB＝6cm とする。△EFG の面積を求めよ。




(長野県)(****)

[解答欄]

[ヒント]




[解答]$\dfrac{6\sqrt{3}}{7}$ cm$^2$

[解説]

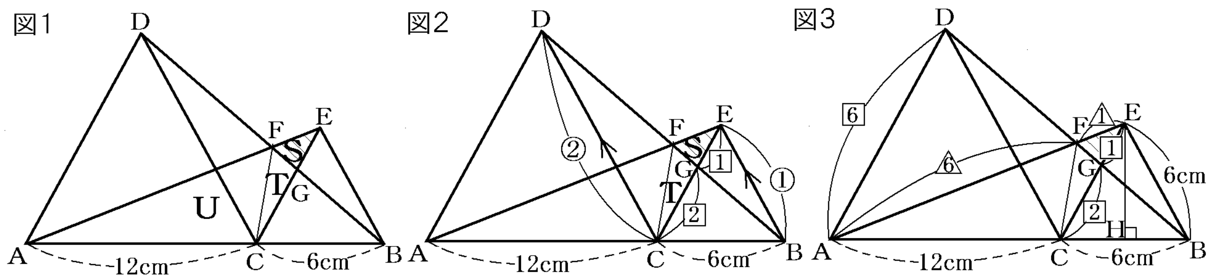



図 1 の△EAC に注目する。CF を結んで，△EAC を図のように S，T，U の 3 つの部分に分ける。3 つの部分の面積比と△EAC の面積がわかれば，S の部分の面積を求めることができる。

図 2 で，△DCG∽△BEG で，相似比は DC：BE＝12(cm)：6(cm)＝2：1 なので，

CG：EG＝2：1

T と S の三角形の底辺をそれぞれ CG，EG とすると高さは共通になるので，面積比は底辺の比と等しくなる。よって，(T の面積)：(S の面積)＝2：1

(S の面積)＝ $x$ (cm$^2$)とすると，(T の面積)＝ $2x$ (cm$^2$)となる。

図 3 で，EC：DA＝6(cm)：12(cm)＝3：6 なので，EG：CG：DA＝1：2：6

△DAF∽△EGF で DA：EG＝6：1 なので，AF：EF＝6：1

△CAF と△CEF の底辺をそれぞれ AF，EF とすると，高さが共通なので面積比は底辺の比 6：1 になる。したがって，(U の面積)：(S と T の面積の和)＝6：1

(U の面積)＝(S と T の面積の和)×6＝$(x+2x)\times 6=18x$ (cm²)

よって，(△EAC の面積)＝(S の面積)＋(T の面積)＋(U の面積)＝$x+2x+18x=21x$ (cm²)

次に，△EAC の面積を求める。底辺を AC とすると，高さは図 3 の EH になる。

△EBH は 90°30°60°の直角三角形なので，3 辺の比は 2：1：$\sqrt{3}$ になるので，

EH＝EB×$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ (cm)

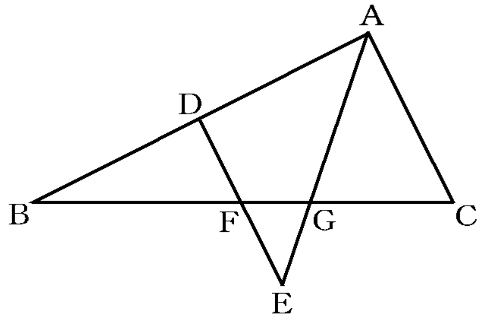
よって，(△EAC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×AC×EH＝$\dfrac{1}{2}\times 12\times 3\sqrt{3}=18\sqrt{3}$ (cm²)

よって，$21x=18\sqrt{3}$，$x=\dfrac{18\sqrt{3}}{21}=\dfrac{6\sqrt{3}}{7}$ (cm²)

【】面積：その他

[問題]

右の図のように, AB＝4cm, CA＝2cm, ∠A＝90°の直角三角形ABCがある。辺ABの中点をDとし, 辺ABの垂直二等分線と∠Aの二等分線との交点をEとする。線分DEと辺BCとの交点をF, 線分AEと辺BCとの交点をGとする。次の各問いに答えよ。




(1) 線分DFの長さを求めよ。

(2) △ADEの面積を求めよ。

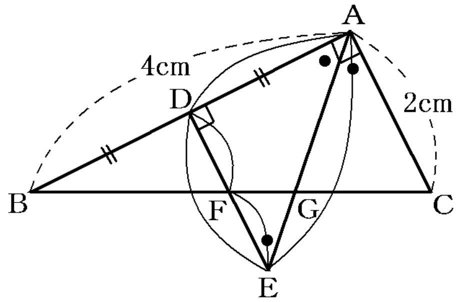
(3) 線分AGの長さを求めよ。

(徳島県)(***)

[解答欄]

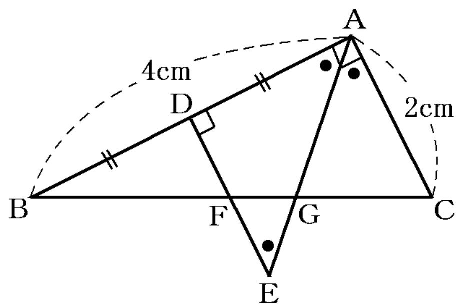
| | | |
|---|---|---|
| (1) | (2) | (3) |

[ヒント]




[解答](1) 1cm　(2) 2cm²　(3) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$cm

[解説]




(1) DF // AC なので平行線の性質より,

DF：AC＝BD：BA＝1：2

よって，DF＝$\dfrac{1}{2}$AC＝$\dfrac{1}{2}\times 2=1$(cm)

(2) 右図のように，DE // AC なので,

∠DEA＝∠CAE

また，∠DAE＝∠CAE なので，∠DEA＝∠DAE

したがって，△ADE は直角二等辺三角形であるので,

ED＝AD＝2cm である。

(△ADE の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×ED×AD＝$\dfrac{1}{2}\times 2\times 2=2$(cm²)

(3) △AED は 45° 45° 90° の直角三角形なので,

3 辺の比は 1 : 1 : $\sqrt{2}$ になる。

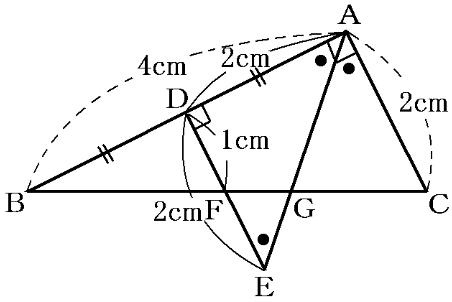
AE＝AD×$\dfrac{\sqrt{2}}{1}$ = 2×$\sqrt{2}$ = 2$\sqrt{2}$ (cm)

FE // AC なので平行線の性質より,

EG : AG＝FE : AC＝1 : 2

AE＝ 2$\sqrt{2}$ cm で, EG : AG＝1 : 2 なので,

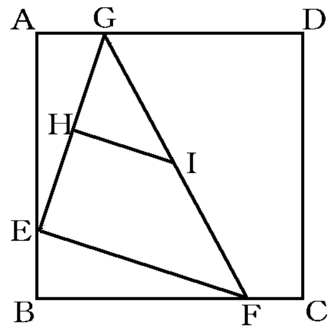
AG＝AE×$\dfrac{2}{1+2}$ = 2$\sqrt{2}$×$\dfrac{2}{3}$=$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ (cm)




[問題]

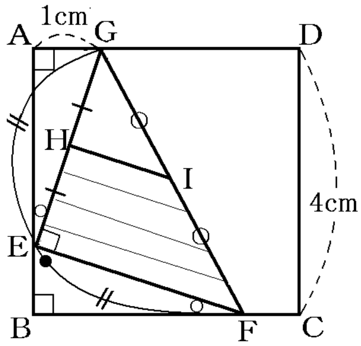
辺の長さが 4cm の正方形 ABCD がある。EG＝EF, ∠GEF＝90° , AG＝1cm である。また, 点 H, I は, それぞれ線分 GE, GF の中点である。四角形 HEFI の面積を求めよ。

(宮崎県)(***)




[解答欄]

[ヒント]




[解答] $\dfrac{15}{4}$ cm²

[解説]

△GEA と△EFB で,

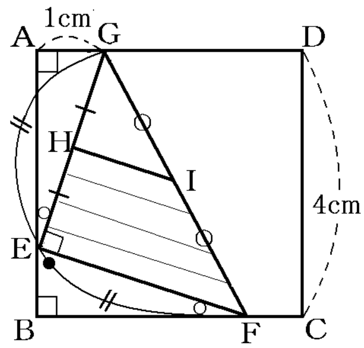
∠A＝∠B＝90° ･･･①

仮定より, EG＝EF ･･･②

∠GEA＋∠FEB＝90°

∠EFB＋∠FEB＝90° なので,

∠GEA＝∠EFB ･･･③



①，②，③から，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角が，それぞれ等しいので，
△GEA≡△EFB
合同な図形では，対応する辺の長さは等しいので，EB＝AG＝1cm
したがって，AE＝AB－EB＝4－1＝3cm
△GEA で三平方の定理より，

GE＝$\sqrt{AE^2+AG^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$(cm)

EF＝GE＝$\sqrt{10}$ cm

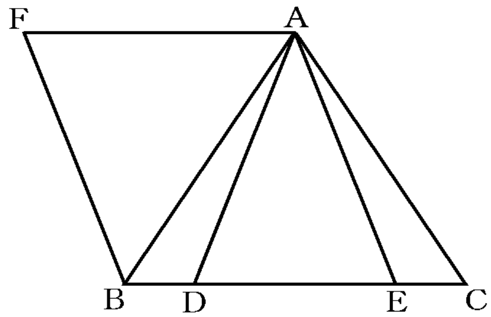
(△GFE の面積)＝$\frac{1}{2}$×EF×GE＝$\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}=\frac{10}{2}$＝5(cm$^2$)

△GIH∽△GFE で，相似比は 1：2 なので面積比は $1^2:2^2$＝1：4 となる。

したがって，(△GIH の面積)＝(△GFE の面積)×$\frac{1}{4}=5\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$(cm$^2$)

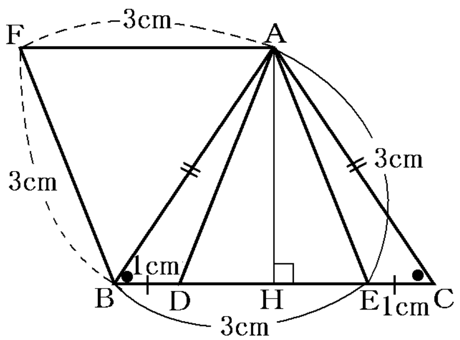
よって，(四角形 HEFI の面積)＝(△GFE の面積)－(△GIH の面積)＝$5-\frac{5}{4}=\frac{15}{4}$(cm$^2$)

[問題]
　右の図のように，AB＝AC の二等辺三角形 ABC の辺 BC 上に，2 点 D，E があり，BE＝CD である。
また，四角形 AFBE は平行四辺形である。
AF＝3cm，BF＝3cm，BD＝1cm のとき，
四角形 AFBC の面積を求めよ。
(山口県)(***)




[解答欄]

[ヒント]




[解答] $7\sqrt{2}$ cm$^2$

[解説]

四角形 AFBC は AF // BC の台形で，上底は 3cm，下底は 4cm になる。

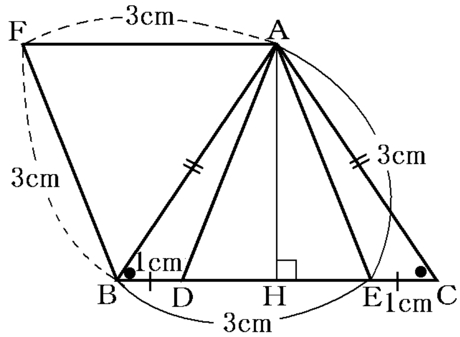
A から BC に垂線 AH を引くとき，AH の長さがわかれば，四角形 AFBC の面積を求めることができる。

△ABD≡△ACE(2 辺とその間の角)なので，

AD＝AE となり，△ADE は二等辺三角形になる。

DE＝3－1＝2(cm)なので，EH＝2÷2＝1(cm)である。

直角三角形 AEH で，三平方の定理より，

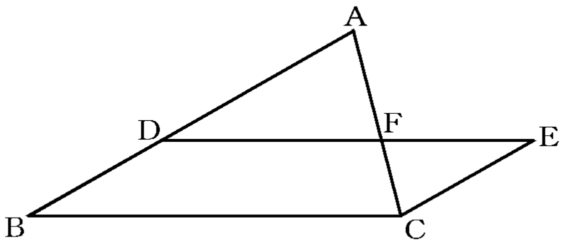



AH＝$\sqrt{AE^2-EH^2}=\sqrt{9-1}=\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=2\sqrt{2}$ (cm)

よって，(四角形 AFBC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(AF＋BC)×AH＝$\frac{1}{2}\times(3+4)\times 2\sqrt{2}=7\sqrt{2}$ (cm²)

[問題]

右の図のように，BA＝BC＝10cm，AC＝5cm の二等辺三角形 ABC がある。辺 AB 上に AD＝6cm となる点 D をとり，DB と BC を 2 辺とする平行四辺形 DBCE をつくる。DE と AC の交点を F とするとき，次の各問いに答えよ。




(1) 線分 AF の長さを求めよ。

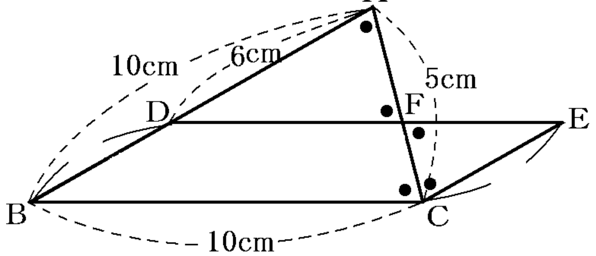
(2) △CEF の面積を求めよ。

(佐賀県)(***)

[解答欄]

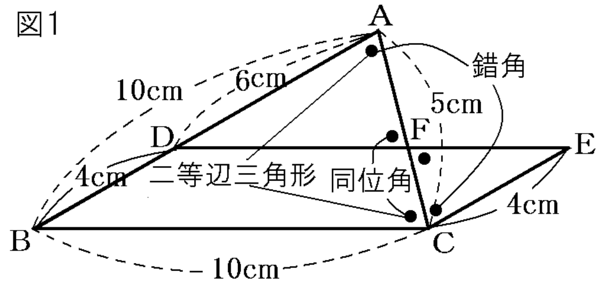
| (1) | (2) |
|---|---|

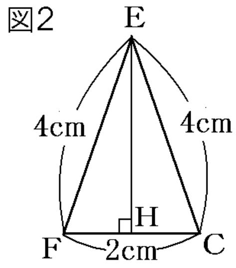
[ヒント]




[解答](1) 3cm　(2) $\sqrt{15}$ cm²

[解説]




(1) DF // BC なので平行線の性質より，

AF : AC＝AD : AB

AF : 5＝6 : 10

比の外項の積は内項の積に等しいので，

10AF＝5×6，AF＝30÷10＝3(cm)

(2) BA＝BC なので，△BAC は二等辺三角形である。二等辺三角形の 2 つの底角(図 1 の●)は等しい。同位角や錯角の関係を使って角の関係を調べると図 1 のようになる。その結果，△ECF は 2 つの底角(●)が等しいので二等辺三角形になる。二等辺三角形の 3 辺がわかれば面積を計算できる。

図 1 で，EC＝DB＝AB−AD＝10−6＝4(cm)

(1)より AF＝3cm なので，FC＝5−3＝2(cm)

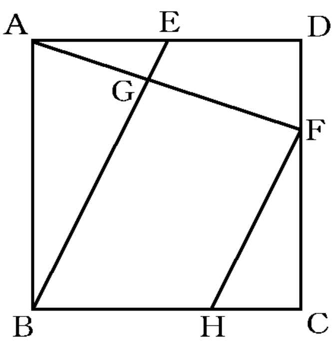
図 2 の直角三角形 EFH で，三平方の定理より，

EH＝$\sqrt{EF^2-FH^2}=\sqrt{16-1}=\sqrt{15}$ (cm)

よって，(△CEF の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×FC×EH＝$\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{15}=\sqrt{15}$ (cm²)

[問題]

右の図で，四角形 ABCD は正方形で，E は辺 AD の中点，F は辺 DC 上の点で DF : FC＝1 : 2 である。また，G は線分 EB と AF との交点，H は辺 BC 上の点で，EB // FH である。AB＝6cm のとき，次の各問いに答えよ。




(1) 線分 FH の長さは何 cm か。

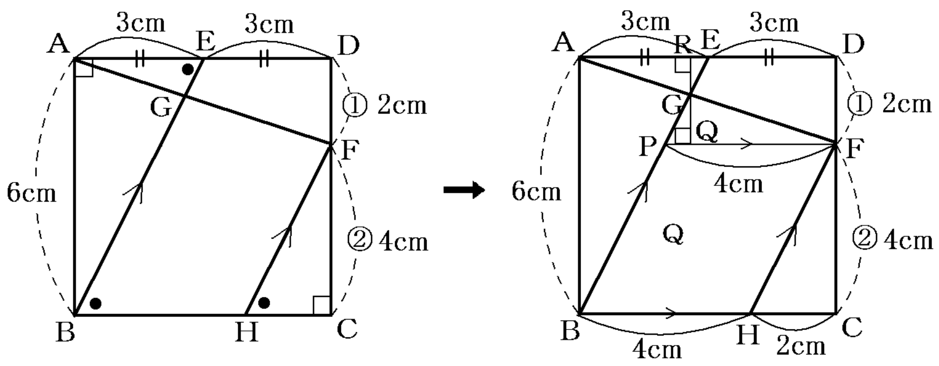
(2) 四角形 GBHF の面積は何 cm² か。

(愛知県)(****)

[解答欄]

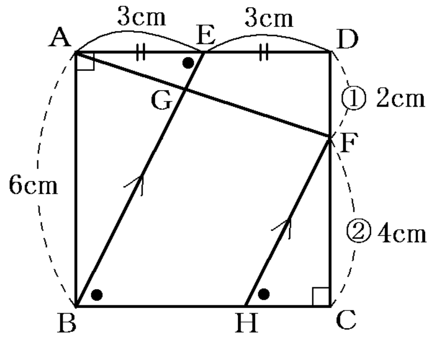
| | |
|---|---|
| (1) | (2) |

[ヒント]




[解答](1)　$2\sqrt{5}$ cm　(2)　$\dfrac{128}{7}$ cm²

[解説]




(1) △FHC∽△BEA(2 角が等しい)ので，

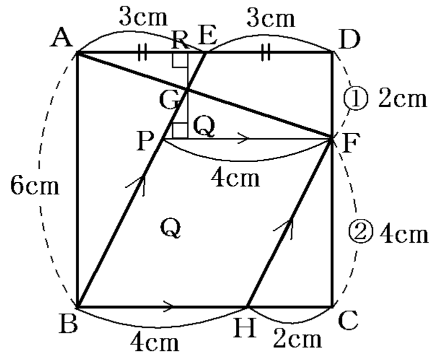
CH：AE＝FC：BA，CH：3＝4：6

比の外項の積は内項の積に等しいので，

6CH＝3×4，CH＝12÷6＝2(cm)

△FHC で，三平方の定理より，

FH＝$\sqrt{FC^2+CH^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=2\sqrt{5}$ (cm)




(2) 右図のように，PF // BC となるような点 P をとる。

(この補助線がこの問題のポイントである。)

四角形 GBHF を平行四辺形 PBHF と△GPF に分ける。

平行四辺形 PBHF の底辺を BH＝4cm とすると，高さは FC＝4cm であるので，

(平行四辺形 PBHF の面積)＝BH×FC＝4×4＝16(cm²)

次に，△GPF の面積を計算する。

図のように点 Q，R をとる。

△AGE∽△FGP(2 角が等しい)で，相似比は AE：FP＝3：4 なので，RG：GQ＝3：4

RQ＝DF＝2cm なので，GQ＝RQ×$\dfrac{4}{3+4}$＝$2\times\dfrac{4}{7}$＝$\dfrac{8}{7}$(cm)

(△GPF の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×PF×GQ＝$\dfrac{1}{2}\times4\times\dfrac{8}{7}$＝$\dfrac{16}{7}$(cm²)

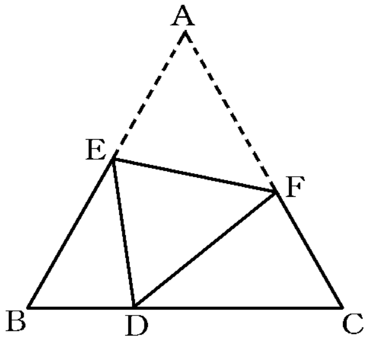
よって，(四角形 GBHF の面積)＝(PBHF の面積)＋(△GPF の面積)＝$16+\dfrac{16}{7}$＝$\dfrac{128}{7}$(cm²)

[問題]

　右の図のように，正三角形ABCの辺BC上にBD：DC＝1：2となる点Dをとり，頂点Aが点Dと重なるように折り返すと，折り目は辺AB上の点Eと辺AC上の点Fを結ぶ線分EFとなった。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) △BDE∽△CFDを証明せよ。

(2) BC＝12cm，CF＝5cmのとき，三角形DEFの面積を求めよ。




(高知県)(****)

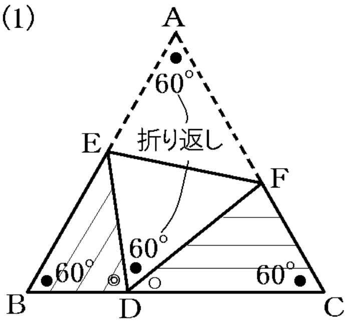
[解答欄]

(1)

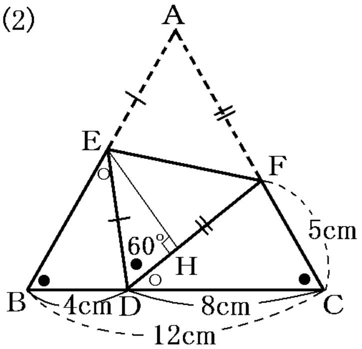
(2)

[ヒント]

(1)



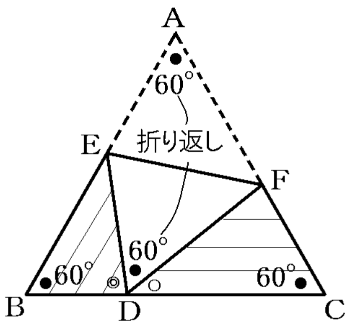

(2)



[解答]

(1) △BDE と△CFD で,

仮定より△ABC は正三角形なので,




　∠DBE＝∠FCD＝60°　･･･①

　∠EAF＝60°

折り返しているので,

　∠EDF＝∠EAF＝60°

　∠BDE＋60°　＋∠CDF＝180°　･･･②

△BDE で，内角の和は 180°　なので,

　∠BDE＋60°　＋∠BED＝180°　･･･③

②，③より，∠CDF＝∠BED　･･･④

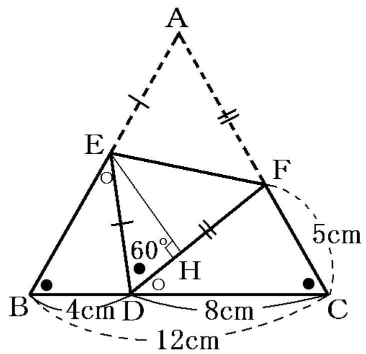
①，④から，2 組の角が，それぞれ等しいので,

　△BDE∽△CFD

(2) $\dfrac{49\sqrt{3}}{5}$cm²

[解説]

(2) BC＝12cm，BD：DC＝1：2 なので,




BD＝$12\times\dfrac{1}{3}=4$(cm)，DC＝$12\times\dfrac{2}{3}=8$(cm)

右図のように，E から DF に垂線 EH を引く。

△DEF の底辺を DF とすると，高さは EH になる。

DF と EH の長さが求まれば面積が計算できる。

折り返しているので，DF＝AF＝12－5＝7(cm)　･･･①

(1)より，△BDE∽△CFD なので,

BE：CD＝BD：CF，BE：8＝4：5

比の外項の積は内項の積に等しいので,

5BE＝8×4，BE＝$\dfrac{32}{5}$(cm)

DE＝AE＝AB－BE＝$12-\dfrac{32}{5}=\dfrac{28}{5}$(cm)

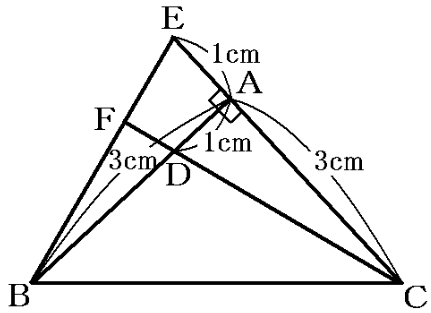
△EDH は 90°　30°　60°　の直角三角形で，3 辺の比は 2：1：$\sqrt{3}$になるので,

EH＝DE×$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{28}{5}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{14\sqrt{3}}{5}$(cm)　･･･②

①，②より，(△DEF の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×DF×EH＝$\dfrac{1}{2}\times7\times\dfrac{14\sqrt{3}}{5}=\dfrac{49\sqrt{3}}{5}$(cm²)

[問題]

右の図のように，AB＝AC＝3cm，∠BAC＝90°の直角二等辺三角形があり，辺 AB 上に AD＝1cm となる点 D を，辺 CA の延長上に AE＝1cm となる点 E をとる。また, CD の延長と BE との交点を F とする。このとき，次の各問いに答えよ。




(1) △BDF∽△CDA であることを証明せよ。

(2) △BDF の面積を求めよ。

(石川県)(***)

[解答欄]

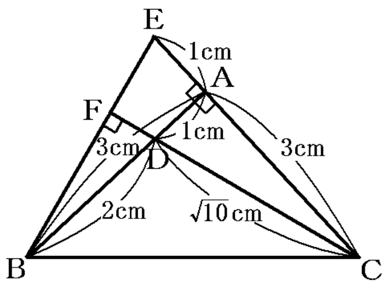
| (1) |
|---|
| |

| (2) |
|---|

[ヒント]

(1) まず△BEA≡△CDA を証明する。

(2)




[解答]

(1) △BEA と△CDA で,

AB＝CA＝3cm･･･①

AE＝AD＝1cm･･･②

∠BAE＝∠CAD＝90° ･･･③

①，②，③より，2 組の辺とその間の角が，それぞれ等しいので,

△BEA≡△CDA

合同な図形では，対応する角は等しいので，∠ABE＝∠ACD･･･④

次に，△BDF と△CDA で，

④より，∠DBF＝∠DCA･･･⑤

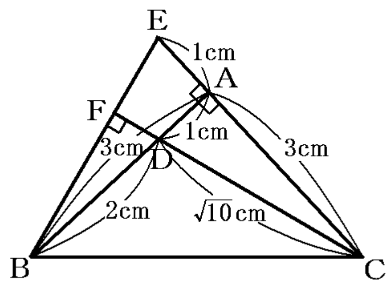
対頂角は等しいので，∠BDF＝∠CDA･･･⑥

⑤，⑥より，2 組の角が，それぞれ等しいので，

△BDF∽△CDA

(2) $\dfrac{3}{5}$cm$^2$

[解説]




(2) 直角三角形 CDA で，三平方の定理より，

CD＝$\sqrt{DA^2+CA^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$ (cm)

よって，△BDF と△CDA の相似比は，

BD：CD＝(3－1)：$\sqrt{10}$ ＝2：$\sqrt{10}$

面積比は相似比の 2 乗になるので，

(△BDF の面積)：(△CDA の面積)＝$2^2$ ：$\left(\sqrt{10}\right)^2$ ＝4：10＝2：5

(△CDA の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×CA×DA＝$\dfrac{1}{2}\times3\times1=\dfrac{3}{2}$ (cm$^2$)

よって，(△BDF の面積)：$\dfrac{3}{2}$ ＝2：5

5×(△BDF の面積)＝$\dfrac{3}{2}\times2$ ＝3

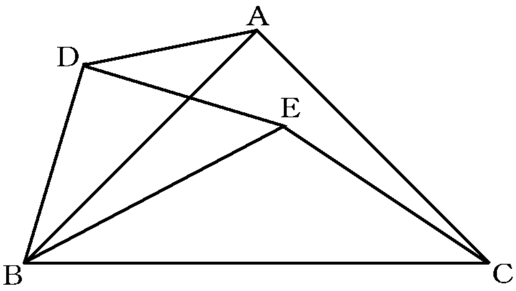
(△BDF の面積)＝$\dfrac{3}{5}$ (cm$^2$)

【】辺の比→相似の証明

[問題]

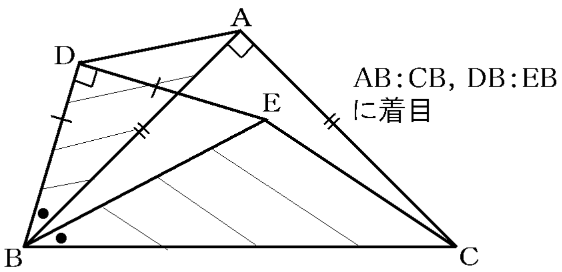
　右の図のように，AB＝AC，∠BAC＝90°の直角二等辺三角形 ABC と DB＝DE, ∠BDE＝90° の直角二等辺三角形 DBE がある。このとき，△ADB∽△CEB であることを証明せよ。

(福井県)(***)




[解答欄]

[ヒント]




[解答]

△ADB と△CEB で,

△BCA は 45° 45° 90° の直角三角形だから,

　AB : CB＝1 : $\sqrt{2}$

△BED は 45° 45° 90° の直角三角形だから,

　DB : EB＝1 : $\sqrt{2}$

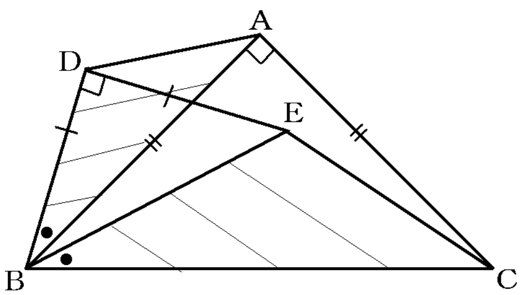
よって，AB : CB＝DB : EB ･･･①

また，∠ABD＝45° －∠ABE,

　∠CBE＝45° －∠ABE なので，∠ABD＝∠CBE ･･･②

①，②から，2 組の辺の比とその間の角が，それぞれ等しいので,

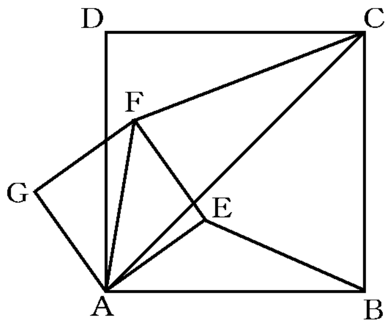
　△ADB∽△CEB



[問題]

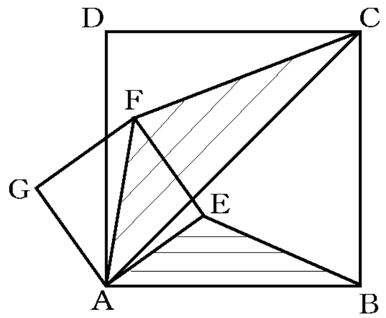
右の図のように，正方形 ABCD の内側に点 E をとり，線分 AE を 1 辺とする正方形 AEFG をつくる。また，点 B と点 E を結び△ABE を，3 点 A，C，F を結び△ACF をそれぞれつくる。このとき，△ABE∽△ACF を証明せよ。

(愛媛県)(***)




[解答欄]

[ヒント]




AB:AC, AE:AF
に着目

[解答]

△ABE と△ACF で，

△ACB は 45°45°90°の直角三角形だから，

　AB : AC＝1 : $\sqrt{2}$

△AFE は 45°45°90°の直角三角形だから，

　AE : AF＝1 : $\sqrt{2}$

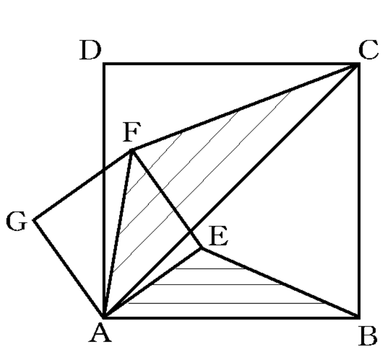
よって，AB : AC＝AE : AF …①

∠BAE＝45°－∠CAE，∠CAF＝45°－∠CAE なので，

　∠BAE＝∠CAF …②

①，②から，2 組の辺の比とその間の角が，それぞれ等しいので，

　△ABE∽△ACF



[問題]

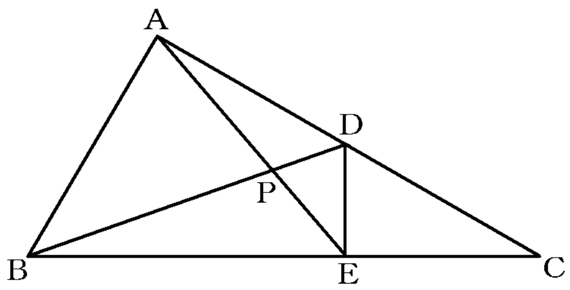
右の図のような△ABC があり，

∠ACB＝30°，∠BAC＝90°，BC＝12cm

である。点 D は辺 AC の中点，点 E は

∠CED＝90° となる辺 BC 上の点である。

また，線分 AE と線分 BD の交点を P とする。次の各問いに答えよ。




(1) 線分 CD の長さを求めよ。

(2) △ACE∽△BCD であることを証明せよ。

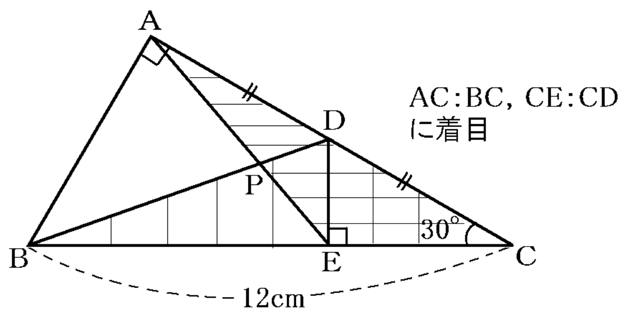
(大分県)(***)

[解答欄]

(1)

(2)

[ヒント]




[解答](1) $3\sqrt{3}$ cm

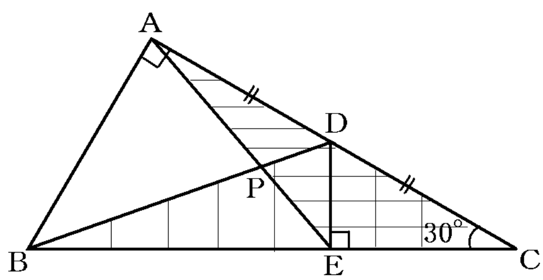
(2)△ACE と△BCD で，

△ABC は 90° 60° 30° の直角三角形だから，

AC：BC＝$\sqrt{3}$：2

△CDE は 30° 60° 90° の直角三角形だから，

CE：CD＝$\sqrt{3}$：2



よって，AC : BC＝CE : CD･･･①

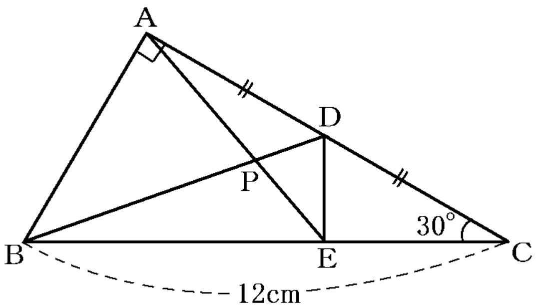
また，共通な角だから，

∠ACE＝∠BCD･･･②

①，②より 2 組の辺の比とその間の角が，それぞれ等しいから，

△ACE∽△BCD

[解説]




(1) △ABC は 90° 30° 60° の直角三角形で

3 辺の比は 2 : 1 : $\sqrt{3}$ になるので，

$AC=BC\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$ (cm)

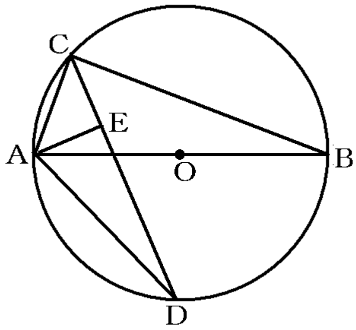
D は AC の中点なので，

$DC=AC\div 2=6\sqrt{3}\div 2=3\sqrt{3}$ (cm)

【】三平方と円と相似

[問題]

右の図のように，線分 AB を直径とする円 O の周上に点 C があり，C を含まない弧 AB 上に点 D を，弧 AD の長さが弧 AC の長さより長くなるようにとる。点 E は線分 CD 上にあって，AE⊥CD である。このとき，次の各問いに答えよ。




(1) △ABC∽△ADE であることを証明せよ。

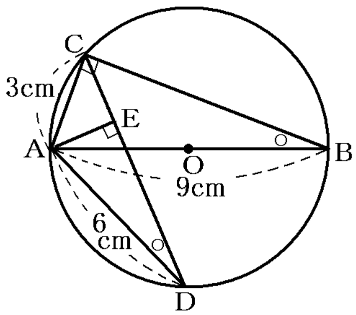
(2) AB＝9cm，AC＝3cm，AD＝6cm のとき，線分 DE の長さを求めよ。

(熊本県)(**)

[解答欄]

| (1) |
|---|
| (2) |

[ヒント]




[解答]

(1) △ABC と△ADE で，

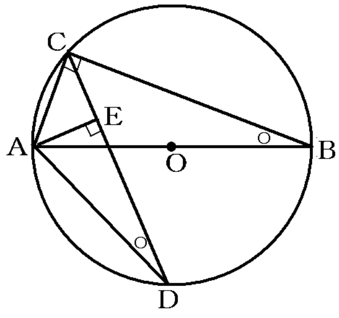
同じ弧に対する円周角は等しいので，

∠ABC＝∠ADE ･･･①

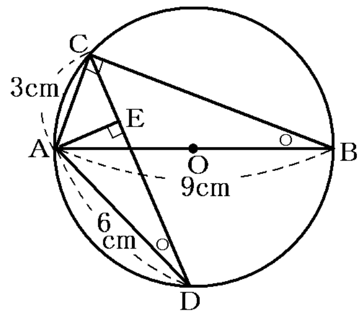
直径の円周角は 90° なので，∠ACB＝90° ･･･②

仮定より，∠AED＝90° ･･･③

②，③より，∠ACB＝∠AED ･･･④



①，④より，2 組の角がそれぞれ等しいので，
△ABC∽△ADE
(2) $4\sqrt{2}$ cm
[解説]

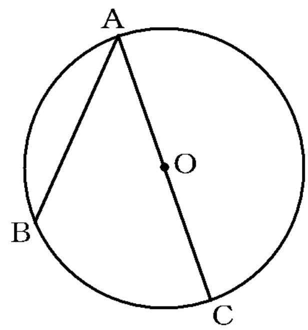



(2)△ADE∽△ABC なので，DE : BC＝AD : AB
△ABC で，三平方の定理より，

BC＝$\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{81-9}=\sqrt{72}=\sqrt{36\times2}=6\sqrt{2}$ (cm)

よって，DE : $6\sqrt{2}$ ＝6 : 9
比の外項の積は内項の積に等しいので，
9DE＝$6\sqrt{2}\times6$，DE＝$36\sqrt{2}\div9=4\sqrt{2}$ (cm)

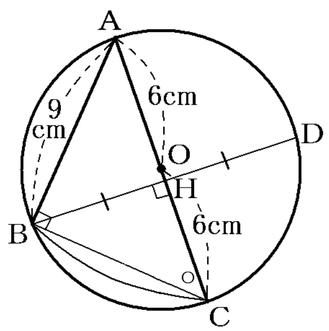
[問題]




右の図のように，半径 6cm の円 O の周上に 3 点 A，B，C があり，AC は円 O の直径である。また，AB＝9cm である。このとき，次の各問いに答えよ。
(1) 線分 BC の長さを求めよ。
(2) 直線 AC を対称の軸として，点 B と線対称な点を D とするとき，線分 BD の長さを求めよ。
(京都府)(**)
[解答欄]

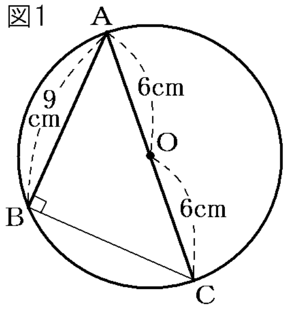
| | |
|---|---|
| (1) | (2) |

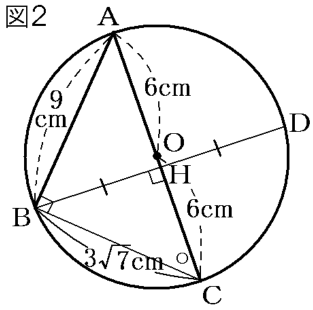
[ヒント]




[解答](1) $3\sqrt{7}$ cm (2) $\dfrac{9\sqrt{7}}{2}$ cm

[解説]




(1) 図 1 の直角三角形 ABC で，三平方の定理より，

BC＝$\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{12^2-9^2}=\sqrt{144-81}=\sqrt{63}=\sqrt{9\times7}=3\sqrt{7}$ (cm)

(2) 図 2 で，△BCH∽△ACB(○の角・90° の 2 角が等しい)なので，

BC：AC＝BH：AB

$3\sqrt{7}$ ：12＝BH：9

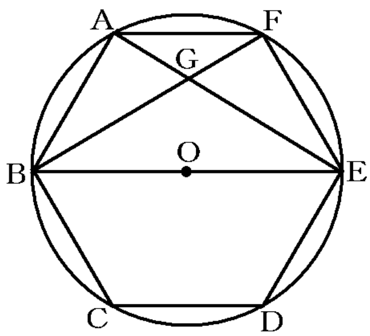
比の内項の積は外項の積に等しいので，

12BH＝$3\sqrt{7}\times9$，BH＝$\dfrac{27\sqrt{7}}{12}=\dfrac{9\sqrt{7}}{4}$

よって，BD＝BH×2＝$\dfrac{9\sqrt{7}}{4}\times2=\dfrac{9\sqrt{7}}{2}$ (cm)

[問題]

右の図のように, 半径 6cm の円 O の周上に 6 つの点 A, B, C，D，E，F があり，これらの点は円周を 6 等分している。ここで，線分 AE と線分 BF の交点を G とする。このとき，次の各問いに答えよ。




(1) 線分 AG の長さを求めよ。

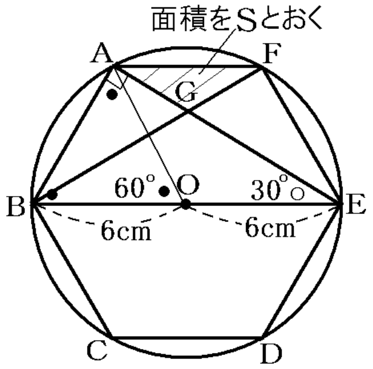
(2) △AGF と四角形 BCDE の面積の比を求めよ。

(沖縄県)(***)

[解答欄]

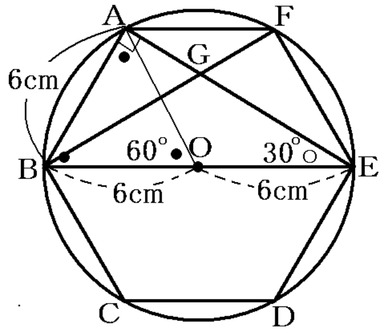
| | |
|---|---|
| (1) | (2) |

[ヒント]




[解答](1) $2\sqrt{3}$ cm　(2) 1：9

[解説]




(1) A～F の 6 つの点は円周を 6 等分しているので，

∠AOB＝360°÷6＝60°で，△OAB は正三角形になる。

よって，AB＝OB＝6cm になる。

△ABE は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は

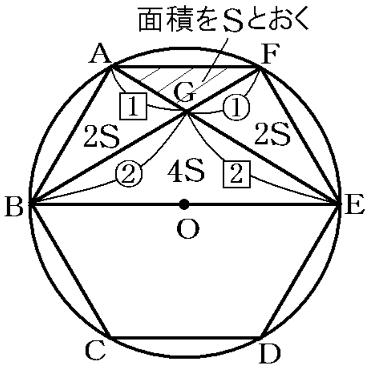
$1:2:\sqrt{3}$ になるので，AE＝BE×$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$ (cm)

また，AF // BE なので平行線の性質より，

AG：GE＝AF：BE＝6：12＝1：2

AG：GE＝1：2，AE＝$6\sqrt{3}$ cm なので，

AG＝AE×$\dfrac{1}{1+2}=6\sqrt{3}\times\dfrac{1}{3}=2\sqrt{3}$ (cm)




(2) 右図のように，△AGF の面積を S とおいて，各部分の面積を S で表す。

AF：BE＝6：12＝1：2 なので，平行線の性質より，

FG：GB＝1：2，AG：GE＝1：2

△AGF の底辺を GF，△ABG の底辺を BG とすると，

高さが共通なので，(AGF の面積)：(△ABG の面積)＝1：2

となる。よって，(△ABG の面積)＝2S

同様にして，(△FEG の面積)＝2S

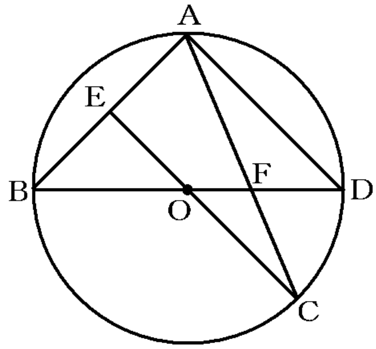
同様にして，(ABG の面積)：(△GBE の面積)＝1：2 なので，(△GBE の面積)＝2S×2＝4S

(四角形 BCDE の面積)＝(四角形 ABEF の面積)＝S＋2S＋4S＋2S＝9S

よって，△AGF と四角形 BCDE の面積の比は，S：9S＝1：9

[問題]

右の図のように，円 O の周上に 4 点 A，B，C，D がこの順にあり，線分 BD は円 O の直径で，AB＝$2\sqrt{5}$cm，AD＝4cm である。2 点 C，O を通る直線が線分 AB と交わり，その交点を E とし，∠AEC＝90°とする。また，線分 AC と線分 BD との交点を F とする。このとき，次の各問いに答えよ。




(1) 線分 BD の長さを求めよ。

(2) OF：FD を最も簡単な整数の比で表せ。

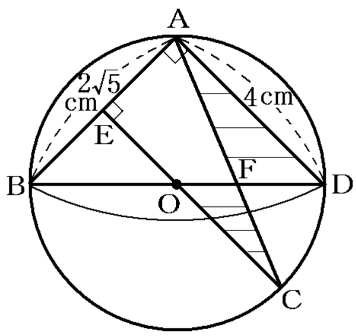
(3) △OCF の面積を求めよ。

(京都府)(***)

[解答欄]

| (1) | (2) | (3) |
|---|---|---|
| | | |

[ヒント]




[解答](1) 6cm (2) 3：4 (3) $\dfrac{9\sqrt{5}}{14}$cm²

[解説]

(1) 直角三角形 ABD で，三平方の定理より，

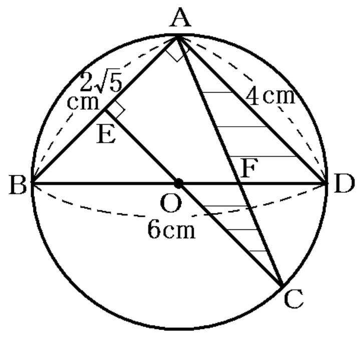
$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{20+16} = \sqrt{36} = 6\,(\text{cm})$$

(2) AD // OC なので，平行線の性質より，

OF：FD＝OC：AD＝3：4

(OC は半径なので，OC＝3cm)

(3) まず，△AFD の面積を計算し，次に，相似比→面積比によって，△OCF の面積を算出する。




(2)より，OF：FD＝3：4 なので，

$$FD = OD \times \frac{4}{3+4} = 3 \times \frac{4}{7} = \frac{12}{7}\,(\text{cm})$$

△AFD の底辺を FD，△ABD の底辺を BD とすると，高さは共通なので，面積比は底辺の比になる。したがって，

(△AFD の面積)：(△ABD の面積)＝FD：BD＝$\frac{12}{7}$：6＝2：7

(△ABD の面積)＝$\frac{1}{2}$×AB×AD＝$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 4 = 4\sqrt{5}$ ($cm^2$)

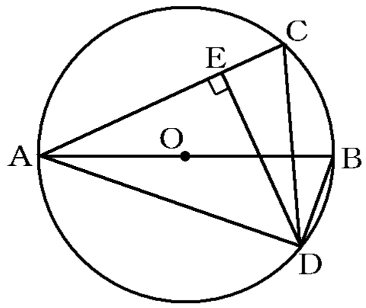
よって，(△AFD の面積)＝(△ABD の面積)×$\frac{2}{7}$ ＝$4\sqrt{5}\times\frac{2}{7}=\frac{8\sqrt{5}}{7}$ ($cm^2$)

△OCF と△AFD の相似比は OF：FD＝3：4 なので，面積比は $3^2$：$4^2$＝9：16 である。

よって，(△OCF の面積)＝(△AFD の面積)×$\frac{9}{16}=\frac{8\sqrt{5}}{7}\times\frac{9}{16}=\frac{9\sqrt{5}}{14}$ ($cm^2$)

[問題]

右図は，点 O を中心とする円で，線分 AB は円 O の直径である。2 点 C，D は円 O の周上にあって，線分 CD は線分 OB と交わっている。点 E は D から AC に引いた垂線と AC との交点である。このとき，次の各問いに答えよ。




(1) △ABD∽△DCE であることを証明せよ。

(2) AB＝9cm，BD＝3cm，CD＝6cm のとき，次の線分の長さを求めよ。

① 線分 AD　② 線分 CE　③ 線分 DE

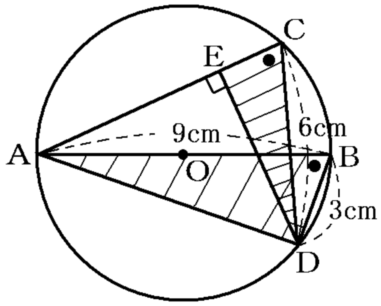
(3) △ADE の面積を求めよ。

(熊本県)(***)

[解答欄]

| (1) | | |
|---|---|---|
| (2)① | ② | ③ |
| (3) | | |

[ヒント]




[解答]

(1) △ABD と△DCE で，

仮定より，∠CED＝90°　･･･①

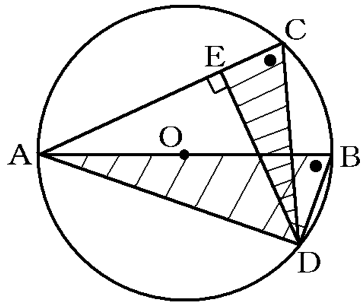
AB は円 O の直径なので，∠BDA＝90°　･･･②

①，②より，∠BDA＝∠CED･･･③

弧 AD に対する円周角なので，∠ABD＝∠DCE･･･④

③，④から，2 組の角がそれぞれ等しいので，

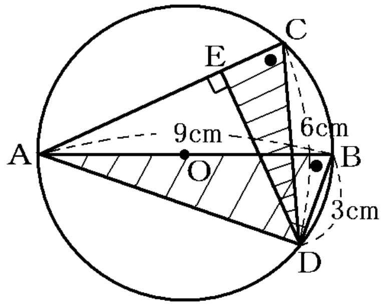
△ABD∽△DCE




(2)①　$6\sqrt{2}$ cm　②　2cm　③　$4\sqrt{2}$ cm　(3)　$8\sqrt{5}$ cm²

[解説]

(2)①　直角三角形 ABD で，三平方の定理より，




AD＝$\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{81-9}=\sqrt{72}=\sqrt{36\times 2}=6\sqrt{2}$ (cm)

②　△DCE∽△ABD で，(小)：(大)の相似比をとると，

CE：BD＝CD：BA，CE：3＝6：9，9CE＝18，CE＝2(cm)

③　△DCE∽△ABD で，(小)：(大)の相似比をとると，

DE：AD＝CD：BA

DE：$6\sqrt{2}$ ＝6：9，9DE＝$6\sqrt{2}\times 6$，9DE＝$36\sqrt{2}$，DE＝$4\sqrt{2}$ (cm)

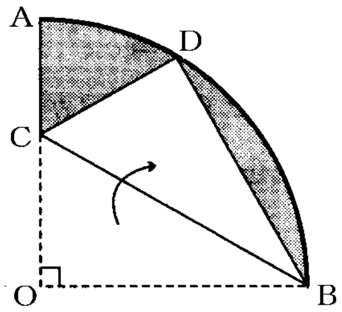
(3)　直角三角形 ADE で，三平方の定理より，

AE＝$\sqrt{AD^2-DE^2}=\sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{72-32}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ (cm)

(△ADE の面積)＝$\dfrac{1}{2}$ ×AE×DE＝$\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times 4\sqrt{2}=4\sqrt{20}=4\sqrt{4\times 5}=8\sqrt{5}$ (cm²)

[問題]

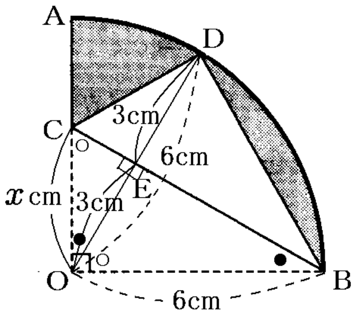
右の図のような，半径 6cm で中心角 90° のおうぎ形 OAB がある。点 B を通る線分を折り目として，中心 O が弧 AB 上の点と重なるように折ったとき，折り目の線を BC，中心 O の移った点を D とする。このとき，図のかげ()をつけた部分の面積を求めよ。ただし，円周率を $\pi$ とする。




(埼玉県)(***)

[解答欄]

[ヒント]




[解答] $9\pi-12\sqrt{3}$ (cm²)

[解説]

折り返しているので，OD⊥BC，OE＝DE

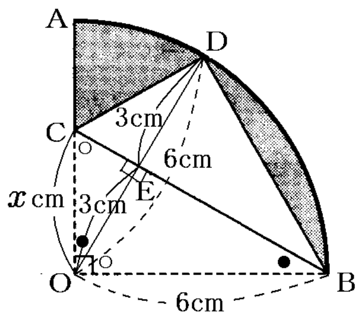
OD は半径 6cm なので，OE＝DE＝3cm である。

右図のように，CO の長さを $x$ cm とおく。

△COE∽△OBE(2 角が等しい)ので，

CO : OB＝OE : BE･･･①

直角三角形 BOE で，三平方の定理より，




BE＝$\sqrt{OB^2-OE^2}=\sqrt{6^2-3^2}=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=\sqrt{9\times 3}=3\sqrt{3}$ (cm)

①の式より，$x$ : 6＝3 : $3\sqrt{3}$，比の外項の積は内項の積に等しいので，

$3\sqrt{3}x=6\times 3$，　$x=\dfrac{18}{3\sqrt{3}}=\dfrac{18\times\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{18\sqrt{3}}{9}=2\sqrt{3}$ (cm)

(△BCD の面積)＝(△BCO の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×OB×$x$＝$\dfrac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$ (cm²)

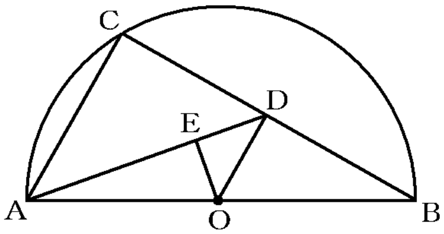
(おうぎ形 OAB の面積)＝$\pi\times 6^2\times\dfrac{90}{360}=36\pi\times\dfrac{1}{4}=9\pi$ (cm²)

よって，(の部分の面積)＝(おうぎ形 OAB の面積)－(△BCO の面積)×2

＝$9\pi-6\sqrt{3}\times 2=9\pi-12\sqrt{3}$ (cm²)

[問題]

右の図は，線分 AB を直径とする半円で，点 O は AB の中点である。点 C は弧 AB 上にあり，点 D は線分 BC 上にあって，OD // AC である。点 E は線分 AD 上にあって，OE⊥AD である。このとき，次の各問いに答えよ。




(1) △ACD∽△DEO であることを証明せよ。

(2) AB＝4cm，AC＝2cm のとき，

① 線分 OD の長さを求めよ。

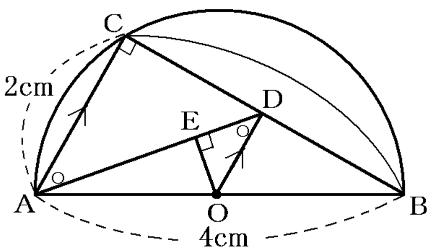
② 線分 DE の長さを求めよ。

(熊本県)(***)

[解答欄]

| (1) | |
|---|---|
| (2)① | ② |

[ヒント]




[解答]

(1) △ACD と△DEO で，

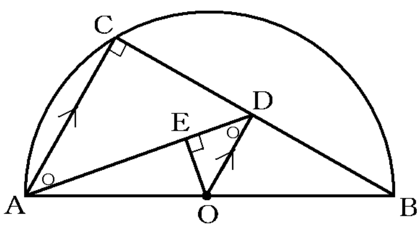
直径の円周角は 90° なので，∠ACD＝90° ･･･①

仮定より，∠DEO＝90° ･･･②

①，②より，∠ACD＝∠DEO ･･･③

仮定より，OD // AC で，平行線の錯角は等しいので，

∠CAD＝∠EDO ･･･④

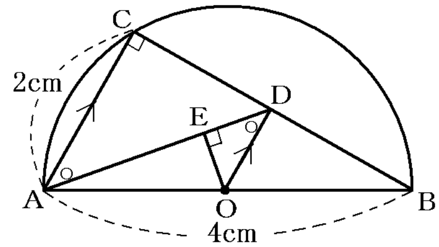


③，④より，2 組の角がそれぞれ等しいので，

△ACD∽△DEO

(2)① 1cm　② $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ cm

[解説]




(2)① OD // AC なので，平行線の性質より，

OD : AC＝BO : BA，OD : 2＝2 : 4

4OD＝2×2，OD＝4÷4＝1(cm)

② 直角三角形 ABC で，三平方の定理より，

BC＝$\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}$ (cm)

OD // AC なので，平行線の性質より，

BD : DC＝BO : OA＝2 : 2＝1 : 1

よって，D は BC の中点なので，CD＝BC÷2＝$2\sqrt{3}\div2=\sqrt{3}$ (cm)

直角三角形 ADC で，三平方の定理より，

AD＝$\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$ (cm)

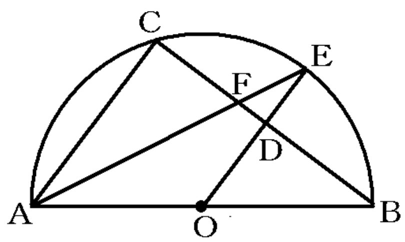
(1)より，△DEO∽△ACD なので，DE : AC＝OD : AD

AC＝2(cm)，(2)①より，OD＝1(cm)，AD＝$\sqrt{7}$ (cm)なので，

DE : 2＝1 : $\sqrt{7}$

$\sqrt{7}$ DE＝2×1，DE＝$\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ (cm)

[問題]




右の図は，線分 AB を直径とする半円で，点 O は AB の中点である。点 C は弧 AB 上にあり，点 D は線分 BC 上にあって，OD⊥BC である。点 E は OD の延長と弧 BC との交点，点 F は線分 AE と線分 BC との交点である。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) △AFC∽△BED であることを証明せよ。

(2) AB＝10cm，BC＝8cm のとき，

① 線分 DE の長さを求めよ。

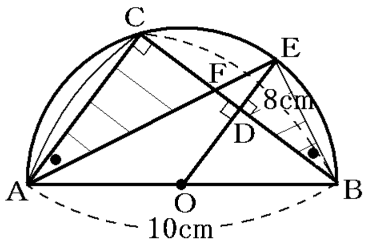
② 線分 AF の長さを求めよ。

(熊本県)(***)

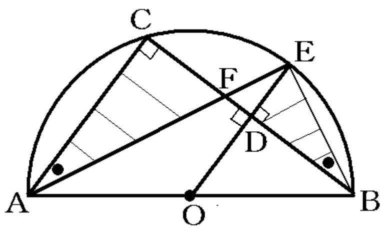
[解答欄]

| | |
|---|---|
| (1) | |
| (2)① | ② |

[ヒント]




[解答]




(1) △AFC と△BED で,

直径の円周角は 90° なので，∠ACF＝90° ･･･①

仮定より，∠BDE＝90° ･･･②

①，②より，∠ACF＝∠BDE ･･･③

同じ弧 CE の円周角は等しいので,

∠CAF＝∠DBE ･･･④

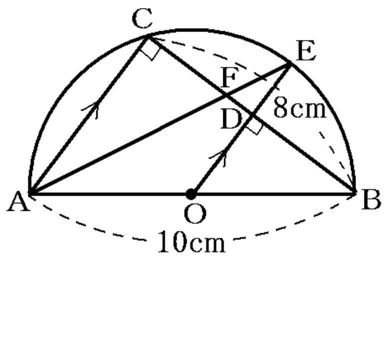
③，④より，2 組の角がそれぞれ等しいので,

△AFC∽△BED

(2)① 2cm　② $3\sqrt{5}$ cm

[解説]

(2)① 右図のように，同位角が等しいので OD // AC である。




平行線の性質より，OD：AC＝BO：BA＝1：2

直角三角形 ABC で，三平方の定理より,

AC＝$\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=6$ (cm)

OD：AC＝1：2，AC＝6cm なので，OD＝3cm

DE＝OE－OD＝5－3＝2(cm)

② AC // OD なので平行線の性質より，

BD : DC＝BO : OA＝1 : 1

よって DC＝8÷2＝4(cm)

AC // OD なので平行線の性質より，

CF : FD＝AC : DE＝6 : 2＝3 : 1

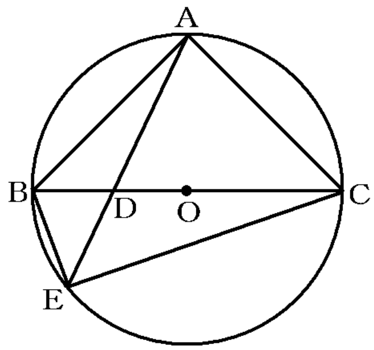
よって，CF＝DC×$\dfrac{3}{4}$＝$4\times\dfrac{3}{4}$＝3(cm)

直角三角形 ADC で，三平方の定理より，

AF＝$\sqrt{AC^2+CF^2}=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=\sqrt{9\times 5}=3\sqrt{5}$ (cm)

[問題]

右の図のように，半径 6cm の円 O の周上に 3 点 A，B，C がある。線分 BC は円 O の直径で，AB＝AC である。線分 OB の中点を D とし，直線 AD と円 O との交点のうち，A でないほうの点を E とする。このとき，次の各問いに答えよ。




(1) △ADC∽△BDE であることを証明せよ。

(2) △ADC と△BDE の相似比を求めよ。

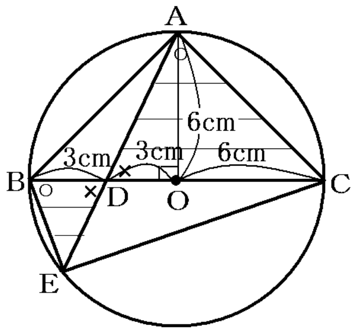
(3) 四角形 ABEC の面積は何 $cm^2$ か。

(長崎県)(***)

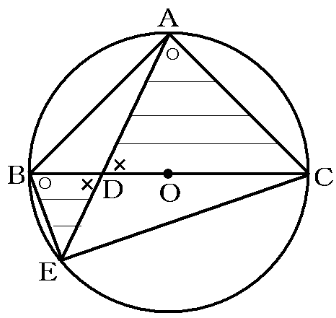
[解答欄]

| (1) | | |
|---|---|---|
| (2) | (3) | |

[ヒント]




[解答]




(1) △ADC と△BDE で，

弧 EC の円周角なので，

　∠CAD＝∠EBD　･･･①

対頂角は等しいので，

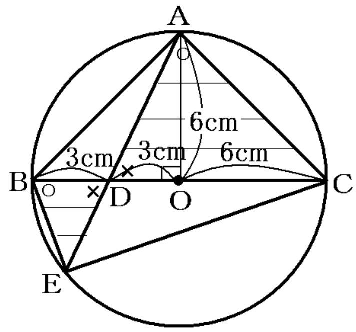
　∠ADC＝∠BDE　･･･②

①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいので，

　△ADC∽△BDE

(2) $\sqrt{5}$ ： 1　((2)) $\dfrac{288}{5}$ cm²

[解説]




(2) BD と対応するのは AD である。

右図の直角三角形 ADO で，三平方の定理より，

AD＝$\sqrt{AO^2+DO^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=3\sqrt{5}$ (cm)

よって，△ADC と△BDE の相似比は，

AD：BD＝$3\sqrt{5}$ ：3＝$\sqrt{5}$ ：1

(3) 四角形 ABEC の対角線によって分けられた 4 つの三角形の面積をそれぞれ求めていく。

(△ADC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$ ×DC×AO＝$\dfrac{1}{2}\times9\times6=27$ (cm²)

(△ABD の面積)＝$\dfrac{1}{2}$ ×BD×AO＝$\dfrac{1}{2}\times3\times6=9$ (cm²)

(1)(2)より，△ADC∽△BDE で相似比は$\sqrt{5}$ ：1 なので，面積比は$\left(\sqrt{5}\right)^2$ ：1²＝5：1 になる。

(△BDE の面積)＝(△ADC の面積)×$\dfrac{1}{5}=27\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{27}{5}$ (cm²)

△BDE の底辺を BD，△DCE の底辺を DC とすると，高さが共通なので，

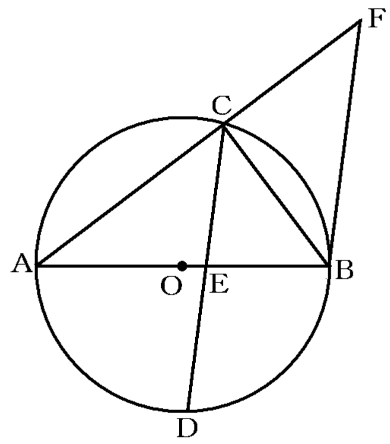
(△BDE の面積)：(△DCE の面積)＝BD：DC＝3：9＝1：3

よって，(△DCE の面積)＝(△BDE の面積)×3＝$\dfrac{27}{5}\times 3=\dfrac{81}{5}$(cm²)

したがって，(四角形 ABEC の面積)＝$27+9+\dfrac{27}{5}+\dfrac{81}{5}=\dfrac{288}{5}$(cm²)

[問題]

右の図のように，線分 AB を直径とする円 O がある。円 O の周上に点 C をとり，三角形 ABC をつくる。∠ACB の二等分線を引き∠ACB の二等分線と円 O の交点のうち，点 C 以外の交点を D とし，線分 CD と線分 AB の交点を E とする。また，線分 AC を点 C の方向へ延長し，その延長線上に CD // FB となるように点 F をとる。




このとき，次の各問いに答えよ。

(1) △CBF は二等辺三角形であることを証明せよ。

(2) AB＝10cm，AC＝8cm とするとき，次の①，②の問いに答えよ。

① 線分 AE の長さを求めよ。

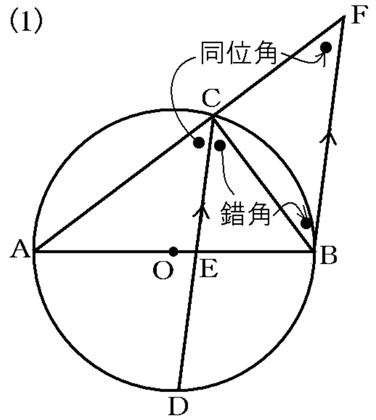
② 線分 DE の長さを求めよ。

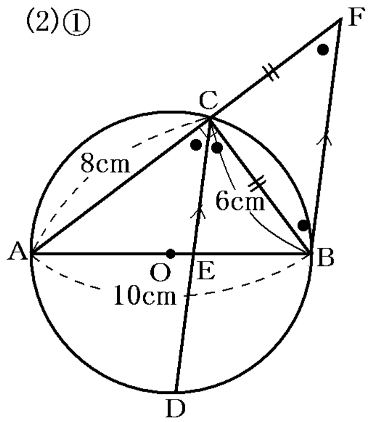
(高知県)(****)

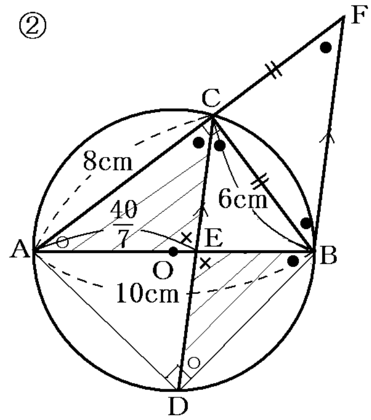
[解答欄]

| (1) | |
|---|---|
| (2)① | ② |

[ヒント]




[解答]

(1)

仮定より，∠ACE＝∠ECB …①

CD // FB なので，

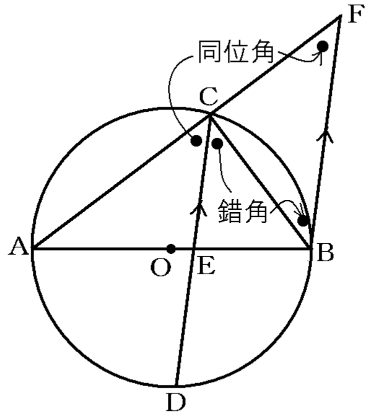
∠ACE＝∠CFB …②

∠ECB＝∠CBF …③

①，②，③より，∠CFB＝∠CBF

2 つの角が等しいので，

△CBF は二等辺三角形である。




(2)① $\dfrac{40}{7}$ cm　② $\dfrac{25\sqrt{2}}{7}$ cm

[解説]

(2)① 直角三角形 ABC で，三平方の定理より，

BC＝$\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}$＝6(cm)

(1)より，△CBF は二等辺三角形であるので，

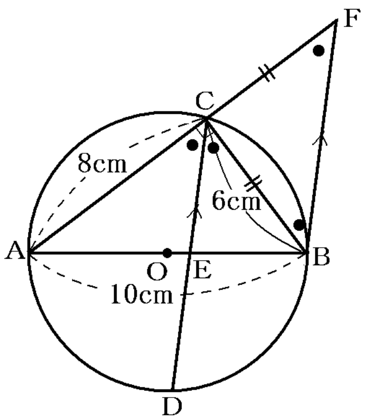
FC＝BC＝6(cm)

CD // FB なので，平行線の性質より，

AE : AB＝AC : AF，AE : 10＝8 : (8＋6)

比の外項の積は内項の積に等しいので，

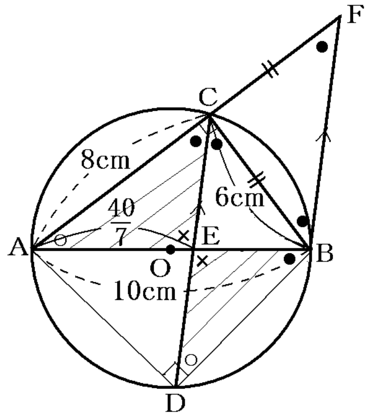
14AE＝10×8，AE＝$\dfrac{80}{14}=\dfrac{40}{7}$(cm)



② 辺 DE を含む三角形をつくるために，右図のように BD を結ぶ。このとき，△EDB と△EAC は，右図のように 2 角が等しいので相似になる。したがって，

ED : AE＝DB : AC

AC＝8cm，①より AE＝$\dfrac{40}{7}$cm，




DB を求めるために AD を結び，△ABD に注目する。

円周角の定理より，∠ABD＝∠ACD＝90° ÷2＝45°

また，直径の円周角なので，∠ADB＝90°

したがって，△ABD は 45° 45° 90° の直角三角形なので，3 辺の比は 1 : 1 : $\sqrt{2}$ になる。

よって，DB＝AB×$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$＝$10\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{10\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{10\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$ (cm)

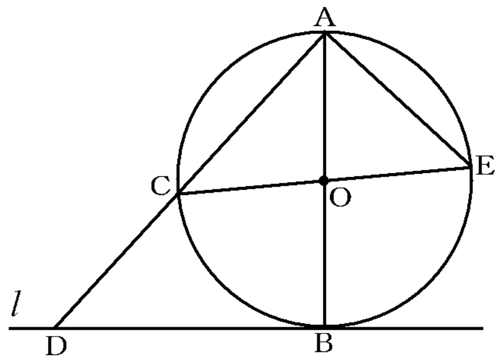
ED : AE＝DB : AC の式より，ED : $\dfrac{40}{7}$＝$5\sqrt{2}$ : 8

比の外項の積は内項の積に等しいので，

8ED＝$\dfrac{40}{7}\times5\sqrt{2}$，ED＝$\dfrac{200\sqrt{2}}{7\times8}=\dfrac{25\sqrt{2}}{7}$ (cm)

[問題]

右の図のように，線分 AB を直径とする円 O と直線 $l$ が点 B で接している。円 O の周上に点 A, B と異なる位置に点 C をとり, 直線 AC と直線 $l$ との交点を D とし，直線 CO と円 O との点 C 以外の交点を E とする。また，点 A と点 E を結び, △CAE をつくる。このとき, 次の各問いに答えよ。




(1) △ABD∽△CAE であることを証明せよ。

(2) 図において，OA＝2cm，AC＝3cm のとき，

① 線分 CD の長さを求めよ。

② 2 点 D，O を結んでできる△OCD の面積を求めよ。

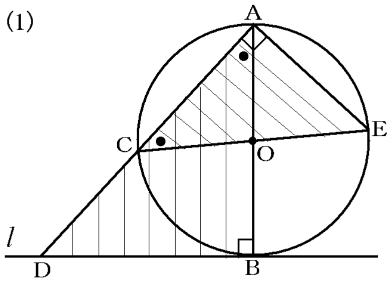
(愛媛県)(****)

[解答欄]

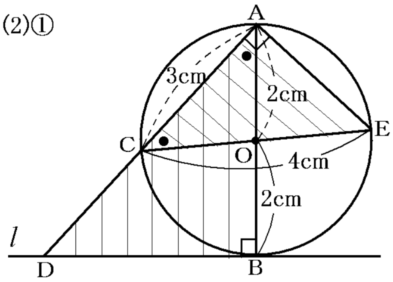
| | |
|---|---|
| (1) | |
| (2)① | ② |

[ヒント]

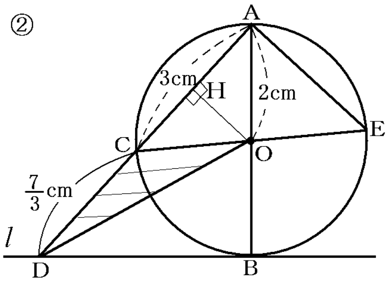
(1)




(2)①




②




[解答]

(1) △ABD と△CAE で，

直径の円周角なので，∠CAE＝90°　･･･①

DB は円の接線なので，∠ABD＝90°　･･･②

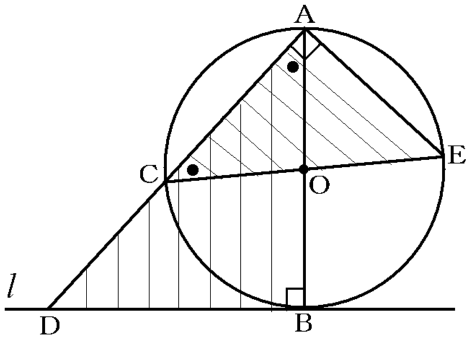
①，②より，∠ABD＝∠CAE　･･･③

OA＝OC(半径)なので△OAC は二等辺三角形で，

　∠DAB＝∠ECA　･･･④

③，④より，2 組の角がそれぞれ等しいので，

　△ABD∽△CAE




(2)①　$\frac{7}{3}$cm　②　$\frac{7\sqrt{7}}{12}$cm$^2$

[解説]

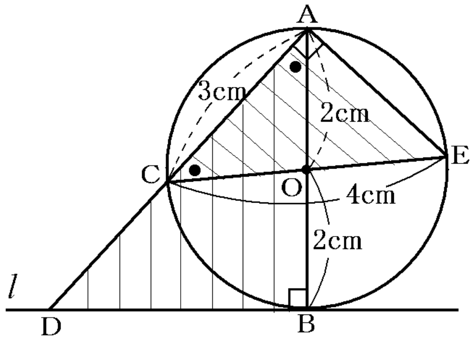
(2)①　△ABD∽△CAE なので，

AD : CE＝AB : AC，AD : 4＝4 : 3

比の外項の積は内項の積に等しいので，

3AD＝4×4，AD＝$\dfrac{16}{3}$

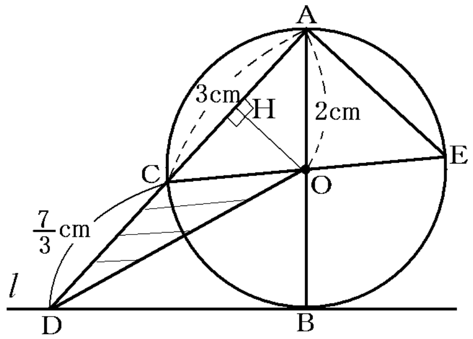
よって，CD＝AD－AC＝$\dfrac{16}{3}-3=\dfrac{7}{3}$(cm)




②　OH⊥AD となるような補助線 OH を引く。

△OCD の底辺を CD とすると，高さは OH になる。

△OAC は二等辺三角形なので, H は AC の中点になり，AH＝$\dfrac{3}{2}$cm である。




直角三角形 OAH で，三平方の定理より，

OH＝$\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{4-\dfrac{9}{4}}=\sqrt{\dfrac{7}{4}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$(cm)

よって，(△OCD の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×CD×OH＝$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{7}{3}\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}=\dfrac{7\sqrt{7}}{12}$(cm²)

【FdData 入試製品版のご案内】
詳細は，[FdData 入試ホームページ]に掲載（[Shift]＋左クリック→新規ウィンドウ）
姉妹品：[FdData 中間期末ホームページ] ([Shift]＋左クリック→新規ウィンドウ)

◆印刷・編集
この PDF ファイルは，FdData 入試を PDF 形式に変換したサンプルで，印刷はできないように設定しております。製品版の FdData 入試は Windows パソコン用のマイクロソフト Word(Office)の文書ファイルで，印刷・編集を自由に行うことができます。

◆FdData 入試の特徴
FdData 入試は，公立高校入試問題の全傾向を網羅することを基本方針に編集したワープロデータ(Word 文書)です。 入試理科・社会・数学ともに，過去に出題された公立高校入試の問題をいったんばらばらに分解して，細かい単元ごとに再編集して作成しております。

◆サンプル版と製品版の違い
ホームページ上に掲載しておりますサンプルは，製品の Word 文書を PDF ファイルに変換したもので印刷や編集はできませんが，製品の全内容を掲載しており，どなたでも自由に閲覧できます。問題を「目で解く」だけでもある程度の効果をあげることができます。
しかし，FdData 入試がその本来の力を発揮するのは印刷や編集ができる製品版においてです。また，製品版は，すぐ印刷して使える「問題解答分離形式」，編集に適した「問題解答一体形式」，などの形式を含んでいますので，目的に応じて活用することができます。
※FdData 入試の特徴(QandA 方式) ([Shift]＋左クリック→新規ウィンドウ)

◆FdData 入試製品版(Word 版)の価格(消費税込み)
※以下のリンクは[Shift]キーをおしながら左クリックすると，新規ウィンドウが開きます
数学 1 年(4400 円)，数学 2 年(6400 円)，数学 3 年(9600 円)：(統合版は 16,200 円)
理科 1 年(6800 円)，理科 2 年(6800 円)，理科 3 年(6800 円)：(統合版は 16,200 円)
社会地理(6800 円)，社会歴史(6800 円)，社会公民(6800 円)：(統合版は 16,200 円)
※Windows パソコンにマイクロソフト Word がインストールされていることが必要です。
(Mac の場合はお電話でお問い合わせください)。

◆ご注文は，メール(info2@fdtext.com)，または電話(092-811-0960)で承っております。
※注文→インストール→編集･印刷の流れ　([Shift]＋左クリック)
※注文メール記入例　([Shift]＋左クリック)

【Fd 教材開発】 Mail： info2@fdtext.com　Tel ：092-811-0960