

【FdData 高校入試：中学数学 3 年：空間図形】

[\[対角線などの長さ\]](#)／[\[柱や錐の体積など\]](#)／[\[角柱・角錐の最短距離\]](#)／[\[円錐の最短距離\]](#)／
[\[立体上の 2 点の距離\]](#)／[\[立体→切断面が二等辺三角形など\]](#)／[\[断面が直角三角形\]](#)／
[\[断面が四角形\]](#)／[\[球・円柱など\]](#)／[\[体積・正四面体\]](#)／[\[体積：高さの発見\]](#)／[\[体積→高さ\]](#)／[\[角錐台\]](#)／
[\[その他\]](#)／[\[FdData 入試製品版のご案内\]](#)

[\[FdData 入試ホームページ\]](#)掲載の pdf ファイル(サンプル)一覧]

※次のリンクは[Shift]キーをおしながら左クリックすると，新規ウィンドウが開きます

数学： [\[数学 1 年\]](#)， [\[数学 2 年\]](#)， [\[数学 3 年\]](#)

理科： [\[理科 1 年\]](#)， [\[理科 2 年\]](#)， [\[理科 3 年\]](#)

社会： [\[社会地理\]](#)， [\[社会歴史\]](#)， [\[社会公民\]](#)

※全内容を掲載しておりますが，印刷はできないように設定しております

【】 基本問題

【】 対角線などの長さ

[対角線]

[問題]

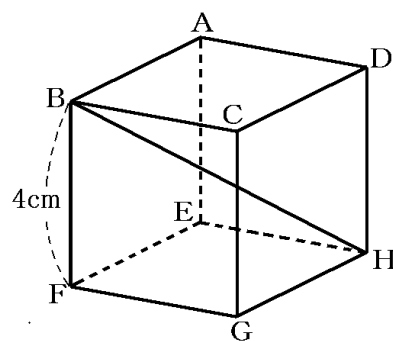
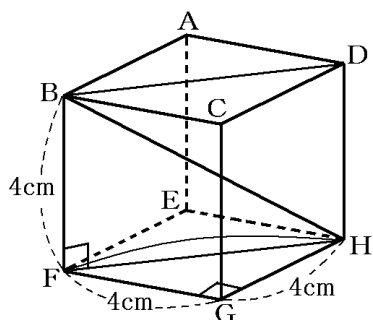
右の図のような，1 辺の長さが 4cm の立方体がある。

この立方体の対角線 BH の長さを求めよ。

(福島県)(**)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $4\sqrt{3}$ cm

【解説】

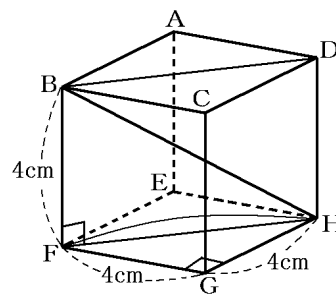
<Point> 線分 BH を含む平面 BFHD の切断面で考える

まず、底面の直角三角形 FGH について、

$$\text{三平方の定理より、} FH = \sqrt{FG^2 + HG^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} \text{ (cm)}$$

次に、直角三角形 BHF について、三平方の定理より、

$$BH = \sqrt{BF^2 + FH^2} = \sqrt{16 + 32} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$



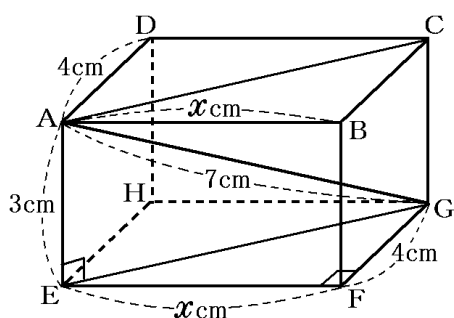
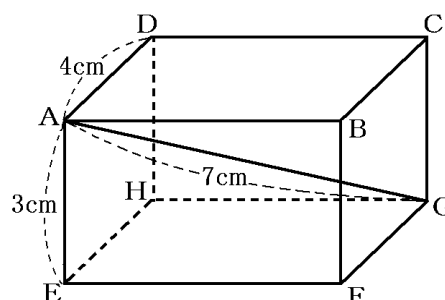
【問題】

右の図のような、 $AD=4\text{cm}$ 、 $AE=3\text{cm}$ 、 $AG=7\text{cm}$ の直方体 $ABCD-EFGH$ がある。このとき、 AB の長さを求めよ。

(栃木県)(**)

【解答欄】

【ヒント】



【解答】 $2\sqrt{6}\text{ cm}$

【解説】

AB の長さを $x\text{ cm}$ とする。

線分 AG を含む、 $AEGC$ の切断面で考える。

直角三角形 AGE で、三平方の定理より、

$$AE^2 + EG^2 = AG^2, \quad 3^2 + EG^2 = 7^2,$$

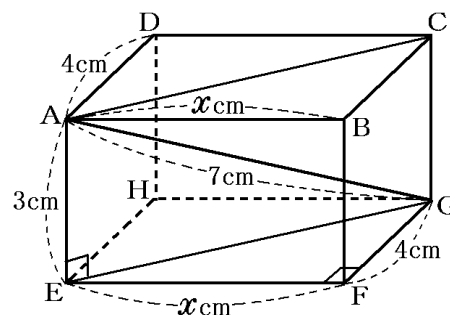
$$EG^2 = 49 - 9 = 40 \quad \cdots \textcircled{1}$$

直角三角形 EGF で、 $EF=AB=x\text{ (cm)}$ なので、

$$EG^2 = EF^2 + GF^2, \quad EG^2 = x^2 + 4^2 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より、} 40 = x^2 + 16, \quad x^2 = 40 - 16, \quad x^2 = 24$$

$$x > 0 \text{ なので、} x = \sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6} \text{ (cm)}$$



[問題]

右の図のように、 $AD=2\text{cm}$ 、 $CD=3\text{cm}$ 、 $AG=7\text{cm}$ の直方体がある。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) AC の長さを求めよ。

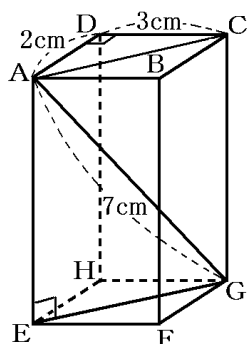
(2) $\triangle AEG$ の面積を求めよ。

(佐賀県)(**)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]



[解答](1) $\sqrt{13}\text{ cm}$ (2) $3\sqrt{13}\text{ cm}^2$

[解説]

(1) 直角三角形 ACD で、三平方の定理より、

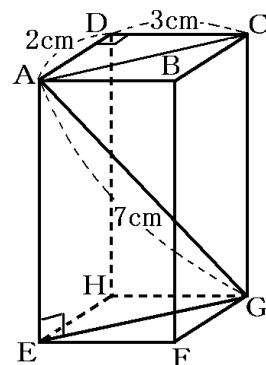
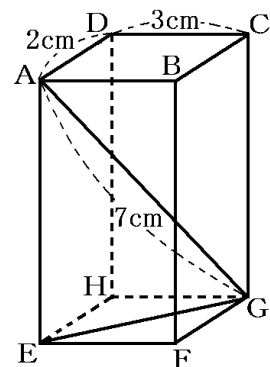
$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} (\text{cm})$$

(2) $EG = AC = \sqrt{13} (\text{cm})$

直角三角形 AGE で、三平方の定理より、

$$AE = \sqrt{AG^2 - EG^2} = \sqrt{49 - 13} = \sqrt{36} = 6 (\text{cm})$$

よって、 $(\triangle AEG \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times EG \times AE = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times 6 = 3\sqrt{13} (\text{cm}^2)$



[高さ]

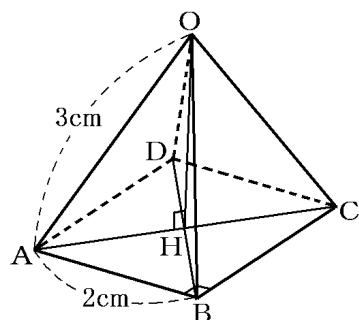
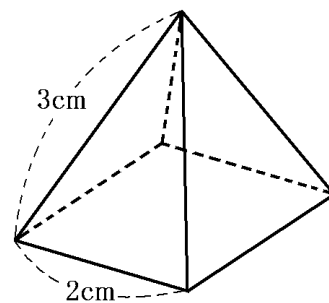
[問題]

右の図のように、底面が1辺2cmの正方形で、ほかの辺の長さがすべて3cmの正四角錐がある。この正四角錐の高さを求めよ。

(富山県)(**)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $\sqrt{7}$ cm

[解説]

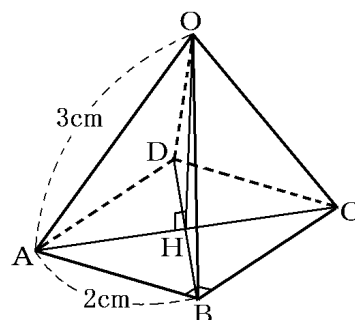
右図の直角三角形ACBで、三平方の定理より、

$$AC = \sqrt{AB^2 + CB^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$AH = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ (cm)}$$

直角三角形OAHで、三平方の定理より、

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{9 - 2} = \sqrt{7} \text{ (cm)}$$



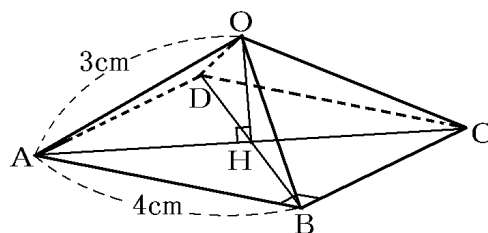
[問題]

右の図の正四角錐は、底面が1辺4cmの正方形で、他の辺が3cmである。次の各問いに答えよ。

(1) ACとBDの交点をHとすると、OHと底面ABCDは垂直である。このとき、OHの長さを求めよ。

(2) OHを軸として、正四角錐を1回転させたときにできる立体の体積を求めよ。

(青森県)(**)



[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[解答](1) 1cm (2) $\frac{8}{3}\pi \text{ cm}^3$

[解説]

$\triangle ABC$ は直角二等辺三角形なので、三平方の定理より、

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{よって、} AH = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$\triangle OAH$ は直角三角形なので、三平方の定理より、

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{9 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{9 - 8} = 1 \text{ (cm)}$$

(2) OH を軸として、正四角錐を1回転させたときにできる立体は円錐になる。

底面の円の半径は $AH = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$ で、高さは $OH = 1 \text{ (cm)}$ であるので、

$$(\text{体積}) = \frac{1}{3} \times \pi \times AH^2 \times OH = \frac{1}{3} \times \pi \times (2\sqrt{2})^2 \times 1 = \frac{8}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

【】 柱や錐の体積など

[角柱の体積]

[問題]

右の図のように、底面が直角三角形で、側面がすべて長方形の三角柱があり、 $AB=6\text{cm}$ 、 $BE=4\text{cm}$ 、 $\angle ABC=30^\circ$ 、 $\angle ACB=90^\circ$ である。この三角柱の体積を求めよ。

(山形県)(*)

[解答欄]

[ヒント]

$\triangle ABC(\triangle DEF)$ を底面とすると高さは $BE=4\text{cm}$ 。

$\triangle ABC$ は 30° 60° 90° の直角三角形なので、 $AC : AB : BC = 1 : 2 : \sqrt{3}$ である。

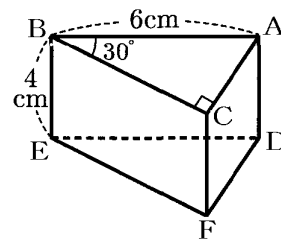
[解答] $18\sqrt{3}\text{ cm}^3$

[解説]

この三角柱の底面は $\triangle ABC(\triangle DEF)$ である。 $\triangle ABC$ は 30° 60° 90° の直角三角形なので、 $AC : AB : BC = 1 : 2 : \sqrt{3}$ である。 $AB=6\text{cm}$ より、 $AC=3\text{cm}$ 、 $BC=3\sqrt{3}\text{cm}$ である。

$$\text{よって、}(\triangle ABC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times BC \times AC = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 3 = \frac{9\sqrt{3}}{2} (\text{cm}^2)$$

$$\text{したがって、}(\text{体積}) = \frac{9\sqrt{3}}{2} \times 4 = 18\sqrt{3} (\text{cm}^3)$$



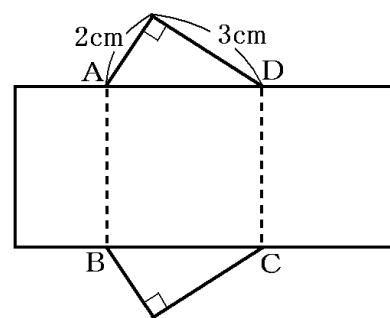
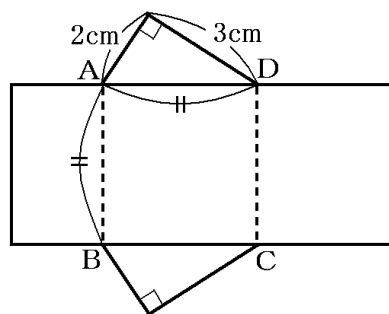
[問題]

右の展開図において、四角形 ABCD は正方形である。この展開図を組み立ててできる三角柱の体積は何 cm^3 か。

(鹿児島県)(**)

[解答欄]

[ヒント]



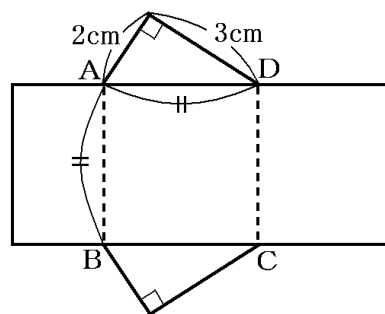
[解答] $3\sqrt{13} \text{ cm}^3$

[解説]

三平方の定理より, $AD = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \text{ (cm)}$

四角形 ABCD は正方形なので, $AB = AD = \sqrt{13} \text{ (cm)}$

(三角柱の体積) $= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sqrt{13} = 3\sqrt{13} \text{ (cm}^3\text{)}$



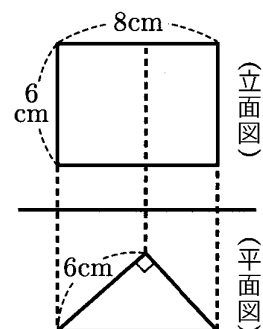
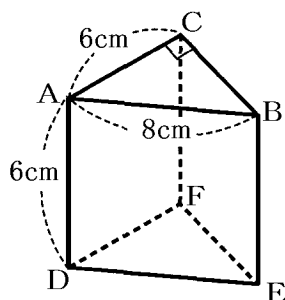
[問題]

右の図は, 三角柱の投影図である。この三角柱の体積を求めよ。

(千葉県)(**)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $36\sqrt{7} \text{ cm}^3$

[解説]

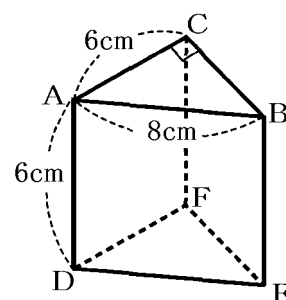
右図のような三角柱になる。

直角三角形 ABC で, 三平方の定理より,

$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7} \text{ (cm)}$

($\triangle ABC$ の面積) $= \frac{1}{2} \times AC \times BC = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{7} = 6\sqrt{7} \text{ (cm}^2\text{)}$

(三角柱の体積) $= (\triangle ABC \text{ の面積}) \times AD = 6\sqrt{7} \times 6 = 36\sqrt{7} \text{ (cm}^3\text{)}$



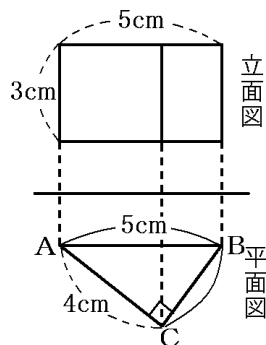
[問題]

右の図は、底面が直角三角形である三角柱の投影図である。
この三角柱の体積を求めよ。

(徳島県)(**)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] 18cm^3

[解説]

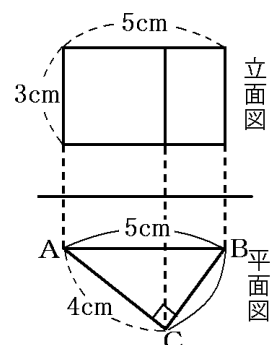
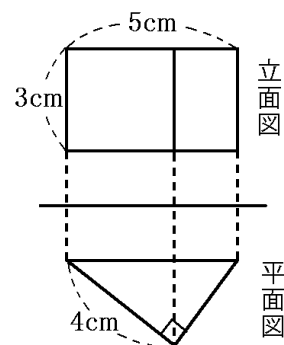
右図の平面図で、 $AB=5\text{cm}$ である。

直角三角形 ABC で、三平方の定理より、

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3(\text{cm})$$

$$\text{よって、(底面積)} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6(\text{cm}^2)$$

$$(\text{三角柱の体積}) = (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = 6 \times 3 = 18(\text{cm}^3)$$



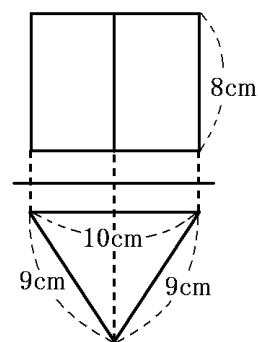
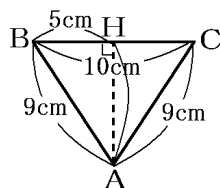
[問題]

右の図は、三角柱の投影図である。この三角柱の体積を求めよ。

(秋田県)(**)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $80\sqrt{14} \text{ cm}^3$

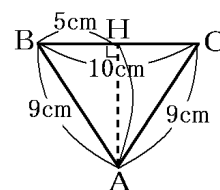
[解説]

右図の直角三角形 ABH で、三平方の定理より、

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{81 - 25} = \sqrt{56} = \sqrt{4 \times 14} = 2\sqrt{14} \text{ (cm)}$$

$$(\triangle ABC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 10 \times 2\sqrt{14} = 10\sqrt{14} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$(\text{三角柱の体積}) = (\triangle ABC \text{ の面積}) \times 8 = 10\sqrt{14} \times 8 = 80\sqrt{14} \text{ (cm}^3\text{)}$$



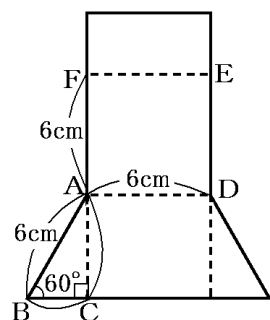
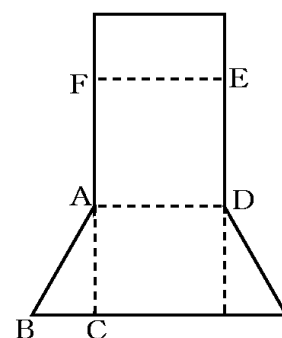
[問題]

右の図は、 $AB=6\text{cm}$ 、 $\angle ABC=60^\circ$ 、 $\angle ACB=90^\circ$ の直角三角形 ABC を底面とする三角柱の展開図であり、四角形 ADEF は正方形である。このとき、この展開図を点線で折り曲げてできる三角柱の体積を求めよ。

(神奈川県)(**)

[解答欄]

[ヒント]



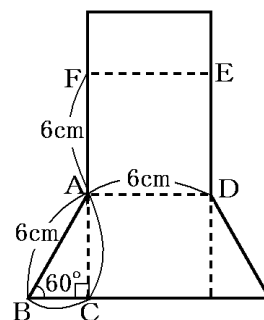
[解答] $27\sqrt{3} \text{ cm}^3$

[解説]

この三角柱の底面は $\triangle ABC$ で、高さは AD である。 AB と AF が重なるので $AF=6\text{cm}$ である。また、四角形 $ADEF$ は正方形なので、 $AD=6\text{cm}$ である。

$\triangle ABC$ は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は $1 : 2 : \sqrt{3}$ になるので、 $BC = 6 \times \frac{1}{2} = 3 \text{ (cm)}$ 、 $AC = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$

$$(\text{三角柱の体積}) = \frac{1}{2} \times BC \times AC \times AD = \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} \times 6 = 27\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$



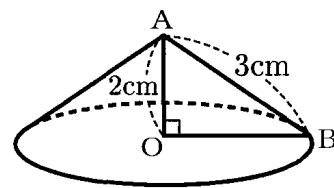
[円錐の体積]

[問題]

右図のような円すいの体積は何 cm^3 か、求めよ。
ただし、円周率は π とする。

(兵庫県)(*)

[解答欄]



[解答] $\frac{10}{3}\pi \text{ cm}^3$

[解説]

図の直角三角形 ABO で、三平方の定理より、

$$OB = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5} \text{ (cm)}$$

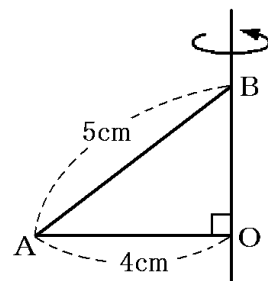
$$(\text{すいの体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times \pi \times OB^2 \times AO = \frac{1}{3} \pi \times (\sqrt{5})^2 \times 2 = \frac{10}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

[問題]

右の図のような $\angle AOB = 90^\circ$, $OA = 4\text{cm}$, $AB = 5\text{cm}$ の直角三角形 OAB を、直線 BO を回転の軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(島根県)(*)

[解答欄]



[解答] $16\pi \text{ cm}^3$

[解説]

直角三角形 ABO で、三平方の定理より、

$$BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3 \text{ (cm)}$$

$$(\text{体積}) = \frac{1}{3} \times \pi \times OA^2 \times BO = \frac{1}{3} \times \pi \times 16 \times 3 = 16\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

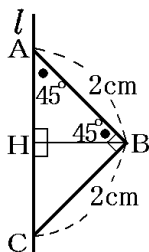
[問題]

右の図のような直角二等辺三角形を、直線 l を回転の軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(鳥取県)(**)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi \text{ cm}^3$

[解説]

まず、 $\triangle ABH$ を 1 回転させたときにできる円錐の体積を求める。

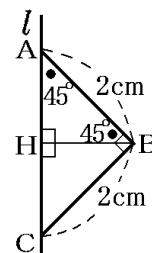
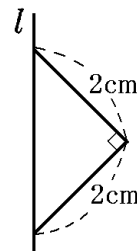
$\triangle ABH$ は 45° 45° 90° の直角三角形なので、3 辺の比は $1 : 1 : \sqrt{2}$ になる。

したがって、 $AH = BH = AB \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ (cm)}$

(体積) $= \frac{1}{3} \times \pi \times BH^2 \times AH = \frac{1}{3} \pi \times (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$

同様にして、 $\triangle CBH$ を 1 回転させたときにできる円錐の体積も $\frac{2\sqrt{2}}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$ である。

よって、(求める体積) $= \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi + \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi = \frac{4\sqrt{2}}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$

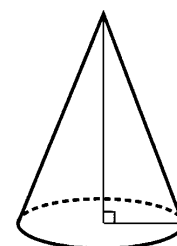


[問題]

右の図は、底面の半径が 3cm 、側面積が $24\pi \text{ cm}^2$ の円錐である。この円錐の体積を求めよ。ただし、 π は円周率とする。

(秋田県)(**)

[解答欄]



[ヒント]

右図で $OB = x \text{ cm}$ とし、

(おうぎ形の面積) $= 24\pi \text{ cm}^2$ を使って
 x を求める。

[解答] $3\sqrt{55}\pi \text{ cm}^3$

[解説]

右図で $OB = x \text{ cm}$ とし、

この円錐の展開図の側面のおうぎ形の
 中心角を a° とする。

$$(\text{おうぎ形の面積}) = x \times x \times \pi \times \frac{a}{360}$$

$$= \pi x^2 \times \frac{a}{360} \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{ところで, } (\text{弧 AB}) = 2\pi x \times \frac{a}{360}$$

(弧 AB) = (底面の円の円周) なので、

$$(\text{弧 AB}) = 3 \times 2 \times \pi = 6\pi \text{ (cm)}^2$$

$$\text{よって, } 2\pi x \times \frac{a}{360} = 6\pi, \quad \frac{a}{360} = 6\pi \div 2\pi x = \frac{3}{x}$$

$$\textcircled{1} \text{より, } (\text{おうぎ形の面積}) = \pi x^2 \times \frac{a}{360} \text{ なので, } \frac{a}{360} = \frac{3}{x} \text{ を代入すると,}$$

$$(\text{おうぎ形の面積}) = \pi x^2 \times \frac{a}{360} = \pi x^2 \times \frac{3}{x} = 3\pi x$$

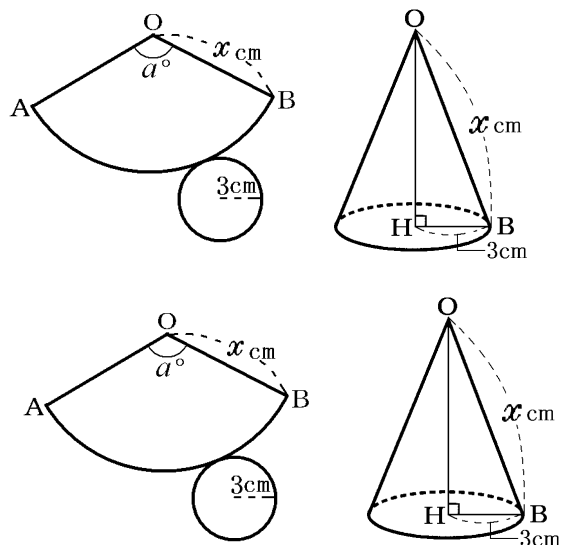
「側面積が $24\pi \text{ cm}^2$ の円錐」とあるので、

$$3\pi x = 24\pi, \quad x = 24\pi \div 3\pi, \quad x = 8$$

$\triangle OHB$ で、三平方の定理より、 $OH^2 + BH^2 = OB^2$

$$OH^2 + 9 = x^2, \quad OH^2 + 9 = 64, \quad OH^2 = 55, \quad OH = \sqrt{55}$$

$$(\text{円錐の体積}) = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times \sqrt{55} = 3\sqrt{55}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$



[角錐の体積]

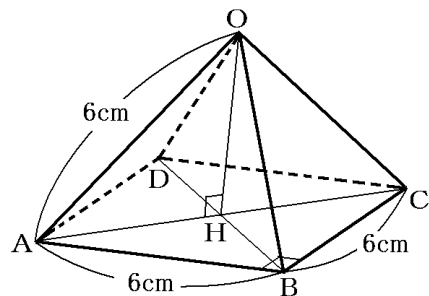
[問題]

右図は、全ての辺の長さが **6cm** の正四角錐である。この正四角錐の体積を求めよ。

(奈良県)(**)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $36\sqrt{2} \text{ cm}^3$

[解説]

右図の高さ **OH** がわかれば、体積を計算できる。

直角三角形 **ACB** で、三平方の定理より、

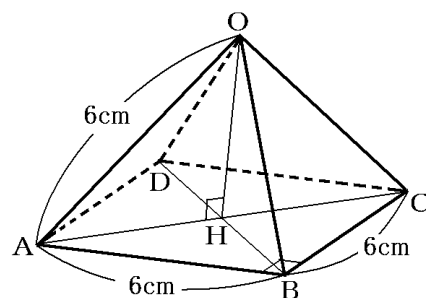
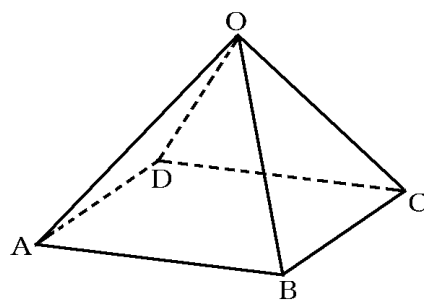
$$AC = \sqrt{AB^2 + CB^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

H は **AC** の中点なので、 $AH = AC \div 2 = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$

直角三角形 **OAH** で、三平方の定理より、

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{36 - 18} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$(\text{正四角錐の体積}) = \frac{1}{3} \times AB \times CB \times OH = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)}$$

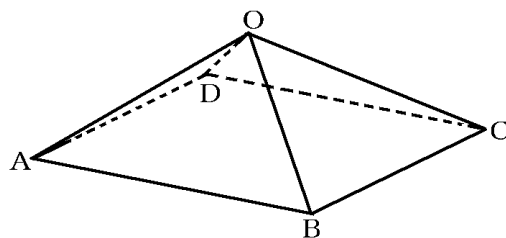


[問題]

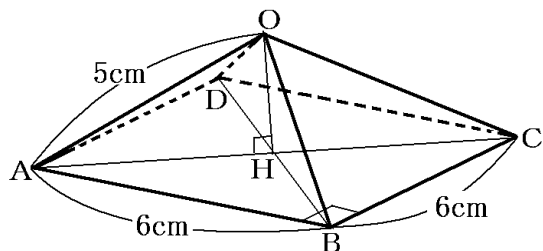
右の図のように、底面が1辺 **6cm** の正方形 **ABCD** で、他の辺の長さが全て **5cm** である正四角錐 **OABCD** がある。正四角錐 **OABCD** の体積を求めよ。

(愛媛県)(**)

[解答欄]



[ヒント]



[解答] $12\sqrt{7} \text{ cm}^3$

[解説]

直角三角形 ACB で、三平方の定理より、

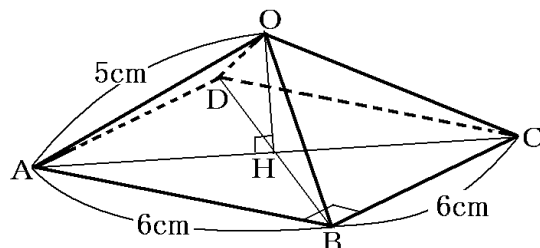
$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + CB^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{36 \times 2} \\ &= 6\sqrt{2} \text{ (cm)} \end{aligned}$$

H は AC の中点なので、 $AH = AC \div 2 = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$

直角三角形 OAH で、三平方の定理より、

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{25 - 18} = \sqrt{7} \text{ (cm)}$$

$$(\text{正四角錐の体積}) = \frac{1}{3} \times AB \times CB \times OH = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times \sqrt{7} = 12\sqrt{7} \text{ (cm}^3\text{)}$$



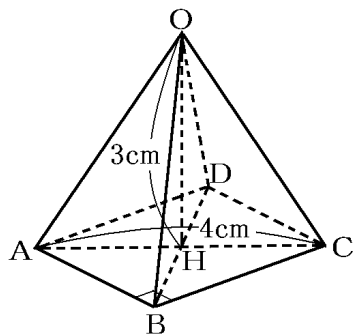
[問題]

右の図は、底面の対角線の長さが 4cm、高さが 3cm の正四角錐である。この正四角錐の体積を求めよ。

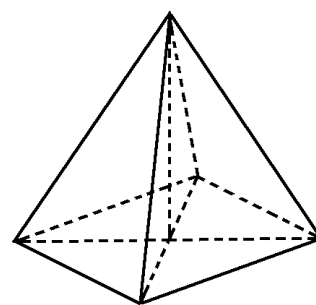
(岐阜県)(**)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] 8cm^3



【解説】

底面の正方形 ABCD の 1 辺を $a\text{ cm}$ とする。

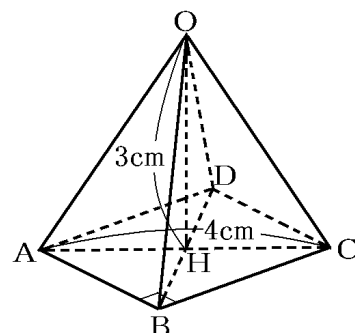
直角三角形 ABC で、三平方の定理より、

$$AB^2 + BC^2 = AC^2,$$

$$a^2 + a^2 = 16, \quad 2a^2 = 16, \quad a^2 = 8$$

$$(\text{正四角錐の体積}) = \frac{1}{3} \times a^2 \times OH = \frac{1}{3} \times a^2 \times 3$$

$$= a^2 = 8(\text{cm}^3)$$



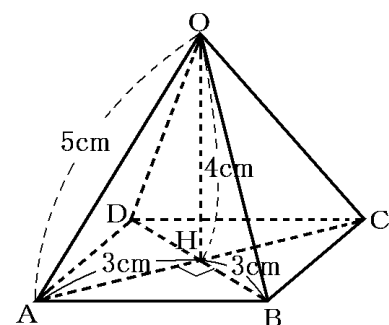
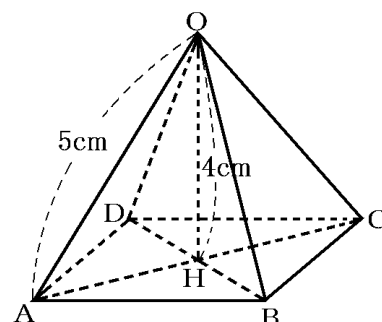
【問題】

右の図のような、正四角錐 O-ABCD において、底面 ABCD の対角線の交点を H とする。辺 OA の長さが 5cm, 高さ OH が 4cm のとき、この正四角錐の体積を求めよ。

(宮城県)(**)

【解答欄】

【ヒント】



【解答】 24cm^3

【解説】

直角三角形 OAH で、三平方の定理より、

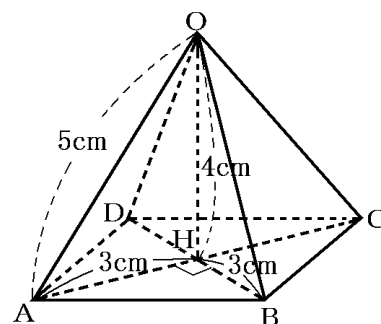
$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3(\text{cm})$$

$\triangle ABH$ は直角二等辺三角形なので、

$$(\triangle ABH \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}(\text{cm}^2)$$

$$(\text{正方形 } ABCD \text{ の面積}) = (\triangle ABH \text{ の面積}) \times 4 = \frac{9}{2} \times 4 = 18(\text{cm}^2)$$

$$(\text{正四角錐の体積}) = \frac{1}{3} \times 18 \times 4 = 24(\text{cm}^3)$$



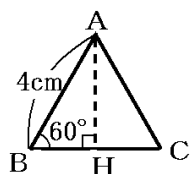
[問題]

右の図は、ある正四角錐の投影図である。立面図は1辺の長さが4cmの正三角形である。この正四角錐の体積を求めよ。

(宮城県)(**)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $\frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$

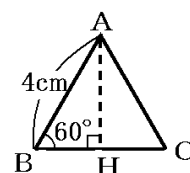
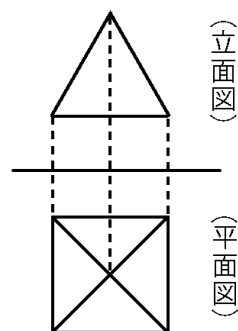
[解説]

右図のAHがこの正四角錐の高さになる。

$\triangle ABH$ は 30° 90° 60° の直角三角形で3辺の比は $1 : 2 : \sqrt{3}$ なので、

$$AH = AB \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$(\text{正四角錐の体積}) = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 2\sqrt{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

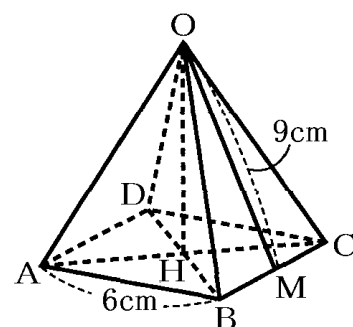


[問題]

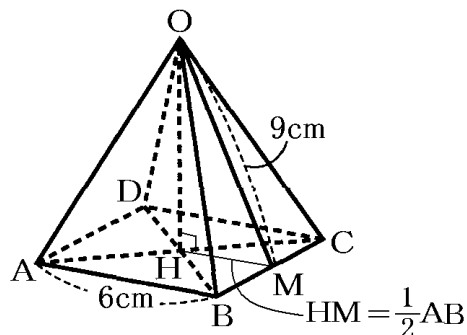
右の図において、四角すいOABCDは、 $AB=6\text{cm}$ の正四角すいである。点Mは辺BCの中点であり、 $OM=9\text{cm}$ である。四角形ABCDの2つの対角線AC、BDの交点をHとすると、OHの長さを求めよ。

(山形県)(**)

[解答欄]



[ヒント]



[解答] $6\sqrt{2}$ cm

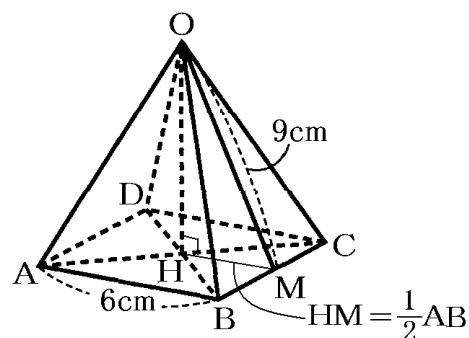
[解説]

H は AC の中点, M は BC の中点なので, 中点連結定

理より, $HM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 6 = 3(\text{cm})$

右図の直角三角形 OMH で, 三平方の定理より,

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{OM^2 - MH^2} = \sqrt{9^2 - 3^2} = \sqrt{81 - 9} = \sqrt{72} \\ &= \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2} (\text{cm}) \end{aligned}$$



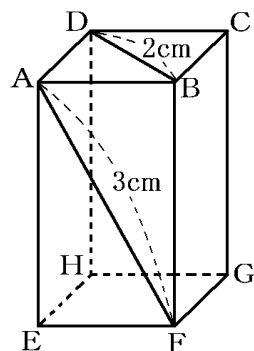
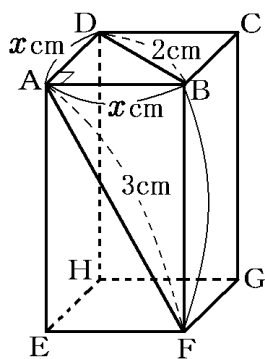
[問題]

右の図のような直方体があり, $AB=BC$ である。点 A と点 F, 点 B と点 D をそれぞれ結ぶ。 $AF=3\text{cm}$, $BD=2\text{cm}$ であるとき, この直方体の体積を求めよ。

(香川県)(**)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $2\sqrt{7}$ cm³

【解説】

$AB = x(\text{cm})$ とすると、 $AB = AD$ なので $AD = x(\text{cm})$

直角三角形 DBA で、三平方の定理より、

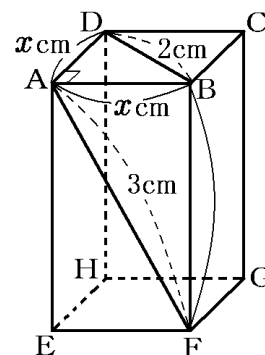
$$AB^2 + AD^2 = BD^2, \quad x^2 + x^2 = 2^2, \quad 2x^2 = 4, \quad x^2 = 2$$

$x > 0$ なので、 $x = \sqrt{2}(\text{cm})$

直角三角形 AFB で、三平方の定理より、

$$BF = \sqrt{AF^2 - AB^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{9 - 2} = \sqrt{7}(\text{cm})$$

$$(\text{直方体の体積}) = AB \times AD \times BF = x^2 \times BF = 2 \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}(\text{cm}^3)$$



【展開図と体積】

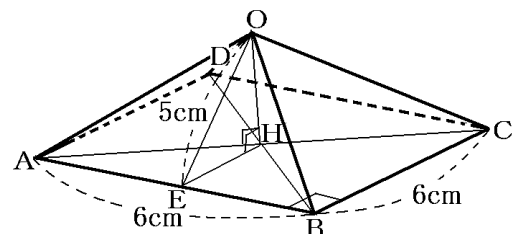
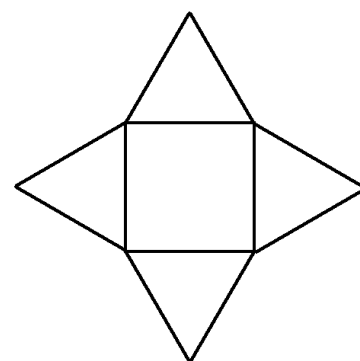
【問題】

右の図は 1 辺が 6cm の正方形のまわりに、それぞれの辺を底辺とし、高さが 5cm の二等辺三角形を 4 枚並べたものである。この図形を組み立ててできる正四角錐の体積を求めよ。

(島根県)(**)

【解答欄】

【ヒント】



【解答】 48cm^3

【解説】

図の展開図を組み立てると右図のようになる。

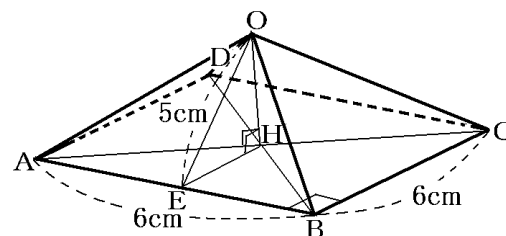
OH がわかれば、体積を計算できる。

$$EH = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 6 = 3(\text{cm})$$

直角三角形 OEH で、三平方の定理より、

$$OH = \sqrt{OE^2 - EH^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4(\text{cm})$$

$$(\text{正四角錐の体積}) = \frac{1}{3} \times AB \times BC \times OH = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 4 = 48(\text{cm}^3)$$



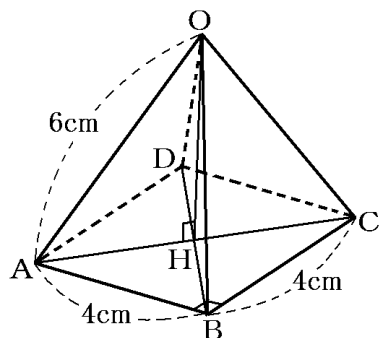
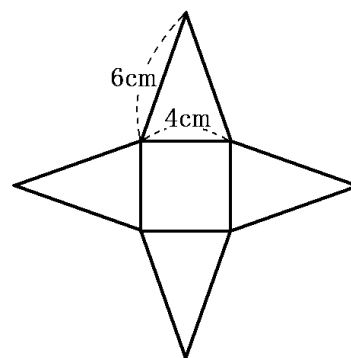
[問題]

ある正四角錐を展開すると右図のようになる。
この正四角錐の体積を求めよ。

(佐賀県)(**)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $\frac{32\sqrt{7}}{3} \text{ cm}^3$

[解説]

右図の直角三角形 ACB で、三平方の定理より、

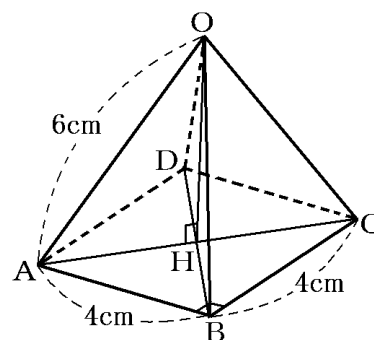
$$AC = \sqrt{AB^2 + CB^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$AH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

直角三角形 OAH で、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{36 - 8} = \sqrt{28} \\ &= \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7} \text{ (cm)} \end{aligned}$$

$$(\text{正四角錐の体積}) = \frac{1}{3} \times AB \times BC \times OH = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 2\sqrt{7} = \frac{32\sqrt{7}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$



【】 最短距離など

【】 角柱・角錐の最短距離

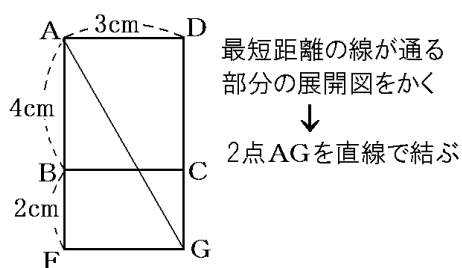
[問題]

右の図は A, B, C, D, E, F, G, H を頂点にもつ直方体で, $AB=4\text{cm}$, $AD=3\text{cm}$, $BF=2\text{cm}$ である。この直方体に, 頂点 A から辺 BC を通って, 頂点 G まで糸をかけた。かけた糸の長さがもっとも短くなるときの糸の長さを求めよ。

(高知県)(**)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $3\sqrt{5}\text{ cm}$

[解説]

<Point> 最短距離の線が通る部分の展開図をかく

右図のように, A と G を直線で結んだときの AG の長さが最短距離になる。

直角三角形 AGF で, 三平方の定理より,

$$AG = \sqrt{AF^2 + GF^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

*直線で結んだときの AG の長さが最短距離になる理由を右図で説明しておこう。

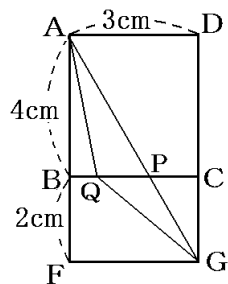
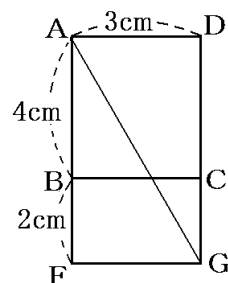
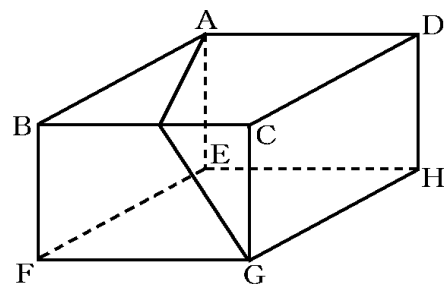
例えば, 糸が右図の Q 点を通る場合, 糸の長さは $AQ + QG$ になる。

三角形の 2 辺の長さの和は他の 1 辺より長くなるので,

$$AQ + QG > AG, \quad AQ + QG > AP + PG$$

これは Q が BC 間の P 以外のどの位置にある場合も成り立つ。

したがって, 糸が P を通る場合が最短距離になる。



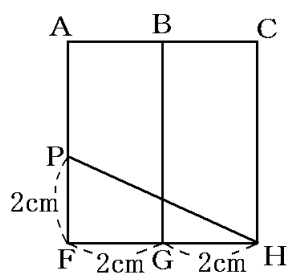
[問題]

右の図のような、底面が 1 辺 2cm の正五角形で高さが 5cm である正五角柱 $ABCDE-FGHIJ$ があり、辺 AF 上に $AP=3\text{cm}$ となる点 P がある。正五角柱 $ABCDE-FGHIJ$ の側面上に点 P と点 H を最短の長さで結ぶ線をひくとき、その線の長さを求めよ。

(栃木県)(**)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $2\sqrt{5}\text{cm}$

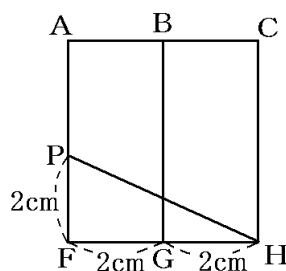
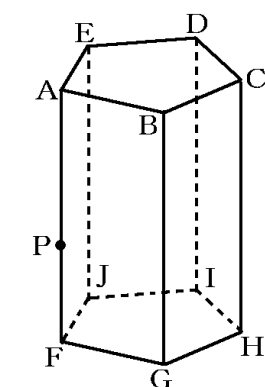
[解説]

最短距離の線が通る部分の展開図は右図のようになる。

最短距離は右図の PH になる。

直角三角形 PHF で、三平方の定理より、

$$PH = \sqrt{PF^2 + FH^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

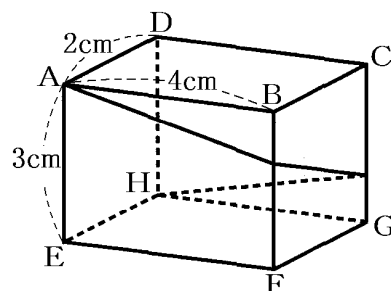


[問題]

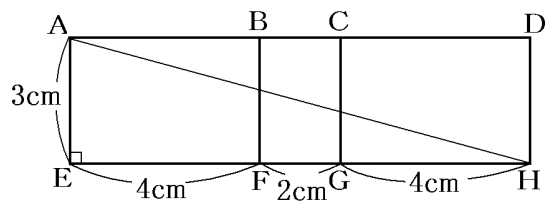
右の図のように、 $AB=4\text{cm}$ 、 $AD=2\text{cm}$ 、 $AE=3\text{cm}$ の直方体の表面に、ひもを、頂点 A から頂点 H まで、辺 BF と辺 CG に交わるようにかける。ひもの長さが最も短くなるときのひもの長さを求めよ。

(愛媛県)(**)

[解答欄]



[ヒント]



[解答] $\sqrt{109}$ cm

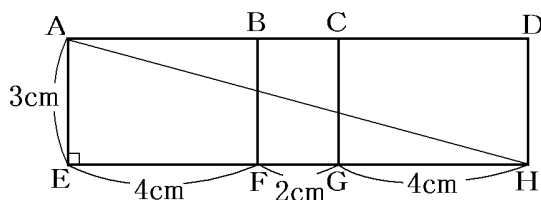
[解説]

最短距離の線が通る部分の展開図は右図のようになる。

最短距離は右図の AH になる。

直角三角形 AHE で、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{AE^2 + HE^2} = \sqrt{3^2 + 10^2} = \sqrt{9 + 100} \\ &= \sqrt{109} \text{ (cm)} \end{aligned}$$

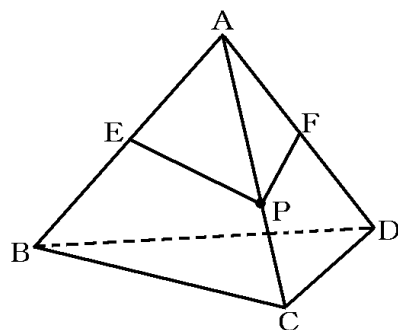


[問題]

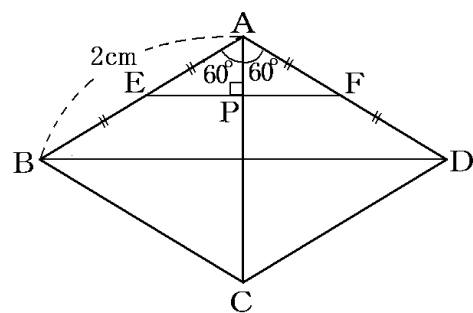
右の正四面体 ABCD の 1 辺の長さを 2cm とする。
辺 AB, AD の中点をそれぞれ E, F とし、点 P が
辺 AC 上を動くものとする。線分 EP と PF の長さ
の和が最も小さくなる時、その値を求めよ。

(富山県)(***)

[解答欄]



[ヒント]



[解答] $\sqrt{3}$ cm

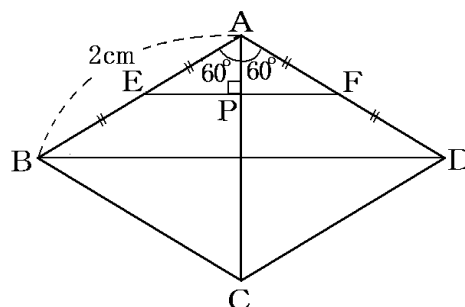
【解説】

EP, PF が通る△ABC, △ACD の部分の展開図は右図の通りである。

直角三角形AEPは 30° 90° 60° の直角三角形で3辺の比は $1 : 2 : \sqrt{3}$ になるので,

$$EP = AE \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\text{cm})$$

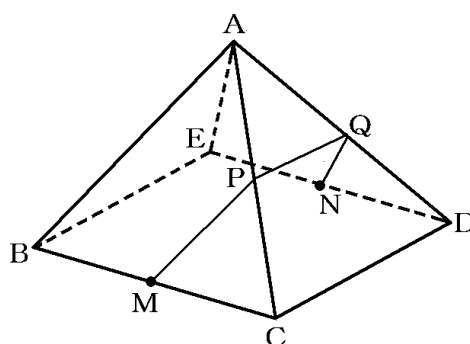
$$EF = EP \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3} (\text{cm})$$



【問題】

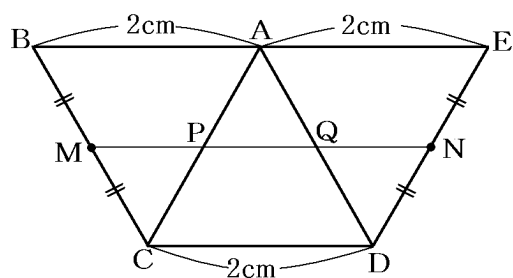
右の図のような正四角錐ABCDEがある。すべての辺の長さを 2cm とし、辺BC, DEの中点をそれぞれM, Nとする。辺AC上に点P, 辺AD上に点Qを, 3つの線分MP, PQ, QNの長さの和が最小となるようにとるとき, 3つの線分MP, PQ, QNの長さの和を求めよ。

(群馬県)(***)



【解答欄】

【ヒント】



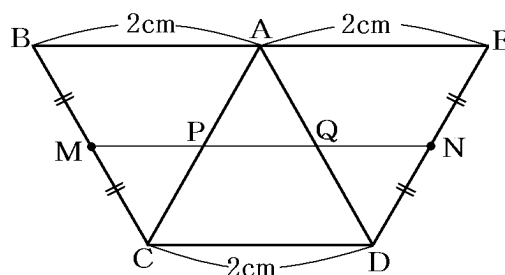
【解答】 3cm

【解説】

右図は, 線分MP, PQ, QNが通る部分の展開図である。3つの線分MP, PQ, QNの長さの和が最小となるのはM, P, Q, Nが一直線上にあるときである。このとき, 右図より,

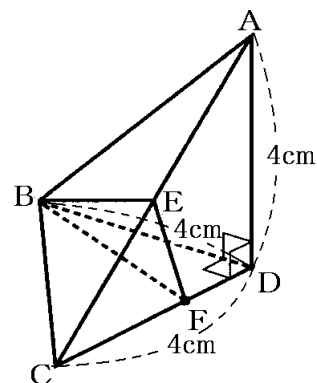
$MP = PQ = QN = 1\text{cm}$ なので,

$MP + PQ + QN = 3(\text{cm})$



[問題]

右の図のように、 $AD=BD=CD=4\text{cm}$ 、
 $\angle ADB=\angle ADC=\angle BDC=90^\circ$ である三角錐 $ABCD$ がある。
 辺 AC の中点を E とし、辺 CD 上を点 C から点 D まで移動する点を F とする。このとき、次の各問いに答えよ。



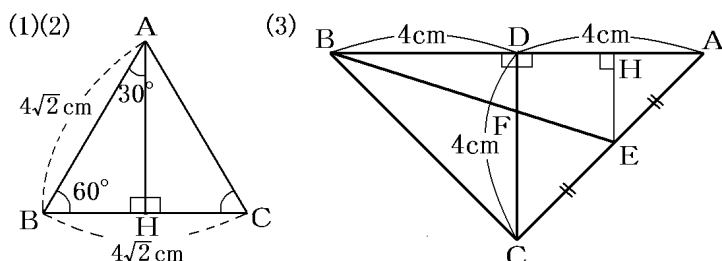
- (1) 辺 AB の長さを答えよ。
- (2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
- (3) $EF+FB$ の長さが最も短くなるとき、 $EF+FB$ の長さを求めよ。

(新潟県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
-----	-----	-----

[ヒント]



[解答](1) $4\sqrt{2}\text{ cm}$ (2) $8\sqrt{3}\text{ cm}^2$ (3) $2\sqrt{10}\text{ cm}$

[解説]

(1) 直角三角形 ABD で、三平方の定理より、

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

(2) (1)と同様にして、 $AC=BC=4\sqrt{2}\text{ (cm)}$ なので、

$\triangle ABC$ は、1 辺が $4\sqrt{2}\text{ cm}$ の正三角形になる。

右図で、 $\triangle ABH$ は $30^\circ\ 90^\circ\ 60^\circ$ の直角三角形で 3 辺の比は

$$1 : 2 : \sqrt{3} \text{ になるので、} AH = AB \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6} \text{ (cm)}$$

$$(\triangle ABH \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 4\sqrt{12} = 4\sqrt{4 \times 3} = 8\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

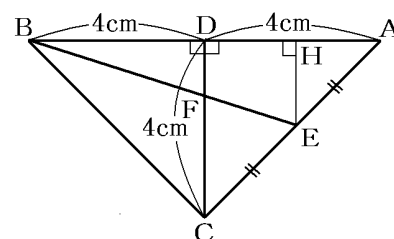
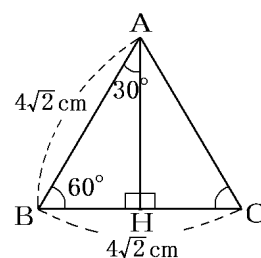
(3) $EF+FB$ の長さが最も短くなるのは、右図のように、

B, F, E が一直線上になる場合である。

E が AC の中点なので、 $AH=DH=EH=4 \div 2=2\text{ (cm)}$ で、

$$BH = BD + DH = 4 + 2 = 6\text{ (cm)}$$

直角三角形 BEH で、三平方の定理より、



$$BE = \sqrt{BH^2 + EH^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10} \text{ (cm)}$$

よって、EF+FB の最短の長さは $2\sqrt{10}$ cm である。

[問題]

図 1 のように、1 辺の長さが 2cm の正四面体(正三角錐)ABCD がある。辺 AB, BC, CD の中点をそれぞれ E, F, G とする。点 E から辺 AC を通って頂点 D まで、長さが最も短くなるようにひもをかけるとき、次の各問いに答えよ。

(1) 図 2 は、この正四面体の展開図である。ひものようすは図 3 の展開図にどのように表れるか、展開図に実線で書き入れよ。ただし、図中の●は、それぞれ正四面体の各辺の中点の位置を示している。

(2) ひもの長さを求めよ。

(島根県)(***)

図1

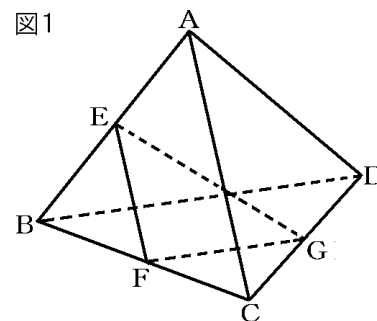
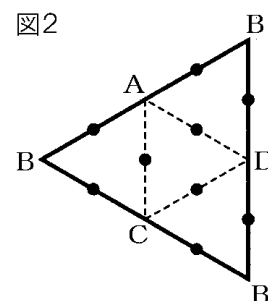
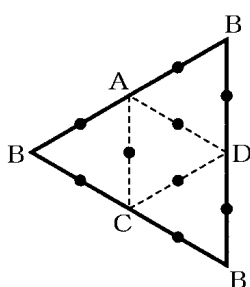


図2



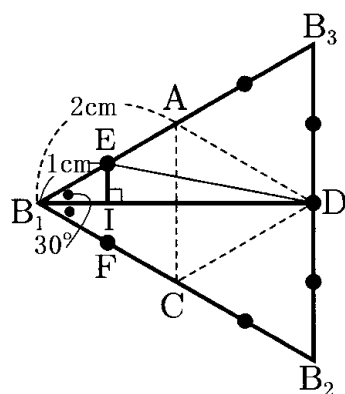
[解答欄]

(1)

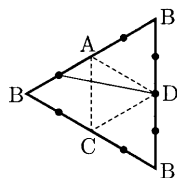


(2)

[ヒント]



[解答](1) (2) $\sqrt{7}$ cm



[解説]

(2) 右図で、直角三角形 B_1B_3D は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は $1 : 2 : \sqrt{3}$ になるので、

$$B_1D = B_1B_3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)} \cdots \textcircled{1}$$

直角三角形 B_1EI は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は $1 : 2 : \sqrt{3}$ になるので、

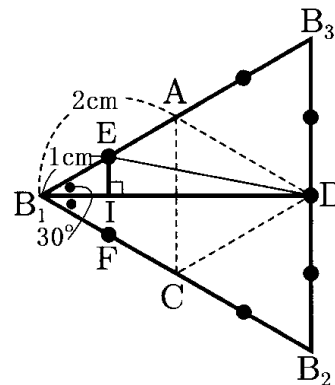
$$B_1I = B_1E \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (cm)} \cdots \textcircled{2}$$

$$EI = B_1E \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (cm)}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } ID = B_1D - B_1I = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (cm)}$$

直角三角形 EDI で、三平方の定理より、

$$DE = \sqrt{EI^2 + ID^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{28}{4}} = \sqrt{7} \text{ (cm)}$$

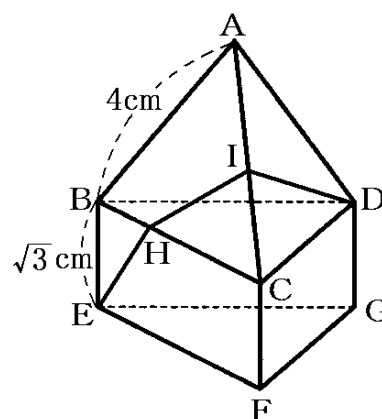


[問題]

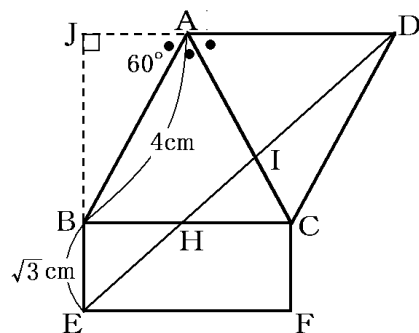
右の図は、正四面体と三角柱を合わせた形で、点 A, B, C, D, E, F, G を頂点とする立体を表している。正四面体 ABCD の 1 辺の長さは 4cm であり、三角柱 BCDEFG の側面はすべて合同な長方形である。辺 BC 上に点 H, 辺 AC 上に点 I を、 $EH + HI + ID$ の長さが最も短くなるようにとる。 $BE = \sqrt{3}$ cm のとき、 $EH + HI + ID$ の長さを求めよ。

(福岡県)(***)

[解答欄]



[ヒント]



[解答] $3\sqrt{7}$ cm

[解説]

右は、EH, HI, ID が通る面の展開図である。

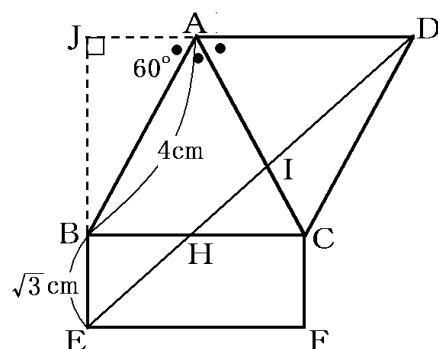
EH+HI+ID の長さが最も短くなるのは、E, H, I, D が一直線上にある場合で、その場合の最短距離は ED の長さである。

$\triangle ABJ$ は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は $1:2:\sqrt{3}$ になるので、

$AJ = 4 \times \frac{1}{2} = 2(\text{cm})$, $BJ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}(\text{cm})$ である。

直角三角形 DEJ で、 $DJ = AJ + AD = 2 + 4 = 6(\text{cm})$, $EJ = BJ + BE = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}(\text{cm})$

三平方の定理より、 $ED = \sqrt{DJ^2 + EJ^2} = \sqrt{6^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 27} = \sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = 3\sqrt{7}(\text{cm})$



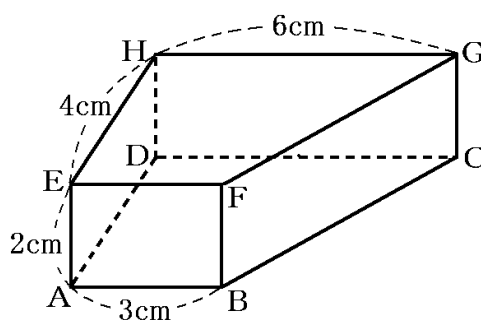
[問題]

右図は、底面 ABCD と EFGH が台形で、側面がすべて長方形の四角柱 ABCDEFGH を表している。

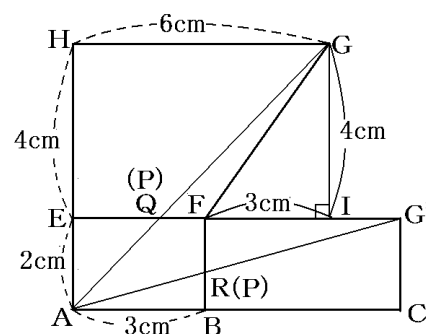
$EH = 4\text{cm}$, $\angle DAB = \angle ADC = 90^\circ$, $AB = 3\text{cm}$, $HG = 6\text{cm}$, $AE = 2\text{cm}$ である。図に示す立体において、点 P が辺 EF, FB 上を点 E から点 F を通って点 B まで動く。AP+PG の長さが最も短くなるとき、AP+PG の長さは何 cm か。

(福岡県)(***)

[解答欄]

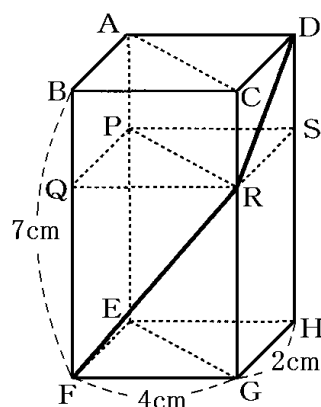


①より、 $AG^2=72$ 、②より $AG'^2=68$ なので $AG>AG'$ になるので、最短距離は $AG'=2\sqrt{17}$ cm



[問題]

右の図のように、 $GH=2\text{cm}$ 、 $FG=4\text{cm}$ 、 $BF=7\text{cm}$ とする直方体を X とする。辺 CG 上に点 R をとり、線分 DR と RF の長さの和が最小となるようにする。さらに、点 R を通り、面 $ABCD$ と平行な平面と辺 AE 、 BF 、 DH との交点をそれぞれ P 、 Q 、 S とする。このとき次の各問いに答えよ。



(1) $DR+RF$ を求めよ。

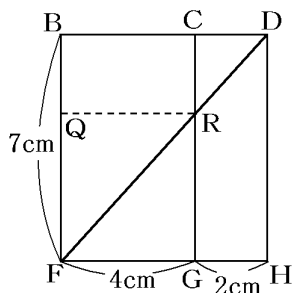
(2) $\triangle PQR$ を底面とし、高さが BQ の三角柱の体積は、直方体 X の体積の何倍であるか。

(沖縄県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]



[解答](1) $\sqrt{85}\text{cm}$ (2) $\frac{1}{6}$ 倍

[解説]

(1) 右図のような展開図で、 F と D を結んだ線分と線分 CG の交点に R が来るとき、 $DR+RF$ は最小になる。

直角三角形 DFB で、三平方の定理より、

$$DF = \sqrt{DB^2 + FB^2} = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{36 + 49} = \sqrt{85} (\text{cm})$$

よって、 $DR+RF = \sqrt{85} (\text{cm})$

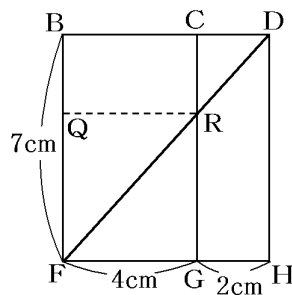
(2) まず、高さ BQ を求める。

$QR \parallel BD \parallel FH$ なので、平行線の性質より、

$$BQ : QF = DR : RF = GH : FG = 2 : 4 = 1 : 2$$

$$\text{よって、} BQ = BF \times \frac{1}{1+2} = 7 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{3} (\text{cm})$$

$$(\text{三角柱の体積}) = \frac{1}{2} \times QR \times PQ \times BQ = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times \frac{7}{3} = \frac{28}{3} (\text{cm}^3)$$



$$(X \text{ の体積}) = 4 \times 2 \times 7 = 56(\text{cm}^3)$$

$$(\text{三角柱の体積}) \div (X \text{ の体積}) = \frac{28}{3} \div 56 = \frac{28}{3} \times \frac{1}{56} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} (\text{倍})$$

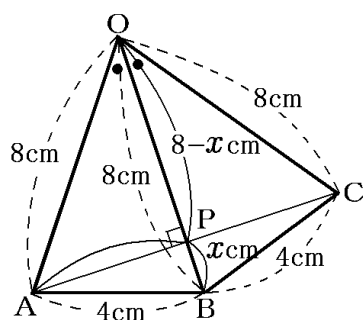
[問題]

右の図のように、1 辺が 4cm の正三角形 ABC を底面とし、
OA=OB=OC=8cm とする三角錐 O-ABC がある。辺 OB
上に点 P をとる。AP+PC の長さを最も短くしたとき、BP の長さ
を求めよ。

(茨城県改)(***)

[解答欄]

[ヒント]



[解答]1cm

[解説]

右は、AP, PC が通る面の展開図である。AP+PC の長さを
最も短くなるのは、A, P, C が一直線上にある場合である。
右図で、OP は二等辺三角形 OAC の頂角の二等分線になるの
で、OP は辺 AC を垂直に二等分する。

BP = x (cm) とおくと、OP = $8 - x$ (cm)

直角三角形 OAP で、三平方の定理より、

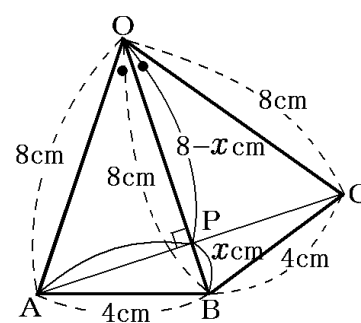
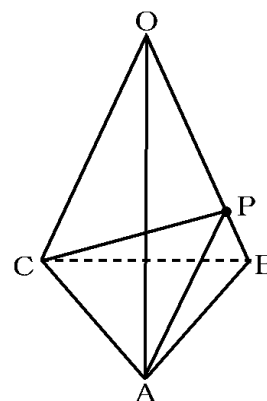
$$AP^2 = OA^2 - OP^2 = 64 - (8 - x)^2 \cdots \textcircled{1}$$

直角三角形 ABP で、三平方の定理より、

$$AP^2 = AB^2 - BP^2 = 16 - x^2 \cdots \textcircled{2}$$

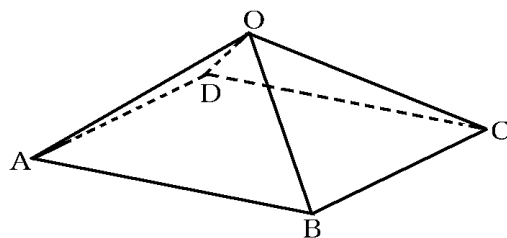
①, ②より、

$$64 - (8 - x)^2 = 16 - x^2, \quad 64 - x^2 + 16x - 64 = 16 - x^2, \quad 16x = 16, \quad x = 1$$



[問題]

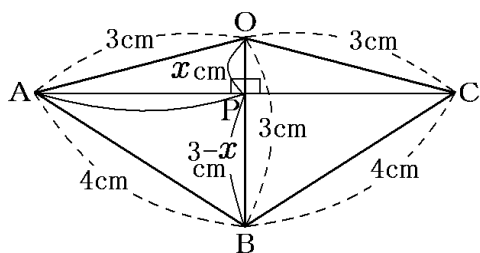
右の図の正四角錐は、底面が1辺4cmの正方形で、他の辺が3cmである。辺OB上の点をPとすると、点Aから点Pを通して点Cまで糸をかける。この糸の長さが最も短くなるときの、糸の長さを求めよ。



(青森県)(****)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ cm

[解説]

糸が通る $\triangle OAB$ と $\triangle OCB$ の部分の展開図をかくと、右図のようになる。

$\triangle OAB$ と $\triangle OCB$ は辺OBについて線対称の位置にあるので、ACはOBによって垂直に2等分される。

OP = x cm とおくと、BP = 3 - x (cm) になる。

直角三角形OAPで、三平方の定理より、

$$AP^2 = OA^2 - OP^2 = 9 - x^2 \cdots \textcircled{1}$$

直角三角形BAPで、三平方の定理より、

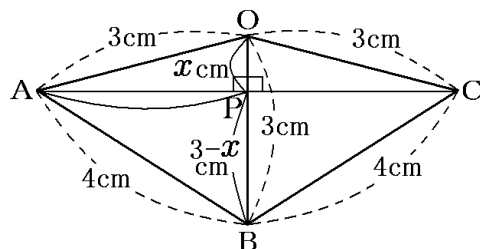
$$AP^2 = BA^2 - BP^2 = 16 - (3 - x)^2 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}, 9 - x^2 = 16 - (3 - x)^2, 9 - x^2 = 16 - 9 + 6x - x^2, 6x = 2, x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{1} \text{より}, AP^2 = 9 - x^2 = 9 - \frac{1}{9} = \frac{80}{9}$$

$$AP = \sqrt{\frac{80}{9}} = \frac{\sqrt{80}}{3} = \frac{\sqrt{16 \times 5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{3} \text{ (cm)}$$

$$AP = PC \text{ なので}, AC = AP \times 2 = \frac{4\sqrt{5}}{3} \times 2 = \frac{8\sqrt{5}}{3} \text{ (cm)}$$



[問題]

図1のように、底面の1辺が4cm、側面の二等辺三角形の等しい辺がいずれも5cmの正四角錐ABCDEがあり、この正四角錐の頂点Bから辺ACを通して頂点Dまで、長さが最も短くなるように、ひもをかける。また、図2は、この正四角錐の展開図である。このとき、次の各問いに答えよ。

図1

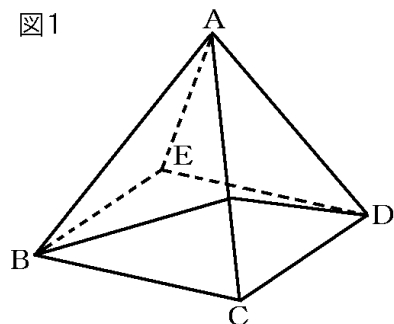
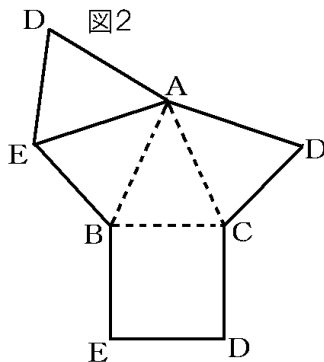


図2



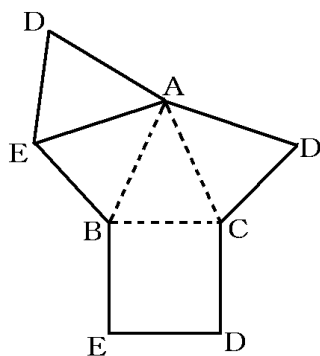
(1) ひものようすを展開図に実線でかき入れよ。

(2) ひもの長さを求めよ。

(岩手県)(****)

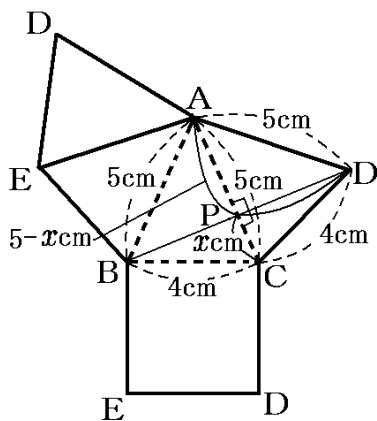
[解答欄]

(1)

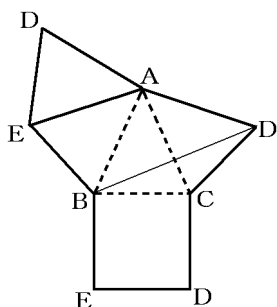


(2)

[ヒント]



[解答](1)



$$(2) \frac{8\sqrt{21}}{5} \text{ cm}$$

[解説]

(2) $\triangle ABC$ と $\triangle ADC$ は辺 AC について線対称の位置にあるので、 BD は AC によって垂直に 2 等分される。

$PC = x \text{ cm}$ とおくと、 $AP = 5 - x \text{ (cm)}$

直角三角形 CDP で、三平方の定理より、

$$PD^2 = CD^2 - CP^2 = 16 - x^2 \cdots \textcircled{1}$$

直角三角形 ADP で、三平方の定理より、

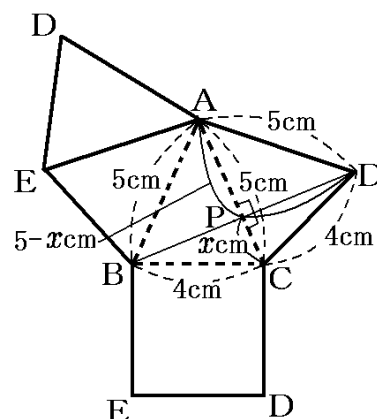
$$PD^2 = AD^2 - AP^2 = 25 - (5 - x)^2 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } 16 - x^2 = 25 - (5 - x)^2, 16 - x^2 = 25 - 25 + 10x - x^2$$

$$10x = 16, x = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

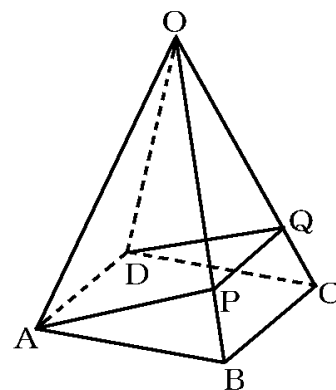
$$\textcircled{1} \text{ より, } PD^2 = 16 - x^2 = 16 - \frac{64}{25} = \frac{336}{25}, PD = \sqrt{\frac{336}{25}} = \frac{\sqrt{16 \times 21}}{5} = \frac{4\sqrt{21}}{5} \text{ (cm)}$$

$$BP = PD \text{ なので, } BD = PD \times 2 = \frac{4\sqrt{21}}{5} \times 2 = \frac{8\sqrt{21}}{5} \text{ (cm)}$$



[問題]

右の図の正四角錐 $OABCD$ は、 $OA = 6\sqrt{3} \text{ cm}$ 、 $AB = 6 \text{ cm}$ である。図は、この正四角錐の側面に、点 A から辺 OB と辺 OC を通って点 D まで、1 本の糸を巻きつけたものである。糸と辺 OB 、 OC との交点をそれぞれ P 、 Q とする。次の各問いに答えよ。ただし、糸はそれぞれの側面でたるむことなく巻きつけられているものとする。



(1) P 、 Q がそれぞれ辺 OB 、 OC の中点となるように糸を巻きつけたとき、 PQ の長さを求めよ。

(2) $AP \perp OB$ 、 $DQ \perp OC$ となるように糸を巻きつけたとき、① OP と PB の長さの比 $OP : PB$ を、最も簡単な整数比で表せ。② 巻きつけた糸の A から D までの長さを求めよ。

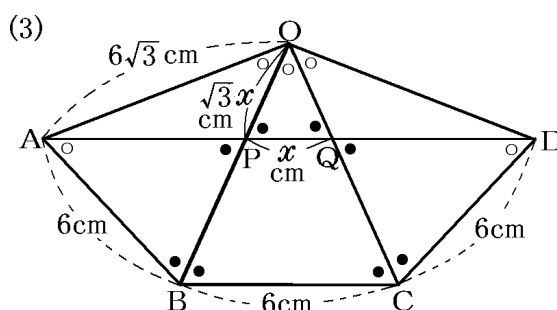
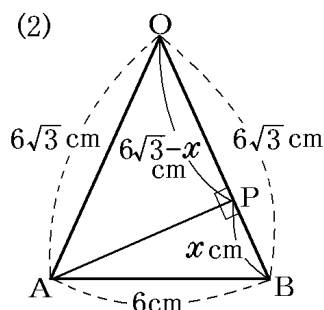
(3) A から D までの糸の長さが最も短くなるように巻きつけたとき、巻きつけた糸の A から D までの長さを求めよ。

(群馬県)(****)

[解答欄]

(1)	(2)①	②
(3)		

[ヒント]



[解答](1) 3cm (2)① 5 : 1 ② $5 + 2\sqrt{33}$ (cm) (3) 16cm

[解説]

(1) P, Q がそれぞれ辺 OB, OC の中点となるときの、中点連結定理より、

$$PQ = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 6 = 3(\text{cm})$$

(2)① 右図のように、 $BP = x(\text{cm})$ とおくと、 $OP = 6\sqrt{3} - x(\text{cm})$

直角三角形 ABP で、三平方の定理より、

$$AP^2 = AB^2 - BP^2 = 36 - x^2 \cdots \text{ア}$$

直角三角形 OAP で、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} AP^2 &= OA^2 - OP^2 = (6\sqrt{3})^2 - (6\sqrt{3} - x)^2 \\ &= 108 - x^2 + 12\sqrt{3}x - 108 = -x^2 + 12\sqrt{3}x \cdots \text{イ} \end{aligned}$$

$$\text{ア, イより, } -x^2 + 12\sqrt{3}x = 36 - x^2, \quad 12\sqrt{3}x = 36, \quad x = \frac{36}{12\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$PB = \sqrt{3}(\text{cm}), \quad OP = 6\sqrt{3} - \sqrt{3} = 5\sqrt{3}(\text{cm})$$

$$\text{よって, } OP : PB = 5\sqrt{3} : \sqrt{3} = 5 : 1$$

$$\text{② アより, } AP^2 = 36 - x^2 = 36 - (\sqrt{3})^2 = 36 - 3 = 33$$

$$\text{よって, } AP = \sqrt{33}(\text{cm}), \quad QD = AP = \sqrt{33}(\text{cm})$$

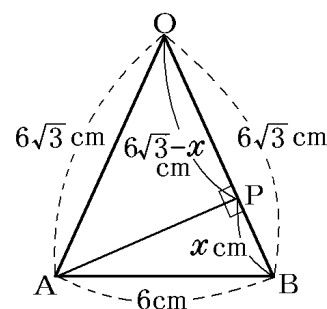
$$\triangle OBC \text{ で, ①より } OP : PB = 5 : 1 \text{ なので, } OP : OB = 5 : 6$$

$$\text{明らかに } PQ \parallel BC \text{ なので, 平行線の性質より, } PQ : BC = OP : OB, \quad PQ : 6 = 5 : 6$$

$$\text{よって, } PQ = 5(\text{cm})$$

巻きつけた糸の A から D までの長さは、

$$AP + PQ + QD = \sqrt{33} + 5 + \sqrt{33} = 5 + 2\sqrt{33}(\text{cm})$$



(3) 右は、糸が通る部分の展開図である。

AからDまでの糸の長さが最も短くなるように巻きつけたとき、A, P, Q, Dは図のように一直線上にある。したがって、最短の長さはADになる。

$\triangle OBC$, $\triangle OAB$, $\triangle OCD$ は合同な二等辺三角形である。それらの底角を●, 頂角を○として、等しい角度を図に記入する。

$\triangle ABP$ は 2 つの底角(●)が等しいので, $AP=AB=6(\text{cm})$ である。同様に, $QD=6\text{cm}$ である。

あと, PQ の長さがわかれば, AD の長さを求めることができる。

そこで, $PQ=x(\text{cm})$ とおく。

$\triangle OPQ \sim \triangle OAB$ (2 角が等しい) なので,

$$OP : PQ = OA : AB = 6\sqrt{3} : 6 = \sqrt{3} : 1$$

$$\text{よって, } OP = PQ \times \sqrt{3} = x \times \sqrt{3} = \sqrt{3}x (\text{cm})$$

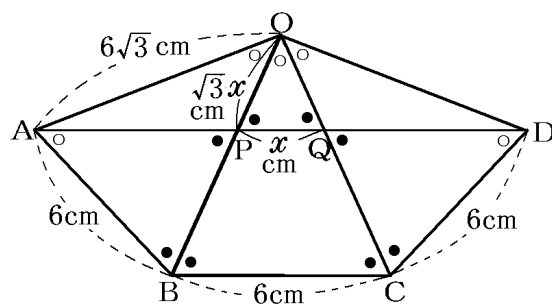
ところで, $\triangle ABP \sim \triangle OAB$ (2 角が等しい) なので, $AB : BP = \sqrt{3} : 1$

$$6 : BP = \sqrt{3} : 1, \quad \sqrt{3} BP = 6 \times 1, \quad BP = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} (\text{cm})$$

$$OP + BP = OB \text{ なので, } \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}x = 4\sqrt{3}, \quad x = 4$$

$$\text{よって, } AP + PQ + QD = 6 + 4 + 6 = 16(\text{cm})$$



【】 円錐の最短距離

[問題]

右の図のように、底面の直径 AB と母線の長さ PA について $AB=PA=4\text{cm}$ の円錐がある。線分 PB の中点を C とする。図のように、この円錐の表面に、点 A から点 C まで、ひもをゆるまないようにかける。ひもの長さが最も短くなるとき、その長さを求めよ。

(長野県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

まず、この円錐の側面を展開してできるおうぎ形の中心角を求める。中心角を x° とする。
(側面のおうぎ形の円周部分の長さ)=(底面の円の円周の長さ)なので、

$$2\pi \times PA \times \frac{x}{360} = \pi \times AB, \quad 2\pi \times 4 \times \frac{x}{360} = \pi \times 4$$

[解答] $2\sqrt{5}\text{cm}$

[解説]

まず、この円錐の側面を展開してできるおうぎ形の中心角を求める。中心角を x° とする。
(側面のおうぎ形の円周部分の長さ)=(底面の円の円周の長さ)なので、

$$2\pi \times PA \times \frac{x}{360} = \pi \times AB, \quad 2\pi \times 4 \times \frac{x}{360} = \pi \times 4$$

$$2 \times \frac{x}{360} = 1, \quad \frac{x}{180} = 1, \quad x = 180$$

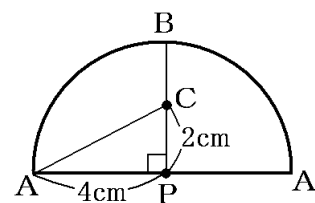
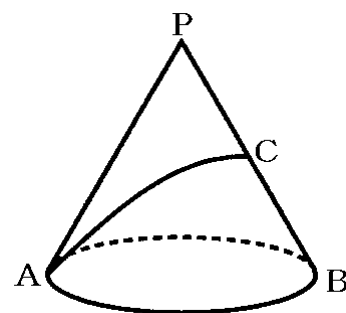
* (中心角) $= 360^\circ \times \frac{(\text{底面の半径})}{(\text{母線の長さ})} = 360^\circ \times \frac{2}{4} = 180^\circ$ で簡単に求めることもできる。

中心角が 180° なので、側面の展開図は右図のようになる。

最短距離は、図の AC になる。

直角三角形 ACP で、三平方の定理より、

$$AC = \sqrt{AP^2 + CP^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5} (\text{cm})$$

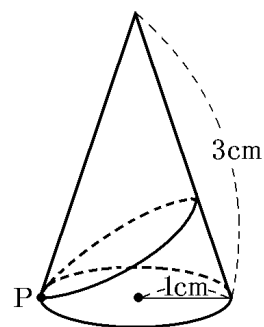


[問題]

右の図のように、底面の半径が 1cm、母線の長さが 3cm の円錐がある。底面の円周上の点 P から円錐の側面を 1 周して、点 P までひもをかける。ひもの長さが最も短くなるときのひもの長さを求めよ。ただし、円周率は π とする。

(富山県)(**)

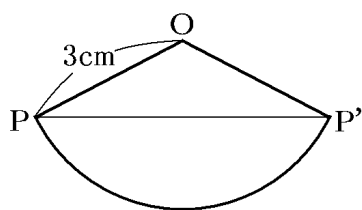
[解答欄]



[ヒント]

まず、この円錐の側面を展開してできるおうぎ形の中心角を求める。中心角を x° とする。

(側面のおうぎ形の円周部分の長さ)=(底面の円の円周の長さ)なので、 $2\pi \times 3 \times \frac{x}{360} = \pi \times 2$



[解答] $3\sqrt{3}$ cm

[解説]

まず、この円錐の側面を展開してできるおうぎ形の中心角を求める。中心角を x° とする。

(側面のおうぎ形の円周部分の長さ)=(底面の円の円周の長さ)なので、

$$2\pi \times 3 \times \frac{x}{360} = \pi \times 2$$

$$3 \times \frac{x}{360} = 1, \quad \frac{x}{120} = 1, \quad x = 120$$

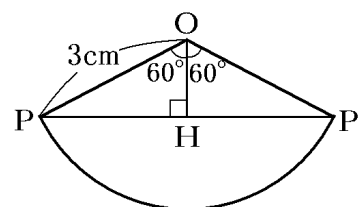
* (中心角) $= 360^\circ \times \frac{(\text{底面の半径})}{(\text{母線の長さ})} = 360^\circ \times \frac{1}{3} = 120^\circ$ で簡単に求めることもできる。

中心角が 120° なので、側面の展開図は右図のようになる。

ひもの長さが最も短くなるときのひもの長さは図の PP'である。△OPH は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は

$$1 : 2 : \sqrt{3} \text{ になるので, } PH = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (cm)}$$

$$PP' = PH \times 2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 2 = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

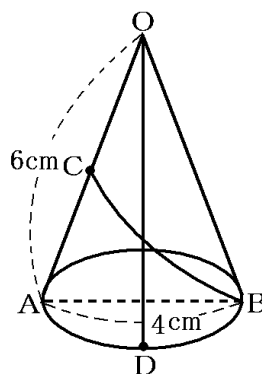


[問題]

右の図のように、円錐の底面の直径を AB とし、母線 OA 、弧 AB の中点をそれぞれ C 、 D とする。円錐の側面において、点 C から点 B まで長さが最も短くなる線を母線 OD と交わるようにひくとき、この線と線分 CA 、および点 D を含む弧 AB によって囲まれる部分の面積は何 cm^2 か。

(長崎県)(***)

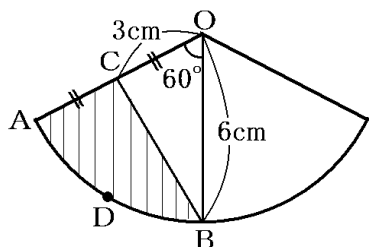
[解答欄]



[ヒント]

まず、この円錐の側面を展開してできるおうぎ形の中心角を求めると 120° になる。

* (中心角) $= 360^\circ \times \frac{(\text{底面の半径})}{(\text{母線の長さ})} = 360^\circ \times \frac{2}{6} = 120^\circ$ で簡単に求めることもできる。



[解答] $6\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2} (\text{cm}^2)$

[解説]

まず、この円錐の側面を展開してできるおうぎ形の中心角を求める。中心角を x° とする。

(側面のおうぎ形の円周部分の長さ) $=$ (底面の円の円周の長さ) なので、

$$2\pi \times OA \times \frac{x}{360} = \pi \times AB, \quad 2\pi \times 6 \times \frac{x}{360} = \pi \times 4$$

$$3 \times \frac{x}{360} = 1, \quad \frac{x}{120} = 1, \quad x = 120$$

* (中心角) $= 360^\circ \times \frac{(\text{底面の半径})}{(\text{母線の長さ})} = 360^\circ \times \frac{2}{6} = 120^\circ$ で簡単に求めることもできる。

中心角が 120° なので、側面の展開図は右図のようになり、

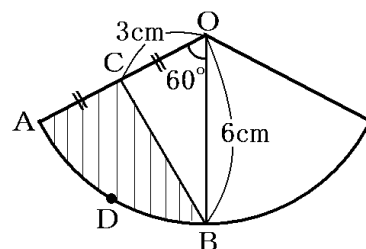
BC が最短距離になる。

おうぎ形 OAB の中心角は、 $120^\circ \div 2 = 60^\circ$ で、

$OB : OC = 6 : 3 = 2 : 1$ なので、 $\triangle OBC$ は $30^\circ \ 90^\circ \ 60^\circ$

の直角三角形になる。

$$BC = OC \times \sqrt{3} = 3 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3} (\text{cm})$$



(右図の斜線部分の面積)=(おうぎ形 OAB の面積) $-(\triangle OBC$ の面積)

$$(\text{おうぎ形 OAB の面積}) = \pi \times 6^2 \times \frac{60}{360} = 6\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$(\triangle OBC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times BC \times OC = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 3 = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{よって, (右図の斜線部分の面積)} = 6\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

【】 立体上の 2 点の距離

[立体上の 2 点]

[問題]

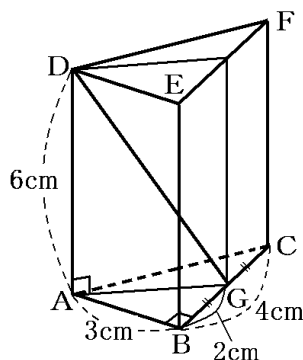
右の図は、 $AB=3\text{cm}$ 、 $BC=4\text{cm}$ 、 $\angle ABC=90^\circ$ の直角三角形 ABC を底面とし、 $AD=BE=CF=6\text{cm}$ を高さとする三角柱である。また、点 G は辺 BC の中点である。この三角柱において、2 点 D 、 G 間の距離を求めよ。

(神奈川県)(**)

[解答欄]

[ヒント]

線分 DG を含む、 $\triangle DGA$ で考える。



[解答] 7cm

[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る→切断面で考える

線分 DG を含む、 $\triangle DGA$ で考える。

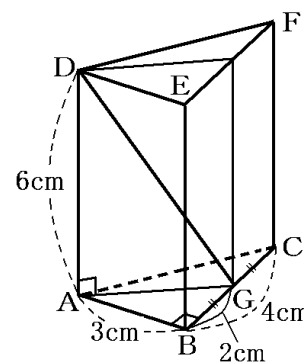
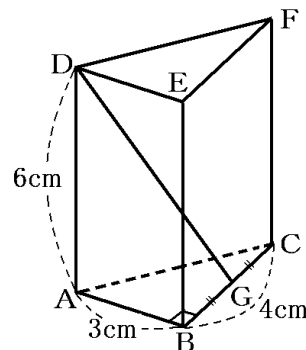
線分 DA は底面の $\triangle ABC$ に垂直であるので $\angle DAG=90^\circ$ である。

したがって、 AG の長さがわかれば DG を求めることができる。
直角三角形 ABG で、 G は BC の中点なので、 $BG=4 \div 2=2(\text{cm})$
三平方の定理より、

$$AG = \sqrt{AB^2 + BG^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} (\text{cm})$$

直角三角形 DGA で、三平方の定理より、

$$DG = \sqrt{AD^2 + AG^2} = \sqrt{36 + 13} = \sqrt{49} = 7 (\text{cm})$$



[問題]

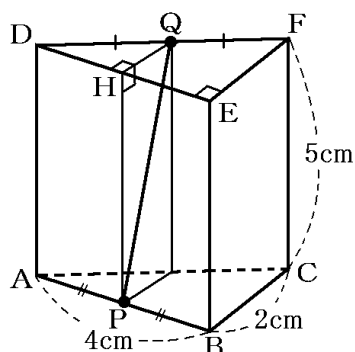
右の図のような三角柱があり、 $AB=4\text{cm}$ 、 $BC=2\text{cm}$ 、 $CF=5\text{cm}$ 、 $\angle DEF=90^\circ$ である。また、辺 AB 、 DF の中点をそれぞれ P 、 Q とし、点 P と点 Q を結ぶ。

線分 PQ の長さは何 cm か。

(香川県)(***)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $\sqrt{26}\text{ cm}$

[解説]

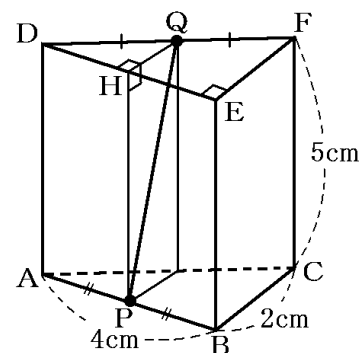
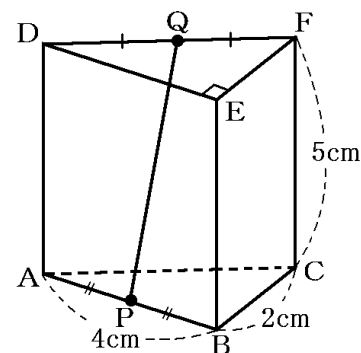
右図のように、 Q から DE へ垂線 QH を引くと、 $\angle QHD = \angle FED = 90^\circ$ で、同位角が等しいので、 $QH \parallel FE$ 平行線の性質より、 $HQ : EF = DQ : DF = 1 : 2$ なので、

$$QH = \frac{1}{2}FE = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2} \times 2 = 1(\text{cm})$$

また、 H は DE の中点になるので、四角形 $HPBE$ は長方形になり、 $PH \parallel BE$ になる。 $BE \perp$ 面 DEF なので、 $PH \perp$ 面 DEF になる。よって、 $\angle PHQ = 90^\circ$

直角三角形 PQH で、三平方の定理より、

$$PQ = \sqrt{PH^2 + QH^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}(\text{cm})$$



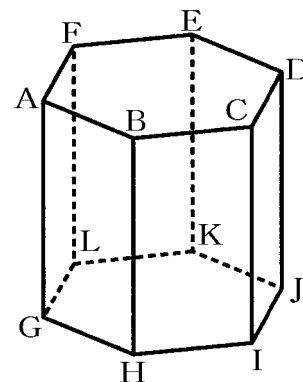
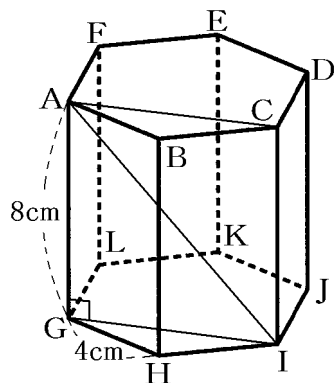
[問題]

右図のように、底面 $GHIJKL$ が 1 辺 4cm の正六角形で、
 $AG=8\text{cm}$ の正六角柱 $ABCDEF-GHIJKL$ がある。 AI の
 長さを求めよ。

(石川県)(***)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $4\sqrt{7}\text{cm}$

[解説]

右の図 1 のように、 AIG を結ぶ。
 辺 AG は底面と垂直なので、
 $\angle AGI=90^\circ$ である。

直角三角形 AIG で $AG=8\text{cm}$ な
 ので、 GI の長さがわかれば AI を計
 算できる。

図 2 のように、底面 $GHIJKL$ は
 正六角形なので、

$\triangle GHM$ は 30° 60° 90° の直角三角形である。

したがって、 $GM : GH = \sqrt{3} : 2$,

$GH=4\text{cm}$ なので、 $GM : 4 = \sqrt{3} : 2$

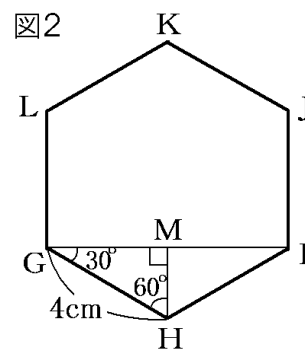
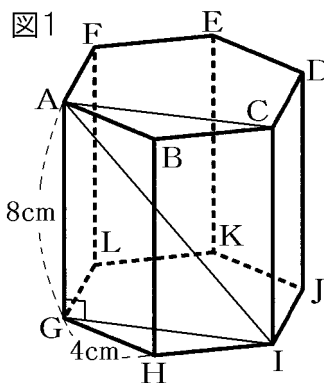
比の外項の積は内項の積に等しいので、

$GM \times 2 = 4 \times \sqrt{3}$, $GM = 4 \times \sqrt{3} \div 2 = 2\sqrt{3}(\text{cm})$, $GI = 2GM = 4\sqrt{3}(\text{cm})$

図 1 の直角三角形 AIG で、三平方の定理より、

$AI^2 = AG^2 + GI^2 = 64 + (4\sqrt{3})^2 = 64 + 48 = 112$

よって、 $AI = \sqrt{112} = \sqrt{16 \times 7} = 4\sqrt{7}(\text{cm})$



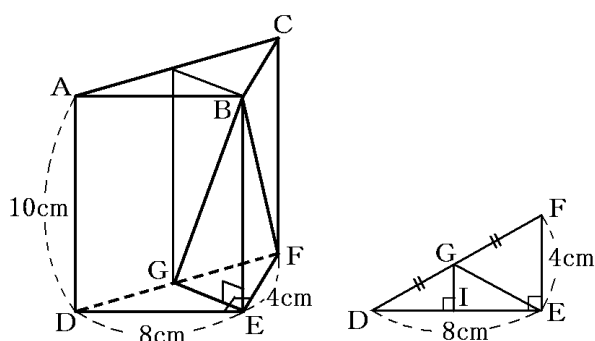
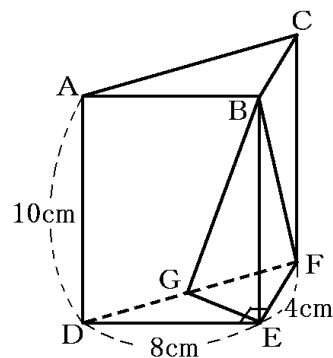
[問題]

右の図のように、点 A, B, C, D, E, F を頂点とし、 $\angle DEF = 90^\circ$ の直角三角形 DEF を底面の 1 つとする三角柱がある。辺 DF の中点を G とし、4 点 B, E, F, G を結んで三角錐をつくる。辺 DE の長さが 8cm, 辺 EF の長さが 4cm, 辺 AD の長さが 10cm のとき、三角錐 BEFG の辺 BG の長さを求めよ。

(三重県)(***)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $2\sqrt{30}$ cm

[解説]

右の図 1 で、BE は底面 DEF に垂直なので、 $\angle BEG = 90^\circ$ である。図 2 で、 $\triangle BGE$ は、BE = 10cm の直角三角形なので、GE の長さがわかれば、三平方の定理で BG の長さを計算できる。
そこで、図 3 で、G は DF の中点で、 $GI \parallel FE$ なので、平行線の性質より、

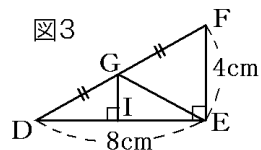
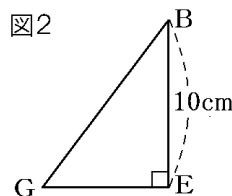
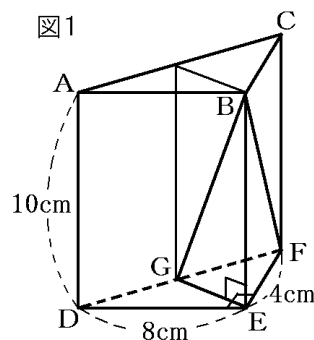
$$GI = \frac{1}{2} FE = \frac{1}{2} \times 4 = 2(\text{cm}),$$

$$IE = ID = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \times 8 = 4(\text{cm}) \text{ である。}$$

$$\triangle GEI \text{ で、三平方の定理より、} GE = \sqrt{GI^2 + IE^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} (\text{cm})$$

図 2 の $\triangle BGE$ で、三平方の定理より、

$$BG = \sqrt{BE^2 + GE^2} = \sqrt{100 + 20} = \sqrt{120} = \sqrt{4 \times 30} = 2\sqrt{30} (\text{cm})$$



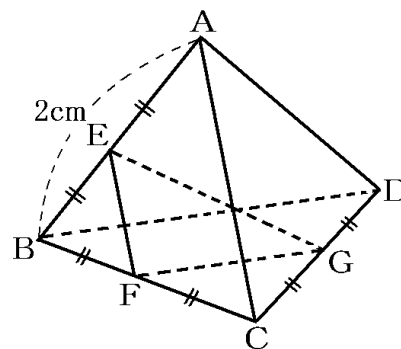
[問題]

右の図のように、1 辺の長さが 2cm の正四面体(正三角錐)ABCD がある。辺 AB, BC, CD の中点をそれぞれ E, F, G とする。次の各問いに答えよ。

(1) AG, EG の長さをそれぞれ求めよ。

(2) $\angle FEG$ の大きさを求めよ。

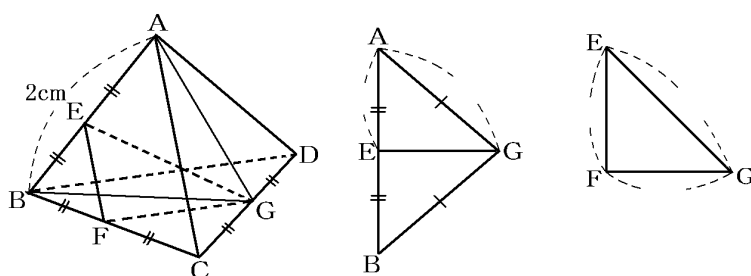
(島根県)(***)



[解答欄]

(1)AG :	EG :	(2)
---------	------	-----

[ヒント]



[解答](1)AG : $\sqrt{3}$ cm EG : $\sqrt{2}$ cm (2) 45°

[解説]

(1) $\triangle ACD$ は 1 辺が 2cm の正三角形なので、右の図 1 のように、
 $\triangle ACG$ は、 $CG : AC : AG = 1 : 2 : \sqrt{3}$ の直角三角形になる。

よって、 $AG = \sqrt{3}$ (cm)・・・①

次に、図 2 のように、A と G, B と G を結ぶ。

$BG = AG$, ①より $AG = \sqrt{3}$ (cm)なので、

$BG = AG = \sqrt{3}$ (cm)である。

また、 $AE = BE = 1$ (cm)である。

図 3 で、三平方の定理より、

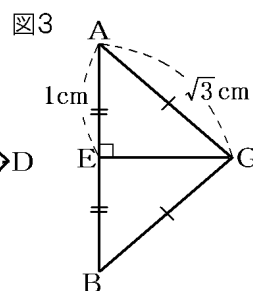
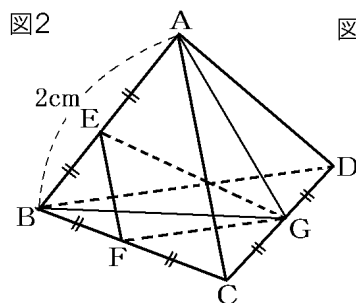
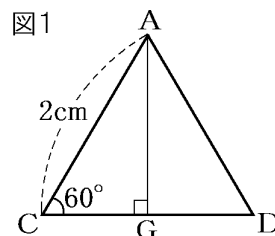
$$EG = \sqrt{AG^2 - AE^2} = \sqrt{3-1}$$

$$= \sqrt{2} \text{ (cm)} \cdots \textcircled{2}$$

(2) $\triangle ABC$ において、E は AB の中点、

F は BC の中点なので、中点連結定理より、

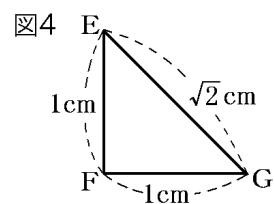
$$EF = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{ (cm)}$$



同様にして、 $FG = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 2 = 1(\text{cm})$

また、②より $EG = \sqrt{2}(\text{cm})$ なので、 $\triangle EGF$ は、図4のように、3辺の比が $1 : 1 : \sqrt{2}$ の直角二等辺三角形になる。

したがって、 $\angle FEG = 45^\circ$ である。



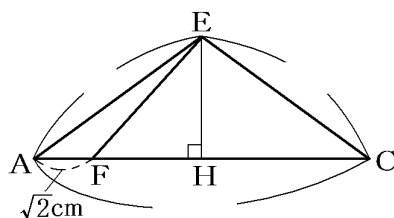
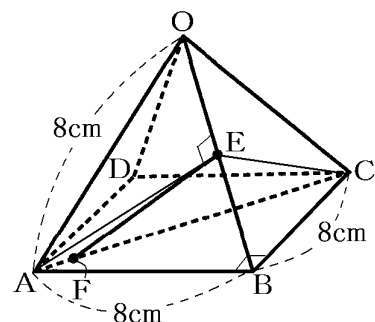
[問題]

右の図のように、1辺の長さが 8cm の正方形 $ABCD$ を底面とし、側面がすべて正三角形である正四角錐 $OABCD$ がある。辺 OB の中点を E とし、線分 AC 上に $AF = \sqrt{2}\text{cm}$ となる点 F をとる。このとき、線分 EF の長さを求めよ。

(茨城県)(***)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $\sqrt{34}\text{cm}$

[解説]

EF を含む断面 EAC を使って考える。

まず、 $\triangle EAC$ の3つの辺の長さを計算する。

図1の直角三角形 OAE で、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} AE &= \sqrt{OA^2 - OE^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} \\ &= \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}(\text{cm}) \end{aligned}$$

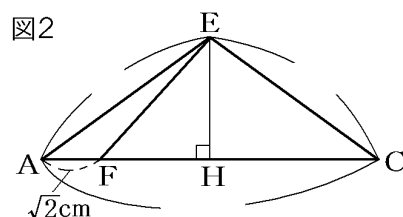
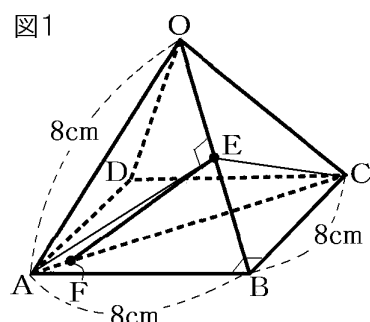
同様にして、 $EC = 4\sqrt{3}(\text{cm})$

図1の直角三角形 ACB で、三平方の定理より、

$$AC = \sqrt{AB^2 + CB^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{8^2 \times 2} = 8\sqrt{2}(\text{cm})$$

図2で H は AC の中点なので、 $AH = 4\sqrt{2}(\text{cm})$ である。

直角三角形 AEH で、三平方の定理より、



$$EH = \sqrt{AE^2 - AH^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{48 - 32} = \sqrt{16} = 4 \text{ (cm)}$$

直角三角形 EFH で、三平方の定理より、

$$EF = \sqrt{EH^2 + FH^2} = \sqrt{EH^2 + (AH - AF)^2} = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{2} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{16 + 18} = \sqrt{34} \text{ (cm)}$$

[展開図上の 2 点]

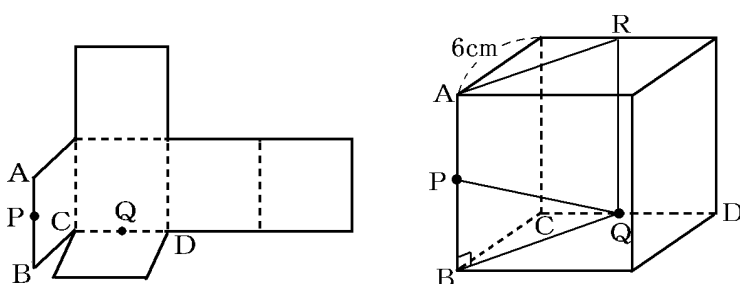
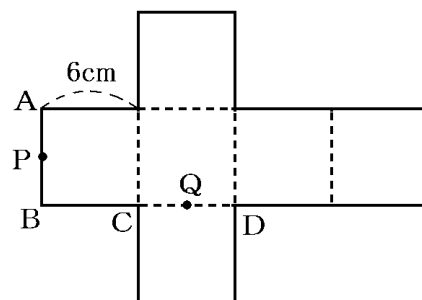
[問題]

右の図のように、1 辺の長さが 6cm の立方体の展開図がある。線分 AB、線分 CD の中点をそれぞれ P、Q とする。この展開図を組み立てて立方体をつくったとき、立方体上の 2 点 P、Q の間の距離を求めよ。

(秋田県)(***)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $3\sqrt{6}$ cm

[解説]

展開図を組み立てた立方体は右下の図のようになる。

線分 PQ を含む切断面 ABQR に注目する。

この切断面上の直角三角形 PQB で、三平方の定理より、 $PQ^2 = PB^2 + BQ^2 \cdots \textcircled{1}$ が成り立つ。

P は AB の中点で $AB = 6\text{cm}$ なので、 $PB = 6 \div 2 = 3(\text{cm})$ である。

あと、BQ の長さがわかれば、①より PQ を求めることができる。

底面上の直角三角形 BQC で、 $BC = (6\text{cm})$ 、

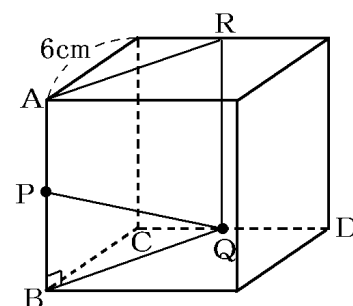
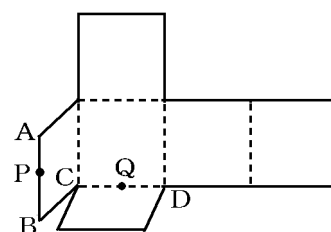
$CQ = 6 \div 2 = 3(\text{cm})$ なので、三平方の定理より、

$$BQ^2 = BC^2 + CQ^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$$

$PB = 3\text{cm}$ なので、①式に代入すると、

$$PQ^2 = PB^2 + BQ^2 = 3^2 + 45 = 9 + 45 = 54$$

よって、 $PQ = \sqrt{54} = \sqrt{9 \times 6} = 3\sqrt{6} \text{ (cm)}$



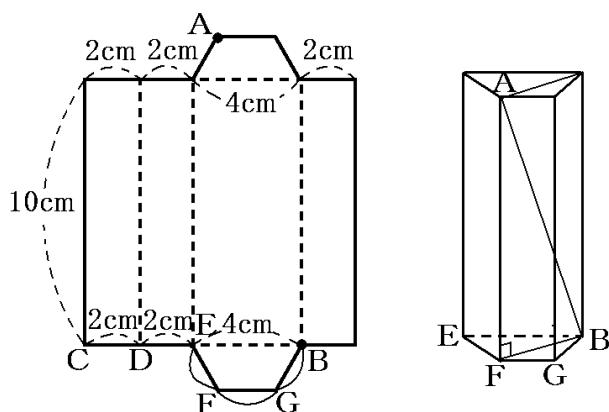
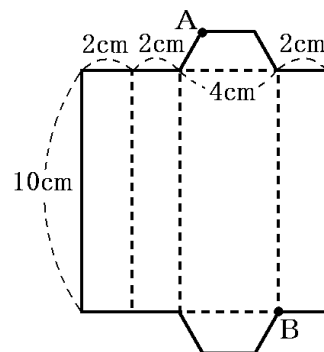
[問題]

右の図は、底面が台形である四角柱の展開図である。
これを組み立ててできる四角柱の2つの頂点A、Bを
結ぶ線分ABの長さを求めよ。

(愛媛県)(****)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $4\sqrt{7}$ cm

[解説]

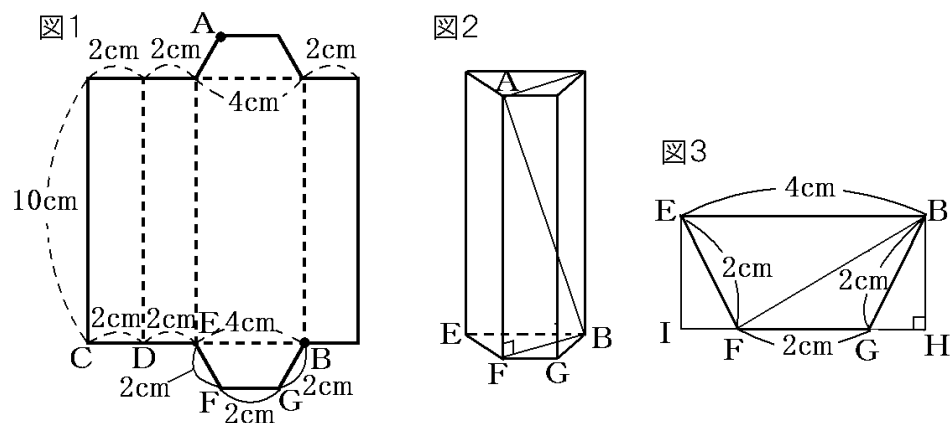


図2の直角三角形ABFで、 $AF=10$ cmなので、BFがわかればABの長さを計算できる。

図1で、DはFに、CはGに重なるので、 $EF=2$ cm、 $FG=2$ cmになる。

図3で、 $FI=GH$ なので、 $GH=(EB-FG)\div 2=(4-2)\div 2=1$ (cm)

直角三角形BGHで、三平方の定理より、

$$BH = \sqrt{BG^2 - GH^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3} \text{ (cm)}$$

直角三角形BFHで、三平方の定理より、

$$BF = \sqrt{FH^2 + BH^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} \text{ (cm)}$$

図 2 の直角三角形 ABF で、三平方の定理より、

$$AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{10^2 + (\sqrt{12})^2} = \sqrt{100+12} = \sqrt{112} = \sqrt{16 \times 7} = 4\sqrt{7} \text{ (cm)}$$

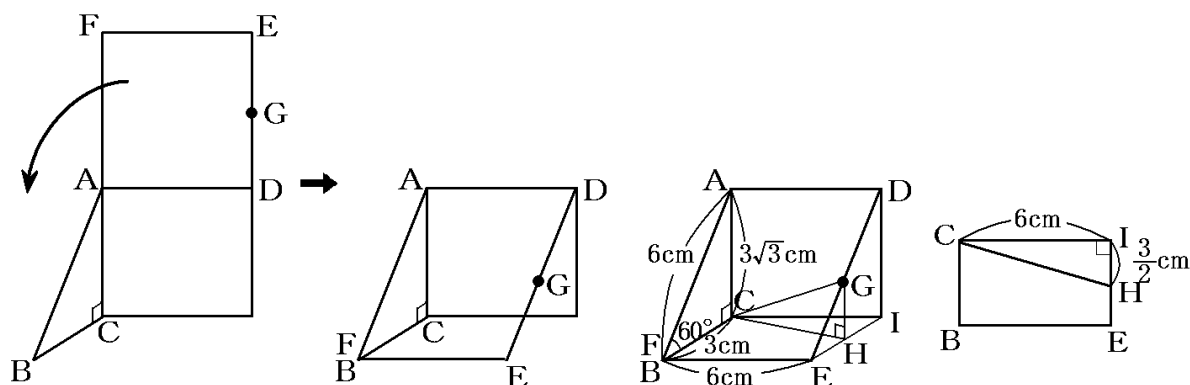
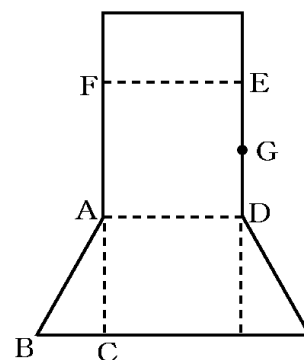
[問題]

右の図は、 $AB=6\text{cm}$ 、 $\angle ABC=60^\circ$ 、 $\angle ACB=90^\circ$ の直角三角形 ABC を底面とする三角柱の展開図であり、四角形 ADEF は正方形である。また、点 G は線分 DE の中点である。このとき、この展開図を点線で折り曲げてできる三角柱で、2 点 C、G 間の距離を求めよ。

(神奈川県)(****)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $3\sqrt{5} \text{ cm}$

[解説]

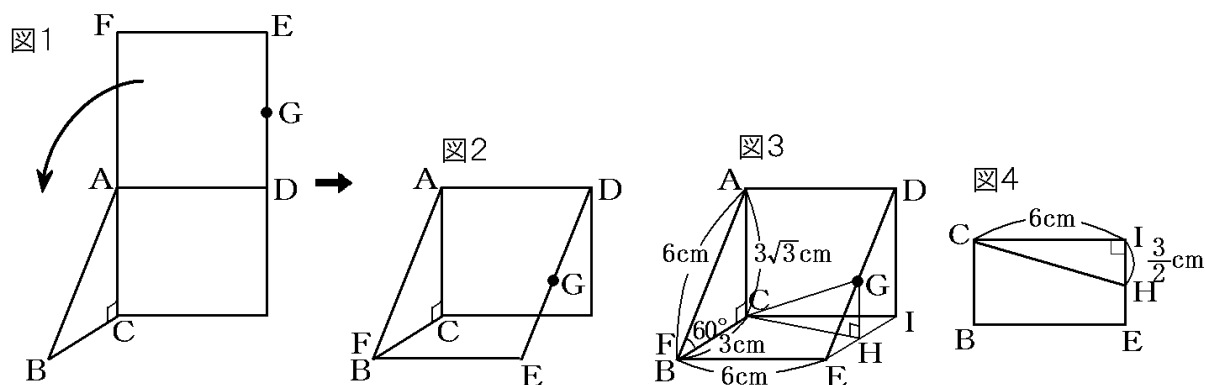


図 1 は展開図の一部のみを表している。ADEF の面を F が B に重なるように折り曲げたのが図 2 である。図 3 で、直角三角形 ABC は 30° 90° 60° の直角三角形なので、3 辺の比は

$1 : 2 : \sqrt{3}$ になる。AB=6cm なので、 $BC = 6 \times \frac{1}{2} = 3(\text{cm})$ 、 $AC = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}(\text{cm})$ である。

直角三角形 CGH で、CH と GH の長さがわかれば、三平方の定理で CG を計算できる。

G は DE の中点で $GH \parallel DI$ なので、 $GH = \frac{1}{2}DI = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}(\text{cm})$ になる。

図 4 の直角三角形 CHI で、三平方の定理より、

$$CH = \sqrt{CI^2 + IH^2} = \sqrt{36 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{144 + 9}{4}} = \sqrt{\frac{153}{4}}(\text{cm})$$

図 3 の直角三角形 CGH で、三平方の定理より、

$$CG = \sqrt{CH^2 + GH^2} = \sqrt{\frac{153}{4} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{153}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{180}{4}} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}(\text{cm})$$

【】 立体→切断面の平面図形

【】 断面が二等辺三角形や正三角形

[問題]

右の図のように、1 辺が 6cm の立方体の 3 つの頂点 A, B, C を結んでできる右の図のような△ABC の面積を求めよ。

(京都府)(**)

[解答欄]

[ヒント]

△ABC は、 $AB=AC=BC$ の正三角形になる。

[解答] $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$

[解説]

右図の直角三角形 ABD で、三平方の定理より、

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

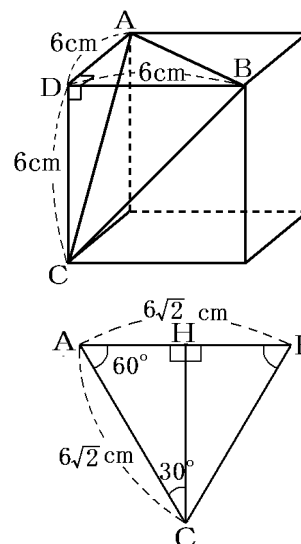
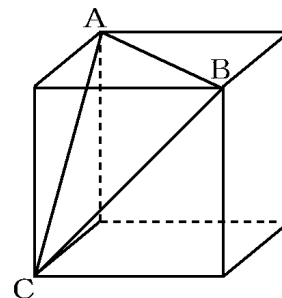
同様にして、 $AC = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$, $BC = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$

よって、△ABC は 1 辺が $6\sqrt{2} \text{ cm}$ の正三角形になる。

右下図の△ACH は $30^\circ \ 90^\circ \ 60^\circ$ の直角三角形で 3 辺の比は

$1 : 2 : \sqrt{3}$ になるので、 $CH = 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6} \text{ (cm)}$ である。

$$\begin{aligned} (\triangle ABC \text{ の面積}) &= \frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} \\ &= 9\sqrt{12} = 9\sqrt{4 \times 3} = 18\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

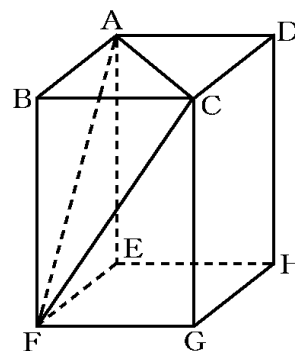


[問題]

右の図のように、 $AB=BC=2\text{cm}$, $BF=4\text{cm}$ の直方体 ABCD-EFGH がある。この直方体を頂点 A, C, F を通る平面で分けたときにできる三角錐 B-AFC の表面積を求めよ。

(秋田県)(**)

[解答欄]



[ヒント]

$\triangle ACF$ は $AF=CF$ の二等辺三角形である。二等辺三角形の面積は、3 辺の長さがわかれば、面積を計算することができる。

[解答] 16cm^2

[解説]

$$(\triangle ABC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2(\text{cm}^2)$$

$$(\triangle CBF \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4(\text{cm}^2)$$

$$(\triangle ABF \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4(\text{cm}^2)$$

あと、 $\triangle ACF$ の面積を求めれば、表面積が計算できる。

$\triangle ACF$ は $AF=CF$ の二等辺三角形である。二等辺三角形の面積は、3 辺の長さがわかれば、面積を計算することができる。直角三角形 ACB で、三平方の定理より、

$$AC = \sqrt{AB^2 + CB^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

直角三角形 CFB で、三平方の定理より、

$$CF = \sqrt{CB^2 + FB^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

$$AF = CF = 2\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

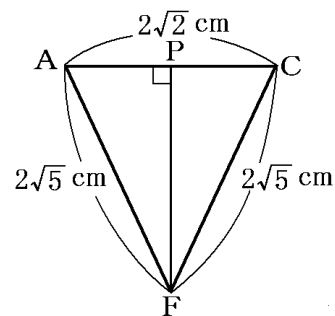
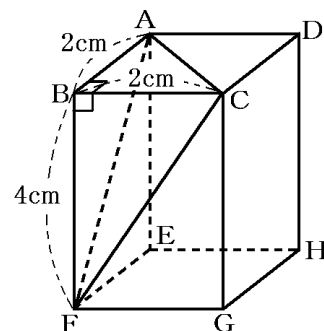
したがって、 $\triangle ACF$ は右図のようになる。

直角三角形 AFP で、三平方の定理より、

$$FP = \sqrt{AF^2 - AP^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{20 - 2} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$(\triangle ACF \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times AC \times FP = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6(\text{cm}^2)$$

よって、(三角錐 $B-AFC$ の表面積) $= 2 + 4 + 4 + 6 = 16(\text{cm}^2)$



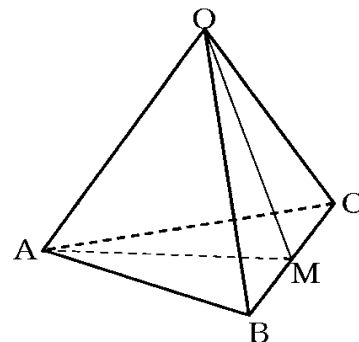
[問題]

右の図のように、4 点 O, A, B, C を頂点とする 1 辺の長さが 8cm の正四面体がある。辺 BC の中点を M とする。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) 線分 OM の長さを求めよ。

(2) $\triangle OAM$ の面積を求めよ。

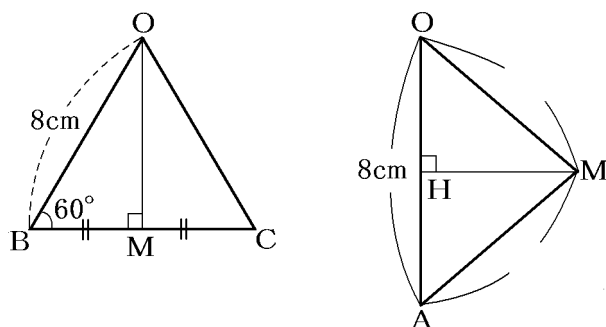
(福島県)(**)



[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]



[解答](1) $4\sqrt{3}$ cm (2) $16\sqrt{2}$ cm²

[解説]

(1) 右図の直角三角形 OBM は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は $1 : 2 : \sqrt{3}$ になるので,

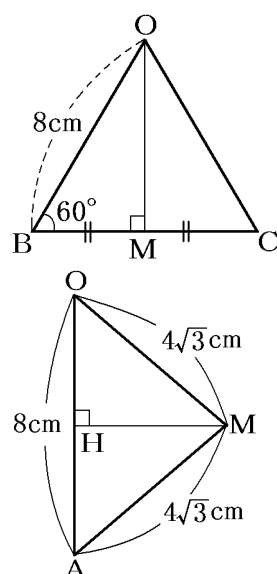
$$OM = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

(2) $\triangle OAM$ は $AM = OM$ の二等辺三角形になる。

右図で M から OA に垂線 MH を引くと、H は OA の中点になる。
直角三角形 OMH で、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} MH &= \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 4^2} = \sqrt{48 - 16} = \sqrt{32} \\ &= \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)} \end{aligned}$$

$$(\triangle OAM \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times OA \times MH = \frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

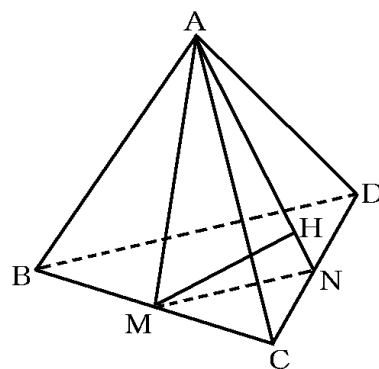


[問題]

右の図のように、1 辺の長さが 4cm の正四面体 ABCD が
あり、辺 BC, CD の中点をそれぞれ M, N とする。また、
点 M から線分 AN に垂線をひき、その交点を H とする。こ
のとき、次の各問いに答えよ。

- (1) MN の長さを求めよ。
- (2) AM の長さを求めよ。
- (3) $\triangle AMN$ の面積を求めよ。
- (4) MH の長さを求めよ。

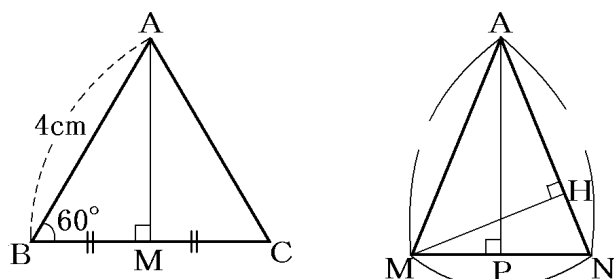
(佐賀県)(***)



[解答欄]

(1)	(2)	(3)
(4)		

[ヒント]



[解答](1) 2cm (2) $2\sqrt{3}$ cm (3) $\sqrt{11}$ cm² (4) $\frac{\sqrt{33}}{3}$ cm

[解説]

(1) △CBD で、M、N は辺 BC、CD の中点なので、中点連結定理

より、 $MN = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 4 = 2(\text{cm})$

(2) 右図の正三角形 ABC で、M は BC の中点なので、 $AM \perp BC$ 。

△ABM は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は $1 : 2 : \sqrt{3}$ にな

るので、 $AM = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}(\text{cm})$

(3) △AMN は、 $AM = AN = 2\sqrt{3}(\text{cm})$ 、 $MN = 2(\text{cm})$ の二等辺三角形になる。右図のように、A から MN に垂線 AP を引くと、P は MN の中点になる。

直角三角形 AMP で、三平方の定理より、

$$AP = \sqrt{AM^2 - MP^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{12 - 1} = \sqrt{11}(\text{cm})$$

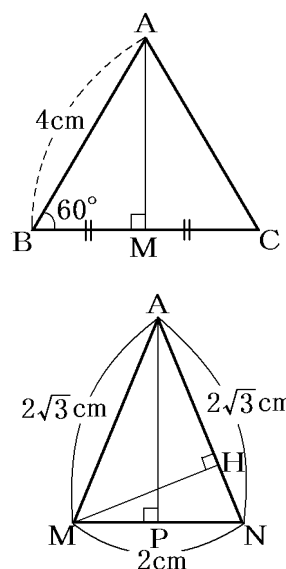
$$(\triangle AMN \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times MN \times AP = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{11} = \sqrt{11}(\text{cm}^2)$$

(4) MH の長さは△AMN の面積と AN の長さから求める。

△AMN の底辺を AN とすると、高さは MH になるので、

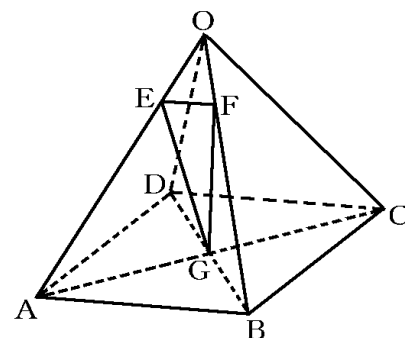
$$\frac{1}{2} \times AN \times MH = (\triangle AMN \text{ の面積})$$

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times MH = \sqrt{11}, \quad \sqrt{3} MH = \sqrt{11}, \quad MH = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{11} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{33}}{3}(\text{cm})$$



[問題]

右の図のように、 $OA=12\text{cm}$ 、 $AB=8\text{cm}$ の正四角錐 $OABCD$ がある。点 E は辺 OA 上にあり、点 F は辺 OB 上にあって、 $OE=OF=3\text{cm}$ である。また、点 G は底面 $ABCD$ の2つの対角線 AC 、 BD の交点である。このとき、次の各問いに答えよ。



(1) 線分 EF の長さを求めよ。

(2) $\triangle EFG$ の面積を求めよ。

(熊本県)(****)

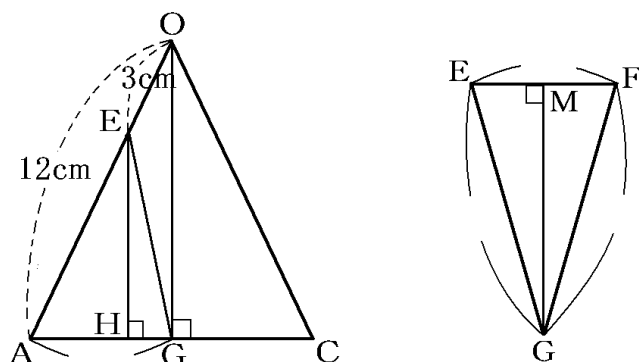
[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]

(1) $\triangle OEF \sim \triangle OAB$

(2)



[解答](1) 2cm (2) 8cm^2

[解説]

(1) $OE : OA = OF : OB = 3 : 12 = 1 : 4$ 、 $\angle EOF = \angle AOB$ で、2組の辺の比とその間の角が、それぞれ等しいので、 $\triangle OEF \sim \triangle OAB$

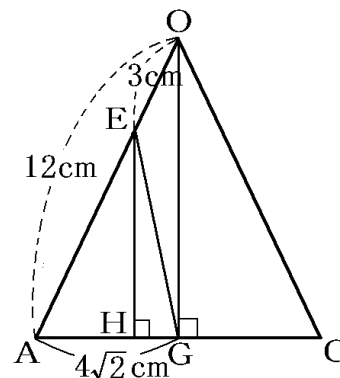
よって、 $EF : AB = OE : OA$ 、 $EF : 8 = 1 : 4$

比の外項の積は内項の積に等しいので、 $4EF = 8$ 、 $EF = 2(\text{cm})$

(2) 図の位置関係から、 $EG = FG$ と判断できるので、 $\triangle EFG$ は二等辺三角形になる。

二等辺三角形の面積は3辺がわかれば計算できる。(1)より、 $EF = 2(\text{cm})$ なので、あとは、 EG (または FG)の長さがわかればよい。そこで、点 E をふくむ $\triangle OAC$ に注目する。

正四角錐の底面で、 $\triangle ABC$ は $AB = BC = 8(\text{cm})$ の直角二等辺三角形なので、3辺の比は $1 : 1 : \sqrt{2}$ になる。



$$\text{よって, } AC = AB \times \sqrt{2} = 8 \times \sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$AG = 8\sqrt{2} \div 2 = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

右図のように、E から AC に垂線 EH を引く。

直角三角形 EGH で、EH と GH がわかれば EG を計算できる。

EH // OG なので、平行線の性質より、

$$HG : AG = EO : AO, \quad HG : 4\sqrt{2} = 3 : 12, \quad HG : 4\sqrt{2} = 1 : 4$$

比の外項の積は内項の積に等しいので、 $4HG = 4\sqrt{2}$, $HG = \sqrt{2} \text{ (cm)} \cdots \textcircled{1}$

ところで、直角三角形 OAG で、三平方の定理より、

$$OG = \sqrt{OA^2 - AG^2} = \sqrt{12^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{144 - 32} = \sqrt{112} = \sqrt{16 \times 7} = 4\sqrt{7} \text{ (cm)}$$

EH // OG なので、平行線の性質より、

$$EH : OG = AE : AO, \quad EH : 4\sqrt{7} = 9 : 12, \quad EH : 4\sqrt{7} = 3 : 4$$

比の外項の積は内項の積に等しいので、

$$4EH = 4\sqrt{7} \times 3, \quad EH = 3\sqrt{7} \text{ (cm)} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{より } HG = \sqrt{2} \text{ (cm)}, \quad \textcircled{2} \text{より } EH = 3\sqrt{7} \text{ (cm)}$$

直角三角形 EGH で、三平方の定理より、

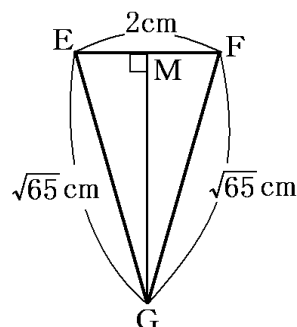
$$EG = \sqrt{EH^2 + HG^2} = \sqrt{(3\sqrt{7})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{63 + 2} = \sqrt{65} \text{ (cm)}$$

右の図で、G から EF に垂線 GM を引くと、M は EF の中点になる。

直角三角形 GEM で、三平方の定理より、

$$GM = \sqrt{GE^2 - EM^2} = \sqrt{65 - 1} = \sqrt{64} = 8 \text{ (cm)}$$

$$(\triangle EFG \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times EF \times GM = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 8 \text{ (cm}^2\text{)}$$



[問題]

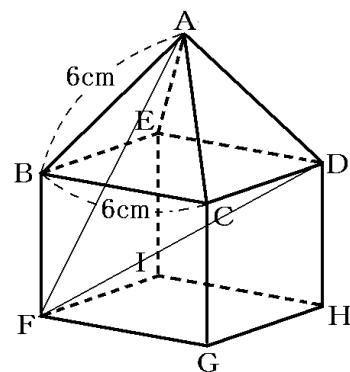
右の図は、正四角錐と直方体を合わせた形で、点 A, B, C, D, E, F, G, H, I を頂点とする立体を表している。

正四角錐 ABCDE は、辺の長さがすべて 6cm である。

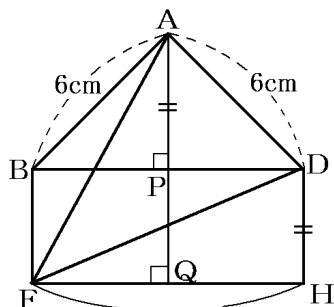
辺 BF の長さは、正四角錐 ABCDE の高さに等しい。図に示す立体において、 $\triangle AFD$ の面積を求めよ。

(福岡県)(****)

[解答欄]



[ヒント]



[解答] 27cm^2

[解説]

長方形 BFHD をふくむ平面でこの立体を切ると、点 A は、この切断した平面上にあるので、切断面は右図のようになる。

まず、 FA と FD の長さを求める。

問題の図で、 $\triangle \text{FGH}$ は $45^\circ \ 45^\circ \ 90^\circ$ の直角三角形で、3 辺の比は $1 : 1 : \sqrt{2}$ になるので、

$$\text{FH} = \text{FG} \times \sqrt{2} = 6 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

右図で、 Q は FH の中点なので、 $\text{FQ} = \text{FH} \div 2 = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$

$$\text{BP} = \text{FQ} = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

直角三角形 ABP で、三平方の定理より、

$$\text{AP} = \sqrt{\text{AB}^2 - \text{BP}^2} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{36 - 18} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

仮定より、 $\text{PQ} = \text{AP}$ なので、 $\text{PQ} = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$

右図の直角三角形 AFQ で、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} \text{AF} &= \sqrt{\text{AQ}^2 + \text{FQ}^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{72 + 18} \\ &= \sqrt{90} = \sqrt{9 \times 10} = 3\sqrt{10} \text{ (cm)} \end{aligned}$$

直角三角形 DFH で、三平方の定理より、

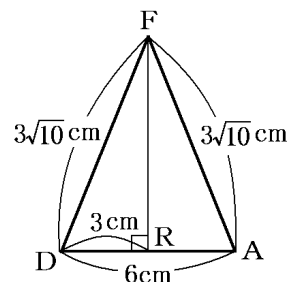
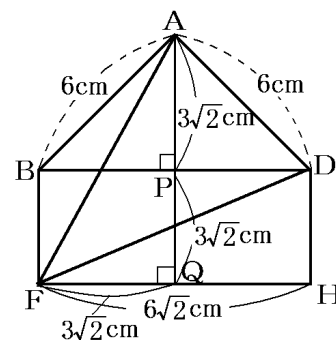
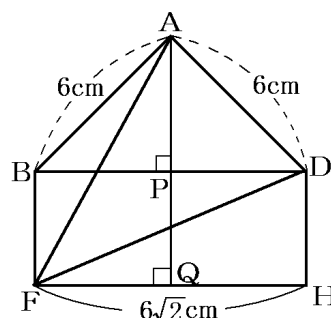
$$\text{DF} = \sqrt{\text{FH}^2 + \text{DH}^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{10} \text{ (cm)}$$

以上より、 $\triangle \text{AFD}$ は、 $\text{AF} = \text{DF}$ の二等辺三角形になる。

右図の直角三角形 FDR で、三平方の定理より、

$$\text{FR} = \sqrt{\text{DF}^2 - \text{DR}^2} = \sqrt{90 - 9} = \sqrt{81} = 9 \text{ (cm)}$$

$$(\triangle \text{AFD の面積}) = \frac{1}{2} \times \text{DA} \times \text{FR} = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27 \text{ (cm}^2\text{)}$$



【】 断面が直角三角形

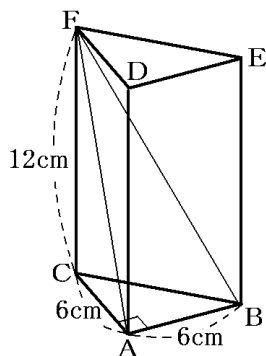
【問題】

右の図は、底面 ABC が $AB=AC=6\text{cm}$ の直角二等辺三角形で、側面がすべて長方形の三角柱 $ABCDEF$ を表しており、 $CF=12\text{cm}$ である。 $\triangle FAB$ の面積を求めよ。

(福岡県)(***)

【解答欄】

【ヒント】



直線 BA は平面 $ACFD$ と垂直の位置関係にある($BA \perp AC$, $BA \perp AD$ なので)。

$\rightarrow BA \perp AF$

【解答】 $18\sqrt{5}\text{cm}^2$

【解説】

$\angle FAB=90^\circ$ に気づくかどうかポイントである。

直線 BA は平面 $ACFD$ と垂直の位置関係にある($BA \perp AC$, $BA \perp AD$ なので)。したがって、平面 $ACFD$ 上にある直線 AF と直線 BA は垂直に交わる。

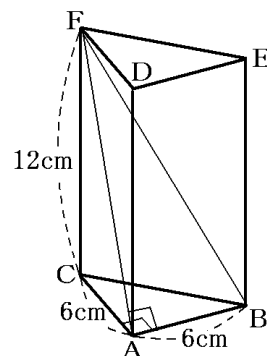
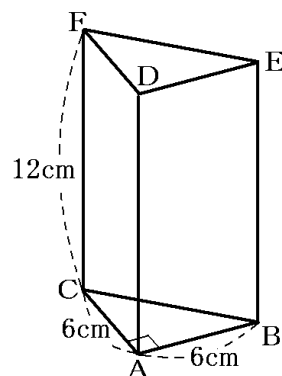
FA の長さがわかれば、 $\triangle FAB$ の面積を求めることができる。

直角三角形 FAC で、三平方の定理より、

$$FA = \sqrt{FC^2 + AC^2} = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{144 + 36} = \sqrt{180}$$

$$= \sqrt{36 \times 5} = 6\sqrt{5} (\text{cm})$$

$$(\triangle FAB \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times AB \times FA = \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{5} = 18\sqrt{5} (\text{cm}^2)$$



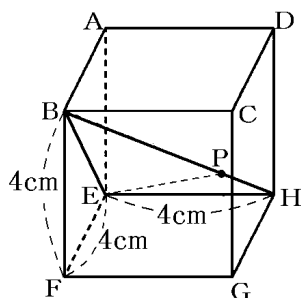
[問題]

右の図のように、1 辺の長さが 4cm の立方体 $ABCD-EFGH$ がある。対角線 BH 上に $BP : PH = 3 : 1$ となる点 P をとる。 $\triangle PBE$ の面積を求めよ。

(新潟県改)(***)

[解答欄]

[ヒント]



$HE \perp$ 面 $ABFE$ なので、面 $ABFE$ 上にある EB と HE は垂直に交わる。
よって、 $\triangle BHE$ は直角三角形である。

[解答] $6\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$

[解説]

$\angle BEH = 90^\circ$ に気づくかどうかポイントである。

$HE \perp$ 面 $ABFE$ なので、面 $ABFE$ 上にある EB と HE は垂直に交わる。

よって、 $\triangle BHE$ は直角三角形である。

まず、 $\triangle BHE$ の面積を求める。

直角三角形 BEF で、三平方の定理より、

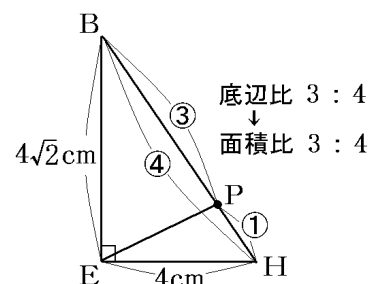
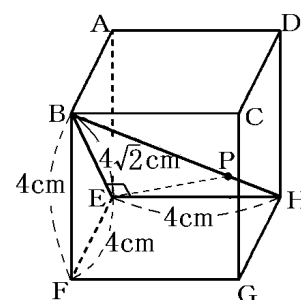
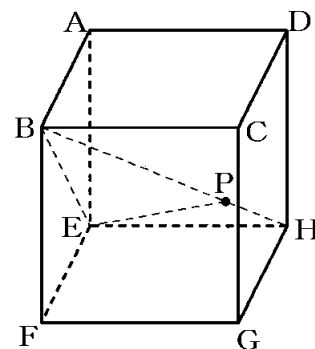
$$BE = \sqrt{BF^2 + EF^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$(\triangle BEH \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times EH \times BE = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$\triangle PBE$ の底辺を BP 、 $\triangle BEH$ の底辺を BH とすると高さは共通なので、
面積は底辺の比 $BP : BH = 3 : 4$ になる。

$$\text{したがって、} (\triangle PBE \text{ の面積}) = (\triangle BEH \text{ の面積}) \times \frac{3}{4}$$

$$= 8\sqrt{2} \times \frac{3}{4} = 6\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$



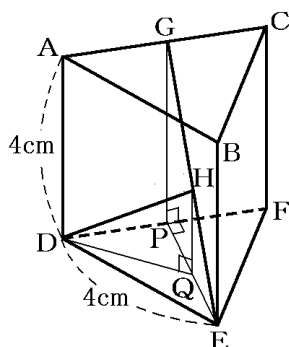
[問題]

右の図のように、1 辺が 4cm の正三角形を底面とし、側面がすべて正方形である三角柱 $ABCDEF$ がある。辺 AC の中点を G とし、線分 EG の中点を H とする。このとき、線分 DH の長さを求めよ。

(茨城県)(***)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $\sqrt{11}$ cm

[解説]

図 1 のように、 G から DE に垂線 GP を引き、 H から垂線 HQ を引くと、 $GP \parallel HQ$ になる。仮定より、 H は EG の中点なので、中点連結定理より、 Q は EP の中点になる。

また、 $HQ = \frac{1}{2} GP = \frac{1}{2} \times 4 = 2(\text{cm})$ になる。

図 2 の $\triangle EDP$ は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は $1 : 2 : \sqrt{3}$ になるので、

$$PE = DP \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}(\text{cm})$$

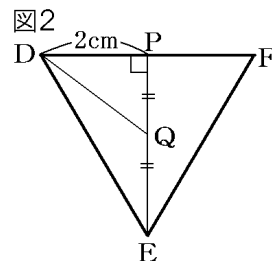
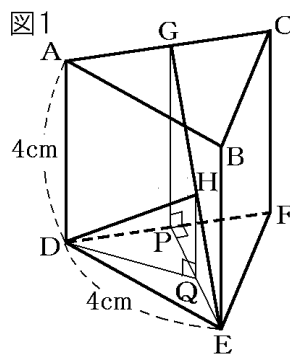
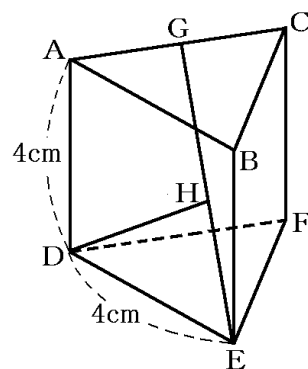
Q は EP の中点なので、 $PQ = \sqrt{3}(\text{cm})$

直角三角形 DQP で、三平方の定理より、

$$DQ = \sqrt{DP^2 + PQ^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}(\text{cm})$$

図 1 の直角三角形 HDQ で、三平方の定理より、

$$DH = \sqrt{DQ^2 + HQ^2} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + 2^2} = \sqrt{7+4} = \sqrt{11}(\text{cm})$$



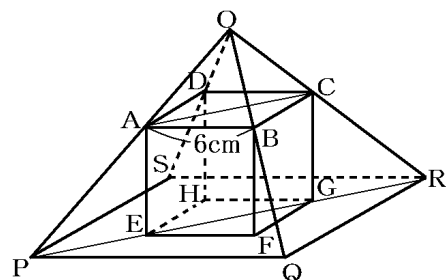
[問題]

右図の立体 $ABCD-EFGH$ は、1 辺が 6cm の立方体である。図のように、すべての辺の長さが等しい正四角錐 $OPQRS$ があり、その中に立方体 $ABCD-EFGH$ が入っている。この立方体の頂点のうち、4 点 A, B, C, D はそれぞれ辺 OP, OQ, OR, OS 上にあり、4 点 E, F, G, H は、いずれも底面 $PQRS$ 上にある。このとき、この正四角錐 $OPQRS$ の一辺の長さを求めよ。

(石川県)(***)

[解答欄]

[ヒント]



$PQ=RQ=a\text{ cm}$ とすると、 $PR=\sqrt{2}a\text{ (cm)}$

$\triangle OPR$ で、 $OP=OR=a\text{ cm}$ 、 $PR=\sqrt{2}a\text{ (cm)}$ なので、 $\triangle OPR$ は $45^\circ\ 45^\circ\ 90^\circ$ の直角二等辺三角形になる。

[解答] $6\sqrt{2}+6\text{ (cm)}$

[解説]

図 1 で、正四角錐 $OPQRS$ の 1 辺を $a\text{ cm}$ とする。

$\triangle PRQ$ は直角二等辺三角形で、3 辺の比は

$1:1:\sqrt{2}$ になるので、 $PR=\sqrt{2}a\text{ (cm)}$

$OP=OR=a\text{ (cm)}$ 、 $PR=\sqrt{2}a\text{ (cm)}$ なので、

$\triangle OPR$ は $45^\circ\ 45^\circ\ 90^\circ$ の直角二等辺三角形になる。

$\triangle ABC$ は $45^\circ\ 45^\circ\ 90^\circ$ の直角二等辺三角形になるので、 $AC=AB\times\sqrt{2}=6\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}\text{ (cm)}$ である。

図 2 は図 1 の断面 $\triangle OPR$ を示している。

O から PR に垂線 OU を引く。

$\triangle APE$ は直角二等辺三角形になるので、

$PE=AE=6\text{ (cm)}$ である。

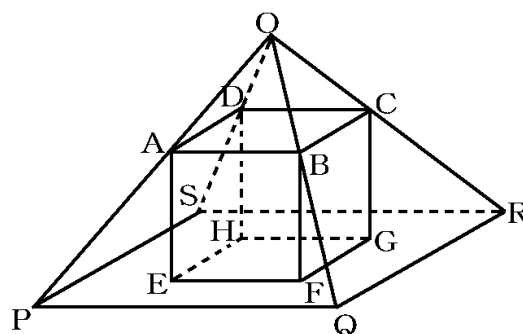


図1

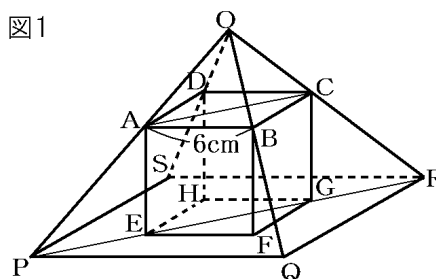
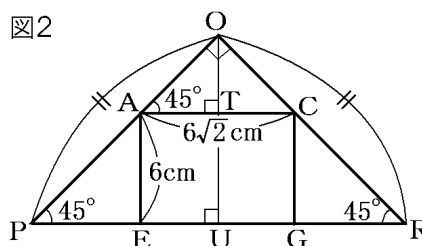


図2



また、TはACの中点になるので、 $AT = 6\sqrt{2} \div 2 = 3\sqrt{2}$ (cm)

$EU = AT = 3\sqrt{2}$ (cm)なので、 $PU = PE + EU = 6 + 3\sqrt{2}$ (cm)になる。

$\triangle OPU$ は直角二等辺三角形になるので、

$$OP = PU \times \sqrt{2} = (6 + 3\sqrt{2}) \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 6 \text{ (cm)}$$

[問題]

図1のように、三角錐ABCDがある。図2は、図1の展開図である。この展開図の四角形AEDFは、2つの対角線の長さが $AD = 8\text{cm}$ 、 $EF = 6\text{cm}$ のひし形であり、線分ADと線分BCの交点をGとする。また、図3は、図1の頂点Aから線分DGに垂線をひき、その交点をHとしたものである。このとき、次の各問いに答えよ。

図1

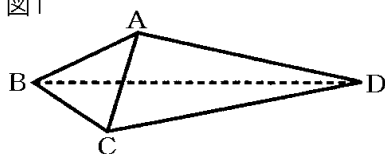


図2

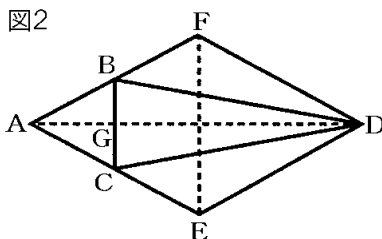
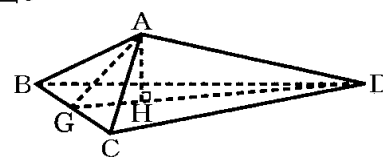


図3



(1) 図2において、 $\triangle ABC$ の面積は、四角形AEDFの面積の何倍か求めよ。

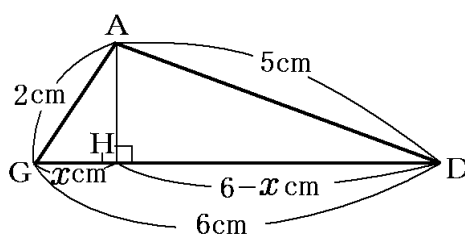
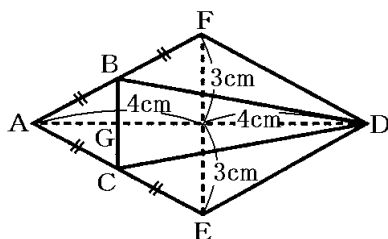
(2) 図3において、線分AHの長さを求めよ。

(茨城県)(****)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]

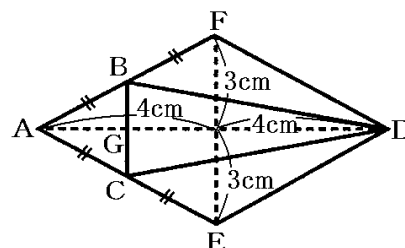


[解答](1) $\frac{1}{8}$ 倍 (2) $\frac{\sqrt{39}}{4}$ cm

[解説]

(1) 右図で、AとFは重なるので $AB = BF$ である。

同様に $AC = CE$ である。2組の辺の比とその間の角($\angle A$)がそれぞれ等しいので、 $\triangle ABC \sim \triangle AFE$ になり、相似比は $1 : 2$ になる。



面積比は相似比の 2 乗に比例するので、 $\triangle ABC$ と $\triangle AFE$ の面積比は、 $1^2 : 2^2 = 1 : 4$ になる。
 四角形 AEDF の面積は $\triangle AFE$ の面積の 2 倍なので、四角形 AEDF の面積は $\triangle ABC$ の $4 \times 2 = 8$ (倍)になる。

よって、 $\triangle ABC$ の面積は、四角形 AEDF の面積の $\frac{1}{8}$ 倍になる。

(2) 図 3 の断面の $\triangle AGD$ に注目する。

(1)より、 $AG : AD = 1 : 4$ なので、 $AG = 8 \times \frac{1}{4} = 2(\text{cm})$

$$GD = AD - AG = 8 - 2 = 6(\text{cm})$$

図 3 の AD は図 2 の DE と重なるので、長さが等しい。

$$AD = DE = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5(\text{cm})$$

次に、右図のように、 $GH = x(\text{cm})$ とおく。

直角三角形 AGH で、三平方の定理より、

$$AH^2 = AG^2 - GH^2 = 4 - x^2 \cdots \textcircled{1}$$

直角三角形 ADH で、三平方の定理より、

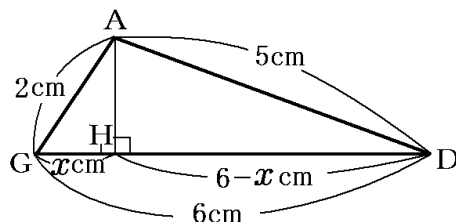
$$AH^2 = AD^2 - DH^2 = 25 - (6 - x)^2 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}, 25 - (6 - x)^2 = 4 - x^2, 25 - x^2 + 12x - 36 = 4 - x^2$$

$$12x = 15, x = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}(\text{cm})$$

$$\textcircled{1} \text{より}, AH^2 = 4 - x^2 = 4 - \frac{25}{16} = \frac{39}{16}$$

$$AH = \sqrt{\frac{39}{16}} = \frac{\sqrt{39}}{4}(\text{cm})$$



【】 断面が四角形

[問題]

右の図は、すべての辺の長さが 8cm の正四角錐であり、
辺 OA, OD の中点をそれぞれ E, F とする。このとき、
四角形 EBCF の面積を求めよ。

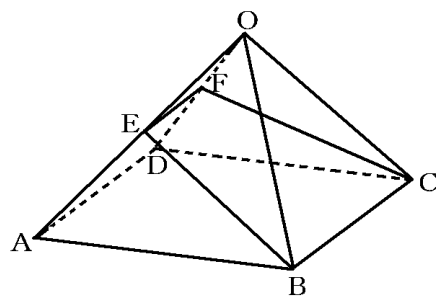
(石川県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

四角形 EBCF は等脚台形→4 つの辺の長さが分かれば面積が計算できる。

EF は正三角形 OAD, EB(FC) は正三角形 OAB(OCD) をかいて求める。



[解答] $12\sqrt{11} \text{ cm}^2$

[解説]

まず、断面の四角形 EBCF の各辺の長さを計算する。

$\triangle OAD$ で、E, F は OA, OD の中点なので、中点連結定理より、

$$EF = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \times 8 = 4(\text{cm})$$

正三角形 OAB で、E は OA の中点なので $BE \perp OA$ になる。

また、正三角形の内角はすべて 60° なので、 $\angle BAE = 60^\circ$ になる。

よって、 $\triangle ABE$ は $30^\circ \ 90^\circ \ 60^\circ$ の直角三角形で 3 辺の比は $1 : 2 : \sqrt{3}$ になるので、

$$BE = AB \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}(\text{cm}) \quad \text{同様に、} CE = 4\sqrt{3}(\text{cm})$$

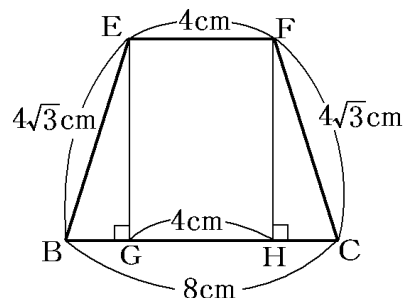
以上より、四角形 EBCF は右図のような台形になる。

右図で、 $BG = (8 - 4) \div 2 = 2(\text{cm})$

直角三角形 BEG で、三平方の定理より、

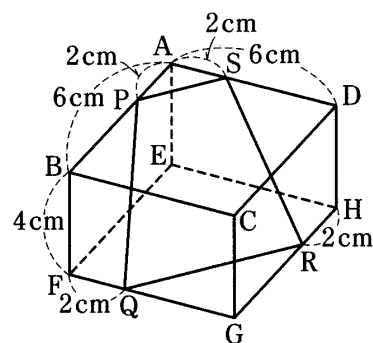
$$\begin{aligned} EG &= \sqrt{BE^2 - BG^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 2^2} = \sqrt{48 - 4} \\ &= \sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = 2\sqrt{11}(\text{cm}) \end{aligned}$$

$$(\text{台形 EBCF の面積}) = \frac{1}{2} \times (EF + BC) \times EG = \frac{1}{2} \times (4 + 8) \times 2\sqrt{11} = 12\sqrt{11}(\text{cm}^2)$$



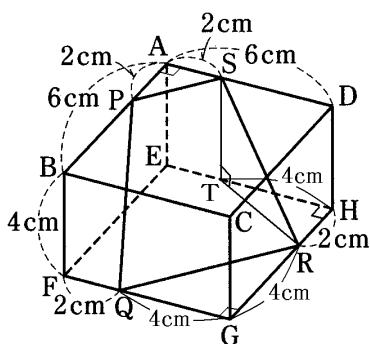
[問題]

右の図は、 $AB=AD=6\text{cm}$ 、 $BF=4\text{cm}$ の直方体である。
この直方体の辺 AB , FG , HG , AD 上に、それぞれ 4 点 P ,
 Q , R , S を、 $AP=FQ=HR=AS=2\text{cm}$ となるようにとり、
四角形 $PQRS$ をつくる。四角形 $PQRS$ の面積を求めよ。
(岩手県改)(***)



[解答欄]

[ヒント]



四角形 PQRS は等脚台形→4 つの辺の長さが分かれば面積が計算できる。
SR は図の直角三角形 SRT に着目して求める。

[解答] $6\sqrt{17}$ (cm²)

[解説]

四角形 PQRS は等脚台形になる。その面積は 4 辺の長さがわかれば計算できる。

直角三角形 PSA で、三平方の定理より、

$$PS = \sqrt{AP^2 + AS^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

直角三角形 QRG で、三平方の定理より、

$$QR = \sqrt{QG^2 + RG^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

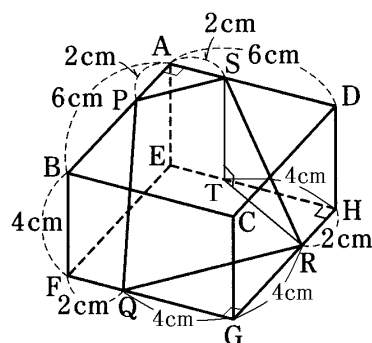
次に、S から辺 EH に垂線 ST をおろす。ST は底面に垂直なので、 $\angle STR=90^\circ$ になる。

直角三角形 TRH で、三平方の定理より、

$$\text{TR} = \sqrt{TH^2 + RH^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

直角三角形 SRT で，三平方の定理より，

$$SR = \sqrt{ST^2 + TR^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{16 + 20} = \sqrt{36} = 6 \text{ (cm)}$$



PQ もまったく同様なので、 $PQ = 6 \text{ cm}$

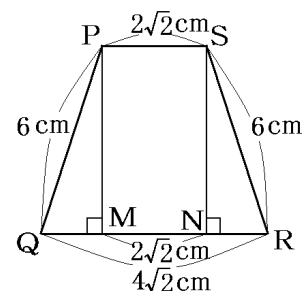
<Point> 等脚台形の高さ：垂線を 2 つおろす。

以上より、台形 PQRS は右図のようになる。

P, S から辺 QR に垂線 PM, SN をおろすと、
 $MN = 2\sqrt{2} \text{ cm}$ なので、 $QM = RN = (4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) \div 2 = \sqrt{2} \text{ (cm)}$
 直角三角形 PQM で、三平方の定理より、

$$PM = \sqrt{PQ^2 - QM^2} = \sqrt{6^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{36 - 2} = \sqrt{34} \text{ (cm)}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって、(台形 PQRS の面積)} &= (PS + QR) \times PM \div 2 = \\ &= (2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) \times \sqrt{34} \div 2 = \\ &= 6\sqrt{2} \times \sqrt{34} \div 2 = 3\sqrt{68} = 3\sqrt{4 \times 17} = 6\sqrt{17} \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$



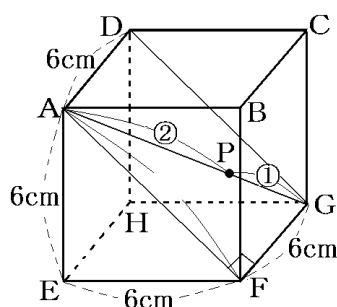
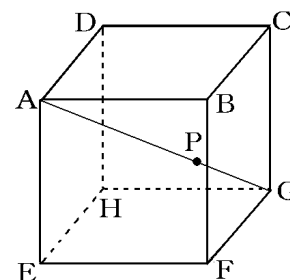
[問題]

右の図は、1 辺の長さが 6cm の立方体 ABCD-EFGH において、線分 AG 上に点 P をとり、 $AP : PG = 2 : 1$ となるようにしたものである。線分 PF の長さは何 cm か。

(補充問題)(***)

[解答欄]

[ヒント]



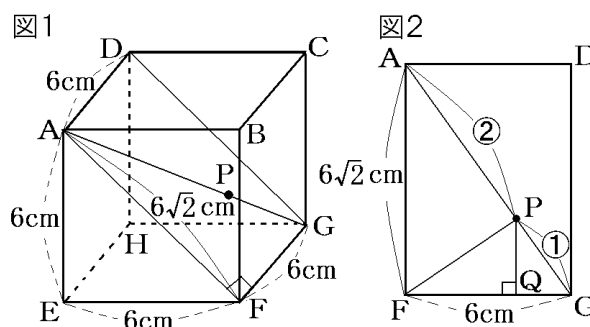
[解答] $2\sqrt{6} \text{ cm}$

[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る

→ 切断面で考える

2 点 P, F, および線分 AG を含む断面 AFGD で考える。図 2 の $\triangle PFQ$ で、FQ と PQ の長さがわかれば、三平方の定理で PF の長さを計算できる。



そこで、まず AF の長さを求める。

図 1 の直角三角形 AFE で、三平方の定理より、

$$AF = \sqrt{AE^2 + EF^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

図 2 で、 $PQ : AF = GP : GA = 1 : (1+2)$ 、よって、 $PQ : 6\sqrt{2} = 1 : 3$

比の外項の積は内項の積に等しいので、 $PQ \times 3 = 6\sqrt{2} \times 1$

よって、 $PQ = 6\sqrt{2} \div 3 = 2\sqrt{2} \text{ (cm)} \cdots \textcircled{1}$

次に、 $GF = 6 \text{ (cm)}$ なので、

$GQ : GF = GP : GA = 1 : (1+2)$ 、よって、 $GQ : 6 = 1 : 3$

比の外項の積は内項の積に等しいので、 $GQ \times 3 = 6 \times 1$ 、 $GQ = 6 \div 3 = 2 \text{ (cm)}$

$FQ = FG - GQ = 6 - 2 = 4 \text{ (cm)} \cdots \textcircled{2}$

①、②より、 $PQ = 2\sqrt{2} \text{ cm}$ 、 $FQ = 4 \text{ cm}$ なので、直角三角形 PFQ で、三平方の定理より、

$$PF = \sqrt{PQ^2 + FQ^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4^2} = \sqrt{8 + 16} = \sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6} \text{ (cm)}$$

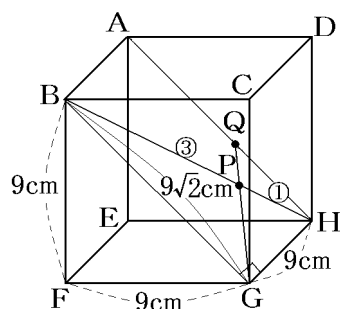
[問題]

右の図のように、1 辺の長さが 9cm の立方体 ABCD-EFGH がある。対角線 BH 上に $BP : PH = 3 : 1$ となる点 P をとり、線分 GP の延長と平面 AEHD との交点を Q とする。このとき、線分 GQ の長さを求めよ。

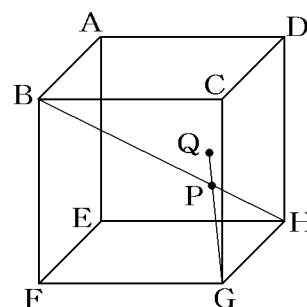
(新潟県)(***)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $3\sqrt{11} \text{ cm}$



【解説】

BPH, GPQ を含むこの立方体の切断面は、右の図 1 のように、ABGH になる。

GH ⊥ 面 AEHD なので、GH ⊥ AH

同様に BA ⊥ AH

よって、切断面 ABGH は図 2 のような長方形になる。図 2 の△GQH は直角三角形なので、GH と QH がわかれば GQ を求めることができる。

GH = 9cm なので、あとは QH である。

BG // QH なので、平行線の性質より、

$$QH : BG = PH : BP = 1 : 3 \cdots \textcircled{1}$$

図 1 で、三角形 BGF は直角三角形なので、三平方の定理より、

$$BG = \sqrt{BF^2 + GF^2} = \sqrt{9^2 + 9^2} = \sqrt{9^2 \times 2} = 9\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

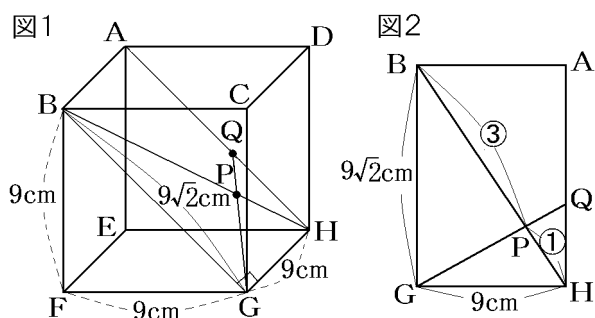
$$\textcircled{1} \text{ の } QH : BG = 1 : 3 \text{ より、 } QH : 9\sqrt{2} = 1 : 3$$

比の外項の積は内項の積に等しいので、 $QH \times 3 = 9\sqrt{2} \times 1$

$$\text{よって、 } QH = 9\sqrt{2} \div 3 = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

図 2 の直角三角形 GQH で、三平方の定理より、

$$GQ = \sqrt{QH^2 + GH^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 9^2} = \sqrt{18 + 81} = \sqrt{99} = \sqrt{9 \times 11} = 3\sqrt{11} \text{ (cm)}$$



【問題】

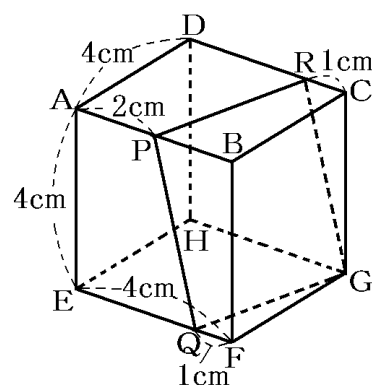
一辺の長さが 4cm の立方体 ABCD-EFGH において、点 P は辺 AB の中点である。また、点 Q, R はそれぞれ辺 EF, DC 上の点であり、FQ = 1cm, CR = 1cm である。このとき、4 点 P, Q, G, R は同じ平面上にある。次の各問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の長さを求めよ。

(2) 線分 PG の長さを求めよ。

(3) △QGR の面積を求めよ。

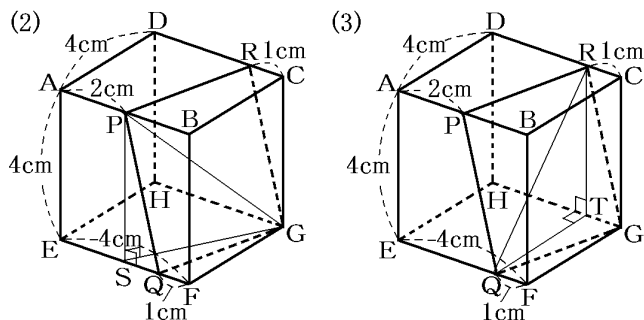
(山梨県)(***)



【解答欄】

(1)	(2)	(3)
-----	-----	-----

[ヒント]

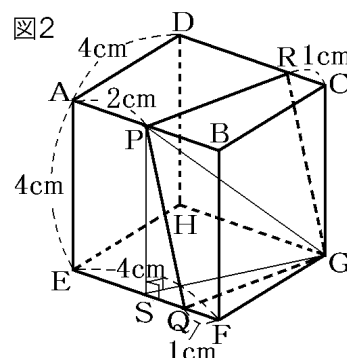
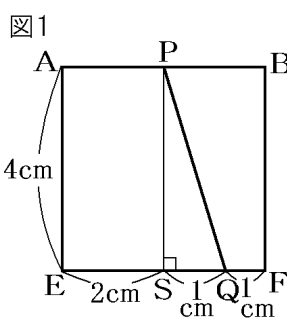


[解答](1) $\sqrt{17}$ cm (2) 6cm (3) $6\sqrt{2}$ cm²

[解説]

(1) 右の図1のようにPからEFへ垂線PSを引く。直角三角形PQSで、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{PS^2 + QS^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{16+1} = \sqrt{17} \text{ (cm)} \end{aligned}$$



(2) 図2のような△PSGで考える。

PS⊥底面EFGHなので、底面EFGH

上にあるSGとも垂直で、∠PSG=90°になる。

直角三角形PGSで、PS=4cmなので、あとSGの長さがわかればPGを計算できる。

直角三角形SGFで、三平方の定理より、

$$SG = \sqrt{SF^2 + GF^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \text{ (cm)}$$

直角三角形PGSで、三平方の定理より、

$$PG = \sqrt{PS^2 + SG^2} = \sqrt{4^2 + (\sqrt{20})^2} = \sqrt{16+20} = \sqrt{36} = 6 \text{ (cm)}$$

(3) △QGRは、GQ=GRの二等辺三角形なので、GQとQRの長さがわかれば、面積を求めることができる。

図3の直角三角形GQFで、三平方の定理より、

$$GQ = \sqrt{GF^2 + QF^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} \text{ (cm)}$$

次に、RからHGに垂線RTを引く。

直角三角形QRTで、三平方の定理より、

$$QR = \sqrt{QT^2 + RT^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

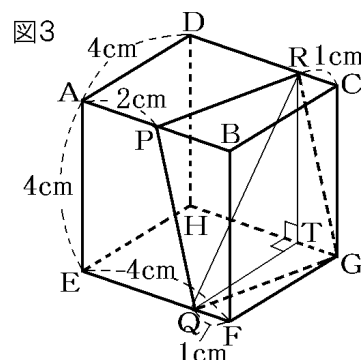
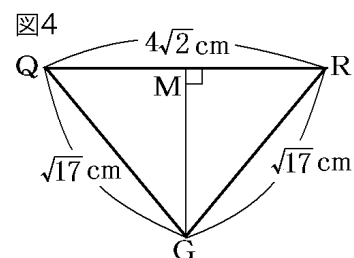


図4で、G から QR へ垂線 GM を引くと、M は QR の中点になる。

直角三角形 GRM で、三平方の定理より、

$$GM = \sqrt{GR^2 - RM^2} = \sqrt{(\sqrt{17})^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{17 - 8} = \sqrt{9} = 3(\text{cm})$$

$$(\triangle QGR \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times QR \times GM = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 3 = 6\sqrt{2} (\text{cm}^2)$$



[問題]

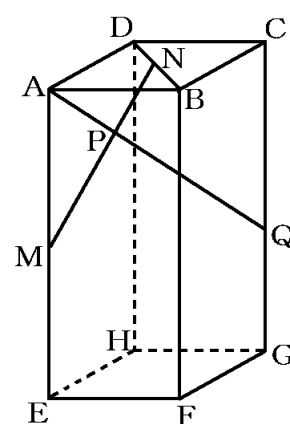
右の図の直方体で、 $AB=AD=\sqrt{6}$ cm, $AE=6$ cm である。AE, BD の中点をそれぞれ M, N, 点 A から MN にひいた垂線と MN との交点を P とする。AP を延長して CG と交わった点を Q とするとき、次の各問いに答えよ。

(1) MN の長さを求めよ。

(2) AP の長さを求めよ。

(3) AP の長さ と PQ の長さの比を最も簡単な整数の比で表せ。

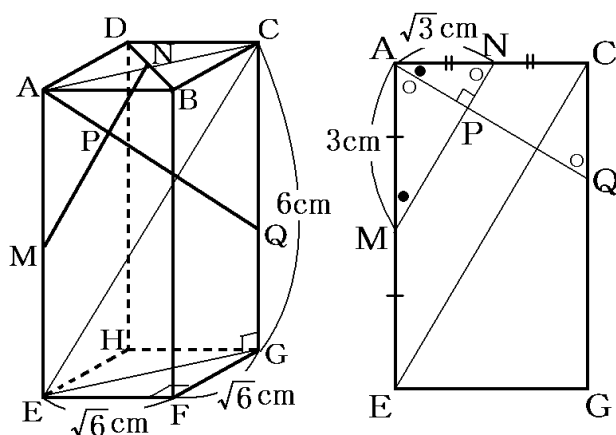
(青森県)(***)



[解答欄]

(1)	(2)	(3)
-----	-----	-----

[ヒント]



[解答](1) $2\sqrt{3}$ cm (2) $\frac{3}{2}$ cm (3) 3 : 5

【解説】

(1) 図1のAEGCを通る平面で切ると、
切断面は図2のようになる。図2で、N
はACの中点、MはAEの中点なので、

中点連結定理より、 $MN = \frac{1}{2} EC$ になる。

そこで、ECを求める。

図1の直角三角形EGFで、三平方の定理より、

$$EG = \sqrt{EF^2 + GF^2} = \sqrt{6+6} = \sqrt{12} \text{ (cm)}$$

直角三角形CEGで、三平方の定理より、

$$EC = \sqrt{EG^2 + CG^2} = \sqrt{12+36} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$\text{よって、} MN = \frac{1}{2} EC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

(2) 図2で、 $\triangle ANP \sim \triangle MNA$ (2角が等しい)なので、

$$AP : MA = AN : MN$$

$$(1) \text{より } MN = 2\sqrt{3} \text{ (cm) なので、} AP : 3 = \sqrt{3} : 2\sqrt{3}$$

比の外項の積は内項の積に等しいので、 $2\sqrt{3} AP = 3\sqrt{3}$

$$AP = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2} \text{ (cm)}$$

(3) $\triangle AQC \sim \triangle ANP$ (2角が等しい)なので、 $AQ : AN = AC : AP$

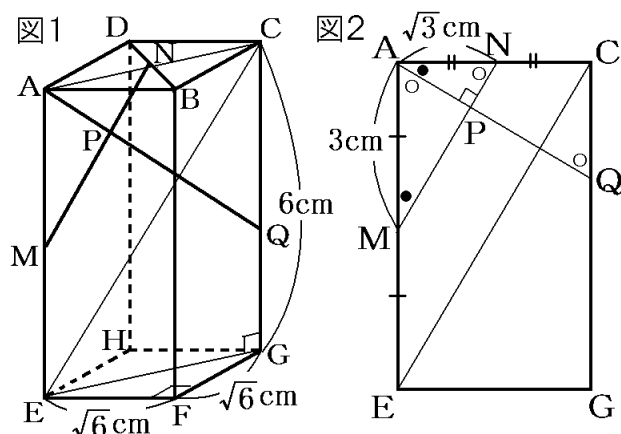
$$AQ : \sqrt{3} = 2\sqrt{3} : \frac{3}{2}$$

比の外項の積は内項の積に等しいので、

$$\frac{3}{2} AQ = \sqrt{3} \times 2\sqrt{3}, \quad \frac{3}{2} AQ = 6, \quad AQ = 6 \div \frac{3}{2} = 6 \times \frac{2}{3} = 4 \text{ (cm)}$$

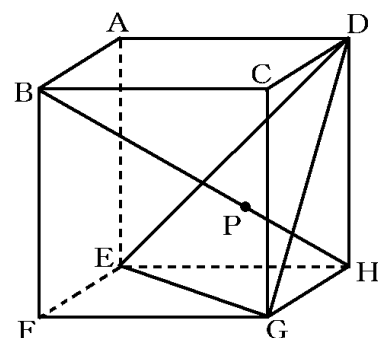
$$PQ = AQ - AP = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{よって、} AP : PQ = \frac{3}{2} : \frac{5}{2} = 3 : 5$$



[問題]

右の図のように、1辺の長さが6cmの立方体の3つの頂点D、E、Gを結んでできる△DEGがある。立方体の2つの頂点BとHとを結ぶ対角線をひいたところ、対角線BHは、△DEGと垂直に交わった。対角線BHと△DEGとの交点をPとすると、次の各問いに答えよ。



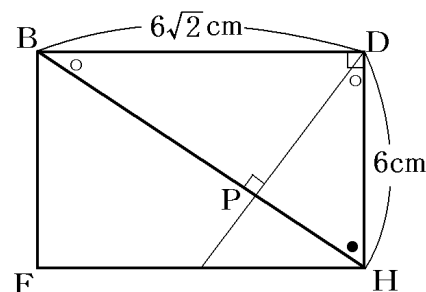
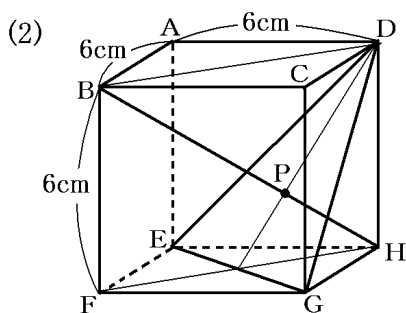
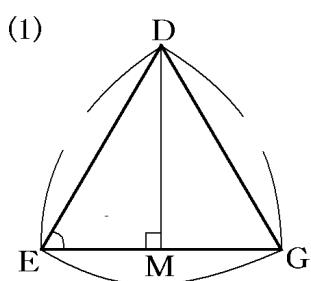
- (1) △DEG の面積を求めよ。
- (2) 線分 PH の長さを求めよ。

(鳥取県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]



[解答](1) $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$ (2) $2\sqrt{3} \text{ cm}$

[解説]

(1) 直角三角形 DEH で、三平方の定理より、

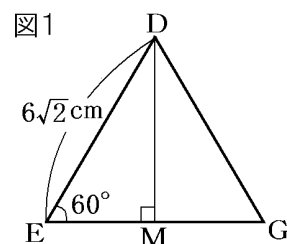
$$DE = \sqrt{DH^2 + EH^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

同様にして、 $EG = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$ 、 $DG = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$ になるので、
△DEG は図 1 のような 1 辺が $6\sqrt{2} \text{ cm}$ の正三角形になる。
図 1 の△DEM は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は $1 : 2 : \sqrt{3}$ になるので、

$$DM = DE \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6} \text{ (cm)}$$

よって、(△DEG の面積) $= \frac{1}{2} \times EG \times DM$

$$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} = 9\sqrt{12} = 9\sqrt{4 \times 3} = 18\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$



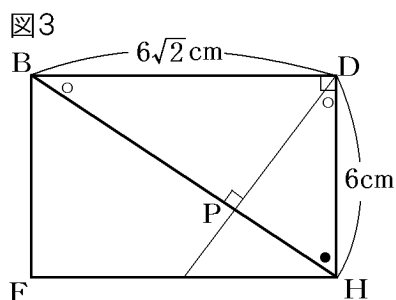
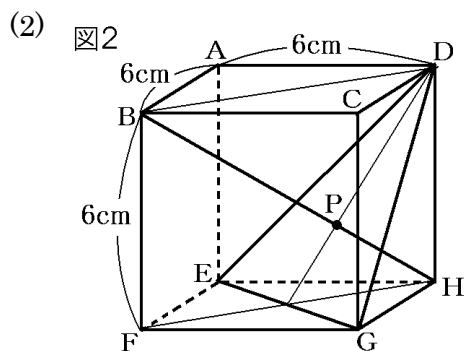


図2のように、この立方体をBFHDの断面で切った断面図が図3である。

図2の直角三角形ABDで、三平方の定理より、

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

図3の直角三角形BHDで、三平方の定理より、

$$BH = \sqrt{BD^2 + HD^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 6^2} = \sqrt{72 + 36} = \sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = 6\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

図3で、 $\triangle DHP \sim \triangle BHD$ (2角が等しい)なので、

$$PH : DH = DH : BH, \quad PH : 6 = 6 : 6\sqrt{3}$$

比の外項の積は内項の積に等しいので、

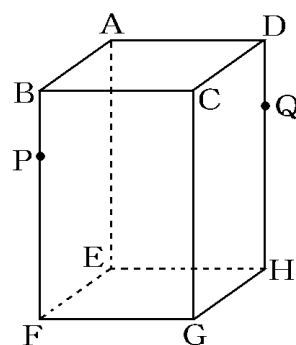
$$6\sqrt{3} PH = 36, \quad PH = \frac{36}{6\sqrt{3}} = \frac{36 \times \sqrt{3}}{6\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{36\sqrt{3}}{18} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

[問題]

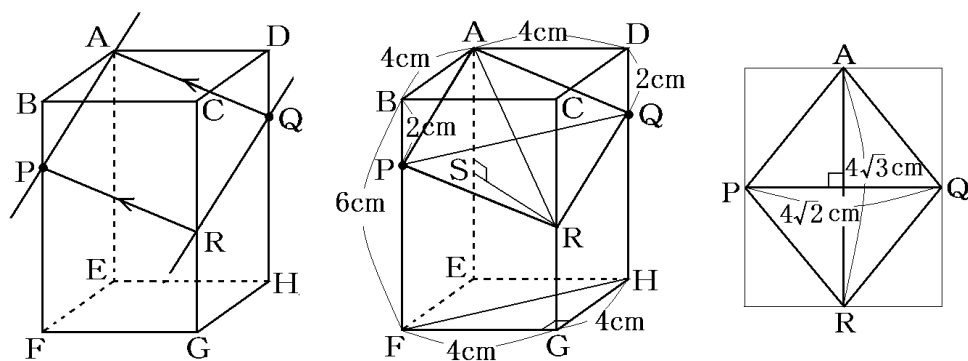
右の図の直方体ABCD-EFGHにおいて、 $AB=AD=4\text{cm}$ 、 $AE=6\text{cm}$ である。辺BF、DH上に、それぞれ点P、Qを $BP=DQ=2\text{cm}$ となるようにとり、この直方体を3点A、P、Qを通る平面で切って2つに分けると、切り口としてできる図形の面積を求めよ。

(群馬県)(****)

[解答欄]



[ヒント]

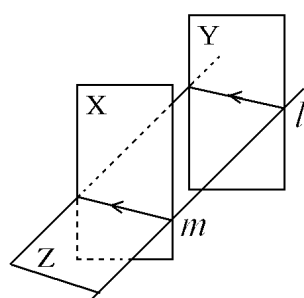


[解答] $8\sqrt{6} \text{ cm}^2$

[解説]

まず、3点 A, P, Q を通る平面が側面 BCGF と交わってできる直線がどのようなになるかについて考える。

右図のように平行な 2 つの平面 X, Y に平面 Z が交わるとき、X と Z が交わってできる直線を m 、Y と Z が交わってできる直線を l とすると、 $l \parallel m$ となる。



したがって、3点 A, P, Q を通る平面が側面 BCGF と交わってできる直線を PR とすると、 $PR \parallel AQ$ となる。…①

同様に 3点 A, P, Q を通る平面が側面 CDHG と交わってできる直線を QR とすると、 $QR \parallel AP$ となる。…②

①, ②より、四角形 APRQ は平行四辺形になる。

直角三角形 AQD において、三平方の定理より、

$$AQ = \sqrt{AD^2 + QD^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

直角三角形 APB において、三平方の定理より、

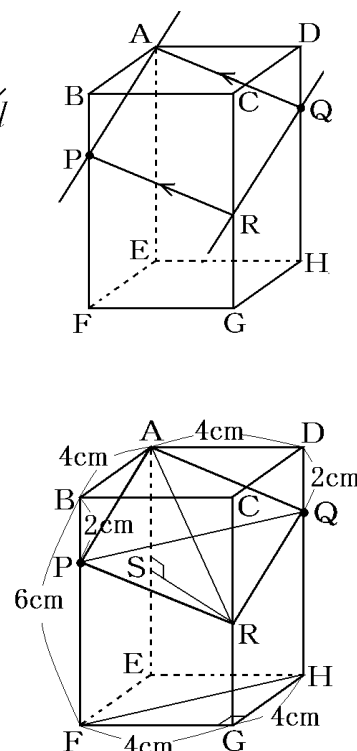
$$AP = \sqrt{AB^2 + PB^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

したがって、平行四辺形 APRQ は隣り合う辺の長さが等しいので、ひし形になる。

平行四辺形やひし形は 4 辺の長さが決まっても、形は一意的に決まらない(押しつぶせば形が変わるから)。

そこで、対角線に注目する。ひし形の対角線は互いに垂直に交わるので、2 つの対角線の長さがわかれば、その面積を求めることができる。

図で、 $BP = DQ$ なので、 $PQ \parallel FH$ 、 $PQ = FH$ になる。



直角三角形 FHG で、三平方の定理より、

$$FH = \sqrt{FG^2 + HG^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

したがって、 $PQ = 4\sqrt{2} \text{ cm}$ となる。…③

次に、AR の長さを求める。

図のように、R から辺 AE に垂線 RS をひく。

ところで、 $AQ \parallel PR$ なので、P と R の高さの差は D と Q の高さの差と同じ 2cm になる。

したがって、 $CR = 2 + 2 = 4 \text{ (cm)}$ になる。

よって、 $AS = CR = 4 \text{ (cm)}$

次に、 $SR = EG = FH = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$ になる。

直角三角形 ARS で、三平方の定理より、

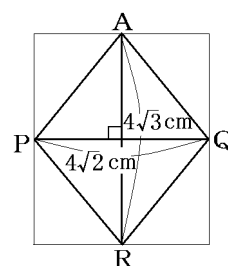
$$AR = \sqrt{AS^2 + SR^2} = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{16 + 32} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)} \dots \textcircled{4}$$

③, ④より、ひし形 APRQ の 2 つの対角線の長さは、 $4\sqrt{2} \text{ cm}$,

$4\sqrt{3} \text{ cm}$ である。したがって、

(ひし形 APRQ の面積) = $AR \times PQ \div 2$

$$= 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} \div 2 = 8\sqrt{6} \text{ (cm}^2\text{)}$$



【】 球・円柱など

[球]

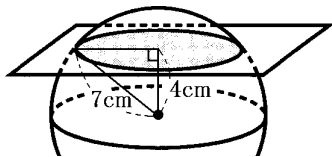
[問題]

半径 7cm の球を、中心から 4cm の距離にある平面で切ったとき、切り口の円の面積を求めよ。

(埼玉県)(**)

[解答欄]

[ヒント]



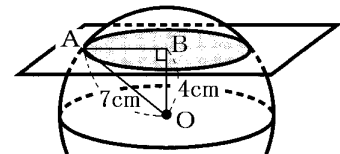
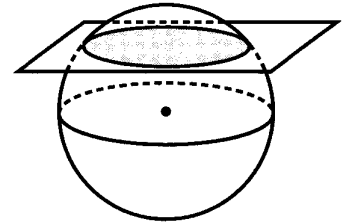
[解答] $33\pi \text{ cm}^2$

[解説]

右図で、三平方の定理より、

$$AB^2 = OA^2 - OB^2 = 49 - 16 = 33$$

$$(\text{切り口の円の面積}) = \pi \times AB^2 = \pi \times 33 = 33\pi (\text{cm}^2)$$



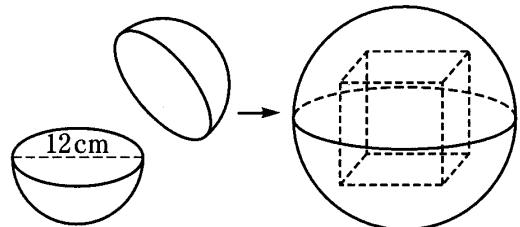
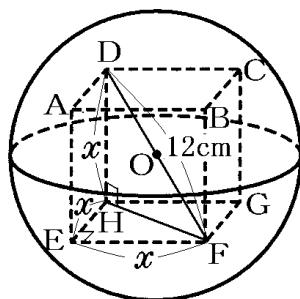
[問題]

右の図のように、直径が 12cm の球の形をしたプラスチックの容器がある。この容器の中にちょうど入る立方体の 1 辺の長さを求めよ。ただし、プラスチックの容器の厚さは考えないものとする。

(埼玉県)(***)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $4\sqrt{3}$ cm

[解説]

立方体の 8 つの頂点が、球に内接している。

右図のように、立方体の対角線 DF の中点に球の中心 O があり、 DF は球の直径になる。

この立方体の 1 辺を x cm とする。

右図の直角三角形 HFE で、三平方の定理より、

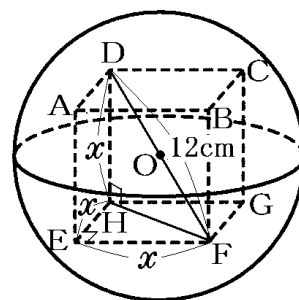
$$HF = \sqrt{HE^2 + FE^2} = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{x^2 \times 2} = \sqrt{2}x \text{ (cm)}$$

直角三角形 DFH で、三平方の定理より、

$$DF = \sqrt{DH^2 + HF^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{2}x)^2} = \sqrt{x^2 + 2x^2} = \sqrt{x^2 \times 3} = \sqrt{3}x \text{ (cm)}$$

DF は球の直径なので、

$$\sqrt{3}x = 12, \quad x = 12 \div \sqrt{3} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

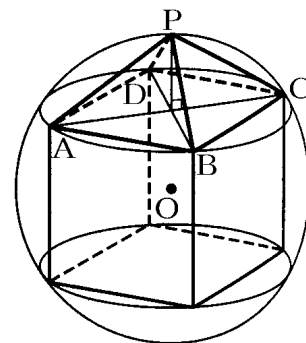


[問題]

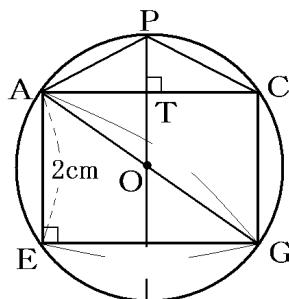
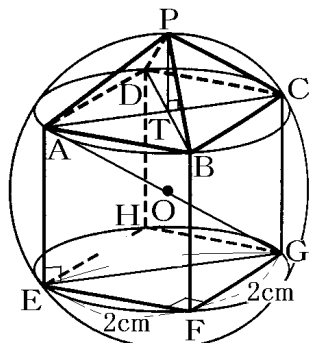
右の図のように、1 辺が 2cm の立方体が球に内接している。この立方体の 1 つの面 $ABCD$ を底面とする正四角錐 $P-ABCD$ で、その 5 つの頂点は、球にぴったりとくっついている。このとき、正四角錐 $P-ABCD$ の体積を求めよ。

(沖縄県)(***)

[解答欄]



[ヒント]



図の PT (高さ)がわかれば、正四角錐 $P-ABCD$ の体積を求めることができる。

[解答] $\frac{4\sqrt{3}-4}{3}\text{cm}^3$

[解説]

右図の PT(高さ)がわかれば、正四角錐 P-ABCD の体積を求めることができる。

PT=PO-TO で、

TO=AE÷2=2÷2=1(cm)なので、

球の半径(PO)を求めればよい。

右の図 1 の直角三角形 EGF で、

三平方の定理より、

$$EG = \sqrt{EF^2 + GF^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

直角三角形 AGE で、三平方の定理より、

$$AG = \sqrt{AE^2 + GE^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

AG は球の直径なので、球の半径は $2\sqrt{3} \div 2 = \sqrt{3} \text{ (cm)}$ になる。

したがって、PO = $\sqrt{3} \text{ cm}$

よって、PT = PO - TO = $\sqrt{3} - 1 \text{ (cm)}$

$$(\text{正四角錐 P-ABCD の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積 ABCD}) \times (\text{高さ PT})$$

$$= \frac{1}{3} \times (2 \times 2) \times (\sqrt{3} - 1) = \frac{4(\sqrt{3} - 1)}{3} = \frac{4\sqrt{3} - 4}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

図 1

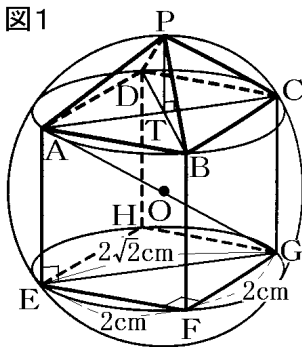
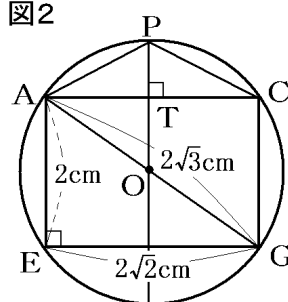


図 2

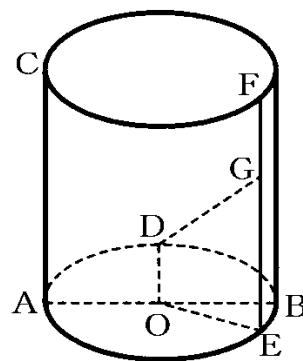


[円柱]

[問題]

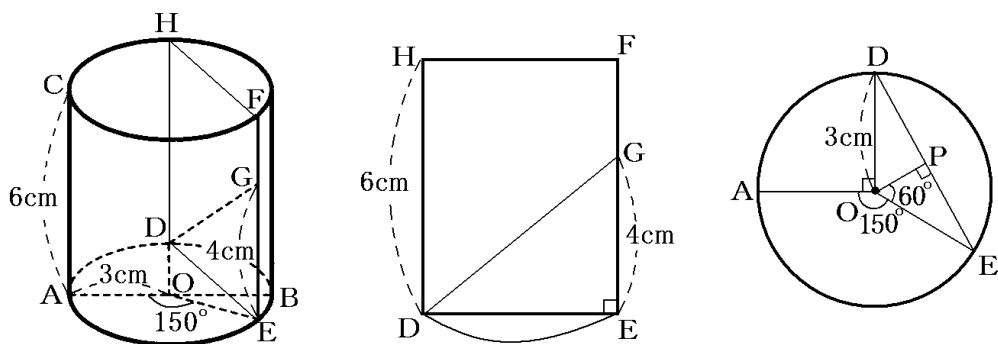
右の図は、線分 AB を直径とする円 O を底面とし、AC=6cm を高さとする円柱である。点 D は円 O の周上の点で、 $\angle AOD = 90^\circ$ であり、点 E は点 D をふくまない弧 AB 上の点で、 $\angle AOE = 150^\circ$ である。また、点 F はこの円柱の 2 つの底面のうち円 O とは異なる円の周上の点で、線分 EF は底面に垂直である。AB=AC である。線分 EF 上に点 G を EG=4cm となるようにとるとき、2 点 D, G 間の距離を求めよ。

(神奈川県)(***)



[解答欄]

[ヒント]



[解答] $\sqrt{43}$ cm

[解説]

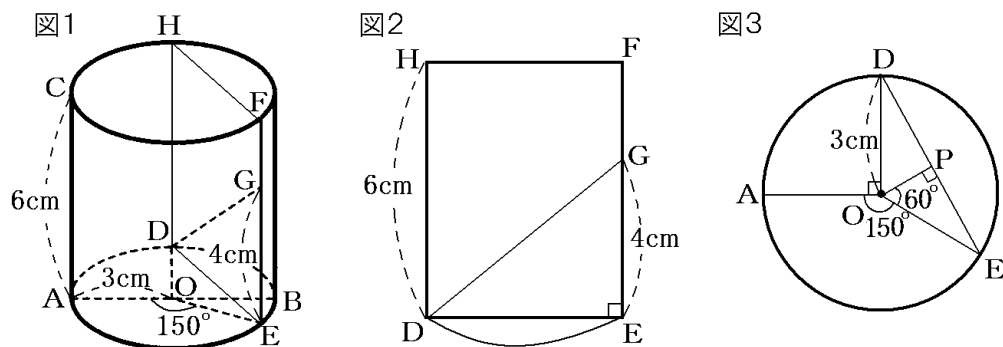


図1のDGを含む切断面DEFHは図2のようになる。図2のDEの長さがわかれば、DGの長さを計算できる。

図3で、 $\angle EOD = 360^\circ - 150^\circ - 90^\circ = 120^\circ$ なので、 $\angle EOP = 60^\circ$ になる。

$\triangle OEP$ は 30° 90° 60° の直角三角形で3辺の比は $1 : 2 : \sqrt{3}$ になるので、

$$EP = OE \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (cm)}$$

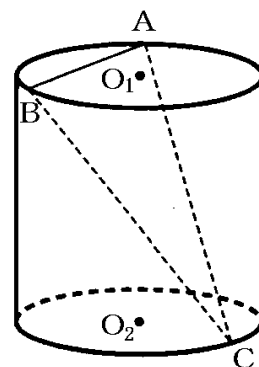
よって、 $DE = EP \times 2 = 3\sqrt{3}$ (cm)

図2の直角三角形DGEで、三平方の定理より、

$$DG = \sqrt{DE^2 + GE^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{27 + 16} = \sqrt{43} \text{ (cm)}$$

[問題]

右の図のように、底面の半径が 2cm 、高さが 6cm の円柱がある。底面の円の中心はそれぞれ O_1 、 O_2 で、円 O_1 の円周上に点 A と点 B を、 $\angle AO_1B = 120^\circ$ となるようにとる。また、円 O_2 の円周上に点 C を、 $\triangle ABC$ の面積が最も大きくなるようにとる。このとき、次の各問いに答えよ。



(1) 線分 AB の長さを求めよ。

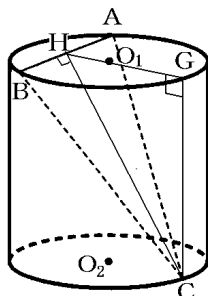
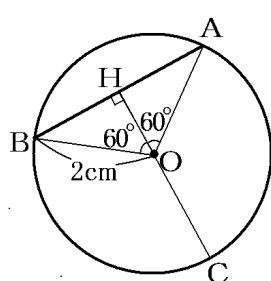
(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(京都府)(***)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]



[解答](1) $2\sqrt{3}\text{cm}$ (2) $3\sqrt{15}\text{cm}^2$

[解説]

(1) 右の図1で $\triangle OBH$ は 30° 90° 60° の直角三角形で3辺の比は

$1 : 2 : \sqrt{3}$ になるので、 $BH = OB \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}(\text{cm})$

$AB = 2BH = 2\sqrt{3}(\text{cm})$

(2) 点 C が図1のような位置にあるとき $\triangle ABC$ の面積が最も大きくなる。

図2の CH の長さがわかれば $\triangle ABC$ の面積が計算できる。

図1の $\triangle OBH$ で、(1)と同じように考えると、

$$OH = OB \times \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1(\text{cm})$$

したがって、図2の $GH = GO_1 + O_1H = 2 + 1 = 3(\text{cm})$

図2の直角三角形 CHG で、三平方の定理より、

$$CH = \sqrt{CG^2 + GH^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}(\text{cm})$$

$$\text{よって、}(\triangle ABC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{5} = 3\sqrt{15}(\text{cm}^2)$$

図1

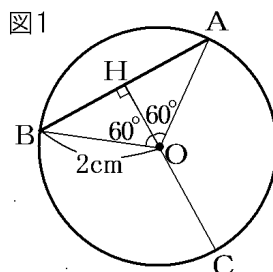
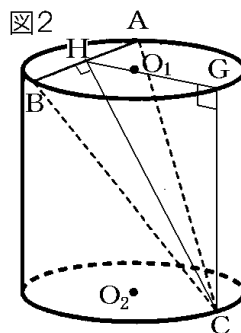


図2



【】 体積

【】 正四面体

[問題]

右の図の正四面体は、1辺の長さが8cmである。辺BC、CDの中点をそれぞれ点P、Q、点QからAPにひいた垂線とAPとの交点をRとする。次の各問いに答えよ。

(1) $\triangle APQ$ の面積を求めよ。

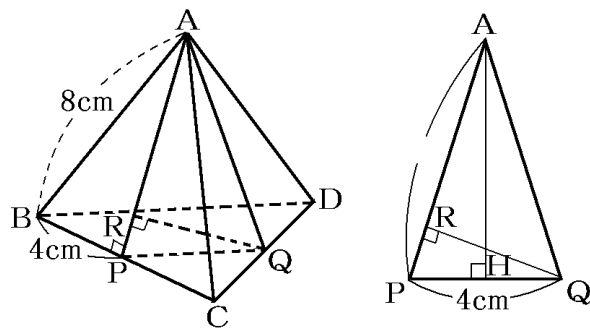
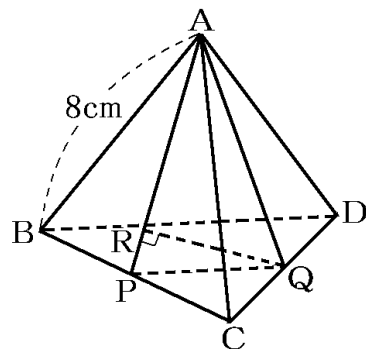
(2) QR の長さを求めよ。

(青森県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]



[解答](1) $4\sqrt{11} \text{ cm}^2$ (2) $\frac{2\sqrt{33}}{3} \text{ cm}$

[解説]

(1) 図1の直角三角形ABPで、三平方の定理より 図1

$$\text{り, } AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48}$$

$$= \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

図2の直角三角形APHで、三平方の定理より、

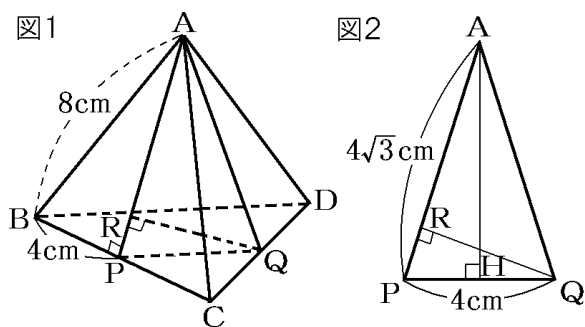
$$AH = \sqrt{AP^2 - PH^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 2^2} = \sqrt{48 - 4}$$

$$= \sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = 2\sqrt{11} \text{ (cm)}$$

$$(\triangle APQ \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times PQ \times AH = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{11} = 4\sqrt{11} \text{ (cm}^2\text{)}$$

(2) 図2の $\triangle APQ$ の底辺をAPとすると、高さはQRになるので、

$$(\triangle APQ \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times AP \times QR = 4\sqrt{11} \text{ が成り立つ。}$$



$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times QR = 4\sqrt{11}, \quad 2\sqrt{3} \times QR = 4\sqrt{11}, \quad QR = \frac{4\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{11} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{33}}{3} (\text{cm})$$

[問題]

右の図は、4つの面が1辺の長さ6cmの正三角形からなる三角錐OABCであり、三角錐の高さをhcmとし、 $h=OG$ とする。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) 高さhを求めよ。

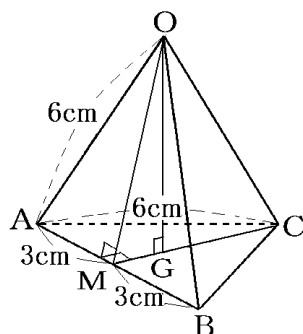
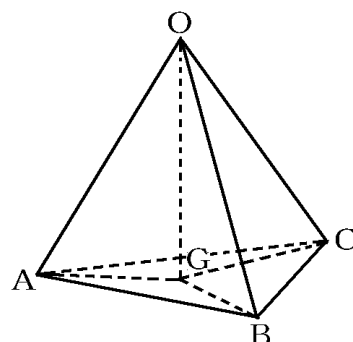
(2) 三角錐OABCの体積を求めよ。

(沖縄県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]



$\triangle OMC$ は $OM=CM$ の二等辺三角形である→3辺が分かれば面積を計算できる
底辺を CM とすると高さは OG →面積と CM から $OG(h)$ を計算。

[解答](1) $2\sqrt{6}$ cm (2) $18\sqrt{2}$ cm³

[解説]

(1) 図1の $\triangle OMC$ に注目する。

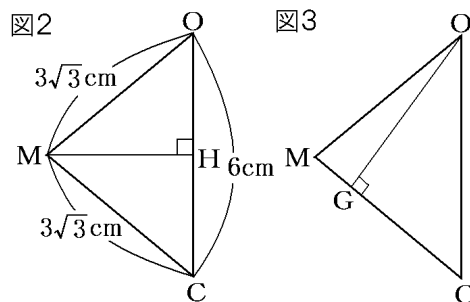
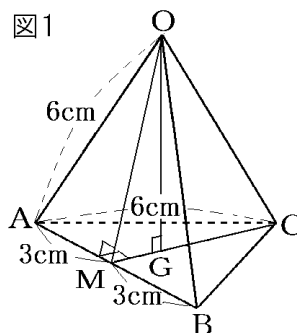
$\triangle OAB$ は1辺が6cmの正三角形で $\angle OAM=60^\circ$ なので、
 $\triangle OAM$ は 30° 90° 60° の直角三角形で、3辺の比は $1:2:\sqrt{3}$
である。よって、 $OM=OA \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (cm)である。

CM も同様にして、 $CM=3\sqrt{3}$ (cm)である。

$\triangle OMC$ の面積がわかれば図3の OG を求めることができる。

図2の直角三角形 OMH で、三平方の定理より、

$$MH = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = \sqrt{27 - 9}$$



$$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$(\triangle OMC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times OC \times MH = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{2}$$

$$= 9\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)} \cdots \textcircled{1}$$

次に、図 3 で、底辺を MC とすると、高さは OG なので、

$$(\triangle OMC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times MC \times OG \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \frac{1}{2} \times MC \times OG = 9\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times OG = 9\sqrt{2}, \quad \frac{3\sqrt{3}}{2} OG = 9\sqrt{2},$$

$$OG = 9\sqrt{2} \div \frac{3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{2} \times \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6} \text{ (cm)}$$

(2) (1) より $CM = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$ なので、

$$(\triangle ABC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times AB \times CM = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{よって, (三角錐 OABC の体積)} = \frac{1}{3} \times (\triangle ABC \text{ の面積}) \times OG = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times 2\sqrt{6}$$

$$= 6\sqrt{18} = 18\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)}$$

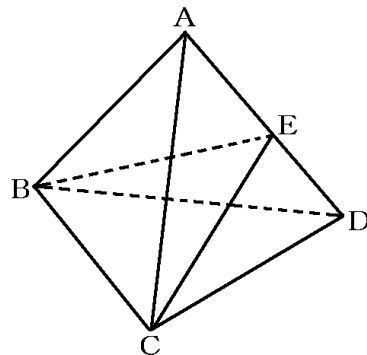
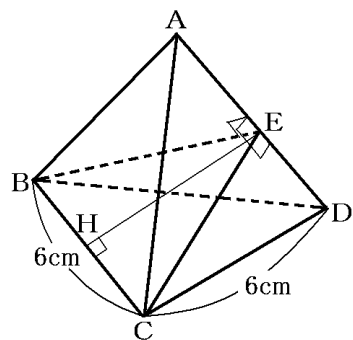
[問題]

右の図のように、すべての辺の長さが 6cm の正四面体 ABCD があり、辺 AD の中点を E とする。この正四面体を 3 点 B, C, E を通る平面で切ったとき、三角錐 ABCE の体積を求めよ。

(埼玉県)(***)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $9\sqrt{2} \text{ cm}^3$

[解説]

正三角形 CAD で、 E は AD の中点なので、 $CE \perp AD$ になる。
 同様に、 $BE \perp AD$ なので、 AE は平面 BCE と垂直な位置関係になる。よって、三角錐 $ABCE$ の底面を $\triangle BCE$ としたときの高さは AE になる。 $AE = AD \div 2 = 6 \div 2 = 3(\text{cm})$
 次に、 $\triangle BCE$ の面積を計算するために、 EC を求める。
 $\triangle CDE$ は $30^\circ \ 90^\circ \ 60^\circ$ の直角三角形で 3 辺の比は

$$1 : 2 : \sqrt{3} \text{ になるので, } CE = CD \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}(\text{cm})$$

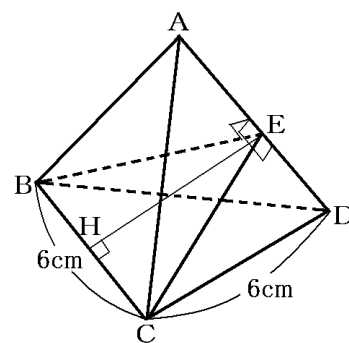
同様にして、 $BE = 3\sqrt{3}(\text{cm})$

二等辺三角形 EBC の点 E から辺 BC に垂線 EH を引くと、 H は BC の中点になる。

直角三角形 ECH で、三平方の定理より、

$$EH = \sqrt{CE^2 - CH^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = \sqrt{27 - 9} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}(\text{cm})$$

$$(\text{三角錐 } ABCE \text{ の体積}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times BC \times EH \times AE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{2} \times 3 = 9\sqrt{2}(\text{cm}^3)$$



[問題]

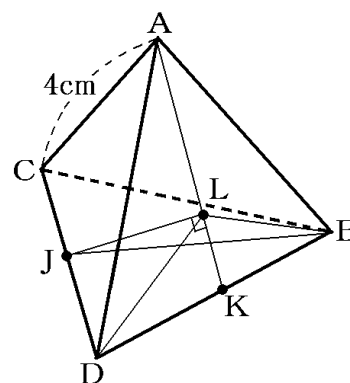
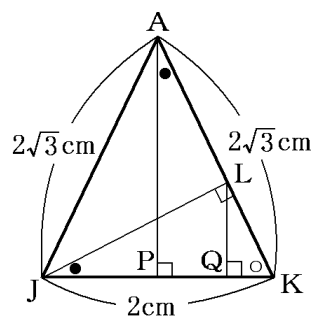
右図の正四面体 $ABCD$ の 1 辺の長さは 4cm である。辺 CD , DB の中点をそれぞれ J , K とする。点 A と点 K を結び、点 J を通り線分 AK に垂直な直線と線分 AK との交点を L とする。三角錐 $LBKD$ の体積は、正四面体 $ABCD$ の体積の何倍か求めよ。

(福岡県)(****)

[解答欄]



[ヒント]



[解答] $\frac{1}{12}$ 倍

[解説]

三角錐 LBJD の底面を $\triangle \text{BJD}$ とすると、 J は CD の中点なので、 $\triangle \text{BJD}$ の面積は $\triangle \text{BCD}$ の $\frac{1}{2}$ 倍になる。三角錐 LBJD の高さは L から面 BCD におろした垂線の長さになる。

この高さが正四面体 ABCD の高さの何倍になるかがわかれば、体積が何倍になるか求めることができる。

右図のような $\triangle \text{AJK}$ で、 LK の長さがわかれば、
 $\text{AK} : \text{LK} = \text{AP} : \text{LQ}$ で、高さの比 $\text{AP} : \text{LQ}$ がわかる。

$\triangle \text{JKL} \sim \triangle \text{AKP}$ (2 角が等しい) なので、

$$\text{KL} : \text{KP} = \text{JK} : \text{AK}$$

$$\text{KL} : 1 = 2 : 2\sqrt{3}$$

比の外項の積は内項の積に等しいので、

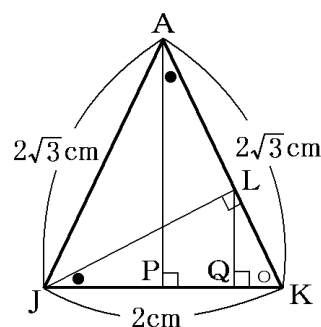
$$2\sqrt{3} \text{KL} = 2, \quad \text{KL} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} (\text{cm})$$

$$\text{よって, } \text{AP} : \text{LK} = \text{AK} : \text{LK} = 2\sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{3} = 6 : 1$$

したがって、三角錐 LBJD の底面積は正四面体 ABCD の底面積の $\frac{1}{2}$ 倍で、三角錐 LBJD の

高さは正四面体 ABCD の高さの $\frac{1}{6}$ 倍なので、

三角錐 LBJD の体積は、正四面体 ABCD の体積の、 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ (倍) になる。



【】 体積：高さの発見

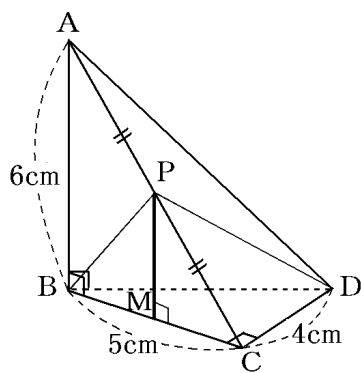
[問題]

右の図のような三角錐 $ABCD$ があり、
 $\angle ABC = \angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$, $AB = 6\text{cm}$,
 $BC = 5\text{cm}$, $CD = 4\text{cm}$ である。また、点 P は辺 AC の中点
 である。4 点 P, B, C, D を頂点とする三角錐の体積を
 求めよ。

(静岡県)(***)

[解答欄]

[ヒント]



P から線分 BC に垂線 PM を引くと、 $PM \parallel AB$ $AB \perp BC$, $AB \perp BD$ なので、 $AB \perp$ 面 BCD になる。よって、 $PM \perp$ 面 BCD となる。

[解答] 10cm^3

[解説]

高さを求めるのがポイントである。

P から線分 BC に垂線 PM を引くと、

$\angle PMC = \angle ABC = 90^\circ$ で、同位角が等しいので $PM \parallel AB$
 ところで、 $AB \perp BC$, $AB \perp BD$ なので、 $AB \perp$ 面 BCD になる。
 よって、 $PM \perp$ 面 BCD となる。

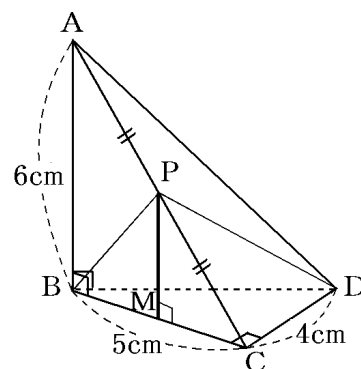
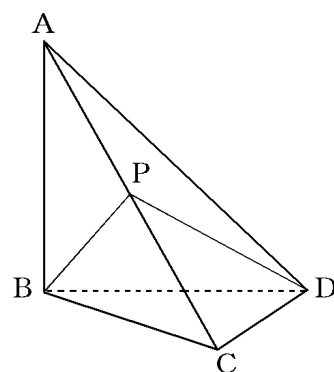
したがって、 $\triangle BCD$ を底面としたとき、高さは PM になる。

点 P は辺 AC の中点なので、 $PM = AB \div 2 = 6 \div 2 = 3(\text{cm})$

$(\triangle BCD \text{ の面積}) = BC \times CD \div 2 = 5 \times 4 \div 2 = 10(\text{cm}^2)$

よって、

$$(\text{三角錐 } P-BCD \text{ の体積}) = \frac{1}{3} \times (\triangle BCD \text{ の面積}) \times PM = \frac{1}{3} \times 10 \times 3 = 10(\text{cm}^3)$$



[問題]

右の図は、底面の1辺が 6cm の正四角錐 $O-ABCD$ で、側面の二等辺三角形の等しい辺はいずれも 9cm である。
頂点 B から辺 OA にひいた垂線と OA との交点を H としたとき、次の各問いに答えよ。

(1) BH の長さを求めよ。

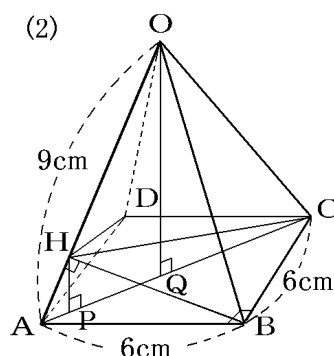
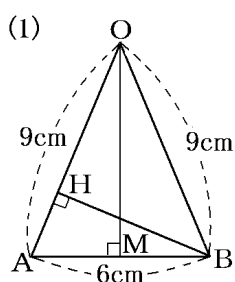
(2) 四角錐 $H-ABCD$ の体積を求めよ。

(福島県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]



[解答](1) $4\sqrt{2}\text{ cm}$ (2) $8\sqrt{7}\text{ cm}^3$

[解説]

(1) 右図のように、側面の $\triangle OAB$ を取り出して考える。

底辺を OA とすると、 BH は高さになる。

そこで、別の方法で $\triangle OAB$ の面積を求める。

O から底辺 AB に垂線 OM を引くと、 $\triangle OAB$ は二等辺三角形なので、

M は AB の中点になる。したがって、 $AM = 6 \div 2 = 3(\text{cm})$

直角三角形 OAM で、三平方の定理より、

$$OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{9^2 - 3^2} = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}(\text{cm})$$

$$\text{よって、}(\triangle OAB \text{ の面積}) = AB \times OM \div 2 = 6 \times 6\sqrt{2} \div 2 = 18\sqrt{2}(\text{cm}^2)$$

底辺を OA 、 BH を高さとするとき、

$$(\triangle OAB \text{ の面積}) = OA \times BH \div 2 = 18\sqrt{2}(\text{cm}^2)$$

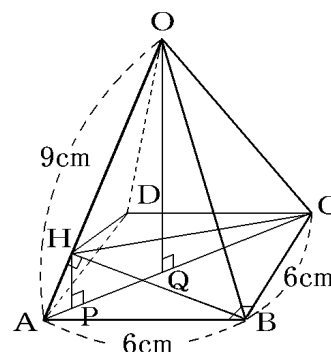
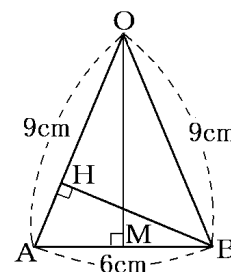
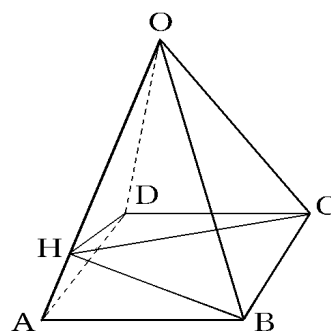
$$9 \times BH \div 2 = 18\sqrt{2}, \quad BH = 18\sqrt{2} \div 9 \times 2 = 4\sqrt{2}(\text{cm})$$

(2) 右図のように対角線 AC に、垂線 HP 、 OQ を引く。

四角錐 $H-ABCD$ で、 $ABCD$ を底面とすると、高さは HP となる。

そこで、 HP の長さを求める。直角三角形 ABC で三平方の

$$\text{定理より、} AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}(\text{cm})$$



$$AQ = 6\sqrt{2} \div 2 = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

直角三角形 OAQ で、三平方の定理より、

$$OQ = \sqrt{OA^2 - AQ^2} = \sqrt{9^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{81 - 18} = \sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = 3\sqrt{7} \text{ (cm)}$$

$\triangle OAQ$ で, $HP \parallel OQ$ なので, $HP : OQ = AH : AO$, $HP : 3\sqrt{7} = AH : 9$

AH の長さが求まれば、HP が計算できる。

直角三角形 ABH で、 $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{6^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{36 - 32} = \sqrt{4} = 2$ (cm)

よって、 $HP : 3\sqrt{7} = 2 : 9$ 比の外項の積は内項の積に等しいので、 $HP \times 9 = 3\sqrt{7} \times 2$

$$\text{よって, HP} = 3\sqrt{7} \times 2 \div 9 = \frac{3\sqrt{7} \times 2}{9} = \frac{2\sqrt{7}}{3} \text{ (cm)}$$

$$(\text{四角錐 H-ABCD の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面 ABCD の面積}) \times (\text{高さ HP})$$

$$= \frac{1}{3} \times 6^2 \times \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{1 \times 6 \times 6 \times 2\sqrt{7}}{3 \times 3} = 8\sqrt{7} \text{ (cm}^3\text{)}$$

[問題]

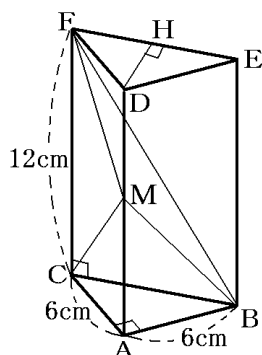
右の図は、底面 ABC が $AB=AC=6\text{cm}$ の直角二等辺三角形で、側面がすべて長方形の三角柱 $ABCDEF$ を表しており、 $AD=12\text{cm}$ である。辺 AD の中点を M とする。 $\triangle FCB$ を底面とし、点 M を頂点とする三角錐 $MFCB$ の体積を求めよ。

(福岡県)(***)

[解答欄]

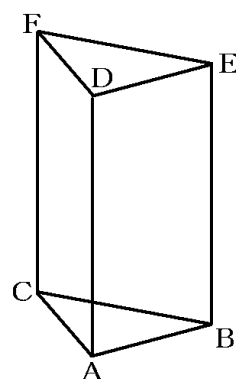


[ヒント]



△BFCは面BCFEに含まれているが、面BCFEと辺ADは平行なので、Mからこの平面に引いた垂線の長さは、Dからこの平面に引いた垂線DHの長さと等しくなる。

[解答] 72cm^3



【解説】

三角錐 MFBC の $\triangle BFC$ を底面として考える。

直角三角形 BCA で、三平方の定理より、

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$(\triangle BFC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times BC \times FC = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 12 = 36\sqrt{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

少し難しいのは、M から底面までの距離(高さ)である。

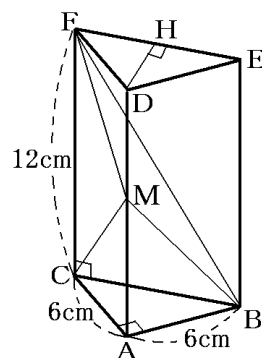
$\triangle BFC$ は面 BCFE に含まれているが、面 BCFE と辺 AD は平行なので、M からこの平面に引いた垂線の長さは、D からこの平面に引いた垂線 DH の長さと等しくなる。

直角三角形 DEH で、 $DE = AB = 6 \text{ (cm)}$ 、 $EH = \frac{1}{2} EF = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$ なので、

三平方の定理より、

$$DH = \sqrt{DE^2 - EH^2} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{36 - 18} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{よって、(三角錐 MFBC の体積)} = \frac{1}{3} \times (\triangle BFC \text{ の面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times 36\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 72 \text{ (cm}^3\text{)}$$



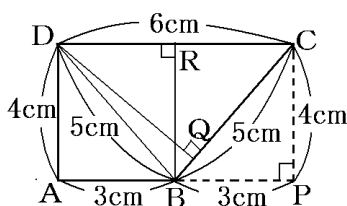
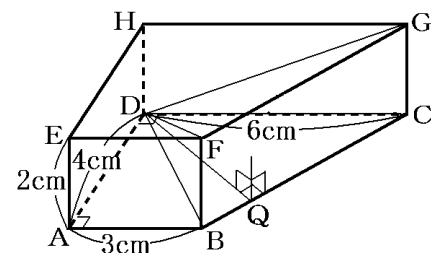
【問題】

右の図は、底面 ABCD が $AD = 4 \text{ cm}$ 、 $\angle DAB = \angle ADC = 90^\circ$ 、 $AB = 3 \text{ cm}$ 、 $DC = 6 \text{ cm}$ の台形で、側面がすべて長方形の四角柱 ABCDEFGH を表しており、 $AE = 2 \text{ cm}$ である。この立体において、長方形 FBCG を底面とし、点 D を頂点とする四角錐 DFBCG の体積は何 cm^3 か。

(福岡県)(***)

【解答欄】

【ヒント】



【解答】 16 cm^3

【解説】

まず，四角錐 DFBCG の底面の面積を求める。

図 2 の直角三角形 BCP で，三平方の定理より，

$$BC = \sqrt{BP^2 + CP^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ (cm)}$$

$$(\text{長方形 FBCG の面積}) = FB \times BC = 2 \times 5 = 10 \text{ (cm}^2\text{)}$$

少し難しいのは高さである。

点 D をふくむ面 DABC と面 FBCG が垂直であることに注目

する。D から BC へ垂線 DQ を引くと，DQ は面 FBCG にも

垂直になる。したがって，DQ が高さになる。

図 2 を使って DQ の長さを求める。

△BCD で DC を底辺と考えると BR が高さになるので，

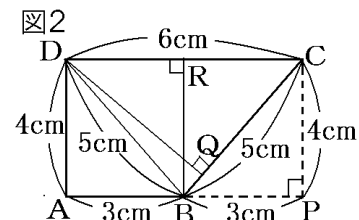
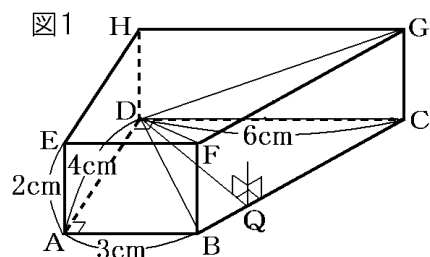
$$(\triangle BCD \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times DC \times BR = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12 \text{ (cm}^2\text{)}$$

△BCD で BC を底辺と考えると DQ が高さになる。

$$(\triangle BCD \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times BC \times DQ = \frac{1}{2} \times 5 \times DQ = \frac{5}{2} DQ$$

$$\text{よって，} \frac{5}{2} DQ = 12, DQ = 12 \div \frac{5}{2} = 12 \times \frac{2}{5} = \frac{24}{5} \text{ (cm)}$$

$$(\text{四角錐 DFBCG の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{長方形 FBCG の面積}) \times DQ = \frac{1}{3} \times 10 \times \frac{24}{5} = 16 \text{ (cm}^3\text{)}$$



【】 体積→高さ

[問題]

1 辺が 6cm の立方体の 4 つの頂点 A, F, C, H を結んでできる右の図のような三角錐 AFCH の①体積を求めよ。②また、図の三角錐 AFCH において、 $\triangle AFC$ を底面としたときの高さを求めよ。

(京都府)(***)

[解答欄]

①	②
---	---

[ヒント]

① 三角錐 AFCH の体積は、立方体の体積から、4 つの合同な三角錐(FABC など)を引き算して求めることができる。

②三角錐 AFCH の体積と底面積($\triangle AFC$)→高さ

[解答]① 72cm^3 ② $4\sqrt{3}\text{cm}$

[解説]

① 三角錐 AFCH の体積は、立方体の体積から、4 つの合同な三角錐(FABC など)を引き算して求めることができる。

(立方体の体積) $= 6 \times 6 \times 6 = 216(\text{cm}^3)$

(三角錐 FABC の体積) $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times 6 = 36(\text{cm}^3)$

(三角錐 AFCH の体積) $= 216 - 36 \times 4 = 72(\text{cm}^3)$

② $FC = \sqrt{CB^2 + FB^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}(\text{cm})$

$\triangle AFC$ は 1 辺が $6\sqrt{2}\text{cm}$ の正三角形である。

右図で、 $\triangle AFH$ は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は $1 : 2 : \sqrt{3}$ になるので、

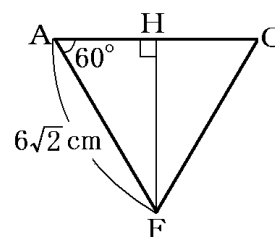
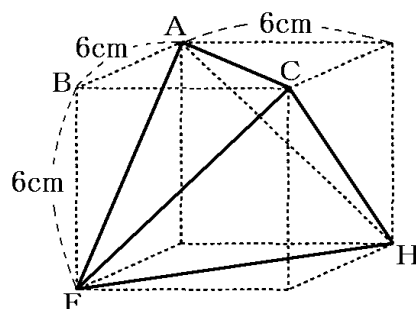
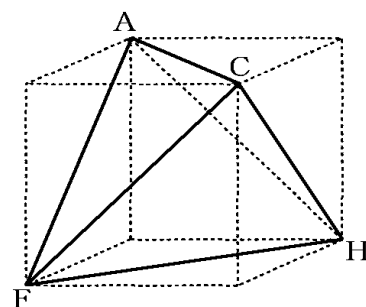
$$FH = AF \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}(\text{cm})$$

$$(\triangle AFC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times AC \times FH = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} = 9\sqrt{12} = 9\sqrt{4 \times 3} = 18\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

図の三角錐 AFCH で、 $\triangle AFC$ を底面としたときの高さを $h\text{cm}$ とすると、

$$(\text{三角錐 AFCH の体積}) = \frac{1}{3} \times (\triangle AFC \text{ の面積}) \times h = 72$$

$$\frac{1}{3} \times 18\sqrt{3} \times h = 72, \quad 6\sqrt{3}h = 72, \quad h = \frac{72}{6\sqrt{3}} = \frac{72 \times \sqrt{3}}{6\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{72\sqrt{3}}{18} = 4\sqrt{3}(\text{cm})$$



[問題]

右の図で、底面の1辺が2cm、高さが4cmの正四角柱の中に、合同な2つの三角形ABCと三角形DBCが入っている。2つの三角形の各頂点は正四角柱の頂点で、三角形の各辺は正四角柱の面の対角線になっている。このとき、次の各問いに答えよ。

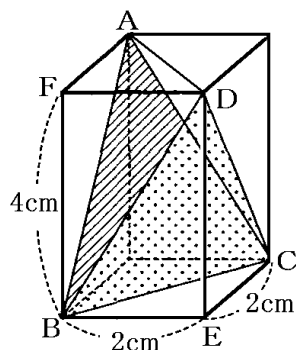
- (1) 線分BCの長さを求めよ。
 (2) 頂点Dと面ABCの距離を求めよ。

(岩手県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]



三角錐DABCの体積：この正四角柱から、4つの合同な三角錐の体積を引く

二等辺三角形ABCの面積を求める。

体積と面積→高さ

[解答](1) $2\sqrt{2}$ cm (2) $\frac{8}{3}$ cm

[解説]

(1) 直角三角形BCEで、三平方の定理より、

$$BC = \sqrt{BE^2 + CE^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

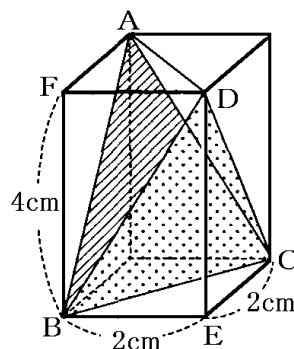
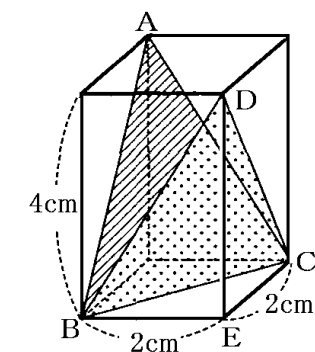
(2) 右図のようにAとDを結ぶ。

三角錐DABCの体積と底面の△ABCの面積を求め、

これを使って高さを間接的に求める。

(正四角柱の体積) = $2 \times 2 \times 4 = 16 \text{ (cm}^3\text{)}$

$$(\text{三角錐DBCEの体積}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 4 = \frac{8}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$



三角錐 DABC はこの正四角柱から、4 つの合同な三角錐(三角錐 DBCE など)を切り取ったものであるので、

$$(\text{三角錐 DABC の体積}) = 16 - \frac{8}{3} \times 4 = 16 - \frac{32}{3} = \frac{48-32}{3} = \frac{16}{3} (\text{cm}^3) \cdots \textcircled{1}$$

次に、 $\triangle ABC$ の面積を求める。

直角三角形 ABF で、三平方の定理より、

$$AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5} (\text{cm})$$

同様にして、 $AC = 2\sqrt{5} (\text{cm})$

右図の直角三角形 ABH で、三平方の定理より、

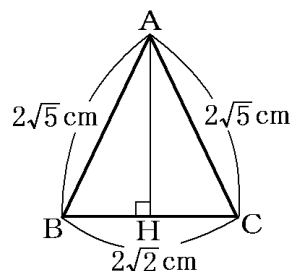
$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{20-2} \\ &= \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2} (\text{cm}) \end{aligned}$$

$$(\triangle ABC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6 (\text{cm}^2) \cdots \textcircled{2}$$

頂点 D と面 ABC の距離を $h \text{ cm}$ とおくと、

$$\frac{1}{3} \times (\triangle ABC \text{ の面積}) \times h = (\text{三角錐 DABC の体積}) \text{ なので、} \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より、}$$

$$\frac{1}{3} \times 6 \times h = \frac{16}{3}, \quad 6h = 16, \quad h = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} (\text{cm})$$



[問題]

右の図は、 $AB=3\text{cm}$ 、 $BC=4\text{cm}$ 、 $\angle ABC=90^\circ$ の直角三角形 ABC を底面とし、 $AD=BE=CF=6\text{cm}$ を高さとする三角柱である。この三角柱の辺 CF 上に点 H を $AD=AH$ となるようにとる。

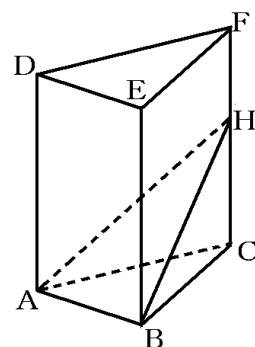
このとき、面 ABH と点 C との距離を求めよ。

(神奈川県)(***)

[解答欄]

[ヒント]

三角錐 HABC の体積と $\triangle ABH$ の面積から、高さ(面 ABH と点 C との距離)を求める。



[解答] $\frac{4\sqrt{33}}{9} \text{cm}$

【解説】

三角錐 HABC の体積と $\triangle ABH$ の面積から、面 ABH と点 C との距離を求める。

まず、 $\triangle ABC$ を底面、HC を高さと考えて体積を求める。

直角三角形 ABC で、三平方の定理より、

$$AC = \sqrt{AB^2 + CB^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ (cm)}$$

直角三角形 AHC で、三平方の定理より、

$$HC = \sqrt{AH^2 - AC^2} = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11} \text{ (cm)}$$

$$\text{よって、(三角錐 HABC の体積)} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AB \times CB \times HC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sqrt{11} = 2\sqrt{11} \text{ (cm}^3\text{)}$$

次に、 $\triangle ABH$ を底面と考えたときの体積について考える。

$AB \perp$ 面 BCFE なので、 $\angle ABH = 90^\circ$ である。

直角三角形 AHB で、三平方の定理より、

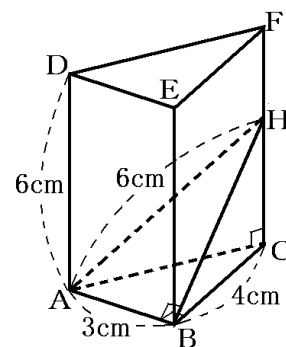
$$BH = \sqrt{AH^2 - AB^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$\text{よって、}(\triangle ABH \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times AB \times BH = \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

面 ABH と点 C との距離(高さ)を h cm とすると、

$$(\text{三角錐 HABC の体積}) = \frac{1}{3} \times (\triangle ABH \text{ の面積}) \times h$$

$$2\sqrt{11} = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{2} \times h, \quad 4\sqrt{11} = 3\sqrt{3}h, \quad h = \frac{4\sqrt{11}}{3\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{11} \times \sqrt{3}}{3\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{33}}{9} \text{ (cm)}$$

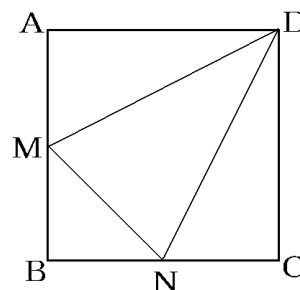


【問題】

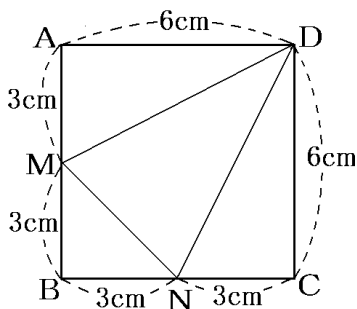
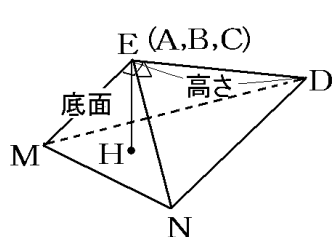
1 辺 6cm の正方形 ABCD の、辺 AB、BC の中点を M、N とし、DM、MN、DN を折り目として、頂点 A、B、C を 1 点に重ねて、立体を組み立てる。頂点 A、B、C が重なった点を E として、E から面 DMN に下した垂線の長さを求めよ。

(長崎県)(****)

【解答欄】



[ヒント]



$\angle DEN = \angle DCN = 90^\circ$, $\angle DEM = \angle DAM = 90^\circ$ なので、
DEは底面MNE上のENとEMにそれぞれ垂直になる。
よって、 $DE \perp \triangle MNE$ となる。

[解答]2 cm

[解説]

組み立てた立体は右の図1のようになる。

まず、 $\triangle MNE$ を底面として、この立体の体積を求める。

このときの、ポイントはDEが高さになることである。

ここで、直線が平面と垂直になるための条件について説明して

おこう。右の図2のように、直線PQが平面T上の2つの直線

QR, QSとそれぞれ垂直である($PQ \perp QS$, $PQ \perp QR$)とき、PQは平面Tに垂直になる。

図1で、 $\angle DEN = \angle DCN = 90^\circ$, $\angle DEM = \angle DAM = 90^\circ$ なので、
DEは底面MNE上のENとEMにそれぞれ垂直になる。

よって、 $DE \perp \triangle MNE$ となる。

$$(\triangle MNE \text{ の面積}) = (\triangle MNB \text{ の面積}) = 3 \times 3 \div 2 = \frac{9}{2} (\text{cm}^2)$$

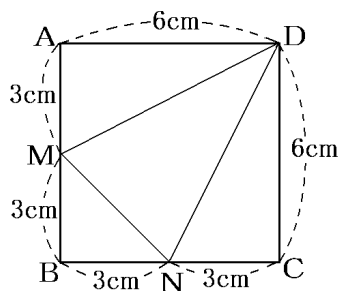
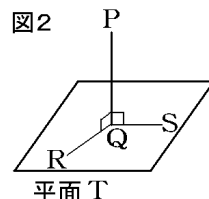
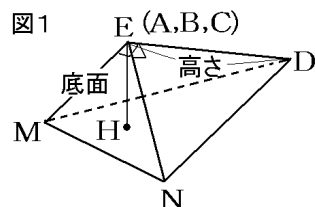
$DE = DA = 6(\text{cm})$ したがって、

$$\begin{aligned} (\text{体積}) &= \frac{1}{3} \times (\triangle MNE \text{ の面積}) \times (\text{高さ } DE) = \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \times 6 \\ &= 9(\text{cm}^3) \end{aligned}$$

次に、図1の $\triangle MND$ を底面としたとき、Eから $\triangle MND$ へおろした垂線EHが高さになる。このとき、

$$(\text{体積}) = \frac{1}{3} \times (\triangle MND \text{ の面積}) \times (\text{高さ } EH) = 9(\text{cm}^3) \cdots \textcircled{1}$$

そこで、 $\triangle MND$ の面積を求める。右図から、



$$\begin{aligned}
 (\triangle MND) &= (\text{正方形 } ABCD) - (\triangle MDA) - (\triangle NDC) - (\triangle MNB) \\
 &= 6 \times 6 - 6 \times 3 \div 2 - 6 \times 3 \div 2 - 3 \times 3 \div 2 \\
 &= 36 - 9 - 9 - \frac{9}{2} = \frac{27}{2} (\text{cm}^2)
 \end{aligned}$$

$$\text{①に} (\triangle MND) = \frac{27}{2} \text{を代入すると, } \frac{1}{3} \times \frac{27}{2} \times (\text{高さ EH}) = 9$$

$$\text{よって, } (\text{高さ EH}) = 9 \div \frac{1}{3} \div \frac{27}{2} = 9 \times 3 \times \frac{2}{27} = 2 (\text{cm})$$

【】 角錐台

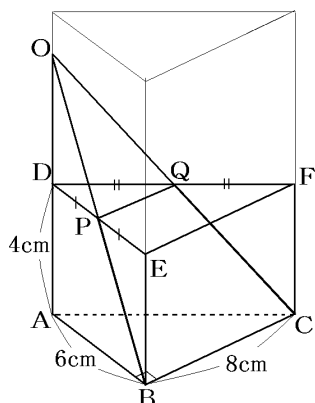
[問題]

図のように底面が $AB=6\text{cm}$, $BC=8\text{cm}$, $\angle ABC=90^\circ$ の直角三角形で、高さが 4cm の三角柱がある。辺 DE , DF の中点をそれぞれ P , Q とする。平面 $PBCQ$ で三角柱を切るとき、 A を含む側の体積を求めよ。

(新田高)(***)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] 56cm^3

[解説]

<Point> AD , BP , CQ の延長線 $\rightarrow$ 1 点で交わる。

右図のように、この三角柱を上方向にのばした図形を考える。

同時に AD , BP , CQ を延長すると、3 直線は 1 点 O で交わる。

$DP \parallel AB$, $DP : AB = 1 : 2$ なので、

$OD : OA = 1 : 2$ となる。

したがって、 $OD = DA = 4(\text{cm})$, $OA = 4 + 4 = 8(\text{cm})$

まず、三角錐 $O-ABC$ の体積を求める。

$$(\text{底面}\triangle ABC \text{の面積}) = \frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24(\text{cm}^2)$$

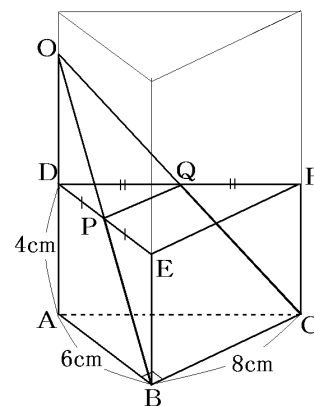
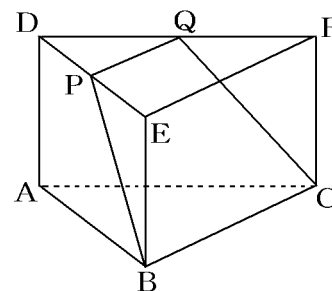
$$(O-ABC \text{の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面}\triangle ABC \text{の面積}) \times (\text{高さ } OA)$$

$$= \frac{1}{3} \times 24 \times 8 = 64(\text{cm}^3)$$

次に、三角錐 $O-DPQ$ の体積を求める。

三角錐 $O-DPQ$ と三角錐 $O-ABC$ は相似で、

相似比は $OD : OA = 4 : 8 = 1 : 2$ したがって、体積比は $1^3 : 2^3 = 1 : 8$



$$\text{よって, (O-DPQ の体積)} = (\text{O-ABC の体積}) \times \frac{1}{8} = 64 \times \frac{1}{8} = 8(\text{cm}^3)$$

$$\text{よって, (O-ABC の体積)} - (\text{O-DPQ の体積}) = 64 - 8 = 56(\text{cm}^3)$$

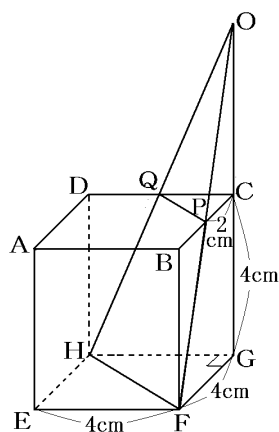
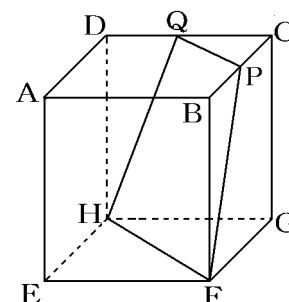
[問題]

右の図のように、1辺4cmの立方体において、辺BC、CD上にそれぞれ中点P、Qをとり、4点P、Q、H、Fを通る平面でこの立方体を切った。このとき、立体PCQ-FGHの体積を求めよ。

(長崎県)(***)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $\frac{56}{3} \text{cm}^3$

[解説]

<Point> 右図のように、GC、FP、HQを延長して考える。

$$OC : OG = PC : FG = 2 : 4 = 1 : 2$$

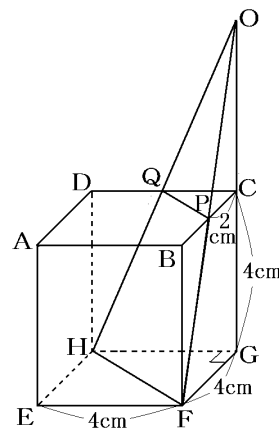
$$\text{よって, } OC = CG = 4\text{cm}, OG = 8\text{cm}$$

$$(\text{O-HFG の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \right) \times 8 = \frac{64}{3} (\text{cm}^3)$$

三角錐O-QPCと三角錐O-HFGは相似で、

相似比は、PC : FG = 1 : 2なので、体積比は $1^3 : 2^3 = 1 : 8$



$$\text{よって, (O-QPC の体積)} = (\text{O-HFG の体積}) \times \frac{1}{8} = \frac{64}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{8}{3} (\text{cm}^3)$$

$$\text{よって, (立体 PCQ-FGH の体積)} = (\text{O-HFG の体積}) - (\text{O-QPC の体積})$$

$$= \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3} (\text{cm}^3)$$

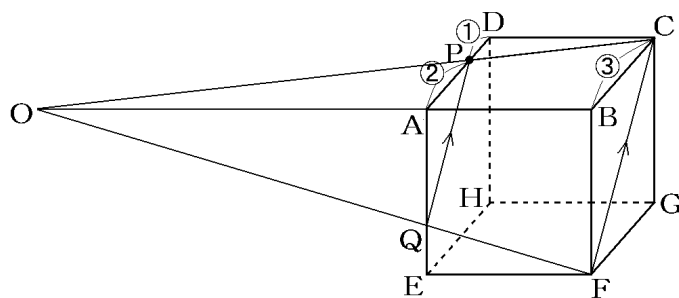
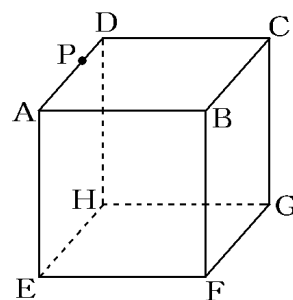
[問題]

右の図の立体 $ABCD-EFGH$ は、1 辺の長さが $a \text{ cm}$ の立方体である。点 P は、辺 AD 上の点で、 $AP : PD = 2 : 1$ とする。今、3 点 F, C, P を通る平面でこの立方体を切った。2 つに分けられた立体のうち、頂点 B がある方の立体の体積を求めよ。

(山形県)(****)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $\frac{19}{54} a^3 \text{ cm}^3$

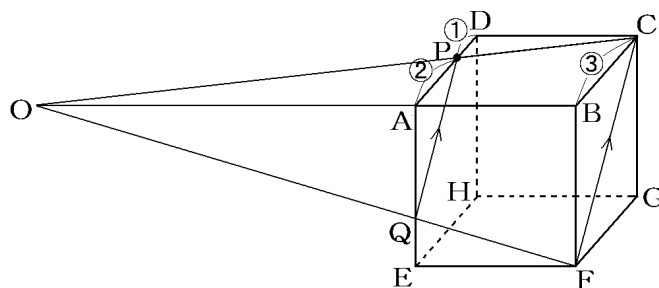
[解説]

3 点 F, C, P を通る平面が $AEHD$ の面と交わってできる直線は CF と平行になるので、右図の PQ のようになる。したがって、この平面によって切り取られ頂点 B をふくむ立体は、右図の $APQ-BCF$ になる。

CP, BA, FQ を延長すると、3 直線は 1 点で交わる。

$$AP : PD = 2 : 1, AD = BC \text{ なので, } AP : BC = 2 : (2 + 1) = 2 : 3$$

$$\text{したがって, } OA : OB = AP : BC = 2 : 3, OA : AB = 2 : 1$$



$AB = a \text{ cm}$ なので, $OA = 2a \text{ cm}$, $OB = 3a \text{ cm}$

$$(O-BCF \text{ の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積} \triangle BCF) \times (\text{高さ } OB) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times a \times a \times 3a = \frac{1}{2} a^3 (\text{cm}^3)$$

三角錐 $O-APQ$ と三角錐 $O-BCF$ は相似で, 相似比は $AP : BC = 2 : 3$ なので,
体積比は $2^3 : 3^3 = 8 : 27$

$$\text{よって, } (O-APQ \text{ の体積}) = (O-BCF \text{ の体積}) \times \frac{8}{27} = \frac{1}{2} a^3 \times \frac{8}{27} = \frac{4}{27} a^3 (\text{cm}^3)$$

$$\text{ゆえに, } (O-BCF \text{ の体積}) - (O-APQ \text{ の体積}) = \frac{1}{2} a^3 - \frac{4}{27} a^3 = \frac{27}{54} a^3 - \frac{8}{54} a^3 = \frac{19}{54} a^3 (\text{cm}^3)$$

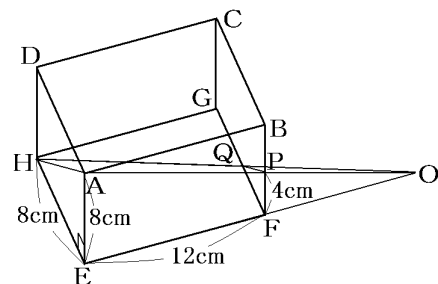
[問題]

右の図は, $AD = AE = 8 \text{ cm}$, $AB = 12 \text{ cm}$ の直方体の容器 $ABCD-EFGH$ に水がいっぱい入っていたものを傾けて, 水面が四角形 $APQH$ になるところまで水を流し出したものである。点 P , Q がそれぞれ辺 BF , FG の中点であるとき, 容器に残っている水の体積を求めよ。

(高知県)(***)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] 224 cm^3

[解説]

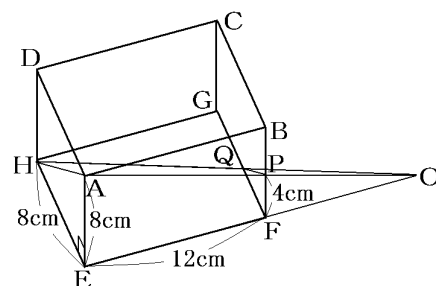
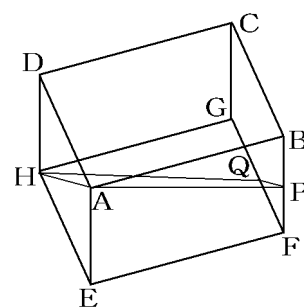
<Point> EF , AP , HQ を延長して考える。

$$OF : OE = PF : AE = 4 : 8 = 1 : 2$$

よって, $OF = FE = 12 \text{ cm}$, $OE = 24 \text{ cm}$

三角錐 $O-AHE$ の底面を $\triangle AHE$ とすると,
高さは $OE = 24 \text{ cm}$

$$(\text{底面積}) = HE \times AE \div 2 = 8 \times 8 \div 2 = 32 (\text{cm}^2)$$



$$(\text{三角錐 O-AHE の体積}) = \frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times 32 \times 24 = 256(\text{cm}^3)$$

三角錐 O-PQF と三角錐 O-AHE は相似で、相似比は $PF : AE = 1 : 2$ なので、
体積比は、 $1^3 : 2^3 = 1 : 8$

$$\text{よって、} (\text{三角錐 O-PQF の体積}) = 256 \times \frac{1}{8} = 32(\text{cm}^3)$$

$$\text{ゆえに、} (\text{三角錐 O-AHE の体積}) - (\text{三角錐 O-PQF の体積}) = 256 - 32 = 224(\text{cm}^3)$$

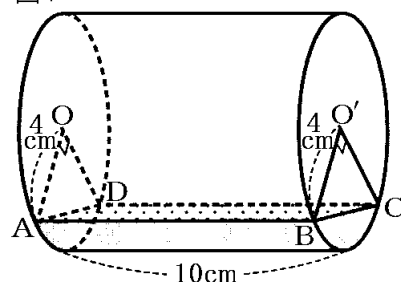
【】 その他

[円柱]

[問題]

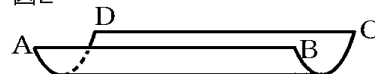
底面の半径が 4cm、高さが 10cm の透明な円柱の容器があり、2 つの底面の中心をそれぞれ O、O' とする。この容器に水を入れ右の図 1 のように、水面の形が長方形になるように置いた。このときの水面を長方形 ABCD とすると、 $\angle AOD = \angle BO'C = 90^\circ$ であった。このとき、次の各問いに答えよ。ただし、円周率は π とし、容器の厚さは考えないものとする。

図1



- (1) 長方形 ABCD の面積を求めよ。
- (2) 右の図 2 は、円柱の容器の側面で、水にふれている部分のみを取り出した図である。この部分の面積を求めよ。
- (3) 円柱の容器に入っている水の体積を求めよ。

図2



(富山県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
-----	-----	-----

[ヒント]

- (1) $\triangle ADO$ は直角三角形なので、三平方の定理から AD を求めることができる。
- (2) おうぎ形 OAD の中心角が 90° なので弧 AD を計算できる。
- (3) 弧 BC と弦 BC で囲まれた部分の面積を $S(\text{cm}^2)$ とすると、
 $S = (\text{おうぎ形 OAD}) - (\triangle OAD)$

[解答](1) $40\sqrt{2} \text{ cm}^2$ (2) $20\pi \text{ cm}^2$ (3) $40\pi - 80 (\text{cm}^3)$

[解説]

(1) 図 1 の直角三角形 ADO で、三平方の定理より、

$$AD = \sqrt{OA^2 + OD^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2} (\text{cm})$$

$$(\text{長方形 ABCD の面積}) = AD \times AB = 4\sqrt{2} \times 10 = 40\sqrt{2} (\text{cm}^2)$$

$$(2) \text{ 図 1 で、} (\text{弧 AD}) = (\text{円周}) \times \frac{90}{360} = 2\pi \times 4 \times \frac{1}{4} = 2\pi (\text{cm})$$

$$(\text{水にふれている部分の面積}) = (\text{弧 AD}) \times AB = 2\pi \times 10 = 20\pi (\text{cm}^2)$$

(3) 弧 BC と弦 BC で囲まれた部分の面積を $S(\text{cm}^2)$ とすると、

$$S = (\text{おうぎ形 OAD}) - (\triangle OAD) = \pi \times 4^2 \times \frac{90}{360} - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 4\pi - 8 (\text{cm}^2)$$

$$(\text{水の体積}) = S \times AB = (4\pi - 8) \times 10 = 40\pi - 80 (\text{cm}^3)$$

[問題]

右の図のような、底面の半径が 3cm、高さが 6cm の円柱がある。AB は母線、BC は底面の直径である。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) AC の長さを求めよ。

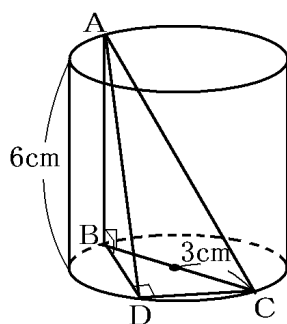
(2) $\triangle ABC$ の面積が、 $\triangle ABD$ の面積の 2 倍になるように、点 D を底面の円周上にとる。このとき、三角錐 ABCD の体積を求めよ。

(栃木県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]



[解答](1) $6\sqrt{2}$ cm (2) $9\sqrt{3}$ cm³

[解説]

(1) 直角三角形 ACB で、三平方の定理より、

$$AC = \sqrt{AB^2 + CB^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

(2) $\triangle ABC$ の底辺を BC, $\triangle ABD$ の底辺を BD とすると、高さはともに AB になる。 $\triangle ABC$ の面積が、 $\triangle ABD$ の面積の 2 倍になるので、 $BC = 2BD$ になる。

よって、 $BD = BC \div 2 = 6 \div 2 = 3$ (cm)

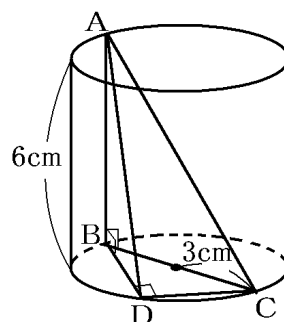
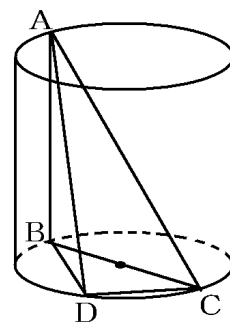
$\angle D$ は直径 BC の円周角なので 90° である。

直角三角形 BCD で、三平方の定理より、

$$DC = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$(\triangle BCD \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times DC \times BD = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 3 = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$(\text{三角錐 ABCD の体積}) = \frac{1}{3} \times (\triangle BCD \text{ の面積}) \times AB = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{2} \times 6 = 9\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$



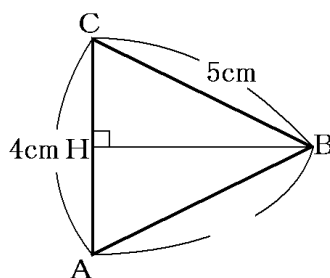
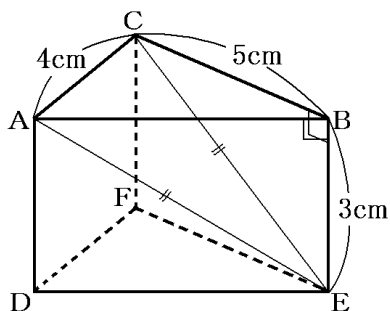
[問題]

右の図のような、側面がすべて長方形の三角柱があり、
 $AC=4\text{cm}$ 、 $CB=5\text{cm}$ 、 $BE=3\text{cm}$ である。点 A と点 E 、
 点 C と点 E をそれぞれ結ぶ。 $AE=CE$ であるとき、この
 三角柱の体積は何 cm^3 か。

(香川県)(***)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $6\sqrt{21}\text{cm}^3$

[解説]

$\triangle ABC$ を底面とすると、高さは $BE(=3\text{cm})$ である。
 底面の面積がわかれば、体積を求めることができる。
 そこで、まず、辺 AB の長さを求めることにする。
 直角三角形 CEB で、三平方の定理より、

$$CE = \sqrt{CB^2 + EB^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} \text{ (cm)}$$

$$AE = CE = \sqrt{34} \text{ (cm)}$$

直角三角形 AEB で、三平方の定理より、

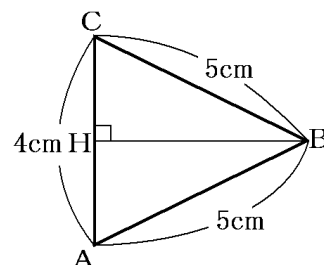
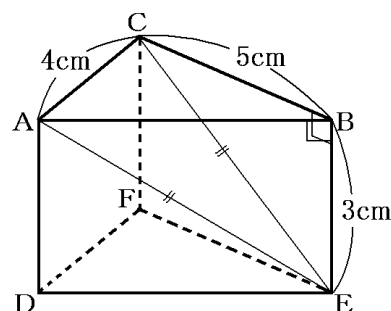
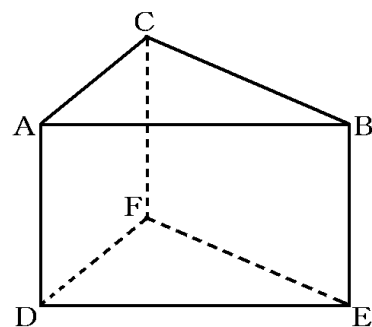
$$AB = \sqrt{AE^2 - EB^2} = \sqrt{(\sqrt{34})^2 - 3^2} = \sqrt{34 - 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ (cm)}$$

したがって、 $\triangle ABC$ は $AB=CB=5\text{cm}$ の二等辺三角形であることがわかる(二等辺三角形は 3 辺がわかれば面積を求めることができる)。右図の直角三角形 BCH で、三平方の定理より、

$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21} \text{ (cm)}$$

$$\text{よって、} (\triangle ABC \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times AC \times BH = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{21} = 2\sqrt{21} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$(\text{三角柱の体積}) = (\triangle ABC \text{ の面積}) \times BE = 2\sqrt{21} \times 3 = 6\sqrt{21} \text{ (cm}^3\text{)}$$



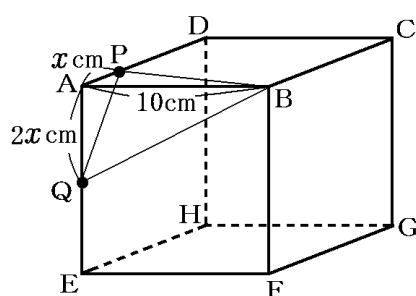
[問題]

右の図のように、1辺が10cmの立方体 $ABCD-EFGH$ がある。辺 AD 、 AE 上にそれぞれ点 P 、 Q を、 $2AP=AQ$ となるようにとる。図の立方体を3点 B 、 P 、 Q を通る平面で切る。頂点 A をふくむ立体の体積が 20cm^3 のとき、 AP の長さは何cmになるか。 AP の長さを $x\text{cm}$ として方程式をつくり、求めよ。

(北海道)(**)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $\sqrt{6}\text{cm}$

[解説]

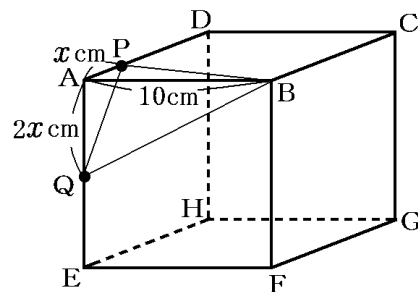
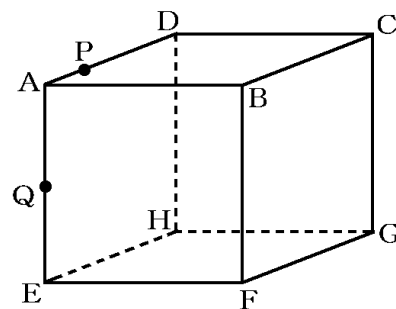
$\triangle ABP$ を底面とすると、高さは AQ である。

$AP = x(\text{cm})$ とおくと、 $AQ = 2AP = 2x(\text{cm})$

$$(\text{QABPの体積}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AB \times AP \times AQ = 20$$

$$\frac{1}{6} \times 10 \times x \times 2x = 20, \quad \frac{10}{3}x^2 = 20, \quad x^2 = 6$$

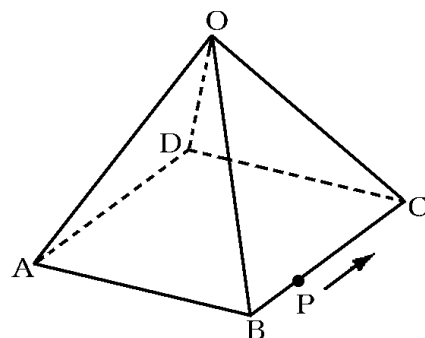
$x > 0$ なので、 $x = \sqrt{6}(\text{cm})$



[問題]

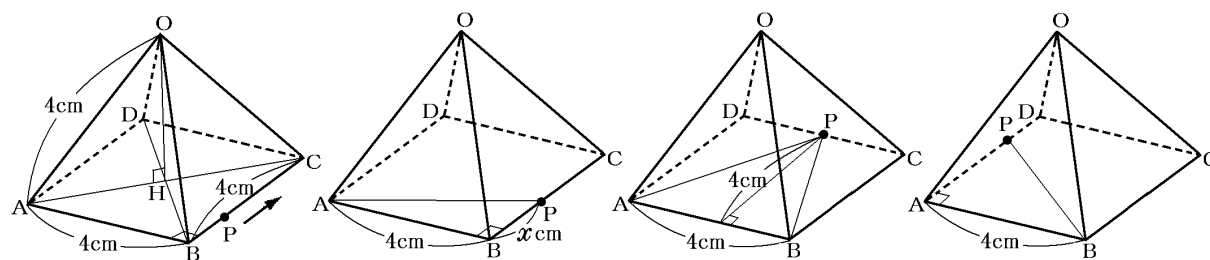
右の図のように、 O 、 A 、 B 、 C 、 D を頂点とし、正方形 $ABCD$ を底面とする正四角錐があり、そのすべての辺の長さは 4cm である。点 P は B を出発して、底面の边上を C 、 D の順に A まで毎秒 1cm の速さで動く。点 P が B を出発してから x 秒後のとき、4点 O 、 A 、 B 、 P を頂点とする三角錐の体積が $4\sqrt{2}\text{cm}^3$ となる。このとき、 x の値をすべて求めよ。

(高知県)(***)



[解答欄]

[ヒント]



[解答] $x = 3, 9$

[解説]

まず、この正四角錐の高さを求める。

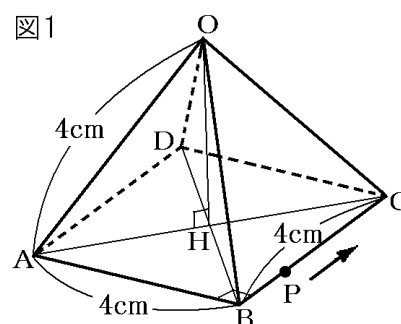
図1の直角三角形ACBで、三平方の定理より、

$$AC = \sqrt{AB^2 + CB^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)},$$

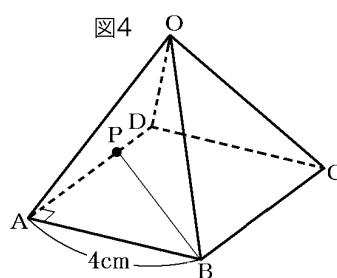
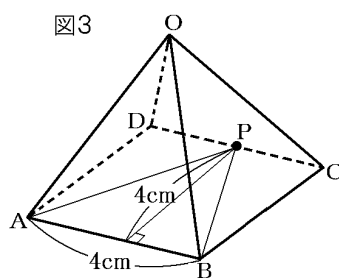
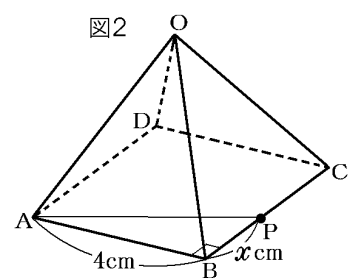
$$AH = AC \div 2 = 4\sqrt{2} \div 2 = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

直角三角形OAHで、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16 - 8} = \sqrt{8} \\ &= \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)} \end{aligned}$$



次に、PがBC間にあるとき、CD間にあるとき、DA間にあるときに分けて考える。



① 図2のようにPがBC間にあるとき

$$(\triangle ABP \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times AB \times PB = \frac{1}{2} \times 4 \times x = 2x \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$(\text{三角錐 OABP の体積}) = \frac{1}{3} \times (\triangle ABP \text{ の面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times 2x \times 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3} x \text{ (cm}^3\text{)}$$

三角錐 OABP の体積が $4\sqrt{2} \text{ cm}^3$ なので、 $\frac{4\sqrt{2}}{3} x = 4\sqrt{2}$ とおくと、 $\frac{1}{3} x = 1$, $x = 3$

② 図3のようにPがCD間にあるとき

$$(\triangle ABP \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8(\text{cm}^2)$$

$$(\text{三角錐 OABP の体積}) = \frac{1}{3} \times (\triangle ABP \text{ の面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times 8 \times 2\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}(\text{cm}^3)$$

したがって、条件を満たす x は存在しない。

③ 図4のようにPがDA間にあるとき

$$BC + CD + DP = x \text{ なので, } AP = 4 \times 3 - x = 12 - x(\text{cm})$$

$$(\triangle ABP \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times AB \times PB = \frac{1}{2} \times 4 \times (12 - x) = 2(12 - x)(\text{cm}^2)$$

$$(\text{三角錐 OABP の体積}) = \frac{1}{3} \times (\triangle ABP \text{ の面積}) \times (\text{高さ}) = \frac{1}{3} \times 2(12 - x) \times 2\sqrt{2}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}(12 - x)(\text{cm}^3)$$

三角錐 OABP の体積が $4\sqrt{2} \text{ cm}^3$ なので, $\frac{4\sqrt{2}}{3}(12 - x) = 4\sqrt{2}$ とおくと,

$$\frac{1}{3}(12 - x) = 1, \quad 12 - x = 3, \quad x = 12 - 3 = 9(\text{cm})$$

[回転体]

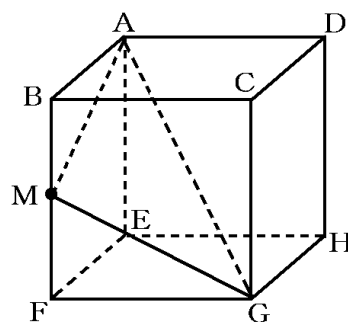
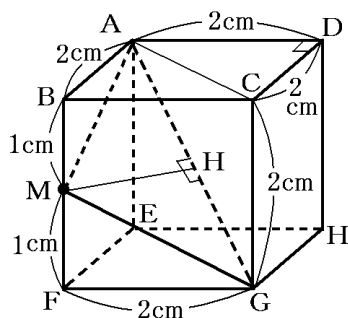
[問題]

右の図のような1辺の長さが2cmの立方体がある。
Mは辺BFの中点である。 $\triangle AMG$ を、対角線AGを
軸として1回転させてできる回転体の体積を求めよ。
(沖縄県)(***)

[解答欄]



[ヒント]



[解答] $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi \text{ cm}^3$

[解説]

まず、 $\triangle AMG$ の 3 辺の長さを求める。

直角三角形 ACD で、三平方の定理より、

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \text{ (cm)}$$

直角三角形 AGC で、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} AG &= \sqrt{AC^2 + GC^2} = \sqrt{(\sqrt{8})^2 + 2^2} = \sqrt{8 + 4} = \sqrt{12} \\ &= \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)} \end{aligned}$$

直角三角形 MGF で、三平方の定理より、

$$MG = \sqrt{MF^2 + GF^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \text{ (cm)}$$

同様にして、 $MA = \sqrt{5} \text{ (cm)}$

点 M から AG へ垂線 MH を引くと、 $\triangle AMG$ は二等辺三角形なので、 $AH = GH = \sqrt{3} \text{ (cm)}$

直角三角形 AMH で、三平方の定理より、

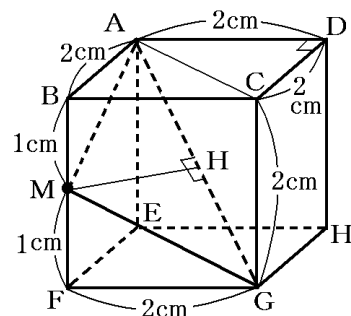
$$MH = \sqrt{MA^2 - AH^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{5 - 3} = \sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$\triangle AMH$ を対角線 AG を軸として 1 回転させてできる立体は、底面の半径が $MH = \sqrt{2} \text{ (cm)}$ で、高さが $AH = \sqrt{3} \text{ (cm)}$ の円錐になる。この円錐の体積は、

$$\frac{1}{3} \times \pi \times MH^2 \times AH = \frac{1}{3} \pi \times (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{3} = \frac{1}{3} \pi \times 2 \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

同様にして、 $\triangle GMH$ を対角線 AG を軸として 1 回転させてできる立体の体積も $\frac{2\sqrt{3}}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$

になる。よって、求める体積は、 $\frac{2\sqrt{3}}{3} \pi + \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi = \frac{4\sqrt{3}}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$ になる。



[問題]

右の図のように、 $AB=AD=2\text{cm}$ 、 $AE=4\text{cm}$ の直方体 $ABCD-EFGH$ がある。このとき、次の各問いに答えよ。

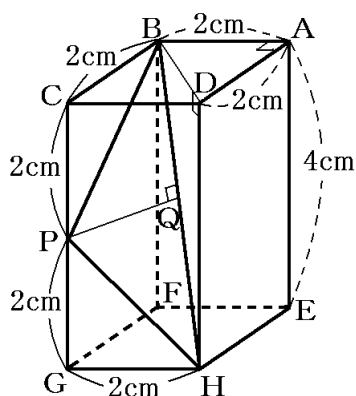
- (1) 対角線 BH の長さを求めよ。
- (2) 辺 CG の中点を P とする。 $\triangle BPH$ を BH を軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし、円周率は π とする。

(岩手県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)
-----	-----

[ヒント]



[解答](1) $2\sqrt{6}\text{ cm}$ (2) $\frac{4\sqrt{6}}{3}\pi\text{ cm}^3$

[解説]

(1) 直角三角形 BDA で、三平方の定理より、

$$BD = \sqrt{BA^2 + DA^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

直角三角形 BHD で、三平方の定理より、

$$\begin{aligned} BH &= \sqrt{BD^2 + HD^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4^2} = \sqrt{8 + 16} = \sqrt{24} \\ &= \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6} \text{ (cm)} \end{aligned}$$

(2) 直角三角形 PHG で、三平方の定理より、

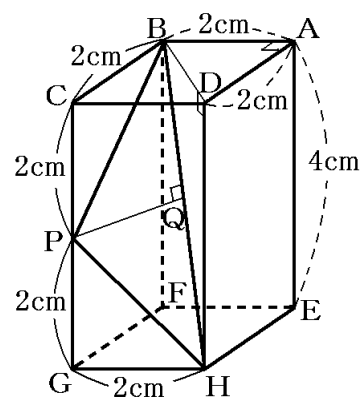
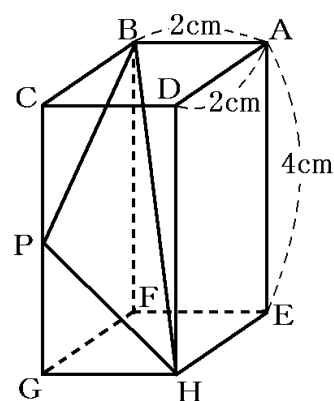
$$PH = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2} \text{ (cm)} \quad \text{同様に、} PB = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

したがって、 $\triangle PBH$ は $PB=PH$ の二等辺三角形になる。

P から BH に垂線 PQ を引くと、二等辺三角形の性質より、 $BQ=HQ$ になる。

(1)より、 $BH=2\sqrt{6}\text{ (cm)}$ なので、 $BQ=HQ=2\sqrt{6} \div 2 = \sqrt{6}\text{ (cm)}$

直角三角形 BPQ で、三平方の定理より、



$$PQ = \sqrt{BP^2 - BQ^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{8-6} = \sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$\triangle BPQ$ を BH を軸として 1 回転させてできる立体は、底面の半径が $PQ = \sqrt{2}$ (cm) で、高さが $BQ = \sqrt{6}$ (cm) の円錐になる。この円錐の体積は、

$$\frac{1}{3} \times \pi \times PQ^2 \times BQ = \frac{1}{3} \pi \times (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{6} = \frac{1}{3} \pi \times 2 \times \sqrt{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

同様に、 $\triangle HPQ$ を BH を軸として 1 回転させてできる立体の体積も $\frac{2\sqrt{6}}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$

よって、求める体積は、 $\frac{2\sqrt{6}}{3} \pi + \frac{2\sqrt{6}}{3} \pi = \frac{4\sqrt{6}}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$

[問題]

右の図のように、底面が 1 辺 4cm の正方形で、他の辺の長さがすべて 6cm の正四角錐 $OABCD$ がある。このとき、次の各問いに答えよ。

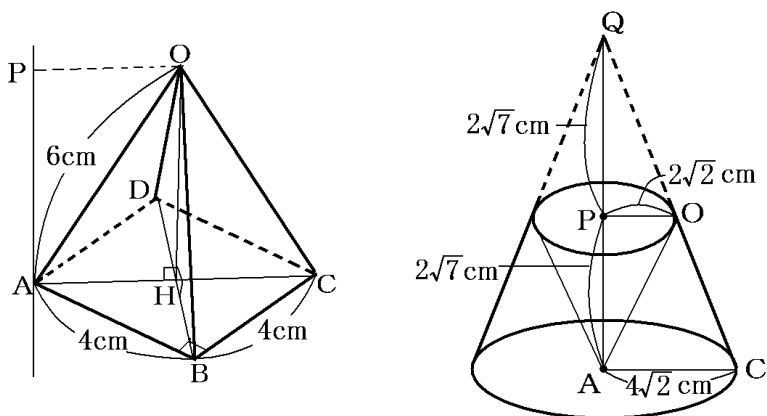
- (1) 底面 $ABCD$ の対角線 AC の長さを求めよ。
- (2) 頂点 O から底面 $ABCD$ に垂線 OH をひいたとき、 OH の長さを求めよ。
- (3) 頂点 A を通り底面 $ABCD$ に垂直な直線を軸として、正四角錐 $OABCD$ を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし、円周率は π とする。

(鳥取県)(***)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
-----	-----	-----

[ヒント]



[解答](1) $4\sqrt{2}$ cm (2) $2\sqrt{7}$ cm (3) $32\sqrt{7}\pi$ cm³

[解説]

(1) 右図の直角三角形 ABC で、三平方の定理より、

$$AC = \sqrt{AB^2 + CB^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$(2) AH = AC \div 2 = 4\sqrt{2} \div 2 = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

直角三角形 OAH で、三平方の定理より、

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{36 - 8} = \sqrt{28}$$

$$= \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7} \text{ (cm)}$$

(3) 頂点 A を通り底面 ABCD に垂直な直線を軸として、正四角すい OABCD を 1 回転させてできる立体は、図 2 の Q を頂点 AC を底面の円の半径とする円錐(V₁とする)から、Q を頂点 PQ を底面の円の半径とする円錐(V₂とする)と、A を頂点と PO を底面の円の半径とする円錐(V₃とする)をのぞいた部分になる。

図 2 で、PO // AC なので、△QPO ∽ △QAC で、

PO = AH = $2\sqrt{2}$ (cm), AC = $4\sqrt{2}$ (cm) なので相似比は 1 : 2 である。したがって、QA = $4\sqrt{7}$ (cm), QP = $2\sqrt{7}$ (cm) になる。

V₁ は底面の半径が $4\sqrt{2}$ cm で高さが $4\sqrt{7}$ (cm) の円錐なので、

$$(V_1 \text{ の体積}) = \frac{1}{3} \times \pi \times (4\sqrt{2})^2 \times 4\sqrt{7} = \frac{1}{3} \pi \times 32 \times 4\sqrt{7} = \frac{128\sqrt{7}\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

V₂ と V₁ は相似で、相似比は 1 : 2 なので、体積比は $1^3 : 2^3 = 1 : 8$ なので、

$$V_2 = \frac{1}{8} V_1 = \frac{1}{8} \times \frac{128\sqrt{7}\pi}{3} = \frac{16\sqrt{7}\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\text{同様にして、} V_3 = \frac{16\sqrt{7}\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\text{よって、(求める体積)} = V_1 - V_2 - V_3 = \frac{128\sqrt{7}\pi}{3} - \frac{16\sqrt{7}\pi}{3} - \frac{16\sqrt{7}\pi}{3} = \frac{96\sqrt{7}\pi}{3} = 32\sqrt{7}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

図 1

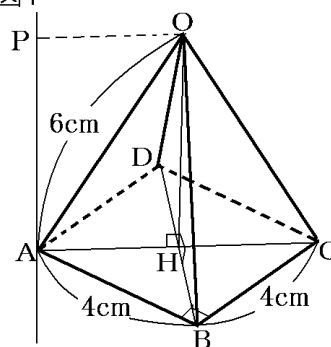
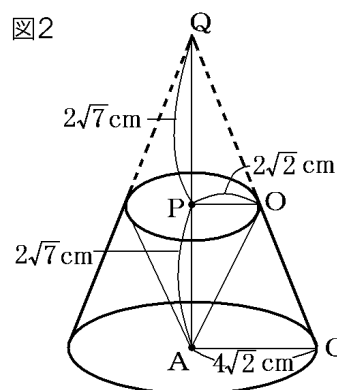


図 2



【FdData 入試製品版のご案内】

詳細は、[\[FdData 入試ホームページ\]](#)に掲載 ([Shift]+左クリック→新規ウィンドウ)

姉妹品：[\[FdData 中間期末ホームページ\]](#) ([Shift]+左クリック→新規ウィンドウ)

◆印刷・編集

この PDF ファイルは、FdData 入試を PDF 形式に変換したサンプルで、印刷はできないように設定しております。製品版の FdData 入試は Windows パソコン用のマイクロソフト Word(Office)の文書ファイルで、印刷・編集を自由に行うことができます。

◆FdData 入試の特徴

FdData 入試は、公立高校入試問題の全傾向を網羅することを基本方針に編集したワープロデータ(Word 文書)です。入試理科・社会・数学ともに、過去に出題された公立高校入試の問題をいったんばらばらに分解して、細かい單元ごとに再編集して作成しております。

◆サンプル版と製品版の違い

ホームページ上に掲載しておりますサンプルは、製品の Word 文書を PDF ファイルに変換したもので印刷や編集はできませんが、製品の全内容を掲載しており、どなたでも自由に閲覧できます。問題を「目で解く」だけでもある程度の効果をあげることができます。

しかし、FdData 入試がその本来の力を発揮するのは印刷や編集ができる製品版においてです。また、製品版は、すぐ印刷して使える「問題解答分離形式」、編集に適した「問題解答一体形式」、などの形式を含んでいますので、目的に応じて活用することができます。

※[FdData 入試の特徴\(QandA 方式\)](#) ([Shift]+左クリック→新規ウィンドウ)

◆FdData 入試製品版(Word 版)の価格(消費税込み)

※以下のリンクは[Shift]キーをおしながら左クリックすると、新規ウィンドウが開きます

[数学 1 年](#)(4400 円), [数学 2 年](#)(6400 円), [数学 3 年](#)(9600 円) : (統合版は 16,200 円)

[理科 1 年](#)(6800 円), [理科 2 年](#)(6800 円), [理科 3 年](#)(6800 円) : (統合版は 16,200 円)

[社会地理](#)(6800 円), [社会歴史](#)(6800 円), [社会公民](#)(6800 円) : (統合版は 16,200 円)

※Windows パソコンにマイクロソフト Word がインストールされていることが必要です。
(Mac の場合はお電話でお問い合わせください)。

◆ご注文は、メール(info2@fdtext.com), または電話(092-811-0960)で承っております。

※[注文→インストール→編集・印刷の流れ](#) ([Shift]+左クリック)

※[注文メール記入例](#) ([Shift]+左クリック)

【Fd 教材開発】 Mail : info2@fdtext.com Tel : 092-811-0960