【】式の決定・変化の割合・変域など

【】式の決定

[解答 1] $a=2$

[解説]

$y=ax^2$ に $x=3$, $y=18$ を代入すると,

$18=a\times 3^2$, $9a=18$, $a=2$

[解答 2] $y=-4x^2$

[解説]

$y=ax^2$ とおく。$y=ax^2$ に $x=3$, $y=-36$ を代入すると,

$-36=a\times 3^2$, $9a=-36$, $a=-4$

よって，求める式は, $y=-4x^2$

[解答 3] $a=\dfrac{3}{16}$

[解説]

$y=ax^2$ に $x=-4$, $y=3$ を代入すると,

$3=16a$, $a=\dfrac{3}{16}$

[解答 4] $y=18$

[解説]

$y=ax^2$ とおく。$y=ax^2$ に $x=1$, $y=2$ を代入すると,

$2=a\times 1$, $a=2$, よって, $y=2x^2$

$y=2x^2$ に $x=3$ を代入すると, $y=2\times 3^2=18$

[解答 5] $a=\dfrac{3}{8}$　$b=\dfrac{27}{2}$

[解説]

表より, $x=4$ のとき $y=6$ なので, これを $y=ax^2$ に代入すると,

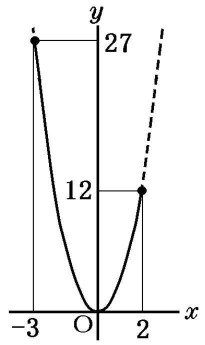
$6=16a$, $a=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$　よって，関数の式は $y=\dfrac{3}{8}x^2$

$y=\dfrac{3}{8}x^2$ に $x=-6$, $y=b$ を代入すると, $b=\dfrac{3}{8}\times 36=\dfrac{27}{2}$

【】変域

[解答 6]$0 \leqq y \leqq 27$

[解説]



$x=0$ が x の変域内にあるときは 3 点を比較する。

$x=-3$ のとき $y=3\times(-3)^2=27$， $x=0$ のとき $y=0$

$x=2$ のとき， $y=3\times 2^2=12$

よって， y の変域は， $0 \leqq y \leqq 27$

[解答 7]$0 \leqq y \leqq 6$

[解説]

$x=0$ が x の変域内にあるときは 3 点を比較する。

$x=-1$ のとき， $y=\dfrac{2}{3}\times(-1)^2=\dfrac{2}{3}$

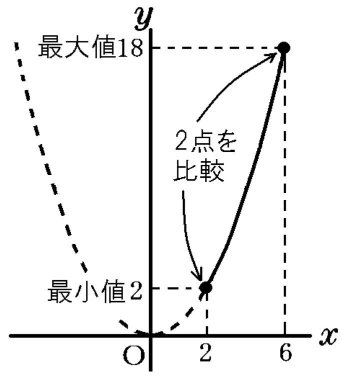
$x=0$ のとき， $y=0$

$x=3$ のとき， $y=\dfrac{2}{3}\times 3^2=6$

よって，$0 \leqq y \leqq 6$

[解答 8] $2 \leqq y \leqq 18$

[解説]



$x=0$ が x の変域内にないときは 2 点を比較する。

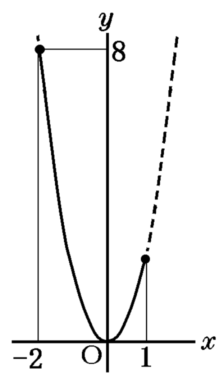
$x=2$ のとき $y=\dfrac{1}{2}\times 2^2=2$，

$x=6$ のとき $y=\dfrac{1}{2}\times 6^2=18$

よって， $2 \leqq y \leqq 18$

[解答 9] $a=2$

[解説]



「 y の変域が $0 \leqq y \leqq 8$ である」より $y \geqq 0$ であるので， $a>0$ である。

したがって，放物線のグラフは上に開いている。

「 x の変域が $-2 \leqq x \leqq 1$ のとき， y の変域が $0 \leqq y \leqq 8$ である」とあるので，グラフは右図のようになる。

右図より， $x=-2$ のとき $y=8$ になる，

$y=ax^2$ に $x=-2$， $y=8$ を代入すると， $8=a\times(-2)^2$

$4a=8$， $a=2$

[解答 10] $a=-3$

[解説]

$a>0$ のときは，$0<a \leqq x \leqq 2$ なので， $y=x^2$ の最小値は a^2，最大値は $2^2=4$ なので，

$a^2 \leqq y \leqq 4$ となり，条件を満たさない。

$a<0$ のときは， $x=0$ が x の変域内にあるので，3 点を比較する。

・ $x=a$ のとき $y=a^2$

・ $x=0$ のとき $y=0$

・ $x=2$ のとき $y=2^2=4$

y の変域は $0 \leqq y \leqq 9$ なので， $a^2=9$

$a<0$ なので， $a=-3$

[解答 11] －2，0

[解説]

$a>0$ のとき， x の変域($a \leqq x \leqq a+2$)は正の数の範囲にあるので， $y>0$ となり不適。

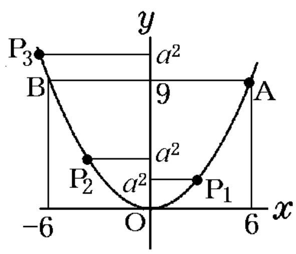
$a=0$ のとき，$0 \leqq x \leqq 2$ なので，$0 \leqq y \leqq 4$ となり，適する。

$a=-1$ のとき，$-1 \leqq x \leqq 1$ なので，$0 \leqq y \leqq 1$ となり，不適。

$a=-2$ のとき，$-2 \leqq x \leqq 0$ なので，$0 \leqq y \leqq 4$ となり，適する。

[解答 12] $-6 \leqq a \leqq 0$

[解説]



$x=6$ のとき， $y=\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}\times 6^2=\frac{36}{4}=9$

右図のように，点 A の座標を(6，9)とする。

また，図のように，点 B(−6，9)をとる。

$x=a$ のとき， $y=\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}a^2$

点 P $\left(a, \frac{1}{4}a^2\right)$ を考える。

$0<a \leqq 6$ のとき, 点 P は, 図の P_1 のように OA 間にある。x の変域が $a \leqq x \leqq 6$ であるので,

y の変域は $a^2 \leqq y \leqq 9$ になり，$0 \leqq y \leqq 9$ にならない。

$-6 \leqq a \leqq 0$ のとき，点 P は，図の P_2 のように BO 間にある。x の変域が $a \leqq x \leqq 6$ であるので， y の変域は，図より，$0 \leqq y \leqq 9$ になる。これは条件を満たす。

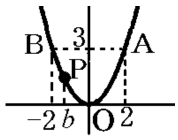
$a<-6$ のとき，点 P は，図の P_3 のような位置にある。x の変域が $a \leqq x \leqq 6$ であるので，y の変域は，図より，$0 \leqq y \leqq a^2$ になり，$0 \leqq y \leqq 9$ にならない。

したがって，条件を満たす a の値の範囲は，$-6 \leqq a \leqq 0$ である。

[解答 13](1) $a=\dfrac{3}{4}$　(2)ア　－2　イ　0　(3) $c=\dfrac{4}{3}$

[解説]

(1) $y=ax^2$ に $x=2$, $y=3$ を代入すると，$3=a\times4$，$a=\dfrac{3}{4}$



(2) x 座標が b である放物線上の点を P とする。P が右図の OB 間にあるとき，y の変域は $0\leqq y\leqq3$ になる。

よって，$-2\leqq b\leqq0$

(3) (1)より，$a=\dfrac{3}{4}$ なので，この関数の式は $y=\dfrac{3}{4}x^2$

$x=-4$ のとき $y=\dfrac{3}{4}x^2=\dfrac{3}{4}\times(-4)^2=12$

$x=0$ のとき $y=\dfrac{3}{4}x^2=0$

$x=3$ のとき $y=\dfrac{3}{4}x^2=\dfrac{3}{4}\times3^2=\dfrac{27}{4}$

よって，$y=\dfrac{3}{4}x^2$ で，x の変域が $-4\leqq x\leqq3$ のときの y の変域は，$0\leqq y\leqq12$

$y=cx^2$ において，

$x=-2$ のとき $y=cx^2=4c$，

$x=0$ のとき $y=0$

$x=3$ のとき $y=cx^2=9c$

よって，y の変域は，$0\leqq y\leqq9c$

したがって，$9c=12$，$c=\dfrac{12}{9}=\dfrac{4}{3}$

【】変化の割合

[解答 14]－12

[解説]

$x=1$ のとき，$y=-3x^2=-3$

$x=3$ のとき，$y=-3x^2=-27$

よって，(x の増加量)＝3－1＝2，(y の増加量)＝－27－(－3)＝－24

(変化の割合)＝$\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}=\dfrac{-24}{2}=-12$

[解答 15]－2

[解説]

$x=1$のとき，$y=\dfrac{6}{1}=6$

$x=3$のとき，$y=\dfrac{6}{3}=2$

よって，(xの増加量)＝3－1＝2，(yの増加量)＝2－6＝－4

(変化の割合)＝$\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}=\dfrac{-4}{2}=-2$

[解答 16] $a=-1$

[解説]

$x=1$ のとき $y=ax^2=a\times1^2=a$

$x=4$ のとき $y=ax^2=a\times4^2=16a$

よって，(xの増加量)＝4－1＝3，(yの増加量)＝$16a-a=15a$

(変化の割合)＝$\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}=\dfrac{15a}{3}=5a$

「変化の割合が－5 である」とあるので，$5a=-5$，$a=-1$

[解答 17] $a=1$

[解説]

$x=a$のとき $y=x^2=a^2$

$x=a+5$のとき $y=x^2=(a+5)^2$

よって，(xの増加量)＝$a+5-a=5$,

(yの増加量)＝$(a+5)^2-a^2=a^2+10a+25-a^2=10a+25$

(変化の割合)＝$\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}=\dfrac{10a+25}{5}=2a+5$

変化の割合は 7 であるので，$2a+5=7$，$2a=2$，$a=1$

[解答 18] $a=-2$

[解説]

x＝1 のとき $y=ax^2$＝$a\times1^2$＝a， x＝3 のとき $y=ax^2$＝$a\times3^2$＝$9a$

よって，(x の増加量)＝3－1＝2，(y の増加量)＝$9a-a$＝$8a$

(変化の割合)＝$\dfrac{(\text{yの増加量})}{(x\text{の増加量})}$＝$\dfrac{8a}{2}$＝$4a$

一次関数 $y=bx+c$ の変化の割合は常に b になるので，x の値が 1 から 3 まで増加するときの $y=-8x+7$ の変化の割合は－8

2 つの関数で変化の割合が同じなので， $4a=-8$， $a=-2$

[解答 19]毎秒 3m

[解説]

$x=1$(秒)のとき， $y=\dfrac{3}{4}\times1^2=\dfrac{3}{4}$(m)

$x=3$(秒)のとき， $y=\dfrac{3}{4}\times3^2=\dfrac{27}{4}$(m)

よって，

(時間)＝3－1＝2(秒)

(進んだ道のり)＝$\dfrac{27}{4}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{24}{4}$＝6(m)

(平均の速さ)＝$\dfrac{(\text{進んだ道のり})}{(\text{時間})}$＝$\dfrac{6}{2}$＝3(m／s)

[解答 20]ウ

[解説]

$y=ax^2$ で x が x_1 から x_2 へ増加するとき，

(変化の割合)＝$\dfrac{(\text{yの増加量})}{(x\text{の増加量})}=\dfrac{a{x_2}^2-a{x_1}^2}{x_2-x_1}=\dfrac{a({x_2}^2-{x_1}^2)}{x_2-x_1}=\dfrac{a(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=a(x_2+x_1)$

したがって， $y=\dfrac{1}{2}x^2$ で，

x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合 m は， $m=\dfrac{1}{2}(2+4)=3$

x の値が 52 から 54 まで増加するときの変化の割合 n は， $n=\dfrac{1}{2}(52+54)=53$

よって， $m<n$ となる。

【】グラフの特徴

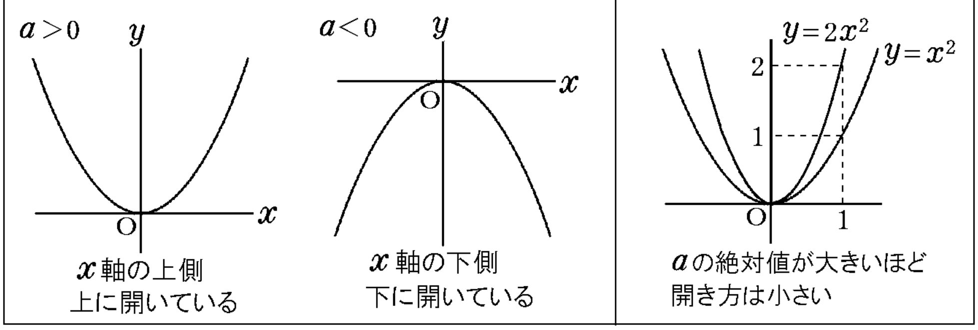
[解答 21]ア，ウ，エ

[解説]

イは誤り。 $y = ax^2$ は y 軸について対称である。

オは誤り。 a の値の絶対値が大きいほど，グラフの開き方は小さい。

<Point>



[解答 22]① イ　② ア　③ ウ

[解説]

$y = mx^2$ で $m > 0$ のとき, グラフは x 軸の上側にあり, $m < 0$ のときは x 軸の下側にあるので, ①と②は $m > 0$，③は $m < 0$ である。したがって，③のグラフはウである。

また， $y = mx^2$ で m の絶対値が大きいほど開き方が小さいので，①と②では②の絶対値が①より大きい。したがって，②はア，イのうちのアであることがわかる。

[解答 23] c, a, b

[解説]

$y = mx^2$ で $m > 0$ のとき, グラフは x 軸の上側にあり, $m < 0$ のときは x 軸の下側にあるので, $a > 0$， $b > 0$， $c < 0$ である。

また， $y = mx^2$ で m の絶対値が大きいほど開き方が小さいので， $b > a$ であることがわかる。したがって， a, b, c を小さい順に並べると， c, a, b となる。

[解答 24]イ

[解説] $y = ax^2$ で $a > 0$ のときは放物線のグラフは上に開いているので，$y = \dfrac{1}{2}x^2$ のグラフはアかイである。また， a の絶対値が大きいほど開き方は小さくなり， a の絶対値が小さいほど開き方は大きくなる。 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ の $\dfrac{1}{2}$ は， $y = \dfrac{3}{4}x^2$ の $\dfrac{3}{4}$ より小さいので $y = \dfrac{1}{2}x^2$ の開き方は $y = \dfrac{3}{4}x^2$ より大きい。よって， $y = \dfrac{1}{2}x^2$ のグラフはイである。

[解答 25]－2

[解説]

$y=2x^2$ と x 軸に対称なグラフの式は $y=-2x^2$ である。

[解答 26]エ

[解説]

エの $y=-2x^2$ は下に開いており，$y \leqq 0$ となる。

[解答 27]① 増加　② 減少

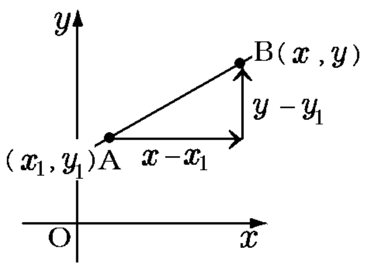
【】座標・長さなど

【】放物線と直線の式

[解答 28](1) $y=-x+6$　(2) 9

[解説]

傾きが m で点 $(x_1,\ y_1)$ を通る直線の式は $y=m(x-x_1)+y_1$ である。参考までに右図を使ってこの公式を導いておく。



直線 AB の傾き m は，図から，$m=\dfrac{(\text{y の増加量})}{(x\text{ の増加量})}=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$

$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=m$，$y-y_1=m(x-x_1)$，

よって，$y=m(x-x_1)+y_1$

[直線の式の求め方]
傾きが m で $(x_1,\ y_1)$ を通る直線
$y=m(x-x_1)+y_1$

(1) $x=-3$ を $y=x^2$ に代入すると，$y=9$ なので，点 A の座標は(－3，9)である。

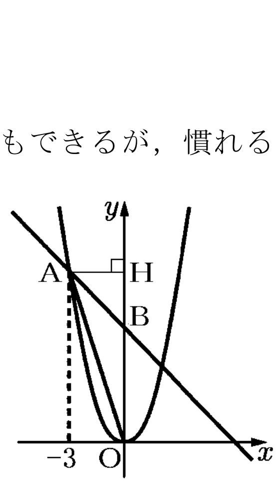
2 点 A，B を通る直線の傾きは－1 なので，

$y=m(x-x_1)+y_1$ の公式を使うと，

$y=-(x+3)+9$，$y=-x+6$

＊ $y=-x+b$ とおいて，(－3，9)を代入することで b を求めることもできるが，慣れると $y=m(x-x_1)+y_1$ の公式を使う方が簡単である。

(2) 右図で，△OAB の底辺を OB とすると高さは AH である。



B は $y=-x+6$ の y 切片なので，OB＝6

点 A の x 座標は－3 なので，AH＝3

よって，(△OAB の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×OB×AH＝$\dfrac{1}{2}\times6\times3$＝9

[解答 29] $a=\dfrac{1}{4}$

[解説]

2 点$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$を通る直線の傾き m は，$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ で表される。

そこで，まず，A，B の座標を a を使って表す。

点 A：$x=-6$ を $y=ax^2$ に代入すると，$y=36a$ なので，A の座標は$(-6,\ 36a)$

点 B：$x=4$ を $y=ax^2$ に代入すると，$y=16a$ なので，B の座標は$(4,\ 16a)$

よって，(直線 AB の傾き)＝$\dfrac{16a-36a}{4-(-6)}=\dfrac{-20a}{10}=-2a$

直線 AB の傾きは$-\dfrac{1}{2}$なので，$-2a=-\dfrac{1}{2}$，$a=\dfrac{1}{4}$

[解答 30](6，0)

[解説]

まず，直線 AB の式を求める。

点 A の x 座標は－3 なので，$y=x^2=9$　よって，A(－3，9)

点 B の x 座標は 2 なので，$y=x^2=4$　よって，B(2，4)

2 点の座標から直線の式を求めるためには，連立方程式で解くこともできるが，計算が煩雑になる。

傾きが m で点$(x_1,\ y_1)$を通る直線は，

$y=m(x-x_1)+y_1$ と表される。

2 点$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$が与えられているときは，

$m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ なので，m を $y=m(x-x_1)+y_1$ に代入すると，

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ となる。

[直線の式の求め方]
傾きが m で$(x_1,\ y_1)$を通る直線 $y=m(x-x_1)+y_1$
2点$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$を通る直線 $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$

この公式を使って 2 点 A(－3，9)，B(2，4)を通る直線の式を求めると，

$y=\dfrac{4-9}{2-(-3)}(x-2)+4$，$y=\dfrac{-5}{5}(x-2)+4$，$y=-x+6$

点 C の y 座標は 0 なので，$y=-x+6$ に $y=0$ を代入して，$0=-x+6$，$x=6$

よって，点 C の座標は(6，0)となることがわかる。

※この公式の傾きを求めるとき，ここでは(B の座標)－(A の座標)で計算したが，反対にして $\dfrac{9-4}{-3-2}$ としてもかまわない。また，ここでは，x_1，y_1 は点 B の座標を使ったが，点 A の座標を使ってもかまわない。

[解答 31]54cm^2

[解説]

点 A の座標： $x=-3$ を $y=2x^2$ に代入して $y=2\times9=18$ なので，A(−3，18)

点 B の座標： $x=2$ を $y=2x^2$ に代入して $y=2\times4=8$ なので，B(2，8)

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)+y_1$ の公式を使って 2 点 A(−3，18)，B(2，8)を通る直線 l の式を求めると， $y=\dfrac{8-18}{2-(-3)}(x-2)+8$， $y=-2(x-2)+8$， $y=-2x+12$

点 C の x 座標： $y=-2x+12$ に $y=0$ を代入して， $0=-2x+12$， $2x=12$， $x=6$

よって，OC＝6

△AOC の底辺を OC とすると，高さは，点 A の y 座標の 18 と等しくなるので，

(△AOC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×6×18＝54(cm^2)

[解答 32](1) $-\dfrac{1}{2}$　(2) −8　(3) $y=-x-4$

[解説]

(1) 関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点 A(−2，−2)があるので， $y=ax^2$ に $x=-2$, $y=-2$ を代入すると， $-2=a\times(-2)^2$ が成り立つ。よって， $-2=4a$， $a=-\dfrac{2}{4}$， $a=-\dfrac{1}{2}$

(2) (1)より， $a=-\dfrac{1}{2}$ なので，この放物線の式は， $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ になる。

$y=-\dfrac{1}{2}x^2$ に $x=4$ を代入すると， $y=-\dfrac{1}{2}\times4^2=-8$

(3) $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)+y_1$ の公式を使って直線 AB の式を求める。

仮定より A(−2，−2)，(2)より B(4，−8)なので，

$y=\dfrac{-8-(-2)}{4-(-2)}(x-4)-8$， $y=\dfrac{-6}{6}(x-4)-8$

$y=-(x-4)-8$， $y=-x-4$

[解答 33](1) 1　(2) (4，4)　(3)　$y=\frac{1}{2}x+2$　(4)　$\left(\frac{4}{3},\ \frac{8}{3}\right)$

[解説]

(1)　$x=-2$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入すると，$y=\frac{1}{4}\times 4=1$ なので，点 A の y 座標は 1 である。

(2) (1)より点 A の y 座標は 1 で，「B の y 座標は A の y 座標より 3 だけ大きい」ので，

B の y 座標は，1＋3＝4 である。$y=4$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入すると，$4=\frac{1}{4}x^2$，$x^2=16$，

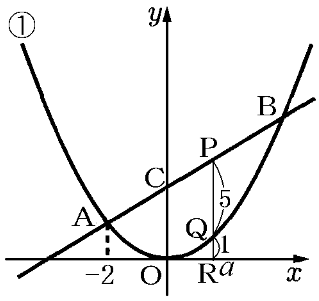
$x>0$ なので，$x=4$　よって，点 B の座標は(4，4)である。

(3)　$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って直線 AB の式を求める。

点 A(－2，1)，点 B(4，4)なので，

$y=\frac{4-1}{4-(-2)}(x-4)+4$，$y=\frac{3}{6}(x-4)+4$，$y=\frac{1}{2}x+2$

(4) P，Q，R の位置関係は右図のようになる。



点 P，Q，R の x 座標を $x=a$ とすると，

点 P の y 座標は，$x=a$ を $y=\frac{1}{2}x+2$ に代入して，$y=\frac{1}{2}a+2$

点 Q の y 座標は，$x=a$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入して，$y=\frac{1}{4}a^2$

よって，PR＝$\frac{1}{2}a+2$，QR＝$\frac{1}{4}a^2$

PQ : QR＝5 : 1 より，PR : QR＝(5＋1) : 1，PR : QR＝6 : 1

比の外項の積は内項の積に等しいので，PR×1＝QR×6

したがって，$\frac{1}{2}a+2=\frac{1}{4}a^2\times 6$，$a+4=3a^2$，$3a^2-a-4=0$

解の公式を使うと，$a=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{6}=\frac{1\pm 7}{6}$，$a=\frac{4}{3},\ -1$

$a>0$ なので，$a=\frac{4}{3}$　よって，点 P の x 座標は $\frac{4}{3}$ である。

点 P の y 座標は，$x=\frac{4}{3}$ を $y=\frac{1}{2}x+2$ に代入して，$y=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}+2=\frac{8}{3}$

したがって，点 P の座標は $\left(\frac{4}{3},\ \frac{8}{3}\right)$ である。

[解答 34](1) $\left(-a,\ 2a^2\right)$ (2) $a=\dfrac{7}{2}$

[解説]

(1) 点 P の x 座標は a であるので, $y=2x^2$ に $x=a$ を代入すると, $y=2a^2$

よって, 点 P の座標は $\left(a,\ 2a^2\right)$ である。「直線 PQ は x 軸に平行である」ので, 点 Q は y 軸について点 P と線対称の位置にある。したがって, 点 Q の座標は $\left(-a,\ 2a^2\right)$ である。

(2) まず, 点 R の座標を求める。

点 R の x 座標は $2a$ なので, $y=2x^2$ に $x=2a$ を代入すると, $y=2\times(2a)^2=8a^2$

よって, 点 R の座標は $\left(2a,\ 8a^2\right)$ となる。

Q$\left(-a,\ 2a^2\right)$, R$\left(2a,\ 8a^2\right)$ なので,

(直線 QR の傾き) $=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{8a^2-2a^2}{2a-(-a)}=7$

$\dfrac{6a^2}{3a}=7$, $2a=7$, $a=\dfrac{7}{2}$

[解答 35](1) $y=-\dfrac{1}{2}x+4$ (2) (8, 0) (3) 10

[解説]

(1) まず, 点 A, B の座標を求める。

点 A の x 座標は－8 なので, $y=\dfrac{1}{8}x^2$ に $x=-8$ を代入して, $y=\dfrac{1}{8}\times(-8)^2=8$

点 B の x 座標は 4 なので, $y=\dfrac{1}{8}x^2$ に $x=4$ を代入して, $y=\dfrac{1}{8}\times4^2=2$

よって, A(－8, 8), B(4, 2)

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)+y_1$ の公式を使うと,

$y=\dfrac{2-8}{4-(-8)}(x-4)+2$, $y=-\dfrac{1}{2}(x-4)+2$, $y=-\dfrac{1}{2}x+4$

(2) 点 D は $y=-\dfrac{1}{2}x+4$ 上にあり, y 座標が 0 なので, $y=-\dfrac{1}{2}x+4$ に $y=0$ を代入して,

$0=-\dfrac{1}{2}x+4$, $0=-x+8$, $x=8$

よって, 点 D の座標は(8, 0)となる。

(3) まず, 直線 CE の式を求める。

「∠ACE＝90°」なので, 直線 CE は直線 AB と垂直である。

傾き m の直線と傾き n の直線が垂直であるとき, $mn=-1$ が成り立つ。

したがって，(直線 CE の傾き)×(直線 AB の傾き)＝−1

(直線 CE の傾き)×$\left(-\dfrac{1}{2}\right)$＝−1，(直線 CE の傾き)＝−1÷$\left(-\dfrac{1}{2}\right)$＝−1×(−2)＝2

点 C の y 座標が直線 CE の y 切片になる。

点 C は直線 AB($y=-\dfrac{1}{2}x+4$)の y 切片でもあるので，y 切片は 4 である。

したがって，直線 CE の式は，$y=2x+4$

$y=2x+4$ に $y=0$ を代入すると，$0=2x+4$，$2x=-4$，$x=-2$

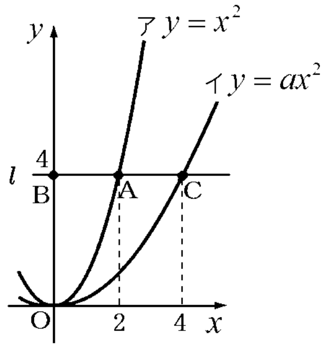
よって，点 E の座標は(−2，0)である。

(DE の長さ)＝(点 D の x 座標)−(点 E の x 座標)＝8−(−2)＝10

【】座標・長さなど

[解答 36] $a=\dfrac{1}{4}$

[解説]



点 A の x 座標は 2 であるので，

$y=x^2$ に $x=2$ を代入すると，$y=2^2=4$

よって，点 A の y 座標は 4 である。

したがって，点 C の y 座標も 4 である。

また，点 A は線分 BC の中点であるので，

点 C の x 座標は 4 である。

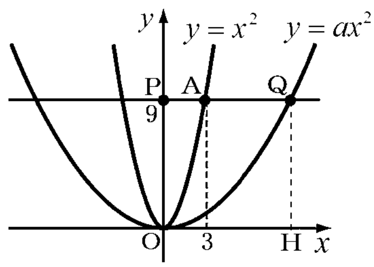
よって，点 C の座標は(4，4)である。

$y=ax^2$ は，点 C(4，4)を通るので，$y=ax^2$ に $x=4,\ y=4$ を代入すると，

$4=a\times4^2$，$16a=4$，$a=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$ が成り立つ。

[解答 37] $a=\dfrac{1}{9}$

[解説]



点 A の x 座標は 3 であるので，$y=x^2$ に $x=3$ を代入すると，$y=3^2=9$ である。

よって，点 A の y 座標は 9 で，点 Q の y 座標も 9 になる。

したがって，OP＝9 になる。

仮定より OP＝PQ なので，PQ＝ 9

よって，OH＝PQ＝9 なので，点 Q の x 座標は 9 になる。

以上より，点 Q の座標は(9，9)であることがわかる。
点 Q は，$y=ax^2$ 上にあるので，$y=ax^2$ に $x=9$, $y=9$ を代入すると，

$9=a\times 9^2$，$81a=9$，$a=\dfrac{9}{81}=\dfrac{1}{9}$ になる。

[解答 38]AB：CD＝8：5
[解説]
まず，線分 AB の長さを求める。「点 A と y 座標が等しく x 座標が異なる点 B」より，点 B の x 座標は－2 である。よって，AB＝2－(－2)＝4･･･①
次に，線分 CD の長さを求める。点 C の x 座標が 5 なので，点 D の x 座標がわかれば CD の長さを求めることができる。

点 C の x 座標が 5 なので，$y=\dfrac{1}{4}x^2$ に $x=5$ を代入すると，$y=\dfrac{1}{4}\times 5^2=\dfrac{25}{4}$

したがって，点 C の y 座標は $\dfrac{25}{4}$ になる。

点 D の y 座標は，点 C の y 座標と等しいので，$\dfrac{25}{4}$ である。

$y=x^2$ に $y=\dfrac{25}{4}$ を代入すると，$\dfrac{25}{4}=x^2$，よって，$x=\pm\dfrac{5}{2}$

点 D の x 座標は正であるので，$x=\dfrac{5}{2}$

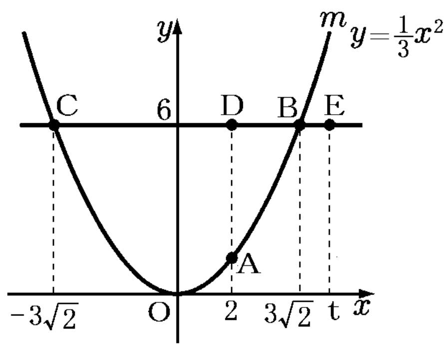
点 C の x 座標が 5，点 D の x 座標が $\dfrac{5}{2}$ なので，CD＝$5-\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}$･･･②

①，②より，AB：CD＝$4:\dfrac{5}{2}$＝$8:5$

[解答 39](1)B：$3\sqrt{2}$　C：$-3\sqrt{2}$　(2) $t=\dfrac{11}{2}$

[解説]

(1) $y=\dfrac{1}{3}x^2$ 上の点 B，C の y 座標は 6 であるので，



$y=\dfrac{1}{3}x^2$ に $y=6$ を代入して，$6=\dfrac{1}{3}x^2$

$x^2=18$，$x=\pm\sqrt{18}=\pm 3\sqrt{2}$
点 B の x 座標は正なので，$x=3\sqrt{2}$
点 C の x 座標は $-3\sqrt{2}$

(2) 右図より，DE＝$t-2$

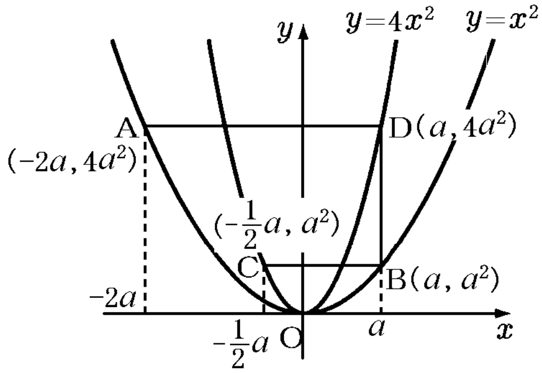
CE＝$t-\left(-3\sqrt{2}\right)$＝$t+3\sqrt{2}$，BE＝$t-3\sqrt{2}$

DE²＝CE×BE が成り立つので，$(t-2)^2=\left(t+3\sqrt{2}\right)\left(t-3\sqrt{2}\right)$

$t^2-4t+4=t^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2$，$-4t=-18-4$，$-4t=-22$　よって，$t=\dfrac{22}{4}=\dfrac{11}{2}$

[解答 40]AD：BC＝2：1

[解説]



まず，点 B の x 座標を $a\,(a>0)$ として，B，C，D，A の座標を a を使って表す。

点 B は $y=x^2$ 上にあるので，$y=x^2$ に $x=a$ を代入すると，$y=a^2$

よって，点 B の座標は $\left(a,\ a^2\right)$ になる。

点 C の y 座標は点 B の y 座標(a^2)と同じである。

点 C は $y=4x^2$ 上にあるので，$y=4x^2$ に $y=a^2$ を代入して，

$a^2=4x^2$，$x^2=\dfrac{1}{4}a^2$，$x=\pm\dfrac{1}{2}a$

点 C の x 座標は負であるので，$x=-\dfrac{1}{2}a$

よって，点 C の座標は $\left(-\dfrac{1}{2}a,\ a^2\right)$

点 D は $y=4x^2$ 上にあるので，$y=4x^2$ に $x=a$ を代入すると，$y=4a^2$

よって，点 D の座標は $\left(a,\ 4a^2\right)$ になる。

点 A の y 座標は点 D の y 座標($4a^2$)と同じである。

点 A は $y=x^2$ 上にあるので，$y=x^2$ に $y=4a^2$ を代入すると，

$4a^2=x^2$，$x^2=4a^2$，$x=\pm 2a$

点 A の x 座標は負であるので，$x=-2a$

よって，点 A の座標は $\left(-2a,\ 4a^2\right)$

B，C，D，A の座標を記入すると，上図のようになる。図より，

AD＝(点 D の x 座標)−(点 A の x 座標)＝$a-\left(-2a\right)$＝$a+2a$ ＝$3a$

BC＝(点 B の x 座標)−(点 C の x 座標)＝$a-\left(-\dfrac{1}{2}a\right)$＝$a+\dfrac{1}{2}a$ ＝$\dfrac{3}{2}a$

よって，AD：BC＝$3a:\dfrac{3}{2}a=6a:3a=2:1$

[解答 41](1) 1　(2) －8，－2，0，6

[解説]

(1) $x=-2$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入すると，$y=\frac{1}{4}\times 4=1$

(2) 放物線が直線より上側にあるとき，

$\frac{1}{4}x^2-\left(-\frac{1}{2}x+6\right)=6$

$x^2+2x-24=24$，$x^2+2x-48=0$，$(x+8)(x-6)=0$，$x=-8,\ 6$

放物線が直線より下側にあるとき，

$-\frac{1}{2}x+6-\frac{1}{4}x^2=6$

$-2x-x^2=0$，$x^2+2x=0$，$x(x+2)=0$，$x=0,\ -2$

よって，PQ＝6 であるとき，P の x 座標は，－8，－2，0，6

【】線分比など

[解答 42](1) $a=\frac{1}{2}$　(2) 5：4

[解説]

(1) まず，点 A の座標を求める。点 A の x 座標は $x=-2$ なので，$x=-2$ を $y=\frac{1}{2}x+3$ に代入すると，$y=\frac{1}{2}\times(-2)+3=-1+3=2$　よって，点 A の座標は(－2，2)である。

点 A は $y=ax^2$ 上の点であるので，$y=ax^2$ に $x=-2$，$y=2$ を代入すると，

$2=a\times(-2)^2$，$4a=2$，$a=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

(2) △CAD と△CBE で，AD，BE は x 軸と垂直なので AD // BE となる。

平行線の性質より，BA：AC＝ED：DC が成り立つ。・・・①

点 E の x 座標は 3，点 D の x 座標は－2 なので，

ED＝(点 E の x 座標)－(点 D の x 座標)＝3－(－2)＝3＋2＝5・・・②

DC の長さを求めるためには，点 C の x 座標を求める必要がある。

点 C は $y=\frac{1}{2}x+3$ 上にあり，y 座標は 0 であるので，$y=\frac{1}{2}x+3$ に $y=0$ を代入すると，

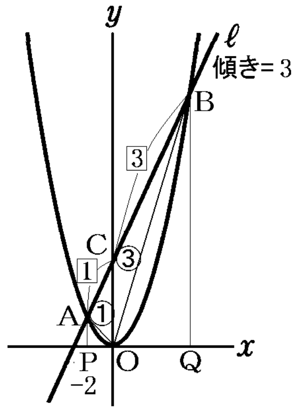
$0=\frac{1}{2}x+3$，$x+6=0$，$x=-6$

したがって，DC＝(点 D の x 座標)－(点 C の x 座標)＝(－2)－(－6)＝－2＋6＝4・・・③

①，②，③より，BA：AC＝ED：DC＝5：4

[解答 43] $a=\dfrac{3}{4}$

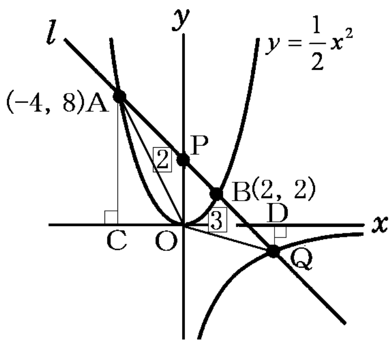
[解説]
<Point> 面積比→底辺の比→x座標の比



△AOC の底辺を AC，△BOC の底辺を BC とすると，
高さは共通になるので，
AC：CB＝(△AOC の面積)：(△BOC の面積)＝1：3 となる。
図のように，x軸に垂線 AP，BQ をひくと，AP//CO//BQ なので，
PO：OQ＝AC：CB＝1：3 となる。
点 A のx座標は－2 なので P のx座標も－2 で，点 Q のx座標は
2×3＝6 になる。したがって，点 B のx座標も 6 になる。
点 A，B は$y=ax^2$上にあるので，
点 A のy座標は，$x=-2$を$y=ax^2$に代入して，$y=a\times(-2)^2=4a$
点 B のy座標は，$x=6$を$y=ax^2$に代入して，$y=a\times 6^2=36a$

したがって，(直線 AB の傾き)＝$\dfrac{36a-4a}{6-(-2)}=\dfrac{32a}{8}=4a=3$　よって，$a=3\div 4=\dfrac{3}{4}$

[解答 44] $a=-12$
[解説]
<Point> 面積比→底辺の比→x座標の比



△OAP の底辺を AP，△OQP の底辺を PQ とすると，高さ
は O からlにおろした垂線の長さで共通になる。
したがって，底辺の比は面積比と等しくなり，
AP：PQ＝△OAP：△OQP＝2：3 になる。
右図のように, 点 A, Q からx軸に垂線 AC, QD をひくと，
AC // PO // QD なので，
CO：OD＝AP：PQ＝2：3 なになる。
CO＝4 なので，4：OD＝2：3 となる。
したがって，2OD＝12，OD＝6
よって，点 Q のx座標は 6 になる。

点 Q のy座標がわかれば，$y=\dfrac{a}{x}$に代入してaの値を求めることができる。

そこで，直線lの式を求める。

2 点 A(－4，8)，B(2，2)を通る直線の式は，$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$の公式より，

$y=\dfrac{2-8}{2-(-4)}(x-2)+2$, $y=-(x-2)+2$, $y=-x+4$

x 座標が 6 である点 Q は直線 l 上にあるので, $y=-x+4$ に $x=6$ を代入して,

$y=-6+4=-2$

よって, 点 Q の座標は(6, −2)

点 Q は $y=\dfrac{a}{x}$ 上にもあるので, $x=6,\ y=-2$ を $y=\dfrac{a}{x}$ に代入して,

$-2=\dfrac{a}{6},\ a=(-2)\times 6$ よって, $a=-12$

[解答 45](−16, −2)

[解説]

点 A の x 座標は 4 なので, $x=4$ を $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入すると, $y=\dfrac{1}{2}\times 16=8$

点 A は $y=\dfrac{a}{x}$ 上にもあるので, $x=4$, $y=8$ を $y=\dfrac{a}{x}$ に代入すると, $8=\dfrac{a}{4}$, $a=32$

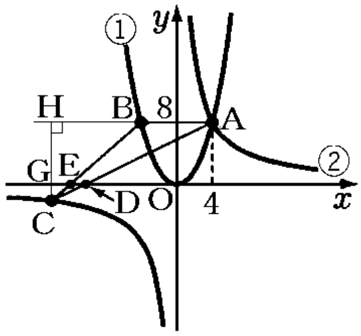
右図のように, 点 G, H をとると, CH : CG＝AB : DE,

AB : DE＝5 : 1 なので, CH : CG＝5 : 1

よって, CG : GH＝1 : (5−1)＝1 : 4

点 H の y 座標は点 A の y 座標と等しいので 8 である。

したがって, 点 C の y 座標は−2 である。



双曲線の式は $y=\dfrac{32}{x}$ なので, $y=-2$ を代入すると,

$-2=\dfrac{32}{x}$, $-2x=32$, $x=-16$ よって点 C の座標は(−16, −2)である。

[解答 46]2 : 1

[解説]

<Point> x 座標の比→底辺の比→面積比

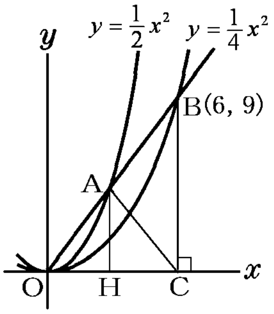
△BOC の底辺を OB, △BAC の底辺を AB とすると, 高さは共通になる。したがって,

△BOC と△BAC の面積の比は底辺の比 OB : AB と等しくなる。

点 A の座標がわかれば, この比がわかる。･･･①

まず, 直線 OB の式を求める。OB は原点を通る直線なので, その式は $y=ax$ とおくことができる。点 B の座標は(6, 9)なので,

$x=6,\ y=9$ を $y=ax$ に代入して,



$9=a\times6,\ a=9\div6=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}$　よってOBの式は$y=\dfrac{3}{2}x$となる。

次に，$y=\dfrac{3}{2}x$と$y=\dfrac{1}{2}x^2$の交点Aを求める。

$y=\dfrac{1}{2}x^2$を$y=\dfrac{3}{2}x$に代入して，$\dfrac{1}{2}x^2=\dfrac{3}{2}x$

両辺を2倍して，$x^2=3x$，$x^2-3x=0,\ x(x-3)=0$　よって，$x=0,\ 3$

したがって，点Aのx座標は$x=3$で，右上図のOH＝3となる。

したがって，OA : OB＝OH : OC＝3 : 6＝1 : 2

よって，OB : AB＝2 : (2−1)＝2 : 1

①より，△BOCと△BACの面積の比は2 : 1となる。

[解答47]$\left(-2\sqrt{2},\ 8\right)$

[解説]

Pからx軸に垂線PHをひく。

AO // PHなので，平行線の性質より，

AO : PH＝QA : QP

PA : AQ＝1 : 3なので，QA : QP＝3 : (3＋1)＝3 : 4

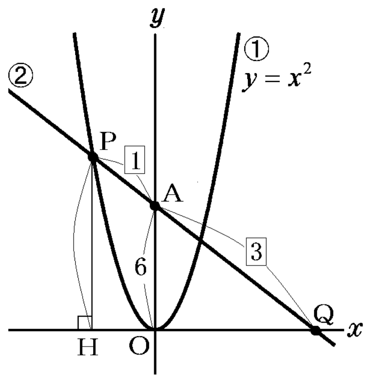
また，Aのy座標が6なので，AO＝6

よって，6 : PH＝3 : 4

比の内項の積は外項の積に等しいので，

PH×3＝6×4，PH＝6×4÷3＝8

よって，点Pのy座標は8である。



点Pは$y=x^2$上の点なので，$y=8$を$y=x^2$に代入して，$8=x^2$となる。

$x<0$なので，$x=-\sqrt{8}=-\sqrt{4\times2}=-2\sqrt{2}$　よって，点Pの座標は$\left(-2\sqrt{2},\ 8\right)$となる。

[解答48]$(2\sqrt{2},\ 8)$

[解説]

点Pのx座標を$t\ (t>0)$とすると，点Qのx座標もtになる。

点Pは$y=x^2$上にあるので，$x=t$のとき$y=t^2$になる。

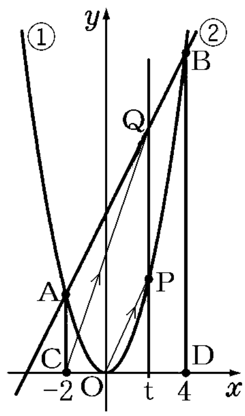
よって，点Pの座標は$\left(t,\ t^2\right)$である。

点Qは$y=2x+8$上にあるので，$x=t$のとき$y=2t+8$になる。

よって，点Qの座標は$\left(t,\ 2t+8\right)$である。

「直線CQと直線OPが平行」とあるので，この2つの直線の傾きは等しくなる。

C(−2，0)，$Q\left(t,\ 2t+8\right)$より，



(直線 CQ の傾き)＝$\dfrac{2t+8-0}{t-(-2)}$＝$\dfrac{2t+8}{t+2}$

O(0，0)，P$\left(t,\ t^2\right)$より，

(直線 OP の傾き)＝$\dfrac{t^2-0}{t-0}$＝t　よって，$\dfrac{2t+8}{t+2}=t$

両辺に$t+2$をかけると，$2t+8=t^2+2t$，$t^2=8$，$t=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$

$t>0$ なので，$t=2\sqrt{2}$

よって，点 P の x 座標は$x=2\sqrt{2}$

$x=2\sqrt{2}$ を $y=x^2$ に代入すると，$y=\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$

したがって，点 P の座標は($2\sqrt{2}$，8)である。

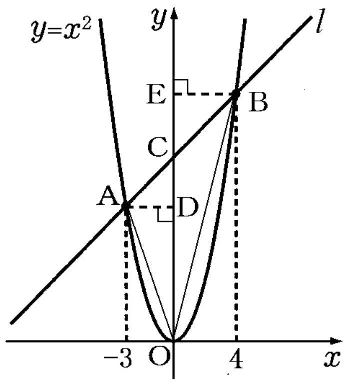
【】面積

【】面積を求める：2 つの三角形の和

[解答 49](1) $y=x+12$　(2) 42

[解説]

(1) まず，点 A，B の座標を求める。



点 A の x 座標は－3 で，点 A は $y=x^2$ 上にあるので，

$y=x^2$ に $x=-3$ を代入して，$y=(-3)^2=9$

よって，点 A の座標は(－3，9)

点 B の x 座標は 4 で，点 B は $y=x^2$ 上にあるので，

$y=x^2$ に $x=4$ を代入して，$y=4^2=16$

よって，点 B の座標は(4，16)

直線lは，A(－3，9)，B(4，16)を通るので，

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$の公式を使うと，

$y=\dfrac{16-9}{4-(-3)}(x+3)+9$，$y=\dfrac{7}{7}(x+3)+9$，$y=x+12$

(2) △OAB を△OAC と△OBC に分けて考える。

点 C は直線$y=x+12$の切片(y 切片)なので，点 C の y 座標は 12 である。よって，OC＝12

(△OAC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ AD)＝$\dfrac{1}{2}\times 12\times 3$＝18

(△OBC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ BE)＝$\dfrac{1}{2}\times 12\times 4$＝24

よって，(△OAB の面積)＝(△OAC の面積)＋(△OBC の面積)＝18＋24＝42

[解答 50](1) $y=2x-3$　(2) 6

[解説]

(1) まず，点 A，B の座標を求める。

点 A の x 座標は－3 で，点 A は $y=-x^2$ 上にあるので，

$y=-x^2$ に $x=-3$ を代入して， $y=-(-3)^2=-9$

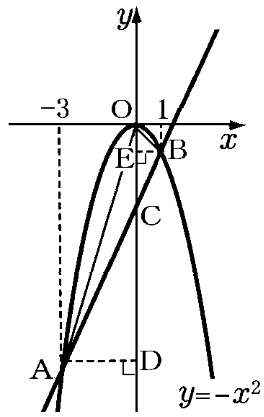
よって，点 A の座標は(－3，－9)

点 B の x 座標は 1 で，点 B は $y=-x^2$ 上にあるので，

$y=-x^2$ に $x=1$ を代入して， $y=-1^2=-1$

よって，点 B の座標は(1，－1)

直線 AB は，A(－3，－9)，B(1，－1)を通るので，



$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使うと，

$y=\dfrac{-1-(-9)}{1-(-3)}(x-(-3))-9$， $y=2(x+3)-9$， $y=2x-3$

(2) △OAB を△OAC と△OBC に分けて考える。

点 C は直線 $y=2x-3$ の y 切片なので，点 C の y 座標は－3 である。よって，OC＝3

(△OAC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ AD)＝$\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{9}{2}$

(△OBC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ BE)＝$\dfrac{1}{2}\times3\times1=\dfrac{3}{2}$

よって，(△OAB の面積)＝(△OAC の面積)＋(△OBC の面積)＝$\dfrac{9}{2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{12}{2}=6$

[解答 51](1) $a=\dfrac{1}{4}$　(2) 6cm²

[解説]

(1) 点 A の x 座標は－2 である。 $x=-2$ を $y=\dfrac{1}{2}x+2$ に代入すると， $y=\dfrac{1}{2}\times(-2)+2=1$

点 A は $y=ax^2$ 上にもあるので， $x=-2$， $y=1$ を $y=ax^2$ に代入すると，$1=4a$， $a=\dfrac{1}{4}$

(2) △OAB を△ACO と△BCO に分けて考える。

点 C の y 座標は $y=\dfrac{1}{2}x+2$ の切片(y 切片)なので 2 である。よって，CO＝2(cm)である。

△ACO の底辺を CO とすると，高さは 2(cm)なので，(△ACO の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×2×2＝2(cm²)

△BCO の底辺を CO とすると，高さは 4(cm)なので，(△BCO の面積)＝$\frac{1}{2}$×2×4＝4(cm²)

よって，(△OAB の面積)＝(△ACO の面積)＋(△BCO の面積)＝2＋4＝6(cm²)

[解答 52](1) $a=\frac{1}{2}$　(2) $y=-x+4$　(3) 12

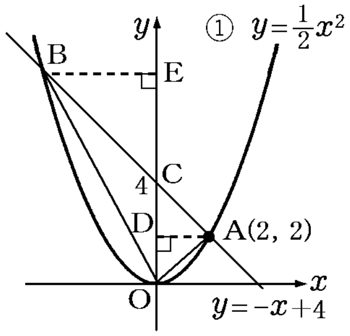
[解説]

(1) $y=ax^2$ のグラフが，点 A(2，2)を通っているので，

$x=2,\ y=2$ を $y=ax^2$ に代入して，$2=a\times 4$，$a=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

(2) $y=m(x-x_1)+y_1$ の公式を使うと，点 A(2，2)を通り傾きが－1 の直線の式は，

$y=-(x-2)+2$，$y=-x+4$



(3) 右図のように, △OAB を△OAC と△OBC に分けて考える。点 C は直線 $y=-x+4$ の y 切片なので, 点 C の y 座標は 4 である。よって，OC＝4

(△OAC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ AD)＝$\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$

△OBC の面積を求めるためには, 高さ BE を求める必要がある。そこで，点 B の x 座標を求める。

点 B は $y=\frac{1}{2}x^2$・・・①と，$y=-x+4$・・・②の交点である。

②を①に代入すると，$-x+4=\frac{1}{2}x^2$

$-2x+8=x^2$，$x^2+2x-8=0$，$(x+4)(x-2)=0$，よって，$x=-4,\ 2$

したがって，点 B の x 座標は－4 となり，BE＝4 となる。

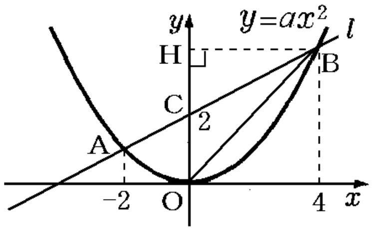
(△OBC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ BE)＝$\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$

よって，(△OAB の面積)＝(△OAC の面積)＋(△OBC の面積)＝4＋8＝12

[解答 53](1) 4cm² (2) $a=\frac{1}{4}$

[解説]

(1) △OBC の底辺を OC とすると，高さは右図の BH である。OC＝2cm，BH＝4cm なので，



(△OBC の面積)＝$\frac{1}{2}$×OC×BH＝$\frac{1}{2}\times2\times4$＝4(cm²)

(2) まず，直線 AB の式を a を使って表す。

点 A の x 座標は－2 なので， $x=-2$ を $y=ax^2$ に代入して， $y=a\times(-2)^2=4a$

よって，点 $A(-2,\ 4a)$

点 B の x 座標は 4 なので， $x=4$ を $y=ax^2$ に代入して， $y=a\times4^2=16a$

よって，点 $B(4,\ 16a)$

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って 2 点 $A(-2,\ 4a)$, $B(4,\ 16a)$ を通る直線の式を求める。

$y=\frac{16a-4a}{4-(-2)}(x-(-2))+4a$， $y=2a(x+2)+4a$， $y=2ax+8a$

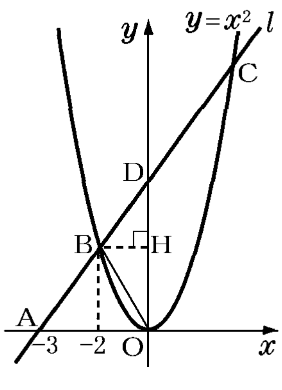
直線 AB は点 C(0，2)を通るので， $x=0,\ y=2$ を $y=2ax+8a$ に代入すると，

$2=8a$ よって， $a=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

[解答 54]12cm²

[解説]

右図で，△BOD の底辺を OD とすると，高さは BH になる。



点 B の x 座標は－2 なので，BH＝2 である。

点 D の座標がわかれば，OD の長さを求めることができる。

そこで，直線 l の式を求める。点 A の座標は(－3，0)である。

点 B の x 座標は－2 で，点 B は $y=x^2$ 上にあるので，

$y=x^2$ に $x=-2$ を代入して， $y=(-2)^2=4$

よって，点 B の座標は(－2，4)

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って 2 点 A(－3，0)，B(－2，4)を通る直線の式を求める。

$y=\frac{4-0}{-2-(-3)}(x-(-3))+0$， $y=4(x+3)$， $y=4x+12$

$y=4x+12$ に $x=0$ を代入すると， $y=12$ よって，点 D の y 座標は 12 で，OD＝12

(△BOD の面積)＝$\frac{1}{2}$×OD×BH＝$\frac{1}{2}\times12\times2$＝12(cm²)

[解答 55](1) 2　(2)　$y=-\dfrac{4}{x}$　(3) 27

[解説]

(1) 点 A の x 座標は－2 で，点 A は $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上にあるので，

$y=\dfrac{1}{2}x^2$ に $x=-2$ を代入して，

$y=\dfrac{1}{2}\times(-2)^2=2$

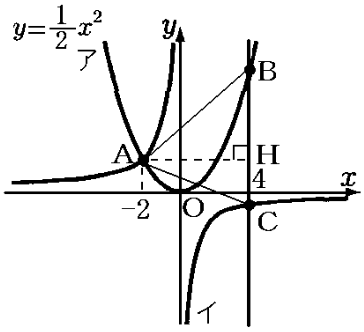
(2) 双曲線イのグラフの式を $y=\dfrac{a}{x}$ とおく。

点 A(－2，2)は $y=\dfrac{a}{x}$ 上にあるので， $y=\dfrac{a}{x}$ に $x=-2$, $y=2$ を代入して，

$2=\dfrac{a}{-2}$， $a=2\times(-2)=-4$

よって，双曲線イのグラフの式は， $y=\dfrac{-4}{x}$， $y=-\dfrac{4}{x}$

(3) 図のように△ABC の底辺を BC とすると，高さは AH になる。BC の長さを求めるために，点 B と点 C の y 座標を求める。



点 B は $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上にあり， x 座標は 4 なので， $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に

$x=4$ を代入して， $y=\dfrac{1}{2}\times4^2=8$

点 C は $y=-\dfrac{4}{x}$ 上にあり， x 座標は 4 なので， $y=-\dfrac{4}{x}$ に $x=4$ を代入して， $y=-\dfrac{4}{4}=-1$

よって，BC＝(点 B の y 座標)－(点 C の y 座標)＝8－(－1)＝9

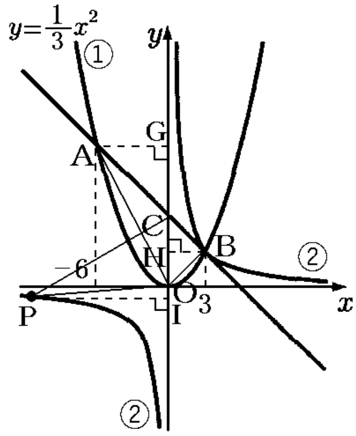
また，図より，AH＝4－(－2)＝6

よって，(△ABC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 BC)×(高さ AH)＝$\dfrac{1}{2}\times9\times6$＝27

[解答 56](−9，−1)

[解説]

まず，△OAB の面積を求める。



右図のように，△OAB を△AOC と△BOC に分けて考える。

右図のように，OC を共通の底辺と考えると，△AOC の高さは AG＝6 で，△BOC の高さは BH＝3 である。･･･(1)

そこで，点 C の座標を求めるために直線 AB の式を求める。

点 A の y 座標は，$y=\frac{1}{3}x^2$ に $x=-6$ を代入すると，

$y=\frac{1}{3}\times(-6)^2=\frac{36}{3}=12$ なので，点 A の座標は(−6，12)

点 B の y 座標は，$y=\frac{1}{3}x^2$ に $x=3$ を代入すると，

$y=\frac{1}{3}\times3^2=3$ なので，点 B の座標は(3，3)

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って 2 点 A(−6，12)，B(3，3)を通る直線の式を求める。

$y=\frac{3-12}{3-(-6)}(x-3)+3$、$y=-(x-3)+3$，$y=-x+6$

点 C は $y=-x+6$ の切片(y 切片)なので，点 C の y 座標は 6 になる。

よって，OC＝6･･･(2)

(1)，(2)より，

(△AOC の面積)＝$\frac{1}{2}$ ×(底辺 OC)×(高さ AG)＝$\frac{1}{2}\times6\times6$ ＝18

(△BOC の面積)＝$\frac{1}{2}$ ×(底辺 OC)×(高さ BH)＝$\frac{1}{2}\times6\times3$＝9

よって，(△OAB の面積)＝(△AOC の面積)＋(△BOC の面積)＝18＋9＝27

次に，点 P の座標を求める。

「△OAB と△OCP の面積が等しくなる」とあるので，

(△OCP の面積)＝27 である。

図のように，△OCP の底辺を OC とすると，高さは PI である。

よって，(△OCP の面積)＝$\frac{1}{2}$ ×(底辺 OC)×(高さ PI)＝27

$\frac{1}{2}$ ×6×(高さ PI)＝27，3×(高さ PI)＝27，(高さ PI)＝27÷3＝9

したがって，点 P の x 座標は−9 になる。

点 P の y 座標を求めるために反比例のグラフ②の式を求める。

反比例なので，②の式は $y=\dfrac{k}{x}$ とおくことができる。

②のグラフは，点 B(3，3)を通るので，$y=\dfrac{k}{x}$ に $x=3,\ y=3$ を代入して，$3=\dfrac{k}{3}$，$k=3\times3=9$

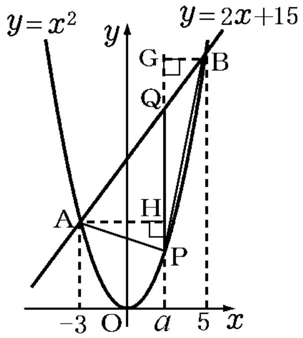
よって，②の式は $y=\dfrac{9}{x}$ となる。点 P の x 座標は－9 なので，$y=\dfrac{9}{-9}=-1$

よって，点 P の座標は(－9，－1)である。

[解答 57](3，9)

[解説]

右図のように，y 軸に平行な線分 PQ をひき，点 P，Q の x 座標を $x=a$ とする。



△APB を△APQ と△BPQ に分けて考え，

△APQ と△BPQ の共通の底辺を PQ とする。

点 P の x 座標は a で，点 P は $y=x^2$ 上にあるので，

$x=a$ を $y=x^2$ に代入して $y=a^2$

点 Q の x 座標は a で，点 Q は $y=2x+15$ 上にあるので，

$x=a$ を $y=2x+15$ に代入して $y=2a+15$

したがって，(底辺 PQ)＝(点 Q の y 座標)－(点 P の y 座標)＝ $2a+15-a^2$

(△APQ の高さ AH)＝ $a-(-3)=a+3$，(△BPQ の高さ BG)＝ $5-a$

したがって，

(△APQ の面積)＝ $\dfrac{1}{2}$ ×(底辺 PQ)×(高さ AH)＝ $\dfrac{1}{2}\times(2a+15-a^2)\times(a+3)$

＝ $\dfrac{1}{2}(2a^2+6a+15a+45-a^3-3a^2)$ ＝ $\dfrac{1}{2}(-a^3-a^2+21a+45)$

(△BPQ の面積)＝ $\dfrac{1}{2}$ ×(底辺 PQ)×(高さ BG)＝ $\dfrac{1}{2}\times(2a+15-a^2)\times(5-a)$

＝ $\dfrac{1}{2}(10a-2a^2+75-15a-5a^2+a^3)$ ＝ $\dfrac{1}{2}(a^3-7a^2-5a+75)$

(△APB の面積)＝(△APQ の面積)＋(△BPQ の面積)

＝ $\dfrac{1}{2}(-a^3-a^2+21a+45)$ ＋ $\dfrac{1}{2}(a^3-7a^2-5a+75)$ ＝ $\dfrac{1}{2}(-8a^2+16a+120)$ ＝ $-4a^2+8a+60$

「△APB の面積が 48 になる」ので，$-4a^2+8a+60=48$

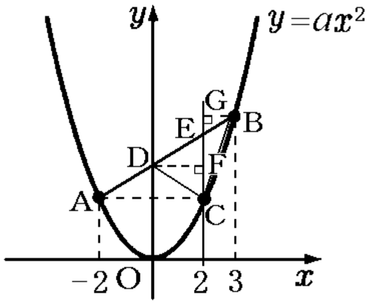
$-4a^2+8a+12=0$，$a^2-2a-3=0$，$(a+1)(a-3)=0$，$a=-1,\ a=3$

「点 P の x 座標は 0＜ x ＜5 とする」とあるので，$a=-1$ は不適，$a=3$ は適する。

点 P は $y=x^2$ 上にあるので， $y=x^2$ に $x=3$ を代入して， $y=3^2=9$
よって，点 P の座標は(3，9)

[解答 58] $a=\dfrac{5}{3}$

[解説]



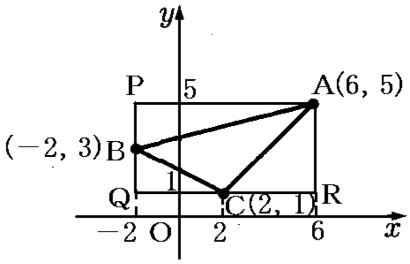
x 座標が−2 である点 A と y 軸について対称な点 C の x 座標は 2 である。右図のように， y 軸と平行な直線 CE をひき，点 F, G をとる。△BCD を△BCE と△DCE に分けて考える。
△BCE と△DCE の共通の底辺を CE とする。
CE の長さを求めるために，点 C と E の y 座標を求める。
点 C は $y=ax^2$ 上にあり，点 C の x 座標は 2 なので，
$y=ax^2$ に $x=2$ を代入すると， $y=a\times2^2=4a$
よって，点 C の y 座標は $4a$ である。・・・①
次に，点 E の y 座標を求めるために，直線 AB の式を求めておく。
点 A の x 座標は−2 なので， $x=-2$ を $y=ax^2$ に代入して， $y=a\times(-2)^2=4a$
よって，点 A の座標は $(-2,\ 4a)$
点 B の x 座標は 3 なので， $x=3$ を $y=ax^2$ に代入して， $y=a\times3^2=9a$
よって，点 B の座標は $(3,\ 9a)$
$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って 2 点 A$(-2,\ 4a)$，B$(3,\ 9a)$を通る直線の式を求める。
$y=\dfrac{9a-4a}{3-(-2)}(x-(-2))+4a$， $y=a(x+2)+4a$， $y=ax+6a$
点 E は直線 AB 上にあり，点 E の x 座標は 2 なので， $y=ax+6a$ に $x=2$ を代入して，
$y=a\times2+6a=2a+6a=8a$　よって，点 E の y 座標は $8a$ である。・・・②
①，②より，CE＝$8a-4a=4a$
また，図より，DF＝2，BG＝3－2＝1
(△BCE の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 CE)×(高さ BG)＝$\dfrac{1}{2}\times4a\times1=2a$
(△DCE の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 CE)×(高さ DF)＝$\dfrac{1}{2}\times4a\times2=4a$
よって，(△BCD の面積)＝(△BCE の面積)＋(△DCE の面積)＝ $2a+4a$ ＝ $6a$
「△BCD の面積が 10」とあるので， $6a=10$， $a=\dfrac{10}{6}=\dfrac{5}{3}$

【】面積を求める：外側長方形から複数の三角形を引く

[解答 59]12

[解説]

右図のように，辺が x 軸，y 軸に平行な長方形 APQR をとる。



(長方形 APQR の面積)＝AR×QR＝(5－1)×(6－(－2))

＝4×8＝32

(△APB の面積)＝$\frac{1}{2}$×AP×BP＝$\frac{1}{2}$×(6－(－2))×(5－3)

＝$\frac{1}{2}$×8×2＝8

(△BQC の面積)＝$\frac{1}{2}$×CQ×BQ＝$\frac{1}{2}$×(2－(－2))×(3－1)＝$\frac{1}{2}$×4×2＝4

(△ACR の面積)＝$\frac{1}{2}$×CR×AR＝$\frac{1}{2}$×(6－2)×(5－1)＝$\frac{1}{2}$×4×4＝8

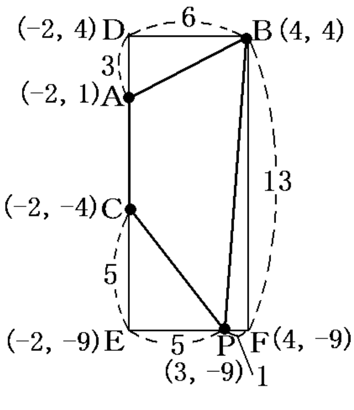
よって，

(△ABC の面積)＝(長方形 APQR の面積)－(△APB の面積)－(△BQC の面積)－(△ACR の面積)＝32－8－4－8＝12

[解答 60]50

[解説]

右図のように，四角形 ACPB を囲む長方形 BDEF を，長方形の辺が x 軸または y 軸に平行になるようにとる。



外側の長方形 BDEF の面積から，△ABD，△CPE，△BPF の面積を引いて四角形 ACPB の面積を求める。

まず，A，C，P，B の座標を求める。

A： $x=-2$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入して $y=\frac{1}{4}\times(-2)^2=1$，A(－2，1)

C： $x=-2$ を $y=-x^2$ に代入して $y=-(-2)^2=-4$，C(－2，－4)

P： $x=3$ を $y=-x^2$ に代入して $y=-3^2=-9$，P(3，－9)

B： $x=4$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入して $y=\frac{1}{4}\times 4^2=4$，B(4，4)

A，C，P，B の座標をもとに D，E，F の座標を求めると図のようになる。

これをもとに，各線分の長さを求めると図のようになる。

(長方形 BDEF の面積)＝13×6＝78

(△ABDの面積)$=\frac{1}{2}\times6\times3=9$

(△CPEの面積)$=\frac{1}{2}\times5\times5=\frac{25}{2}$

(△BPFの面積)$=\frac{1}{2}\times1\times13=\frac{13}{2}$

(四角形ACPB)＝(長方形BDEF)－(△ABD)－(△CPE)－(△BPF)

$=78-9-\frac{25}{2}-\frac{13}{2}=50$

[解答61](1) $a=2$　(2) $y=x+1$　(3) $-\frac{3}{2}$

[解説]

(1) 点Aは$y=-\frac{1}{4}x^2$上にあるので，$x=-2$を$y=-\frac{1}{4}x^2$に代入して，$y=-\frac{1}{4}\times(-2)^2=-1$

よって，点Aの座標は(−2，−1)

点Aは$y=\frac{a}{x}$上にもあるので，$x=-2,\ y=-1$を$y=\frac{a}{x}$に代入して，

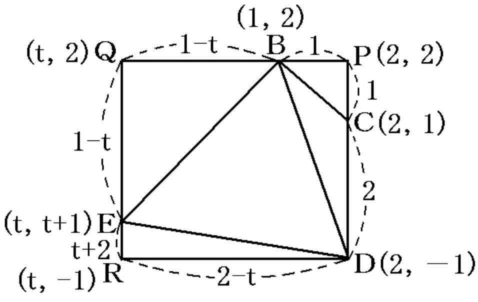
$-1=\frac{a}{-2}$，$a=(-1)\times(-2)=2$

(2) 点Bは$y=\frac{2}{x}$上にあるので，$x=1$を$y=\frac{2}{x}$に代入して，$y=\frac{2}{1}=2$

よって，点Bの座標は(1，2)である。(1)より点Aの座標は(−2，−1)なので，

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$の公式より，$y=\frac{2-(-1)}{1-(-2)}(x-1)+2$，$y=x-1+2$，$y=x+1$

(3) 右図のように，四角形 BCDE を囲む長方形PQRDを，長方形の辺がx軸またはy軸に平行になるようにとる。



まず，B，C，Dの座標を求める。

(2)より，点Bの座標は(1，2)である。

点Cは$y=\frac{2}{x}$上にあり，x座標は2なので，$x=2$を$y=\frac{2}{x}$に代入して，$y=\frac{2}{2}=1$　よって，点Cの座標は(2，1)

点Dは$y=-\frac{1}{4}x^2$上にあり，x座標は2なので，$x=2$を$y=-\frac{1}{4}x^2$に代入して，

$y=-\frac{1}{4}\times 2^2=-1$　よって，点Dの座標は(2，－1)

ここで，点Eのx座標をtとおく。点Eは$y=x+1$上にあるので，

$x=t$を$y=x+1$に代入して，$y=t+1$

よって，点Eの座標は(t，$t+1$)と表すことができる。

B，C，D，Eの座標をもとに，P，Q，Rの座標を求めると図のようになる。

これらの座標から，図のように各辺の長さを求めることができる。図より，

(四角形PQRDの面積)＝PD×RD＝$(1+2)\times(2-t)=6-3t$

(△BDCの面積)＝$\frac{1}{2}$×CD×BP＝$\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$

「△BEDの面積が△BDCの面積の5倍となるようにする」とあるので，

(△BEDの面積)＝(△BDCの面積)×5＝1×5＝5

(△BCPの面積)＝$\frac{1}{2}$×BP×CP＝$\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$

(△BEQの面積)＝$\frac{1}{2}$×BQ×EQ＝$\frac{1}{2}\times(1-t)\times(1-t)=\frac{1}{2}(1-t)^2$

(△DERの面積)＝$\frac{1}{2}$×DR×ER＝$\frac{1}{2}(2-t)\times(2+t)=\frac{1}{2}(4-t^2)$

(△BDC)＋(△BED)＋(△BCP)＋(△BEQ)＋(△DER)＝(四角形PQRD)なので，

$1+5+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-t)^2+\frac{1}{2}(4-t^2)=6-3t$

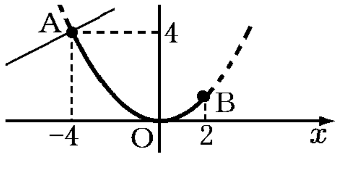
$13+(1-t)^2+4-t^2=12-6t$，$13+1-2t+t^2+4-t^2=12-6t$，$6t-2t=12-18$

$4t=-6$，$t=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

[解答62](1) $a=\frac{1}{4}$　(2) $y=\frac{1}{2}x+6$　(3) P$\left(\frac{4}{3},\ \frac{20}{3}\right)$

[解説]

(1) 「xの変域が$-4\leqq x\leqq 2$ のとき，yの変域は $0\leqq y\leqq 4$ である」とあるので，右図のように，点Aのy座標は4になる。点 A(－4，4)は$y=ax^2$上にあるので，$x=-4$, $y=4$を$y=ax^2$に代入して，$4=a\times(-4)^2$，$16a=4$，$a=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$



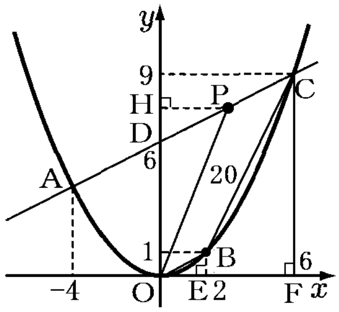
(2) まず, 点Cの座標を求める。点Cは$y=\frac{1}{4}x^2$上にあるので，$y=9$を$y=\frac{1}{4}x^2$に代入して，

$9=\frac{1}{4}x^2$，$x^2=36$，$x>0$ なので，$x=6$　よって，点 C の座標は(6，9)

点 A(−4，4)なので，$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)+y_1$ の公式を使って直線 AC の式を求める。

$y=\frac{9-4}{6-(-4)}\left(x-6\right)+9$，$y=\frac{1}{2}\left(x-6\right)+9$，$y=\frac{1}{2}x+6$

(3) 右図のように点 P，E，F，H をとり，△POD の面積を求めて PH の長さを求めることで, 点 P の x 座標を計算する。



(台形 ODCF の面積)＝$\frac{1}{2}$×(上底 DO＋下底 CF)×(高さ OF)

＝$\frac{1}{2}\times\left(6+9\right)\times6=45$

点 B の x 座標は 2 なので，$x=2$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入して，$y=\frac{1}{4}\times2^2=1$

よって，点 B の座標は(2，1)

(台形 EBCF の面積)＝$\frac{1}{2}$×(上底 BE＋下底 CF)×(高さ EF)＝$\frac{1}{2}\times\left(1+9\right)\times\left(6-2\right)=20$

(△BOE の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 BE)×(高さ OE)＝$\frac{1}{2}\times1\times2=1$

また，仮定より，(四角形 POBC の面積)＝20

よって，(△POD の面積)＋(四角形 POBC の面積)＋(△BOE の面積)＋(台形 EBCF の面積)＝(台形 ODCF の面積)

(△POD の面積)＋20＋1＋20＝45

よって，(△POD の面積)＝45－41＝4

(△POD の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 DO)×(高さ PH)＝4

$\frac{1}{2}$×6×(高さ PH)＝4，3×(高さ PH)＝4，(高さ PH)＝4÷3＝$\frac{4}{3}$

したがって，点 P の x 座標は $\frac{4}{3}$ である。点 P は $y=\frac{1}{2}x+6$ 上にあるので，

$x=\frac{4}{3}$ を $y=\frac{1}{2}x+6$ に代入して，$y=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}+6=\frac{2}{3}+6=\frac{20}{3}$

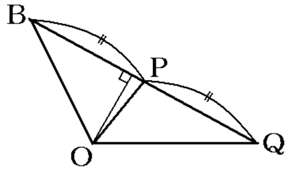
よって，点 P の座標は$\left(\frac{4}{3},\ \frac{20}{3}\right)$になる。

【】面積を 2 等分，面積比

[中点]

[解答 63] $2\sqrt{2}$

[解説]



「△OPB の面積と△OPQ の面積が等しくなる」ので，点 P は線分 BQ の中点になる。(それぞれの底辺を BP，QP とすると高さは共通なので，BP＝QP だから 2 つの三角形の面積は等しい)

点 B の y 座標が 8，点 Q の y 座標が 0 なので，点 P の y 座標は 4 になる。点 P は $y=\frac{1}{2}x^2$ 上にあるので， $y=\frac{1}{2}x^2$ に $y=4$ を代入して， $4=\frac{1}{2}x^2$， $x^2=8$

$x>0$ なので， $x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

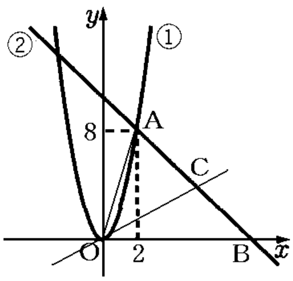
[解答 64](1) $y=-x+10$ (2) $y=\frac{2}{3}x$

[解説]

(1) まず，点 A の座標を求める。 x 座標が 2 である点 A は $y=2x^2$ 上にあるので， $x=2$ を $y=2x^2$ に代入すると， $y=2\times2^2=8$ よって，点 A の座標は(2，8)

②は傾きが－1 で，点 A を通るので， $y=m(x-x_1)+y_1$ を使って直線の式を求める。

$y=-(x-2)+8$， $y=-x+10$

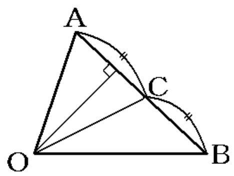


(2) 「直線 l (直線 OC)が三角形 OAB の面積を二等分する」とあるので，点 C は線分 AB の中点になる。

点 A の y 座標は 8，点 B の y 座標は 0 なので，点 C の y 座標は，(8＋0)÷2＝4 になる。

点 C は $y=-x+10$ 上にあるので， $y=4$ を $y=-x+10$ に代入すると， $4=-x+10$， $x=10-4$， $x=6$

よって，点 C の座標は(6，4)になる。

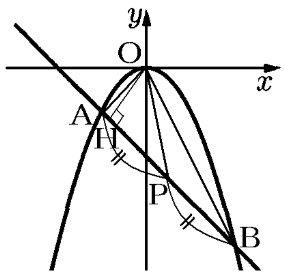


直線 OC(直線 l)は原点 O(0，0)と C(6，4)を通る直線である。

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，この直線の式を求める。

$y=\frac{4-0}{6-0}(x-0)+0$， $y=\frac{2}{3}x$

[解答 65](1，－5)
[解説]
線分ABの中点をPとすると,OPは△OABの面積を2等分する。
それは次のように説明できる。
△OAPと△OBPで，それぞれの底辺をAP，BPとすると，
AP＝BPである。また,2つの三角形の高さはOHで共通である。
底辺と高さが同じなので，△OAPと△OBPの面積は等しい。



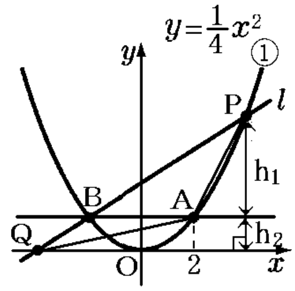
2点$\left(x_1,\ y_1\right)$，$\left(x_2,\ y_2\right)$の中点の座標は$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$
で求めることができる(x, yそれぞれの座標の平均)。

点Aの座標：$x=-2$を$y=-\dfrac{1}{2}x^2$に代入すると，$y=-\dfrac{1}{2}\times 4$＝－2なので点Aは(－2，－2)

点Bの座標：$x=4$を$y=-\dfrac{1}{2}x^2$に代入すると，$y=-\dfrac{1}{2}\times 16$＝－8なので，点Bは(4，－8)

A(－2，－2)，B(4，－8)の中点Pの座標は，$\left(\dfrac{-2+4}{2},\ \dfrac{-2-8}{2}\right)$＝(1，－5)

[底辺が共通(高さが共通)]
[解答 66] $2\sqrt{2}$
[解説]
△ABQと△ABPの共通の底辺をABとすると，
右図のh_1，h_2がそれぞれの三角形の高さになる。
「△ABQの面積と△ABPの面積が等しくなる」とあり，
底辺が共通で等しいので高さが等しくなる。
よって，h_1＝h_2になる。



点Aは$y=\dfrac{1}{4}x^2$上にあり，x座標が2なので，$y=\dfrac{1}{4}\times 2^2$＝1
となり，h_2＝1で，h_1＝h_2＝1となる。
よって，点Pのy座標はh_1＋h_2＝1＋1＝2

点Pは$y=\dfrac{1}{4}x^2$上にあり，y座標が2なので，$2=\dfrac{1}{4}x^2$

$x^2=8$，$x=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$,

$x>0$なので，$x=2\sqrt{2}$

[台形の面積の 2 等分など]

[解答 67] $a=-\dfrac{1}{4}$

[解説]

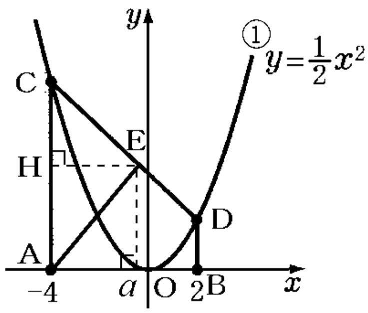
まず，台形 ABDC の面積を求めるために，点 C と点 D の y 座標を計算する。

点 C の x 座標は－4 なので， $x=-4$ を $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入すると， $y=\dfrac{1}{2}\times(-4)^2=8$

点 D の x 座標は 2 なので， $x=2$ を $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入すると， $y=\dfrac{1}{2}\times2^2=2$

したがって，AC＝8，BD＝2

また，BA＝2－(－4)＝2＋4＝6



(台形 ABDC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(上底 BD＋下底 AC)×(高さ BA)

＝$\dfrac{1}{2}\times(2+8)\times6$＝30

右図のように点 E の x 座標を a とする(図では a が負の値である場合を描いているが，正の値でも，以下の計算は成り立つ)。

「直線 AE が台形 ABDC の面積を 2 等分する」とあるので，

△EAC の面積は，30÷2＝15 である。

△EAC の底辺を AC(＝8)とすると，高さは EH である。

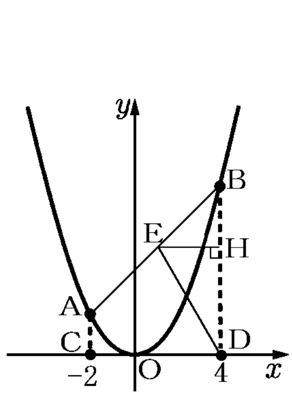
EH＝$a-(-4)$＝$a+4$

(△EAC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 AC)×(高さ EH)＝15

$\dfrac{1}{2}\times8\times(a+4)=15$， $4(a+4)=15$， $4a+16=15$， $4a=-1$ よって， $a=-\dfrac{1}{4}$

[解答 68] $\dfrac{3}{2}$

[解説]



(四角形 ACDE の面積)：(△BDE の面積)＝2：1 なので，

(台形 ACDB の面積)：(△BDE の面積)＝3：1 である。･･･①

まず台形 ACDB の面積を求める。

$x=-2$ を $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入すると， $y=2$ なので点 A の座標は

(－2，2)で，AC＝2

$x=4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると，$y=8$ なので点 B の座標は(4，8)で，BD＝8

CD＝4－(－2)＝6

(台形 ACDB の面積)＝$\frac{1}{2}$×(AC＋BD)×CD＝$\frac{1}{2}\times(2+8)\times 6$＝30

①より，(△BDE の面積)＝(台形 ACDB の面積)×$\frac{1}{3}$＝$30\times\frac{1}{3}$＝10

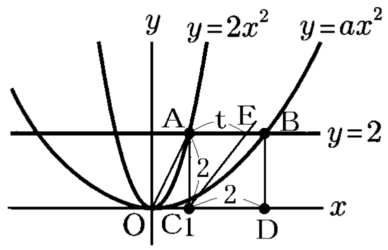
(△BDE の面積)＝$\frac{1}{2}$×BD×EH＝10

$\frac{1}{2}$×8×EH＝10，4EH＝10，EH＝$\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

よって，点 E の x 座標は，$4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$

[解答 69](1) $a=\frac{2}{9}$　(2) $y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$

[解説]



(1) 点 A の y 座標は 2 なので，$y=2x^2$ に $y=2$ を代入して，

$2=2x^2$，$x^2=1$，$x>0$ なので，$x=1$

よって，点 C の x 座標も 1 である。

次に，四角形 ACDB は正方形で，AC＝2 なので，CD＝2

よって，点 D の x 座標は 1＋2＝3 とわかる。

したがって，点 B の座標は(3，2)である。

点 B は $y=ax^2$ 上の点なので，$y=ax^2$ に $x=3$，$y=2$ を代入して，

$2=a\times 3^2$，$9a=2$

よって，$a=\frac{2}{9}$

(2) (台形 AODB の面積)＝(上底 AB＋下底 OD)×(高さ AC)÷2＝(2＋3)×2÷2＝5

点 C を通り，台形 AODB の面積を 2 等分する直線を右上図の CE とし，AE＝t とおく。

(台形 AOCE の面積)＝(上底 AE＋下底 OC)×(高さ AC)÷2＝(t＋1)×2÷2＝t＋1

与えられた条件より，(台形 AOCE の面積)＝(台形 AODB の面積)÷2

よって，$t+1=\frac{5}{2}$，$t=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$

(直線 CE の傾き)＝$\frac{AC}{AE}=AC\div AE=2\div\frac{3}{2}=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

直線 CE は傾きが $\frac{4}{3}$ で，点 C(1，0)を通るので， $y=m(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，

$y=\frac{4}{3}(x-1)$， $y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$ と求めることができる。

[三角形の面積を一定の比に分ける]

[解答 70](1) $y=x-8$　(2) 48cm²　(3) Q(－2，－4)

[解説]

(1) まず，点 A，B の座標を求める。

点 A の x 座標は－8 なので， $y=-\frac{1}{4}x^2$ に $x=-8$ を代入すると， $y=-\frac{1}{4}\times(-8)^2=-16$

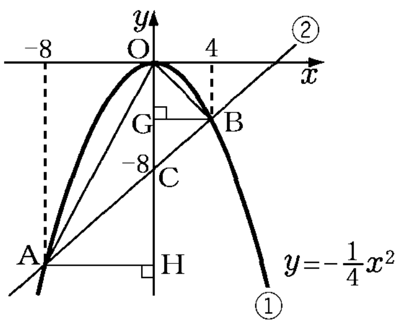
よって，点 A の座標は(－8，－16)

点 B の x 座標は 4 なので， $y=-\frac{1}{4}x^2$ に $x=4$ を代入すると， $y=-\frac{1}{4}\times 4^2=-4$

よって，点 B の座標は(4，－4)

直線②は 2 点 A(－8，－16)，B(4，－4)を通るので， $y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式より，

$y=\frac{-4-(-16)}{4-(-8)}(x-4)-4$， $y=(x-4)-4$， $y=x-8$



(2) △OAB を△OAC と△OBC に分けて考える。

△OAC の底辺を OC とすると，高さは，右図の AH になる。

$y=x-8$ の y 切片は－8 なので，点 C の y 座標は－8 で，

OC＝8(cm)

点 A の x 座標は－8 なので，AH＝8(cm)

(△OAC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ AH)＝$\frac{1}{2}\times 8\times 8$＝32(cm²)

次に，△OBC の底辺を OC とすると，高さは BG である。

点 B の x 座標は 4 なので，BG＝4(cm)

(△OBC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ BG)＝$\frac{1}{2}\times 8\times 4$＝16(cm²)

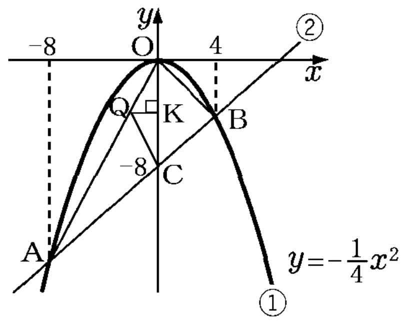
よって，(△OAB の面積)＝(△OAC の面積)＋(△OBC の面積)＝32＋16＝48(cm²)

(3) (2)より，△OAB の面積は 48cm² なので，

右図の四角形 OBCQ の面積は，48÷2＝24(cm²)

(△OCQ の面積)＝24－(△OBC の面積)＝24－16＝8(cm²)

△OCQ の底辺を OC とすると，高さは QK なので，



(△OCQ の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ QK)＝8(cm²)

$\frac{1}{2}$×8×(高さ QK)＝8，4×(高さ QK)＝8

(高さ QK)＝8÷4＝2(cm)

よって，点 Q の x 座標は−2 になる。

点 Q の y 座標を求めるために, 直線 OA の式を計算する。

点 A の座標は(−8，−16)，点 O の座標は(0，0)なので

(直線 OA の傾き)＝$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-(-16)}{0-(-8)}=\frac{16}{8}=2$

よって，直線 OA の式は $y=2x$ である。

$y=2x$ に $x=-2$ を代入すると，$y=2\times(-2)=-4$

したがって，点 Q の座標は(−2，−4)

[解答 71](1) $y=x+6$　(2) 15　(3) $\frac{4}{3}$

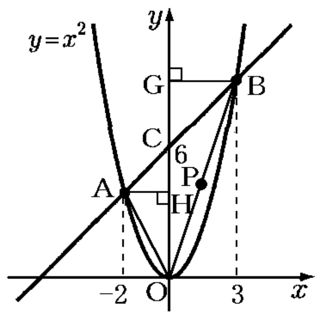
[解説]

(1) $y=x^2$ 上にある点 A の x 座標は−2 なので，$x=-2$ を $y=x^2$ に代入して，$y=(-2)^2=4$

よって，点 A の座標は(−2，4)　$y=x^2$ 上にある点 B の x 座標は 3 なので，$x=3$ を $y=x^2$ に代入して，$y=3^2=9$　よって，点 B の座標は(3，9)

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，2 点 A(−2，4)，B(3，9)を通る直線の式を求める。

$y=\frac{9-4}{3-(-2)}(x-3)+9$，$y=(x-3)+9$，$y=x+6$



(2) △OAB を△AOC と△BOC に分けて考える。

△AOC の底辺を OC とすると，右図の AH が高さになる。

点 C は直線 $y=x+6$ の y 切片なので，点 C の y 座標は 6 で，OC＝6 となる。また, 点 A の x 座標は−2 なので AH=2 である。

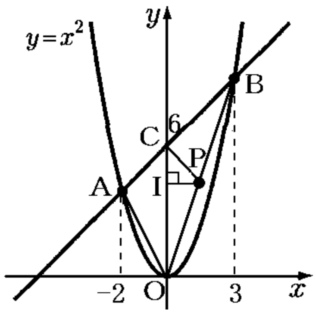
(△AOC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ AH)＝$\frac{1}{2}\times6\times2$＝6

次に，△BOC で，点 B の x 座標は 3 なので，BG＝3 である。

(△BOC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ BG)＝$\frac{1}{2}\times6\times3$＝9

よって，(△OAB の面積)＝(△AOC の面積)＋(△BOC の面積)＝6＋9＝15

(3) (2)より，△OAB の面積は 15 である。
「四角形 OACP と△BCP の面積の比が 2：1 になる」より，



(四角形 OACP の面積)＝(△OAB の面積)× $\dfrac{2}{2+1}$ ＝15× $\dfrac{2}{3}$ ＝10

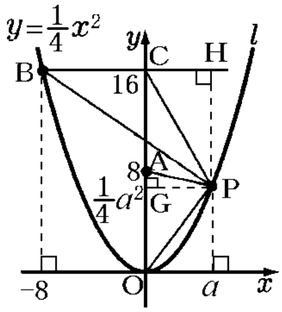
になる。(2)より，(△AOC の面積)＝6 なので，
(△POC の面積)＝(四角形 OACP の面積)－(△AOC の面積)
＝10－6＝4
△POC の底辺を OC とすると，高さは右図の PI なので，

(△POC の面積)＝ $\dfrac{1}{2}$ ×(底辺 OC)×(高さ PI)＝4

$\dfrac{1}{2}$ ×6×(高さ PI)＝4，3×(高さ PI)＝4，(高さ PI)＝4÷3＝ $\dfrac{4}{3}$

したがって，点 P の x 座標は $\dfrac{4}{3}$ になる。

[解答 72]4
[解説]
点 P の x 座標を a とすると，点 P の y 座標は，



$y=\dfrac{1}{4}x^2$ に $x=a$ を代入して， $y=\dfrac{1}{4}a^2$

△CBP の底辺を BC とすると，高さは右図の PH になる。
点 B の x 座標が－8 なので，BC＝8

点 B の y 座標は，$y=\dfrac{1}{4}x^2$ に $x=-8$ を代入して，$y=\dfrac{1}{4}\times(-8)^2=16$

よって，点 H の y 座標も 16 になる。

したがって，PH＝(点 H の y 座標)－(点 P の y 座標)＝$16-\dfrac{1}{4}a^2$

(△CBP の面積)＝ $\dfrac{1}{2}$ ×(底辺 BC)×(高さ PH)＝$\dfrac{1}{2}\times 8\times\left(16-\dfrac{1}{4}a^2\right)=64-a^2$ ･･･①

次に，△AOP の底辺を AO とすると，高さは右上図の PG になる。
「点 A の座標は(0，8)」なので，AO＝8
点 P の x 座標は a なので，PG＝a

よって，(△AOP の面積)＝ $\dfrac{1}{2}$ ×(底辺 AO)×(高さ PG)＝$\dfrac{1}{2}\times 8\times a=4a$ ･･･②

「△CBP の面積が△AOP の面積の 3 倍になる」ので，
(△CBP の面積)＝(△AOP の面積)×3

①，②より， $64-a^2=4a\times3$， $a^2+12a-64=0$， $(a-4)(a+16)=0$，
$a=4,\ -16$　 $a>0$ なので， $a=4$
よって，点 P の x 座標は 4 である。

[解答 73](1) $y=x+4$　(2) 1
[解説]
(1) まず，点 A，B の座標を求める。

点 A の x 座標は－2 なので， $x=-2$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると， $y=\frac{1}{2}\times(-2)^2=2$

よって点 A の座標は(－2，2)

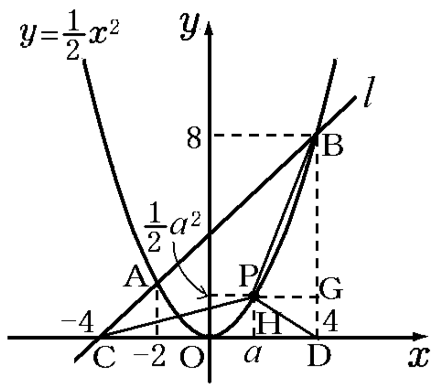
点 B の x 座標は 4 なので， $x=4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると， $y=\frac{1}{2}\times4^2=8$

よって点 B の座標は(4，8)

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，2 点 A(－2，2)，B(4，8)を通る直線の式を求める。

$y=\frac{8-2}{4-(-2)}(x-4)+8$， $y=(x-4)+8$， $y=x+4$

(2) 点 P の x 座標を $x=a$ とおくと，



y 座標は， $x=a$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して $y=\frac{1}{2}a^2$

△PCD の底辺を CD とすると，高さは PH＝$\frac{1}{2}a^2$

l の式 $y=x+4$ に $y=0$ を代入すると，$0=x+4$， $x=-4$
なので，点 C の x 座標は－4 になる。
よって，CD＝4－(－4)＝8

したがって，(△PCD の面積)＝$\frac{1}{2}$×CD×PH＝$\frac{1}{2}\times8\times\frac{1}{2}a^2=2a^2$

次に，△PBD の底辺を BD とすると，高さは PG である。
BD＝8，PG＝$4-a$ なので，

(△PBD の面積)＝$\frac{1}{2}$×BD×PG＝$\frac{1}{2}\times8\times(4-a)=16-4a$

△PCD と△PBD の面積の比が 1：6 なので，
(△PBD の面積)＝(△PCD の面積)×6
$16-4a=2a^2\times6$， $12a^2+4a-16=0$， $3a^2+a-4=0$
解の公式を使う。

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\times3\times(-4)}}{6}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{-1\pm7}{6}=-\frac{4}{3},\ 1$$

$0<a<4$ なので，$a=1$

したがって，点 P の x 座標は 1 である。

[解答 74] $4-\sqrt{6}$

[解説]

まず，直線 l の式を求めるために点 A，B の座標を計算する。

$y=\frac{1}{4}x^2$ 上にある点 A の x 座標は－2 なので，$x=-2$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入すると，

$y=\frac{1}{4}\times(-2)^2=1$　よって，点 A の座標は(－2，1)

$y=\frac{1}{4}x^2$ 上にある点 B の x 座標は 4 なので，$x=4$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入すると，

$y=\frac{1}{4}\times4^2=4$　よって，点 B の座標は(4，4)

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，2 点 A(－2，1)，B(4，4)を通る直線の式を求める。

$y=\frac{4-1}{4-(-2)}(x-4)+4$，$y=\frac{1}{2}(x-4)+4$，$y=\frac{1}{2}x+2$･･･①

$y=\frac{1}{2}x+2$ の切片(y 切片)は 2 なので，点 C の y 座標は 2 で，OC＝2 になる。

次に，△OAB を△OCA と△OCB に分割してその面積を求める。

(△OCA の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ)＝$\frac{1}{2}\times2\times2=2$

(△OCB の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ)＝$\frac{1}{2}\times2\times4=4$

よって，(△OAB の面積)＝(△OCA の面積)＋(△OCB の面積)＝2＋4＝6･･･②

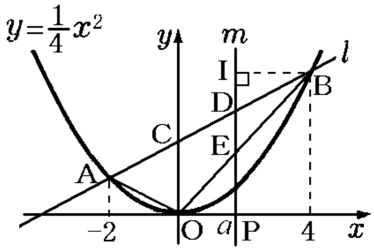
次に，点 P の x 座標を a として，△BDE の面積を a を使って表すことにする。

右図で，△BDE の底辺を DE とすると高さは BI になる。

点 B の x 座標は 4 で，点 I の x 座標は a なので，

BI＝$4-a$ である。･･･③

DE の長さを求めるために, 点 D と E の y 座標を計算する。



x 座標が a である点 D は直線 l (①より $y=\frac{1}{2}x+2$)上にあ

るので， $x=a$ を $y=\frac{1}{2}x+2$ に代入して， $y=\frac{1}{2}a+2$ ･･･④

点 B の座標は(4，4)なので，(直線 OB の傾き)$=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-0}{4-0}=\frac{4}{4}=1$

よって，直線 OB の式は $y=x$ である。

x 座標が a である点 E は $y=x$ 上にあるので， $x=a$ を $y=x$ に代入して， $y=a$ ･･･⑤

④，⑤より，点 D の y 座標は $y=\frac{1}{2}a+2$，点 E の y 座標は $y=a$ なので，

DE$=\frac{1}{2}a+2-a=-\frac{1}{2}a+2$ ･･･⑥

③，⑥より，

(△BDE の面積)$=\frac{1}{2}$ ×(底辺 DE)×(高さ BI)

$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}a+2\right)\times(4-a)=\left(-\frac{1}{4}a+1\right)(4-a)=\frac{1}{4}(-a+4)(4-a)=\frac{1}{4}(4-a)^2=\frac{1}{4}(a-4)^2$

「△OAB と△BDE の面積の比が 4：1」で，②より(△OAB の面積)＝6 なので，

(△OAB の面積)：(△BDE の面積)＝4：1，6：$\frac{1}{4}(a-4)^2$=4：1

比の内項の積は外項の積に等しいので， $\frac{1}{4}(a-4)^2\times4=6\times1$

$(a-4)^2=6$， $a-4=\pm\sqrt{6}$， $a=4\pm\sqrt{6}$

「x 軸上の 0≦ x ≦4 の範囲に点 P をとる」とあるので，0≦ a ≦4

よって， $a=4-\sqrt{6}$

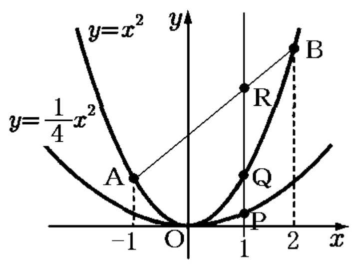
[解答 75](1) 1　(2)①PQ：QR＝3：8　② $\frac{2+2\sqrt{15}}{7}$

[解説]

(1) $y=x^2$ に $x=-1$ を代入すると $y=1$ なので，点 A の座標は(－1，1)

$y=x^2$ に $x=2$ を代入すると $y=4$ なので，点 B の座標は(2，4)

よって，直線 AB の傾きは， $\frac{4-1}{2-(-1)}=\frac{3}{3}=1$



(2)① まず，直線 AB の式を求めておく。

(1)より，傾きが 1 で B(2，4)を通るので， $y=a(x-x_1)+y_1$ の公式より， $y=(x-2)+4$， $y=x+2$

$x=1$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入すると $y=\frac{1}{4}$ なので，P の y 座標は $\frac{1}{4}$

$x=1$を$y=x^2$に代入すると$y=1$なので，Q のy座標は 1

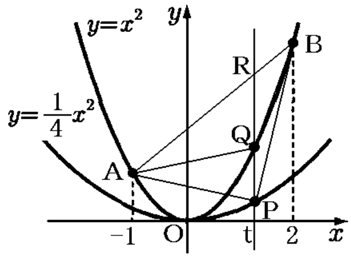
$x=1$を$y=x+2$に代入すると$y=3$なので，Q のy座標は 3

よって，PQ＝$1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$，QR＝3－1＝2

PQ：QR＝$\dfrac{3}{4}$：2＝3：8

② PQ＝QR であれば，△APQ＝△AQR，△BPQ＝△BQR となり(それぞれ底辺が等しく高さが共通なので)，

線分 AP，PB，BQ，QA で囲まれた図形の面積は△AQB の面積と等しくなる。



$x=t$を$y=\dfrac{1}{4}x^2$に代入すると$y=\dfrac{1}{4}t^2$なので, P のy座標は$\dfrac{1}{4}t^2$

$x=t$を$y=x^2$に代入すると$y=t^2$なので，Q のy座標はt^2

$x=t$を$y=x+2$に代入すると$y=t+2$なので，R のy座標は$t+2$

よって，QR＝$(t+2)-t^2$，PQ＝$t^2-\dfrac{1}{4}t^2=\dfrac{3}{4}t^2$

PQ＝QR なので，$\dfrac{3}{4}t^2=(t+2)-t^2$，$3t^2=4t+8-4t^2$

$7t^2-4t-8=0$

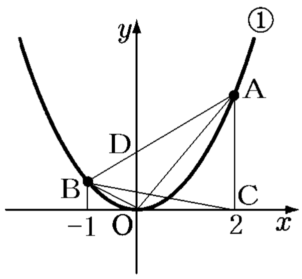
解の公式より，$t=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4\times7\times(-8)}}{14}=\dfrac{4\pm\sqrt{240}}{14}=\dfrac{4\pm4\sqrt{15}}{14}=\dfrac{2\pm2\sqrt{15}}{7}$

$t>0$，$2-2\sqrt{15}<0$なので，$t=\dfrac{2-2\sqrt{15}}{7}$は不適。よって，$t=\dfrac{2+2\sqrt{15}}{7}$

[解答 76]2：1

[解説]

右図のように，△ABC と△OAB の共通の底辺を AB とすると，それぞれの高さの比は面積の比と等しくなる。そこで，△ABC と△OAB の面積をそれぞれ求める。



△ABC について，

点 A は$y=x^2$上にあるので，$x=2$を$y=x^2$に代入すると，$y=4$

よって，AC＝4

△ABC の底辺を AC＝4 とすると，高さは 2－(－1)＝3 である。

したがって，(△ABC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×4×3＝6･･･①

次に，△OAB について，

まず，点 D の座標を求めるために，直線 AB の式を求める。

点 A(2，4)，点 B(−1，1)なので，$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$の公式より，

$y=\dfrac{4-1}{2-(-1)}(x-2)+4$，$y=x-2+4$，$y=x+2$

点 D は$y=x+2$の切片(y切片)なので，点 D のy座標は 2 で，OD＝2 である。

△AOD，△BOD の共通の底辺を OD＝2 とすると，△AOD の高さは 2，△BOD の高さは 1 なので，

(△AOD の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×2×2＝2

(△BOD の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×2×1＝1

よって，(△OAB の面積)＝(△AOD の面積)＋(△BOD の面積)＝2＋1＝3･･･②

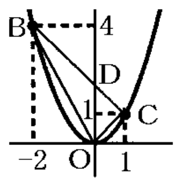
①，②より，(△ABC の面積)：(△OAB の面積)＝6：3＝2：1 になる。

よって，△ABC と△OAB において，線分 AB を底辺としたときのそれぞれの高さの比は，面積比と同じ 2：1 となる。

[解答 77](2，4)

[解説]

まず，△OBC の面積を求めるために，直線 BC の式を計算する。



B(−2，4)，C(1，1)なので，$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$の公式より，

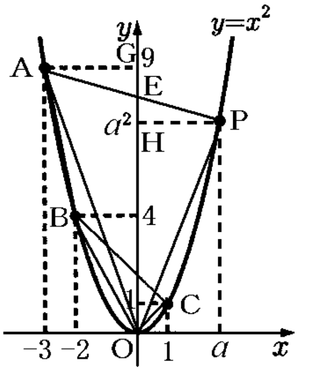
$y=\dfrac{1-4}{1-(-2)}(x-1)+1$，$y=-(x-1)+1$，$y=-x+2$

$y=-x+2$のy切片 D のy座標は 2 になる。よって，OD＝2

(△OCD の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OD)×(高さ)＝$\dfrac{1}{2}\times2\times1$＝1

(△OBD の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OD)×(高さ)＝$\dfrac{1}{2}\times2\times2$＝2

(△OBC の面積)＝(△OCD の面積)＋(△OBD の面積)＝1＋2＝3･･･①



次に，点 P のx座標を$x=a$として，△OAP の面積をaを使って表すこととする。

そこで，まず直線 AP の式を求める。

点 P のx座標はaなので，$x=a$を$y=x^2$に代入して$y=a^2$

よって，P の座標は(a，a^2)である。点 A の座標は(−3，9)である。

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)+y_1$の公式を使って，2 点 A，P を通る直線の式を求める。

$y=\dfrac{a^2-9}{a-(-3)}\left(x-(-3)\right)+9$，　$y=\dfrac{(a+3)(a-3)}{a+3}(x+3)+9$，　$y=(a-3)(x+3)+9$

$y=(a-3)x+3a-9+9$，　$y=(a-3)x+3a$

点 E は $y=(a-3)x+3a$ の y 切片なので，点 E の y 座標は $3a$ となり，OE＝$3a$ となる。

(△OPE の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OE)×(高さ PH)＝$\dfrac{1}{2}\times 3a\times a=\dfrac{3}{2}a^2$

(△OAE の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OE)×(高さ AG)＝$\dfrac{1}{2}\times 3a\times 3=\dfrac{9}{2}a$

よって，(△OAP の面積)＝(△OPE の面積)＋(△OAE の面積)＝$\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{9}{2}a$ ･･･②

「△OBC の面積と△OAP の面積の比が 1：5 になる」ので,

(△OBC の面積)：(△OAP の面積)＝1：5

①，②より，$3:\left(\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{9}{2}a\right)=1:5$

比の内項の積は外項の積に等しいので,

$\left(\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{9}{2}a\right)\times 1=3\times 5$，　$\dfrac{3}{2}a^2+\dfrac{9}{2}a=15$，　$3a^2+9a=30$，　$a^2+3a-10=0$，　$(a+5)(a-2)=0$

よって，$a=-5,\ 2$

「点 P の x 座標は正とする」とあるので，$a>0$　したがって，$a=2$

点 P は $y=x^2$ 上にあるので，$x=2$ を $y=x^2$ に代入して，$y=2^2=4$

よって，点 P の座標は(2，4)になる。

[解答 78](1) $a=2$　(2) $y=3x+5$

[解説]

(1) 点 A(－2，8)は $y=ax^2$ 上にあるので,

$x=-2,\ y=8$ を $y=ax^2$ に代入して,

$8=a\times(-2)^2$，　$8=4a$

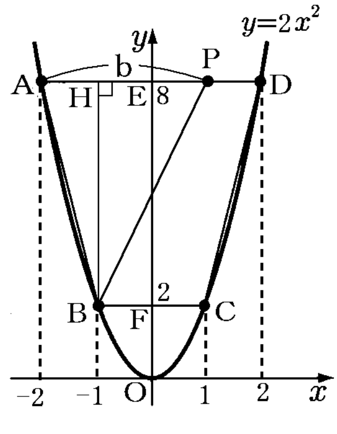
$a=8\div 4=2$

(2) まず，四角形 ABCD の面積を求めるために，B，C，D の座標を計算する。

$y=2x^2$ 上にある点 B の x 座標は－1 なので,

$x=-1$ を $y=2x^2$ に代入して $y=2\times(-1)^2=2$

よって，点 B の座標は(－1，2)



点Cはy軸について点Bと対称なので，点Cの座標は(1，2)
点Dはy軸について点Aと対称なので，点Dの座標は(2，8)
図より，AD＝2－(－2)＝4，BC＝1－(－1)＝2。EF＝8－2＝6

よって，(四角形ABCDの面積)＝$\frac{1}{2}$×(上底BC＋下底AD)×(高さEF)＝$\frac{1}{2}\times(2+4)\times 6=18$

次に，右上図のようにAD上に，AP＝bである点Pをとる。
BPが四角形ABCDの面積を二等分するとき，△BAPの面積は18÷2＝9になる。

よって，(△BAPの面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺AP)×(高さBH)＝9

BH＝EF＝6なので，$\frac{1}{2}\times b\times 6=9$，$3b=9$，$b=9\div 3=3$

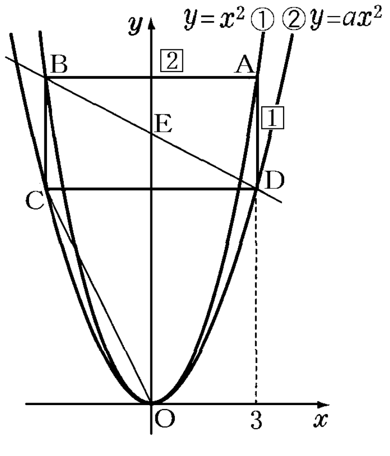
(点Pのx座標)＝(点Aのx座標)＋b＝－2＋3＝1 なので，点Pの座標は(1，8)
点Bの座標は(－1，2)である。

$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$の公式を使って，2点P，Bを通る直線の式を求める。

$y=\frac{8-2}{1-(-1)}(x-1)+8$，$y=3(x-1)+8$，$y=3x+5$

[解答79](1) $\frac{2}{3}$ (2) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$ (3) $-\frac{3}{5}$

[解説]

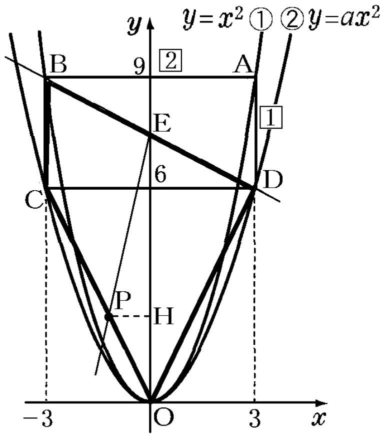


(1) 点Bはy軸について点Aと対称なので，点Bのx座標は－3である。よって，AB＝3－(－3)＝6
AB：AD＝2：1なので，AD＝6÷2＝3
$x=3$を$y=x^2$に代入すると$y=9$なので，点Aのy座標は9である。したがって，点Dのy座標は9－3＝6になる。
点D(3，6)は$y=ax^2$上にあるので，$x=3$, $y=6$を$y=ax^2$に代入して，$6=9a$，$a=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

(2) (1)より点Bの座標は(－3，9)，点Dの座標は(3，6)である。$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$の公式を使って，2点B，Dを通る直線の式を求める。

$y=\frac{6-9}{3-(-3)}(x-3)+6$，$y=-\frac{1}{2}(x-3)+6$，$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+6$，$y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$

(3) まず，四角形 ODBC の面積を計算する。



△BCD の底辺 CD は $3-(-3)=6$, 高さは $9-6=3$ なので,

$(\triangle\text{BCD の面積})=\dfrac{1}{2}\times6\times3=9$

△OCD の底辺 CD は 6，高さは 6 なので,

$(\triangle\text{OCD の面積})=\dfrac{1}{2}\times6\times6=18$

よって，$(\text{四角形 ODBC の面積})=9+18=27$

次に，△OED の面積を計算する。

点 E は 2 点 B，D の中点なので， y 座標は $\dfrac{9+6}{2}=\dfrac{15}{2}$

よって，$\text{OE}=\dfrac{15}{2}$　△OED の底辺を OE とすると高さは 3 なので,

$(\triangle\text{OED の面積})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{15}{2}\times3=\dfrac{45}{4}$

線分 EP が四角形 ODBC の面積を 2 等分するので,

$(\triangle\text{OED の面積})+(\triangle\text{OEP の面積})=(\text{四角形 ODBC の面積})\times\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{45}{4}+(\triangle\text{OEP の面積})=27\times\dfrac{1}{2}$

$(\triangle\text{OEP の面積})=27\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{45}{4}=\dfrac{54}{4}-\dfrac{45}{4}=\dfrac{9}{4}$

△OEP の底辺を $\text{OE}=\dfrac{15}{2}$ とすると，高さは図の PH なので,

$(\triangle\text{OEP の面積})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{15}{2}\times\text{PH}=\dfrac{9}{4}$

$\dfrac{15}{4}\text{PH}=\dfrac{9}{4}$，$\text{PH}=\dfrac{9}{4}\div\dfrac{15}{4}=\dfrac{9}{4}\times\dfrac{4}{15}=\dfrac{3}{5}$

点 P の x 座標は負なので，$-\dfrac{3}{5}$ である。

【】等積変形の利用

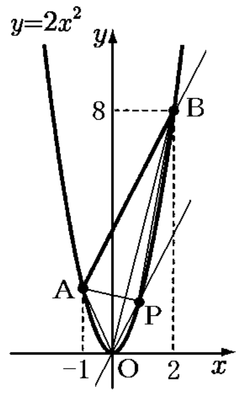
[解答 80](1) 2　(2)　$y=2x+4$　(3) (1，2)

[解説]

(1)　$x=-1$ を $y=2x^2$ に代入すると $y=2$ である。したがって，点 A の座標は(−1，2)になる。

(2)　$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って 2 点 A(−1, 2), B(2, 8)を通る直線の式を求める。

$y=\dfrac{8-2}{2-(-1)}(x-2)+8$，　$y=2(x-2)+8$，　$y=2x+4$



(3)　右図のように，補助線 OP を，OP // AB となるように引く。

△PAB と△OAB の共通の底辺を AB とすると，OP // AB なので，

2 つの三角形の高さは等しくなり, 2 つの三角形の面積が等しくなる。

(2)より，直線 AB($y=2x+4$)の傾きは 2 なので，直線 OP の傾きも 2

になる。OP は原点を通るので，$y=2x$ の式で表すことができる。

交点 P の座標を求めるには，$y=2x^2$ と $y=2x$ を連立方程式として解く。$y=2x^2$ を $y=2x$ に代入すると，$2x^2=2x$

$2x^2-2x=0$，　$x(x-1)=0$　　よって，　$x=0,\ 1$

点 P は原点以外の点なので，　$x=1$

$x=1$ を $y=2x$ に代入すると，　$y=2$

したがって，点 P の座標は(1，2)であることがわかる。

[解答 81](1)　$y=x+\dfrac{3}{2}$　(2) (−4，8)

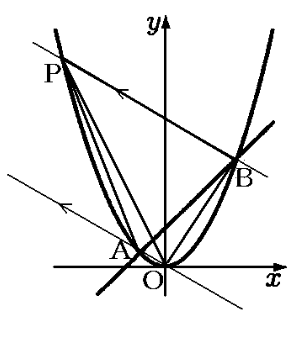
[解説]

(1)　$x=-1$ を $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入すると $y=\dfrac{1}{2}$ なので，点 A の座標は$\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$

$x=3$ を $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入すると $y=\dfrac{9}{2}$ なので，点 B の座標は$\left(3,\ \dfrac{9}{2}\right)$

$y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って，2 点 A，B を通る直線の式を求める。

$y=\dfrac{\frac{9}{2}-\frac{1}{2}}{3-(-1)}(x-(-1))+\dfrac{1}{2}$，　$y=\dfrac{4}{4}(x+1)+\dfrac{1}{2}$，　$y=x+\dfrac{3}{2}$



(2)　右図のように B 点を通って，直線 OA と平行な補助線を引き

$y=\dfrac{1}{2}x^2$ との交点を P とする。

△PAB と△POB で，PB を共通な底辺とすると，

OA // BP で，2 つの三角形の高さが等しくなるので，△PAB と△POB の面積が等しくなる。

(直線 OA の傾き)＝$\dfrac{\frac{1}{2}}{-1}=-\dfrac{1}{2}$

直線 BP の傾きは直線 OA と同じ$-\dfrac{1}{2}$で，点 B の座標は$\left(3,\ \dfrac{9}{2}\right)$なので，直線 BP の式は，

$y=a(x-x_1)+y_1$の公式を使って，

$y=-\dfrac{1}{2}(x-3)+\dfrac{9}{2}$， $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{2}$， $y=-\dfrac{1}{2}x+6$と求めることができる。

交点 P の座標は， $y=\dfrac{1}{2}x^2$と$y=-\dfrac{1}{2}x+6$の連立方程式を解いて求めることができる。

$y=\dfrac{1}{2}x^2$を$y=-\dfrac{1}{2}x+6$に代入すると， $\dfrac{1}{2}x^2=-\dfrac{1}{2}x+6$， $x^2=-x+12$， $x^2+x-12=0$，

$(x+4)(x-3)=0$， $x=-4,\ 3$

$x<-1$なので$x=-4$

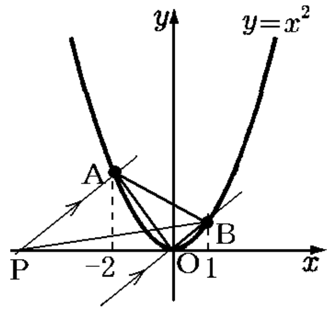
$x=-4$を$y=\dfrac{1}{2}x^2$に代入すると， $y=\dfrac{1}{2}\times16=8$

よって，点 P の座標は(−4，8)であることがわかる。

[解答 82](−6，0)

[解説]

右図のように，補助線 PA を OB // PA となるように引く。



△OAB と△OBP で，OB を共通の底辺と考えると，OB // PA なので，2 つの三角形の高さは等しくなり，2 つの三角形の面積が等しくなる。そこで，まず，A，B の座標を求めておく。

$x=-2$を$y=x^2$に代入すると$y=4$なので，点 A の座標は(−2，4)

$x=1$を$y=x^2$に代入すると$y=1$なので，点 B の座標は(1，1)

(OB の傾き)＝$\dfrac{1}{1}$＝1 なので，AP の傾きも 1 になる。

直線 AP の式は，傾きが 1 で(−2，4)を通るので， $y=a(x-x_1)+y_1$の公式を使って，

$y=(x-(-2))+4$， $y=x+6$と求めることができる。

点 P の y 座標は 0 なので， $y=0$を$y=x+6$に代入して， $0=x+6$， $x=-6$

よって，点 P の座標は(−6，0)となる。

[解答 83](1) $\dfrac{1}{4}$　(2) $y=-x+3$　(3) 12

[解説]

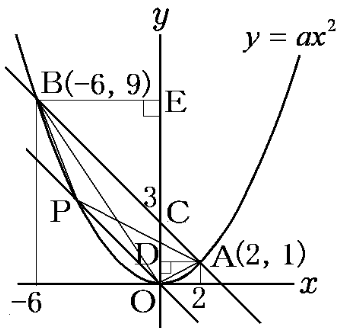
(1) 点 A(2, 1)は $y=ax^2$ 上にあるので，$y=ax^2$ に $x=2$，$y=1$ を代入して，

$1=a\times4$，よって，$a=\dfrac{1}{4}$

(2) $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$ の公式を使って 2 点 A(2, 1), B(−6, 9)を通る直線の式を求める。

$y=\dfrac{1-9}{2-(-6)}(x-2)+1$，$y=\dfrac{-8}{8}(x-2)+1$，$y=-x+2+1$，$y=-x+3$

(3) △ABP と△ABO で，AB を共通の底辺とすると，
AB // OP なので，2 つの三角形の高さは等しくなり，
(△ABP の面積)＝(△ABO の面積) となる。
そこで，△ABO の面積を，右図の△ACO と△BCO に分割して求める。
直線 AB の式は $y=-x+3$ なので，y 切片は 3 で，OC＝3
点 A の x 座標は 2 なので，△ACO の底辺を OC＝3 とすると，
高さは AD＝2



よって，(△ACO の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ AD)＝$\dfrac{1}{2}$×3×2＝3

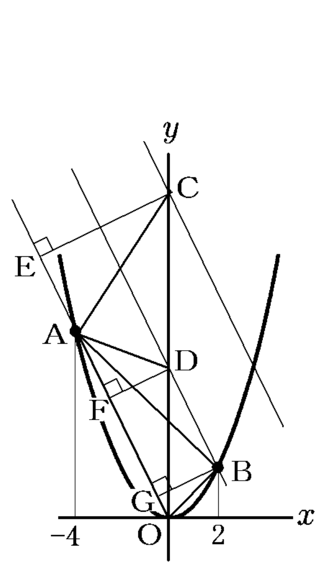
同様にして，(△BCO の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺 OC)×(高さ BE)＝$\dfrac{1}{2}$×3×6＝9

よって，(△ABO の面積)＝(△ACO の面積)＋(△BCO の面積)＝3＋9＝12
ゆえに，(△ABP の面積)＝(△ABO の面積)＝12

[解答 84]12

[解説]

まず，右図のように，点 B を通って直線 AO に平行な直線 BD をひく。△AOB と△AOD で，AO を共通の底辺とすると，
AO // BD なので, それぞれの三角形の高さ(BG と DF)は等しくなる。よって，(△AOB の面積)＝(△AOD の面積)となる。
次に，y 軸上の正の部分に CO＝2DO となる点 C をとる。
△AOC と△AOB で，AO を共通の底辺とすると，
△AOC の高さ CE は，△AOB の高さ BG の 2 倍になる。
したがって，(△AOC の面積)＝(△AOB の面積)×2 になる。



点 C の y 座標は，点 D の y 座標の 2 倍になる。
そこで，直線 BD の式を求める。

点 A の x 座標は－4 なので， $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して， $y=\frac{1}{2}\times(-4)^2=8$

点 B の x 座標は 2 なので， $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して， $y=\frac{1}{2}\times 2^2=2$

よって，(直線 BD の傾き)＝(直線 AO の傾き)＝ $\frac{8-0}{-4-0}=-2$

直線 BD は傾きが－2 で，点 B(2，2)を通るので， $y=m(x-x_1)+y_1$ の公式より，
$y=-2(x-2)+2$， $y=-2x+6$ となることがわかる。
点 D は $y=-2x+6$ の切片(y 切片)なので，点 D の y 座標は 6 になる。
点 C の y 座標は点 D の y 座標の 2 倍なので，c＝6×2＝12 となる。

[解答 85](1) $a=\frac{3}{4}$ (2) 8

[解説]
(1) 点 A(－2，3)は $y=ax^2$ 上にあるので，
$x=-2$, $y=3$ を $y=ax^2$ に代入して，

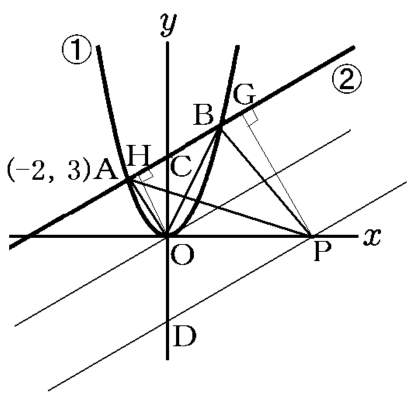
$3=a\times(-2)^2$, $4a=3$ よって， $a=\frac{3}{4}$

(2) まず，直線②の式を求めておく。

直線②の傾きは $\frac{1}{2}$ で，点 A(－2，3)を通るので， $y=a(x-x_1)+y_1$ の公式より，

$y=\frac{1}{2}(x-(-2))+3$， $y=\frac{1}{2}x+4$ と計算できる。

よって，②と y 軸との交点を C とすると，点 C の座標は(0，4)となる。
ここで，右図のように，CO＝DO となる点 D(0，－4)をとる。点 D を通り②に平行な直線 DP をひく。
△OAB と△PAB で，AB を共通の底辺とすると，
△OAB の高さは OH，△PAB の高さは PG となる。
CO＝DO なので，PG＝OH×2 となる。
したがって，(△PAB の面積)＝(△OAB の面積)×2 になる。
点 P の座標を求めるために直線 DP の式を求める。



直線 DP は②と平行なので傾きは $\frac{1}{2}$ である。また点 D

の座標は(0，−4)なので，y 切片は−4 である。したがって，直線 DP の式は，$y=\frac{1}{2}x-4$ である。

点 P の y 座標は 0 なので，$y=\frac{1}{2}x-4$ に $y=0$ を代入して，$0=\frac{1}{2}x-4$

両辺を 2 倍すると，$x-8=0$　よって $x=8$

よって，点 P の x 座標は 8 になる。