【】放物線と直線

【】放物線の式・直線の式・交点など

[$y=ax^2$ の a の値]

[解答 1] $a=2$

[解説]

点 A は $y=4x+6$ 上にあるので，$x=3$ を $y=4x+6$ に代入して $y=4\times3+6=18$

点 A(3，18)は $y=ax^2$ 上にもあるので，$x=3$，$y=18$ を $y=ax^2$ に代入する。

$18=9a$，よって，$a=2$

[解答 2] $a=\dfrac{1}{2}$

[解説]

点 D の座標：$y=8$ を $y=2x^2$ に代入すると，$8=2x^2$，$x^2=4$，$x>0$ なので $x=2$

したがって，CD＝2　DE＝CD＝2 なので，CE＝2＋2＝4

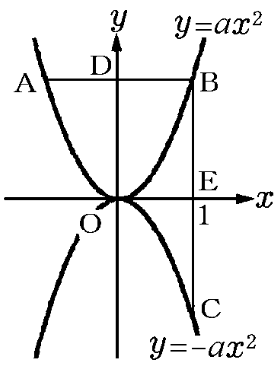
よって，点 E の座標は，$x=4$，$y=8$

点 E は②上の点なので，$x=4$，$y=8$ を $y=ax^2$ に代入して，$8=16a$，$a=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$

[解答 3] $a=\dfrac{5}{3}$

[解説]

点 B の x 座標は 1 なので，右図の BD＝1



点 A は y 軸について B と対称なので，AD＝BD＝1

よって，AB＝AD＋BD＝1＋1＝2･･･①

次に，点 B の x 座標 1 を $y=ax^2$ に代入すると，$y=a$，BE＝a

点 C の x 座標 1 を $y=-ax^2$ に代入すると，$y=-a$，CE＝a

よって，BC＝BE＋CE＝$a+a$＝$2a$･･･②

AB＋BC＝$\dfrac{16}{3}$ なので，①，②より，$2+2a=\dfrac{16}{3}$

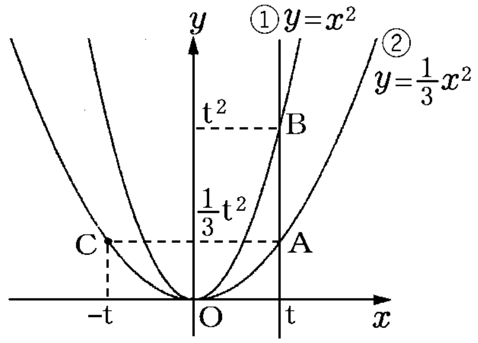
両辺を 3 倍すると，$6+6a=16$，$6a=10$，$a=\dfrac{10}{6}=\dfrac{5}{3}$

[$x=t$ とおく]

[解答 4] $t=3$

[解説]

∠BAC＝90° なので，△ABC が直角二等辺三角形となるときは AB＝AC が成り立つ。



右図のように，点 A の x 座標は $x=t$ なので，

②の式 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ に $x=t$ を代入して， y 座標は $\dfrac{1}{3}t^2$。

点 B の x 座標も $x=t$ なので，

①の式 $y=x^2$ に $x=t$ を代入して， y 座標は t^2。

AB＝(点 B の y 座標)－(点 A の y 座標)＝ $t^2-\dfrac{1}{3}t^2=\dfrac{2}{3}t^2$ ・・・(1)

次に，点 C は点 A と y 軸について対称な点なので，点 C の x 座標は $-t$ になる。

よって，AC＝(点 A の x 座標)－(点 C の x 座標)＝ $t-(-t)=t+t=2t$ ・・・(2)

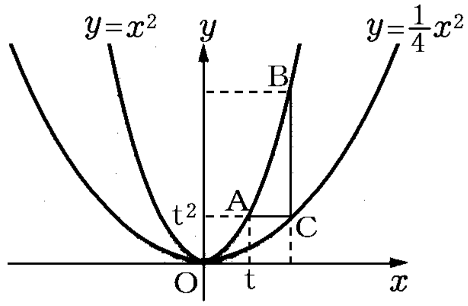
AB＝AC なので，(1)，(2)より， $\dfrac{2}{3}t^2=2t$

$2t^2=6t$， $t^2-3t=0$， $t(t-3)=0$， $t=0,\ 3$　 $t>0$ なので， $t=3$

[解答 5](3，9)

[解説]

点 A の x 座標を $x=t$ とおく($t>0$)。



$y=x^2$ に $x=t$ を代入すると $y=t^2$ なので，

点 A の座標は $(t,\ t^2)$ になる。・・・①

点 C の y 座標は点 A の y 座標と等しいので，

$y=\dfrac{1}{4}x^2$ に $y=t^2$ を代入して， $t^2=\dfrac{1}{4}x^2$ が成り立つ。

$x^2=4t^2$， $x>0,\ t>0$ なので， $x=2t$　よって，点 C の座標は $(2t,\ t^2)$ になる。・・・②

点 B の x 座標は点 C の x 座標 $x=2t$ と等しい。

$y=x^2$ に $x=2t$ を代入すると， $y=4t^2$ なので，点 B の座標は $(2t,\ 4t^2)$ になる。・・・③

①，②，③より，点 A は $(t,\ t^2)$，点 B は $(2t,\ 4t^2)$，点 C は $(2t,\ t^2)$ となる。

よって，AC＝(点 C の x 座標)－(点 A の x 座標)＝ $2t-t$ ＝ t

BC＝(点 B の y 座標)－(点 C の y 座標)＝ $4t^2-t^2=3t^2$

AC：BC＝1：9 の条件より， $t:3t^2=1:9$

比の内項の積は外項の積に等しいので， $3t^2\times1=t\times9$

$3t^2=9t$， $t^2=3t$， $t^2-3t=0$， $t(t-3)=0$， $t=0,\ 3$， $t>0$ なので， $t=3$

点 A の座標は $(t,\ t^2)$ なので， $t=3$ を代入して，(3，9)となる。

[直線の式]

[解答 6](1)　$a=\frac{1}{4}$　(2)　$y=\frac{1}{2}x+6$

[解説]

(1) 点 A(−4，4)は $y=ax^2$ 上にあるので，$x=-4,\ y=4$ を $y=ax^2$ に代入すると，

$4=16a$，$a=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

(2) 点 B は $y=\frac{1}{4}x^2$ にあるので，$x=6$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入すると，$y=\frac{36}{4}=9$

よって，点 B の座標は(6，9)であることがわかる。

したがって，直線ℓは A(−4，4)，B(6，9)を通るので，

(直線ℓの傾き)$=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{9-4}{6-(-4)}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

傾きが$\frac{1}{2}$なので，直線ℓの式は $y=\frac{1}{2}x+b$ とおくことができる。

A(−4，4)を通るので，$x=-4,\ y=4$ を $y=\frac{1}{2}x+b$ に代入すると，

$4=\frac{1}{2}\times(-4)+b$，$4=-2+b$，$b=6$　よって，直線ℓの式は $y=\frac{1}{2}x+6$

[解答 7](1) (6，18)　(2)　$y=2x+6$

[解説]

(1) 点 B の x 座標 $x=6$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると，$y=\frac{1}{2}\times 36=18$ なので，

点 B の座標は(6，18)

(2) 点 A の x 座標 $x=-2$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入すると，$y=\frac{1}{2}\times 4=2$ なので，

点 A の座標は(−2，2)

したがって，直線 AB は A(−2，2)，B(6，18)を通るので，

(直線 AB の傾き)$=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{18-2}{6-(-2)}=\frac{16}{8}=2$

傾きが 2 なので，直線 AB の式は $y=2x+b$ とおくことができる。

A(−2，2)を通るので，$x=-2,\ y=2$ を $y=2x+b$ に代入すると，$2=-4+b$，$b=6$

よって，直線 AB の式は $y=2x+6$

[交点の座標]

[解答 8](−1，1)，(3，9)

[解説]

放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=bx+c$ の交点では，$y=ax^2$ の y と $y=bx+c$ の y が同じなので，

$ax^2=bx+c$ が成り立つ。

$y=x^2$ と $y=2x+3$ の交点を求めるために，$x^2=2x+3$ とおく。

$x^2-2x-3=0$，$(x+1)(x-3)=0$，$x=-1,\ 3$

$x=-1$ を $y=x^2$ に代入すると $y=1$ なので，交点の座標は(−1，1)

$x=3$ を $y=x^2$ に代入すると $y=9$ なので，交点の座標は(3，9)

[解答 9](1) (−4，4)　(2) $a=\dfrac{3}{2}$　(3) (10，25)

[解説]

(1) 点 A は $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 上にあるので $x=-4$ を $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に代入すると，$y=\dfrac{1}{4}\times 16=4$

よって，点 A の座標は(−4，4)

(2) 点 A(−4，4)は $y=ax+10$ 上にもあるので，$x=-4$，$y=4$ を $y=ax+10$ に代入すると，

$4=-4a+10$，$4a=6$，$a=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

(3) (2)よりこの直線の式は $y=\dfrac{3}{2}x+10$

$y=\dfrac{1}{4}x^2$ と $y=\dfrac{3}{2}x+10$ の交点の x 座標を求めるために，$\dfrac{1}{4}x^2=\dfrac{3}{2}x+10$ とおくと，

$x^2=6x+40$，$x^2-6x-40=0$，$(x+4)(x-10)=0$，$x=-4,\ 10$

よって，点 B の x 座標は $x=10$ である。$x=10$ を $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に代入すると，$y=\dfrac{1}{4}\times 100=25$

したがって，点 B の座標は(10，25)

[解答 10](1) $y=x+6$　(2)A：(−3，3)　C：(3，9)

[解説]

(1) 点 B：$x=-2$ を $y=x^2$ に代入すると $y=4$ なので，B の座標は(−2，4)

点 D：$x=6$ を $y=\dfrac{1}{3}x^2$ に代入すると $y=\dfrac{1}{3}\times 36=12$ なので，D の座標は(6，12)

直線 ℓ は B(−2，4)，D(6，12)を通るので，

(直線 ℓ の傾き)$=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{12-4}{6-(-2)}=\dfrac{8}{8}=1$

傾きが1なので，直線ℓの式は$y=x+b$とおくことができる。
B(－2，4)を通るので，$x=-2$, $y=4$を$y=x+b$に代入すると，$4=-2+b$，$b=6$
よって，直線ℓの式は$y=x+6$

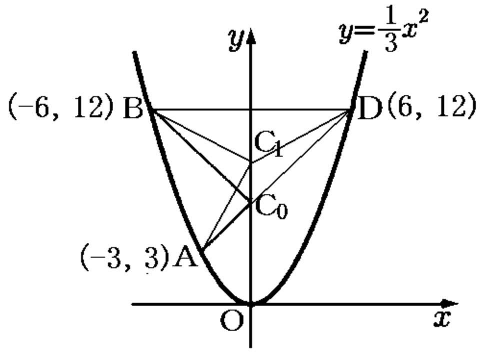
(2) $y=\frac{1}{3}x^2$と$y=x+6$の交点Aのx座標を求めるために，$\frac{1}{3}x^2=x+6$とおくと，
$x^2=3x+18$，$x^2-3x-18=0$，$(x+3)(x-6)=0$，$x=-3,\ 6$
点Aのx座標は負なので，$x=-3$
$x=-3$を$y=x+6$に代入すると，$y=-3+6=3$
よって，点Aの座標は(－3，3)
次に，$y=x^2$と$y=x+6$の交点Cのx座標を求めるために，$x^2=x+6$とおくと，
$x^2-x-6=0$，$(x+2)(x-3)=0$，$x=-2,\ 3$　点Cのx座標は正なので，$x=3$
$x=3$を$y=x+6$に代入すると，$y=3+6=9$　よって，点Cの座標は(3，9)

[最短距離]

[解答11](1) $\frac{1}{3}$　(2) 6

[解説]
(1) 点A(－3，3)は$y=ax^2$上にあるので，$x=-3$，$y=3$を$y=ax^2$に代入すると，
$3=9a$，$a=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

(2) 点Bのx座標は－6なので，$y=\frac{1}{3}x^2$に$x=-6$を代入すると，$y=\frac{1}{3}\times 36=12$である。よって，点Bの座標は(－6，12)である。



点Bとy軸について対称な点D(6，12)をとる。
右図で，点CがC_1の位置にあるとき，
$AC_1+BC_1=AC_1+C_1D$
点CがC_0の位置にあるとき，$AC_0+BC_0=AC_0+C_0D=AD$
△AC_1Dで，三角形の2辺の和は他の1辺より長いので，$AC_1+C_1D>AD$
よって，$AC_1+C_1D>AC_0+C_0D$，$AC_1+BC_1>AC_0+BC_0$となる。
よって，CがC_0の位置にあるとき，AC＋BCがもっとも小さくなる。
点C_0のy座標を求めるために，直線ABの式を計算する。
A(－3，3)，D(6，12)を通る直線の傾きは，$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{12-3}{6-(-3)}=\frac{9}{9}=1$なので，
直線ADの式は，$y=x+b$とおくことができる。

$y=x+b$ に $x=-3,\ y=3$ を代入すると，$3=-3+b$，$b=6$
よって，直線 AD の式は，$y=x+6$ になる。
点 C_0 の y 座標は，$y=x+6$ の切片(y 切片)の 6 になる。

【】面積を求める
[底辺が x 軸(y 軸)上]
[解答 12](1) $y=x-6$ (2) 36

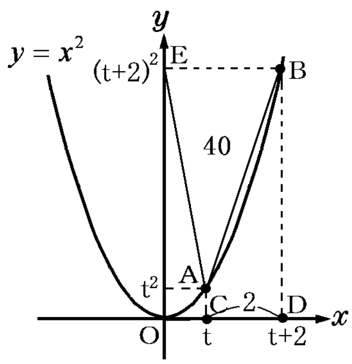
[解説]
(1) まず，点 A，B の座標を求める。

点 A：$y=-\dfrac{1}{3}x^2$ に $x=-6$ を代入すると $y=-\dfrac{1}{3}\times(-6)^2=-\dfrac{1}{3}\times 36=-12$ なので，A(－6，－12)

点 B：$y=-\dfrac{1}{3}x^2$ に $x=3$ を代入すると $y=-\dfrac{1}{3}\times 3^2=-3$ なので，B(3，－3)

(直線 AB の傾き)＝$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{-3-(-12)}{3-(-6)}=\dfrac{9}{9}=1$ なので，
直線 AB の式は $y=x+b$ とおくことができる。点 B の座標(3，－3)を代入すると，
$-3=3+b$，$b=-6$　よって，直線 AB の式は $y=x-6$ となる。
(2) △AOC で，OC を底辺とすると，高さは AH になる。
(1)より点 A の座標は(－6，－12)なので，AH＝12
(1)より，直線 AB の式は $y=x-6$ なので，$y=0$ を代入すると，$0=x-6$，$x=6$
よって，点 C の x 座標は 6 であることがわかる。したがって，OC＝6
(△AOC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×OC×AH＝$\dfrac{1}{2}\times 6\times 12=36$

[解答 13] (3，9)
[解説]



点 A の x 座標を t とおくと y 座標は t^2，
線分 CD の長さが 2 なので，点 B の x 座標は $t+2$，
y 座標は $(t+2)^2$
△ABE で，底辺を BE とすると，底辺 BE＝DO＝$t+2$
高さ＝$(t+2)^2-t^2=t^2+4t+4-t^2=4t+4$

よって，面積＝$\dfrac{1}{2}\times(t+2)\times(4t+4)=40$

$\dfrac{1}{2}(4t^2+4t+8t+8)=40$，$2t^2+6t+4=40$，

$2t^2+6t-36=0$， $t^2+3t-18=0$， $(t+6)(t-3)=0$， $t>0$ なので $t=3$

ゆえに点 A の x 座標は3， y 座標は $y=x^2$ に $x=3$ を代入して $y=3^2=9$
ゆえに点 A の座標は $(3,\ 9)$

[解答 14](1) $y=-x+4$　(2) $\left(3,\ \dfrac{9}{2}\right)$

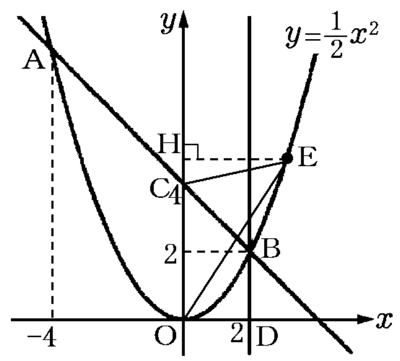
[解説]
(1) 点 A，B の座標がわかれば直線 AB の式を求めることができる。

点 A： $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に $x=-4$ を代入すると $y=\dfrac{1}{2}\times(-4)^2=8$ なので，点 A の座標は(－4，8)。

点 B ： $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に $x=2$ を代入すると $y=\dfrac{1}{2}\times 2^2=2$ なので，点 B の座標は(2，2)。

A(－4，8)，B(2，2)を通る直線の傾きは， $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{2-8}{2-(-4)}=\dfrac{-6}{6}=-1$ なので，

直線 AB の式は， $y=-x+b$ とおくことができる。
点 B(2，2)を通るので， $y=-x+b$ に $x=2$, $y=2$ を代入して， $2=-2+b$ ， $b=4$
よって，直線 AB の式は， $y=-x+4$ になる。
(2) まず，四角形 ODBC の面積を求める。
BD // OC なので，四角形 ODBC は台形である。
(1)より点 B の座標は(2, 2)， $y=-x+4$ の切片は 4 なので，
座標は右図のようになり，BD＝2，OC＝4，OD＝2



(ODBC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(上底 BD＋下底 OC)×高さ OD

＝$\dfrac{1}{2}\times(2+4)\times 2$＝6・・・①

次に，△OEC の面積は，右図の OC＝4 を底辺とすると，高さは EH になる。

よって，(△OEC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×OC×EH＝$\dfrac{1}{2}$×4×EH＝2EH・・・②

△OEC と四角形 ODBC の面積が等しので，①，②より，2EH＝6，EH＝6÷2＝3

したがって，点 E の x 座標は 3 になる。 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に $x=3$ を代入すると， $y=\dfrac{1}{2}\times 3^2=\dfrac{9}{2}$

よって，点 E の座標は $\left(3,\ \dfrac{9}{2}\right)$ になる。

[y 軸で 2 つの三角形に分ける]

[解答 15](1) A$(-2,\ 4)$　B$(3,\ 9)$　(2) 15

[解説]

(1) 交点においては，$y=ax^2$ の y と $y=bx+c$ の y が同じなので，ax^2 と $bx+c$ が等しくなる。

よって， $ax^2=bx+c$ が成り立つ。

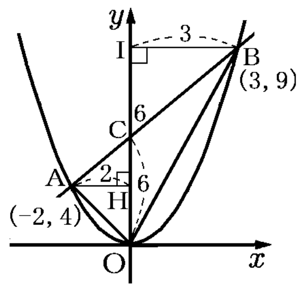
$y=x^2$ と $y=x+6$ の交点を求めるために，　$x^2=x+6$ とおく。

$x^2-x-6=0$，$(x-3)(x+2)=0$，$x=3,\ -2$

$x=3$ のとき $y=x+6=3+6=9$，$x=-2$ のとき $y=x+6=-2+6=4$

よって，A$(-2,\ 4)$，B$(3,\ 9)$

(2) △AOB を△AOC と△BOC に分けて考える。



右図の△AOC で，OC を底辺とすると高さは AH

$y=x+6$ の切片が 6 なので，OC＝6

また，点 A の x 座標が－2 なので AH＝2　よって，

(△AOC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×OC×AH＝$\dfrac{1}{2}$×6×2＝6

同様にして，

(△BOC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×OC×BI＝$\dfrac{1}{2}$×6×3＝9

よって，(△AOB の面積)＝(△AOC の面積)＋(△BOC の面積)＝6＋9＝15

[解答 16](1) B(－2，2)　(2) $y=x+4$　(3) 12

[解説]

(1) $y=ax^2$ の a がわかれば， $y=ax^2$ に点 B の x 座標を代入することで，点 B の y 座標を求めることができる。そこで，まず a の値を求める。

$y=ax^2$ は点 A(4，8)を通るので， $y=ax^2$ に $x=4,\ y=8$ を代入すると，

$8=a\times4^2$，$16a=8$， $a=\dfrac{8}{16}$， $a=\dfrac{1}{2}$ になる。

よって，放物線の式は $y=\dfrac{1}{2}x^2$

$y=\dfrac{1}{2}x^2$ に点 B の x 座標の $x=-2$ を代入すると， $y=\dfrac{1}{2}\times(-2)^2=2$

よって，点 B の座標は(－2，2)である。

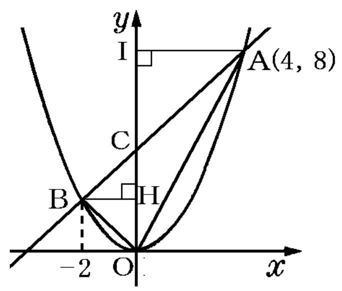
(2) 直線 AB は，A(4，8)，B(－2，2)を通るので，

(直線 AB の傾き)＝$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{8-2}{4-(-2)}=\dfrac{6}{6}=1$

傾きが 1 なので，この直線の式は $y=x+b$ とおくことができる。

点A(4，8)を通るので，$y=x+b$ に $x=4$，$y=8$ を代入すると，

$8=4+b$，$b=4$



よって，直線ABの式は，$y=x+4$ である。

(3) △AOBを△AOCと△BOCに分けて考える。

右図の△AOCで，OCを底辺とすると高さはAI

$y=x+4$ の切片が4なので，OC＝4

また，点Aの x 座標が4なのでAI＝4　よって，

(△AOCの面積)＝$\dfrac{1}{2}$×OC×AI＝$\dfrac{1}{2}$×4×4＝8

同様にして，

(△BOCの面積)＝$\dfrac{1}{2}$×OC×BH＝$\dfrac{1}{2}$×4×2＝4

よって，(△AOBの面積)＝(△AOCの面積)＋(△BOCの面積)＝8＋4＝12

[解答17](1) $y=3x+12$　(2) $a=\dfrac{3}{2}$　(3) 36

[解説]

(1) 「B，Cの座標→直線 l の式」の順で求める。

点Bは $y=9x^2$ 上にあるので，$x=-1$ を代入して，$y=9\times(-1)^2=9$

点Cは $y=9x^2$ 上にあるので，$x=\dfrac{4}{3}$ を代入して，$y=9\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=9\times\dfrac{16}{9}=16$

よって，点B(−1，9)，点C($\dfrac{4}{3}$，16)である。

(直線BCの傾き)＝$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{16-9}{\dfrac{4}{3}-(-1)}=\dfrac{7}{\dfrac{7}{3}}=\dfrac{7\times3}{\dfrac{7}{3}\times3}=\dfrac{7\times3}{7}=3$

傾きが3なので，直線 l の式は $y=3x+b$ とおくことができる。

点B(−1，9)を通るので，$y=3x+b$ に $x=-1$，$y=9$ を代入すると，

$9=3\times(-1)+b$，$b=12$　よって，直線 l の式は，$y=3x+12$ である。

(2) 「点Aの座標→a」の順で求める。

点Aは $y=3x+12$ 上にあり，点Aの x 座標は−2なので，

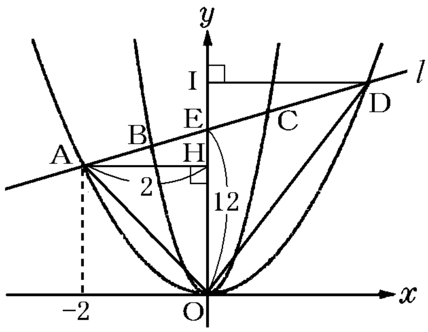
$x=-2$ を $y=3x+12$ に代入して，$y=3\times(-2)+12=-6+12=6$

よって，点Aの座標は(−2，6)である。

点Aは $y=ax^2$ 上にあるので，$x=-2$，$y=6$ を $y=ax^2$ に代入して，

$6=a\times(-2)^2$，$4a=6$，$a=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

(3) △OAD を△OAE と△ODE に分けて考える。
△OAE と△ODE で，共通の底辺を OE とすると，
点 E は直線 l ： $y=3x+12$ の切片なので，
OE＝12 である。△OAE の高さは 2 なので，



(△OAE の面積)＝$\frac{1}{2}$×12×2＝12･･･①
△ODE については, 底辺 OE＝12 はわかっているが,
高さ DI がわかっていない。
そこで，点 D の x 座標を求める。
点 D はこの放物線と直線 l の交点である。

(1)，(2)より，放物線の式は $y=\frac{3}{2}x^2$，直線 l の式は $y=3x+12$ である。

交点の x 座標を求めるために， $\frac{3}{2}x^2=3x+12$ とおく。

両辺を 2 倍すると， $3x^2=6x+24$，両辺を 3 でわって， $x^2=2x+8$
$x^2-2x-8=0$， $(x+2)(x-4)=0$， $x=-2,\ 4$
$x=-2$ は点 A の x 座標なので，点 D の x 座標は $x=4$ である。
よって，△ODE の高さは 4 である。

したがって，(△ODE の面積)＝$\frac{1}{2}$×12×4＝24･･･②
①，②より，(△OAD の面積)＝(△OAE の面積)＋(△ODE の面積)＝12＋24＝36

[解答 18](1) $a=\frac{1}{2}$ (2) $y=x+4$ (3) 12 (4) $\left(3,\ \frac{9}{2}\right)$

[解説]
(1) 点 A(−2，2)は $y=ax^2$ 上にあるので， $x=-2,\ y=2$ を $y=ax^2$ に代入して，

$2=a\times(-2)^2$， $4a=2$， $a=\frac{1}{2}$

(2) 点 B の x 座標は 4 なので， $x=4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して， $y=\frac{1}{2}\times4^2=8$

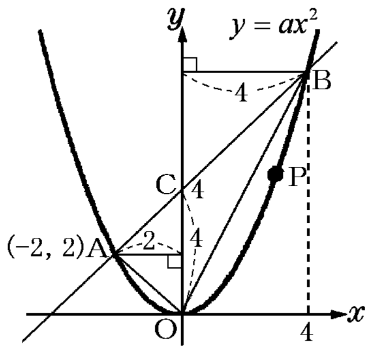
よって，点 B の座標は(4，8)である。
直線 AB は，A(−2，2)，B(4，8)を通るので，
(直線 AB の傾き)＝$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{8-2}{4-(-2)}=\frac{6}{6}=1$
傾きが 1 なので，直線 AB の式は $y=x+b$ とおくことができる。
点 A(−2，2)を通るので， $x=-2,\ y=2$ を $y=x+b$ に代入すると， $2=-2+b$， $b=4$

よって，直線 AB の式は，$y=x+4$

(3) 直線 AB の式が $y=x+4$ なので，点 C の y 座標は 4 で

OC＝4

△OBC で OC＝4 を底辺とすると，点 B の x 座標が 4 であることから△OBC の高さは 4



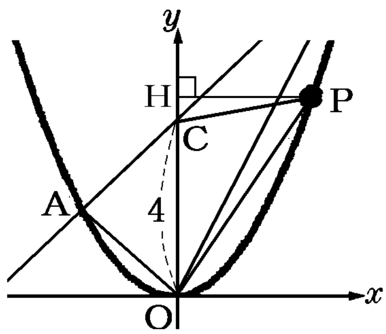
よって，(△OBC の面積)＝$\frac{1}{2}\times4\times4=8$

△OAC で OC＝4 を底辺とすると，点 A の x 座標が -2 であることから△OAC の高さは 2

よって，(△OAC の面積)＝$\frac{1}{2}\times4\times2=4$

したがって，(△OAB の面積)＝(△OBC の面積)＋(△OAC の面積)＝8＋4＝12

(4) △OPC の面積は△OAB の面積の $\frac{1}{2}$ なので $12\times\frac{1}{2}=6$



△OPC の底辺を OC＝4 とすると，高さは，右図の PH になるので，$\frac{1}{2}$×OC×PH＝(△OPC の面積)となる。

よって，$\frac{1}{2}\times4$×PH＝6，2PH＝6，PH＝3　よって，点 P の x 座標は 3

$y=\frac{1}{2}x^2$ に $x=3$ を代入すると，$y=\frac{1}{2}\times3^2=\frac{9}{2}$　よって，点 P の座標は $\left(3,\ \frac{9}{2}\right)$

[y 軸に平行な直線で 2 つの三角形に分ける]

[解答 19](1) $y=2x+4$　(2) 9

[解説]

(1) 点 B の x 座標は 2 なので，$x=2$ を $y=2x^2$ に代入して $y=2\times2^2=8$

よって，B$(2,\ 8)$

点 C の x 座標は -1 なので，$x=-1$ を $y=2x^2$ に代入して $y=2\times(-1)^2=2$

よって，C$(-1,\ 2)$

(直線 BC の傾き)＝$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{8-2}{2-(-1)}=\frac{6}{3}=2$

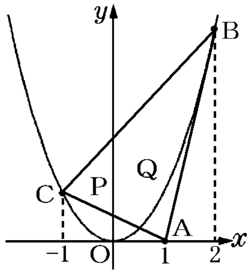
傾きが 2 なので，直線 BC の式は $y=2x+b$ とおくことができる。

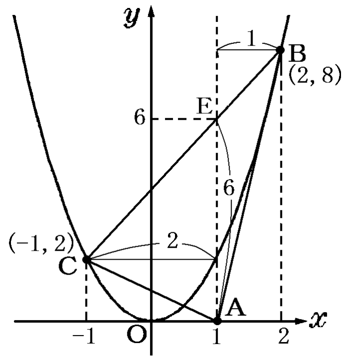
B$(2,\ 8)$ を通るので，$x=2,\ y=8$ を $y=2x+b$ に代入すると，

$8=2\times2+b$，$8=4+b$，$b=4$

よって，直線 BC の式は，$y=2x+4$

(2) △ABCをy軸で2つの部分に分けようとすると，右図のように，三角形Pと四角形Qになる。しかし，四角形Qの部分の面積を求めるのは,簡単ではない。そこで，点Aを通ってy軸に平行な直線を引き，直線BCとの交点をEとする。





$y=2x+4$に$x=1$を代入すると$y=6$

よって，点Eのy座標は6で，AE＝6

△ABEの底辺をAE＝6とする。

点Bのx座標が2，点Aのx座標は1なので△ABEの高さは$2-1=1$

よって，(△ABEの面積)＝$\dfrac{1}{2}\times 6\times 1=3$

△ACEの底辺をAE＝6とする。

点Cのx座標が-1，点Aのx座標は1なので△ABEの高さは$1-(-1)=2$

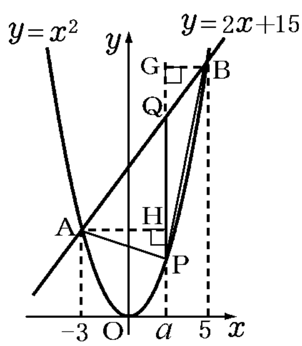
よって，(△ACEの面積)＝$\dfrac{1}{2}\times 6\times 2=6$

したがって，(△ABCの面積)＝(△ABEの面積)＋(△ACEの面積)＝$3+6=9$

[解答20](3，9)

[解説]

右図のように，y軸に平行な線分PQをひき，点P，Qのx座標を$x=a$とする。



△APBを△APQと△BPQに分けて考え，

△APQと△BPQの共通の底辺をPQとする。

点Pのx座標はaで，点Pは$y=x^2$上にあるので，

$x=a$を$y=x^2$に代入して$y=a^2$

点Qのx座標はaで，点Qは$y=2x+15$上にあるので，

$x=a$を$y=2x+15$に代入して$y=2a+15$

したがって，(底辺PQ)＝(点Qのy座標)－(点Pのy座標)＝$2a+15-a^2$

(△APQの高さAH)＝$a-(-3)=a+3$，(△BPQの高さBG)＝$5-a$

したがって，(△APQの面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺PQ)×(高さAH)＝$\dfrac{1}{2}\times(2a+15-a^2)\times(a+3)$

＝$\dfrac{1}{2}(2a^2+6a+15a+45-a^3-3a^2)=\dfrac{1}{2}(-a^3-a^2+21a+45)$

(△BPQの面積)＝$\dfrac{1}{2}$×(底辺PQ)×(高さBG)＝$\dfrac{1}{2}\times(2a+15-a^2)\times(5-a)$

$=\dfrac{1}{2}\left(10a-2a^2+75-15a-5a^2+a^3\right)=\dfrac{1}{2}\left(a^3-7a^2-5a+75\right)$

(△APB の面積)＝(△APQ の面積)＋(△BPQ の面積)

$=\dfrac{1}{2}\left(-a^3-a^2+21a+45\right)+\dfrac{1}{2}\left(a^3-7a^2-5a+75\right)=\dfrac{1}{2}\left(-8a^2+16a+120\right)=-4a^2+8a+60$

「△APB の面積が 48 になる」ので，$-4a^2+8a+60=48$

$-4a^2+8a+12=0$，$a^2-2a-3=0$，$(a+1)(a-3)=0$，$a=-1,\ a=3$

「点 P の x 座標は $0<x<5$ とする」とあるので，$a=-1$ は不適，$a=3$ は適する。

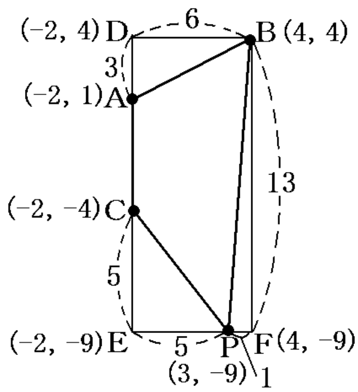
点 P は $y=x^2$ 上にあるので，$y=x^2$ に $x=3$ を代入して，$y=3^2=9$

よって，点 P の座標は(3，9)

[外側の長方形から複数の三角形を引く]

[解答 21]50

[解説]



右図のように，四角形 ACPB を囲む長方形 BDEF を，長方形の辺が x 軸または y 軸に平行になるようにとる。

外側の長方形 BDEF の面積から，△ABD，△CPE，△BPF の面積を引いて四角形 ACPB の面積を求める。

まず，A，C，P，B の座標を求める。

A：$x=-2$ を $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に代入して $y=\dfrac{1}{4}\times(-2)^2=1$，A(−2，1)

C：$x=-2$ を $y=-x^2$ に代入して $y=-(-2)^2=-4$，C(−2，−4)

P：$x=3$ を $y=-x^2$ に代入して $y=-3^2=-9$，P(3，−9)

B：$x=4$ を $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に代入して $y=\dfrac{1}{4}\times4^2=4$，B(4，4)

A，C，P，B の座標をもとに D，E，F の座標を求めると図のようになる。

これをもとに，各線分の長さを求めると図のようになる。

(長方形 BDEF の面積)＝13×6＝78

(△ABD の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times6\times3=9$

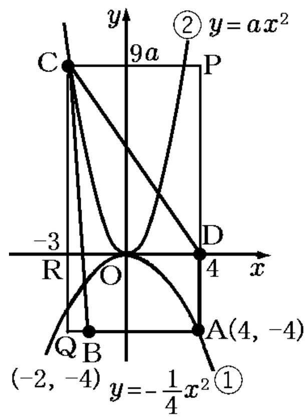
(△CPE の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times5\times5=\dfrac{25}{2}$

(△BPF の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times1\times13=\dfrac{13}{2}$

(四角形 ACPB)＝(長方形 BDEF)−(△ABD)−(△CPE)−(△BPF)＝$78-9-\dfrac{25}{2}-\dfrac{13}{2}=50$

[解答 22] $a=\dfrac{8}{9}$

[解説]



右図で，四角形 ABCD の面積は，長方形 AQCP から直角三角形 PCD と直角三角形 QBC の面積を引いたものになる。

まず，各点の座標を求めておく。

点 C の x 座標は -3 なので，$y=ax^2$ に $x=-3$ を代入して，

$y=a\times(-3)^2=9a$。よって，点 C の座標は $(-3,\ 9a)$ である。

点 P の座標は $(4,\ 9a)$，点 D の座標は $(4,\ 0)$，

点 A の座標は $(4,\ -4)$，点 B の座標は $(-2,\ -4)$，

点 Q の座標は $(-3,\ -4)$ である。

(長方形 AQCP の面積)＝AQ×AP＝$(4-(-3))\times(9a-(-4))=7\times(9a+4)=63a+28$

(△PCD の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×PC×PD＝$\dfrac{1}{2}\times(4-(-3))\times(9a-0)=\dfrac{1}{2}\times7\times9a=\dfrac{63}{2}a$

(△QBC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×QB×QC＝$\dfrac{1}{2}\times(-2-(-3))\times(9a-(-4))=\dfrac{9}{2}a+2$

(四角形 ABCD の面積)＝(長方形 AQCP の面積)－(△PCD の面積)－(△QBC の面積)

$=63a+28-\dfrac{63}{2}a-\left(\dfrac{9}{2}a+2\right)=63a+28-\dfrac{63}{2}a-\dfrac{9}{2}a-2=\dfrac{54}{2}a+26=27a+26$

「四角形 ABCD の面積が 50」なので,

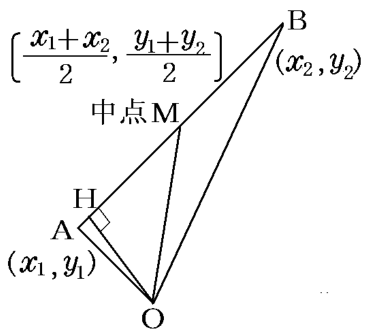
$27a+26=50$，$27a=24$，$a=\dfrac{24}{27}=\dfrac{8}{9}$

【】面積の二等分

[底辺の中点の座標]

[解答 23] $y=-5x$

[解説]



まず，右図を使って，△OAB の面積を二等分する直線 OM について考える。

△OAM で AM を底辺とすると，高さは OH

△OBM で BM を底辺とすると，高さは OH

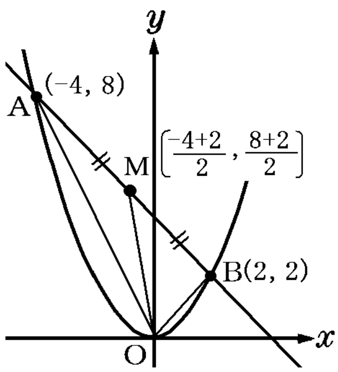
高さ OH が共通なので，AM＝BM なら面積が等しい。

すなわち, 線分 AB の中点を M とすると, 直線 OM は△OAB の面積を二等分する。

△AOB の面積を二等分する OM →M は AB の中点 中点の求め方：2 つの座標の平均をとる。

そこで，この問題を解く。

まず，点 A，B の座標を求める。



点Aの x 座標は－4 なので, x ＝－4 を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して,

$y=\frac{1}{2}\times(-4)^2$ ＝8　よって，点 A の座標は(－4，8)

点 B の x 座標は 2 なので，x ＝2 を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して,

$y=\frac{1}{2}\times 2^2$ ＝2　よって，点 B の座標は(2，2)

中点 M の座標の x 座標は点 A，B のそれぞれの x 座標の平均に,
中点 M の座標の y 座標は点 A，B のそれぞれの y 座標の平均になる。

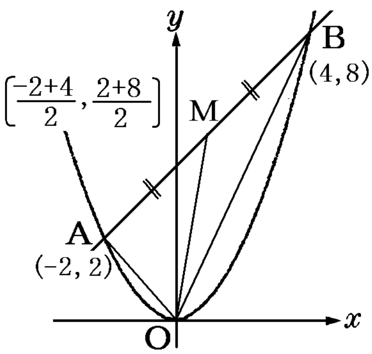
A$(-4,\ 8)$，B$(2,\ 2)$なので，M$\left(\frac{-4+2}{2},\ \frac{8+2}{2}\right)$，すなわち M$(-1,\ 5)$

OM は原点を通る直線なので，(OM の傾き)＝$\frac{5}{-1}=-5$

よって，OM の式は $y=-5x$ である。

[解答 24](1) $a=\frac{1}{2}$　(2) $y=5x$

[解説]



(1) $y=ax^2$ が A(－2，2)を通るので，$x=-2$，$y=2$ を $y=ax^2$ に代入する。$2=a\times(-2)^2$，$2=4a$，$a=\frac{1}{2}$

(2) 原点 O を通り，△AOB の面積を 2 等分する直線は AB の中点 M を通る。

点 B の x 座標は 4 なので，$x=4$ を $y=\frac{1}{2}x^2$ に代入して,

$y=\frac{1}{2}\times 4^2$ ＝8　よって，点 B の座標は(4，8)

点 A(－2，2)，B(4，8)の中点 M の座標は

$\left(\frac{-2+4}{2},\ \frac{2+8}{2}\right)=(1,\ 5)$

OM は原点を通る直線なので，(OM の傾き)＝$\dfrac{5}{1}=5$

よって，OM の式は $y=5x$ である。

[解答 25](1)　$a=1$　(2)　$y=2x+8$　(3)　$y=\dfrac{8}{3}x+\dfrac{16}{3}$

[解説]

(1)　$y=ax^2$ が点 A(−2，4)を通るので，　$y=ax^2$ に $x=-2,\ y=4$ を代入すると，

$4=a\times(-2)^2$，$4a=4,\ a=1$

(2)　点 A，B の座標から直線 AB の式を求める。

点 B は $y=x^2$ の上にあり，点 B の x 座標は 4 なので，　$y=x^2$ に $x=4$ を代入して，

$y=4^2=16$　よって，点 B は(4，16)　点 A は(−2，4)

(直線 AB の傾き)＝$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{16-4}{4-(-2)}=\dfrac{12}{6}=2$

傾きが 2 なので，直線 AB の式は $y=2x+b$ とおくことができる。

点 A(−2，4)を通るので，　$y=2x+b$ に $x=-2,\ y=4$ を代入すると，

$4=2\times(-2)+b$，$4=-4+b$，$b=8$　よって，直線 AB の式は，　$y=2x+8$

(3)　$y=2x+8$ に $y=0$ を代入すると，　$0=2x+8$

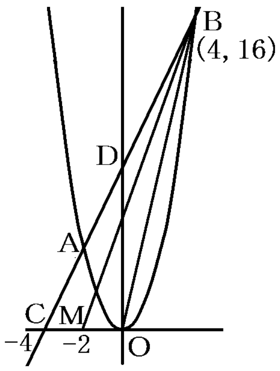
$x=-4$　ゆえに $\mathrm{C}(-4,\ 0)$

B を通り，△OCB の面積を二等分する直線は OC の中点

$\mathrm{M}(-2,\ 0)$を通る。

$\mathrm{B}(4,\ 16)$，$\mathrm{M}(-2,\ 0)$を通る直線の式を求める。

(直線 MB の傾き)＝$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{16-0}{4-(-2)}=\dfrac{16}{6}=\dfrac{8}{3}$



傾きが $\dfrac{8}{3}$ なので, 直線 MB の式は $y=\dfrac{8}{3}x+c$ とおくことができる。

点 $\mathrm{M}(-2,\ 0)$を通るので，　$y=\dfrac{8}{3}x+c$ に $x=-2,\ y=0$ を代入すると，

$0=\dfrac{8}{3}\times(-2)+b$，$0=-\dfrac{16}{3}+b$，$b=\dfrac{16}{3}$　よって，直線 MB の式は，　$y=\dfrac{8}{3}x+\dfrac{16}{3}$

[解答 26](1) $a=2$ (2) $y=x+3$

[解説]

(1) まず，直線l上の 2 点 A，B の座標から直線lの傾きをaを使って表す。

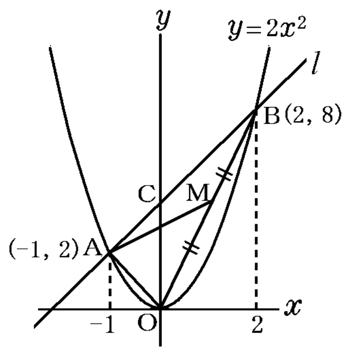
点 A のx座標は－1 なので， $y=ax^2$ に$x=-1$を代入して， $y=a\times(-1)^2=a$

よって，点 A の座標は$(-1,\ a)$

点 B のx座標は 2 なので， $y=ax^2$ に$x=2$を代入して， $y=a\times 2^2=4a$

よって，点 B の座標は$(2,\ 4a)$

よって，(直線 AB(直線l)の傾き)＝$\dfrac{4a-a}{2-(-1)}=\dfrac{3a}{3}=a$



直線lの傾きは 2 なので， $a=2$

(2) 点 A を通り，△OAB の面積を 2 等分する直線は，右図のように，線分 OB の中点 M を通る。

点 B のx座標は 2 なので， $y=2x^2$ に$x=2$を代入して，

$y=2\times 2^2=8$ よって，点 B の座標は(2，8)である。

M は線分 OB の中点なので，M の座標は，

M$\left(\dfrac{0+2}{2},\ \dfrac{0+8}{2}\right)$，M(1，4)である。

△OAB の面積を 2 等分する直線 AM は，A(－1，2)，M(1，4)を通るので，

(直線 AM の傾き)＝$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{4-2}{1-(-1)}=\dfrac{2}{2}=1$

傾きが 1 なので，直線 AM の式は$y=x+b$とおくことができる。

A(－1，2)を通るので， $y=x+b$ に$x=-1,\ y=2$を代入すると，

$2=-1+b$， $b=3$ よって，直線 AM の式は$y=x+3$

[四角形の面積の二等分など]

[解答 27] $a=-\dfrac{1}{4}$

[解説]

まず，台形 ABDC の面積を求めるために，点 C と点 D のy座標を計算する。

点 C のx座標は－4 なので， $x=-4$ を $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入すると， $y=\dfrac{1}{2}\times(-4)^2=8$

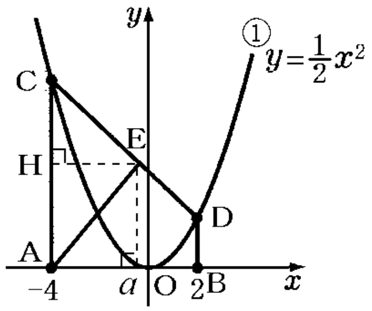
点 D のx座標は 2 なので， $x=2$ を $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入すると， $y=\dfrac{1}{2}\times 2^2=2$

したがって，AC＝8，BD＝2

また，BA＝2－(－4)＝2＋4＝6

(台形 ABDC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(上底 BD＋下底 AC)×(高さ BA)

$=\frac{1}{2}\times(2+8)\times6=30$



右図のように点 E の x 座標を a とする(図では a が負の値である場合を描いているが，正の値でも，以下の計算は成り立つ)。
「直線 AE が台形 ABDC の面積を 2 等分する」とあるので，
△EAC の面積は，30÷2＝15 である。
△EAC の底辺を AC(＝8)とすると，高さは EH である。
EH＝$a-(-4)=a+4$

(△EAC の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 AC)×(高さ EH)＝15

$\frac{1}{2}\times8\times(a+4)=15$，$4(a+4)=15$，$4a+16=15$，$4a=-1$　よって，$a=-\frac{1}{4}$

[解答 28](1) $a=1$　(2) $y=x+6$　(3) $\left(\frac{25}{12},\ \frac{97}{12}\right)$

[解説]

(1) $y=ax^2$ 上に点 A(−2，4)があるので，$x=-2,\ y=4$ を $y=ax^2$ に代入して，
$4=a\times(-2)^2$，$4a=4$，$a=1$

(2) 直線 AB は点 A(−2，4)，B(3，9)を通るので，

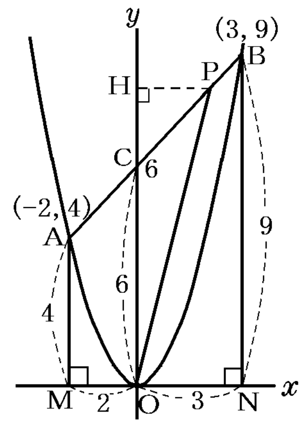
(直線 AB の傾き)＝$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{9-4}{3-(-2)}=\frac{5}{5}=1$

傾きが 1 なので，直線 AB の式は $y=x+b$ とおくことができる。
点 A(−2，4)を通るので，$y=x+b$ に $x=-2,\ y=4$ を
代入すると，$4=-2+b$，$b=6$　よって，直線 AB の式は，$y=x+6$

(3) まず，台形 AMNB の面積を計算する。

(台形 AMNB の面積)＝$\frac{1}{2}\times(4+9)\times5=\frac{65}{2}$

(台形 AMOC の面積)＝$\frac{1}{2}\times(4+6)\times2=10$



線分 OP が台形 AMNB の面積を 2 等分するので，

(台形 AMOC の面積)＋(△OPC の面積)＝$\frac{65}{2}\times\frac{1}{2}$

したがって，(△OPC の面積)＝$\frac{65}{2}\times\frac{1}{2}-10=\frac{25}{4}$

底辺を OC とすると，右図の PH が高さになる。

ゆえに，(△OPC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×OC×PH＝$\dfrac{25}{4}$

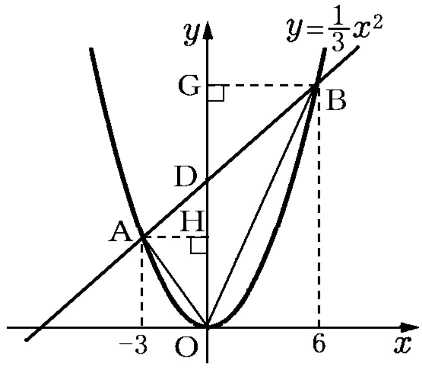
OC＝6 なので，$\dfrac{1}{2}\times 6$×PH＝$\dfrac{25}{4}$　ゆえに，PH＝$\dfrac{25}{4}\div 3=\dfrac{25}{12}$

よって，点 P の x 座標は $\dfrac{25}{12}$　$y=x+6=\dfrac{25}{12}+6=\dfrac{97}{12}$　ゆえに点 P の座標は $\left(\dfrac{25}{12},\ \dfrac{97}{12}\right)$

[解答 29](1) 27　(2)　$y=-2x+6$

[解説]

(1)(△OAB の面積)＝(△OAD の面積)＋(△OBD の面積)で，△OAD，△OBD の共通の底辺 OD の長さがわかれば，高さは，それぞれ AH＝3，BG＝6 なので面積がわかる。そこで，まず，直線 AB の式を求める。



点 A の x 座標－3 を $y=\dfrac{1}{3}x^2$ に代入すると，

$y=\dfrac{1}{3}\times(-3)^2=3$ なので，点 A の座標は(－3，3)，

点 B の x 座標 6 を $y=\dfrac{1}{3}x^2$ に代入すると，

$y=\dfrac{1}{3}\times 6^2=12$ なので，点 B の座標は(6，12)になる。

(直線 AB の傾き)＝$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{12-3}{6-(-3)}=\dfrac{9}{9}=1$ なので。

直線 AB の式は，$y=x+b$ とおくことができる。

$y=x+b$ に点 A の座標(－3，3)を代入すると，$3=-3+b$，$b=6$

よって，直線 AB の式は $y=x+6$ になり，切片(y 切片)は 6 になる。

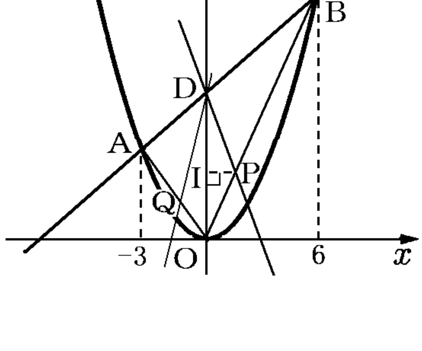
したがって，OD＝6 であることがわかる。

(△OAB の面積)＝(△OAD の面積)＋(△OBD の面積)

＝$\dfrac{1}{2}$×OD×AH＋$\dfrac{1}{2}$×OD×BG＝$\dfrac{1}{2}$×6×3＋$\dfrac{1}{2}$×6×6＝9＋18＝27

(2) 点 D を通り，△OAB の面積を二等分する直線が右図の DQ になることはない(明らかに△DAQ の面積は四角形 DQOB の面積よりも小さいから)。

右図 DP あたりが△OAB の面積を二等分する直線になる。



面積を二等分するので，

(四角形 AOPD の面積)＝(△OAB の面積)$\times \dfrac{1}{2}$

(△OAD の面積)＋(△OPD の面積)＝(△OAB の面積)$\times \dfrac{1}{2}$

(1)より，(△AOD の面積)＝9，(△OAB の面積)＝27 なので，

9＋(△OPD の面積)＝$27\times \dfrac{1}{2}$，(△OPD の面積)＝$\dfrac{27}{2}-9=\dfrac{27-18}{2}=\dfrac{9}{2}$

△OPD の底辺を図の OD＝6 とすると高さは PI になるので，

(△OPD の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times$OD$\times$PI＝$\dfrac{9}{2}$，$\dfrac{1}{2}\times 6\times$PI＝$\dfrac{9}{2}$，6×PI＝9，PI＝$\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}$

したがって，点 P の x 座標は $\dfrac{3}{2}$ になる。

点 P の y 座標を求めるために直線 OB の式を求める。

(1)より点 B の座標は(6，12)なので，(直線 OB の傾き)＝$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{12-0}{6-0}=2$

直線 OB は原点を通るので，その式は，$y=2x$ になる。

点 P の x 座標 $\dfrac{3}{2}$ を $y=2x$ に代入すると，$y=2\times\dfrac{3}{2}=3$

よって，点 P の座標は $\left(\dfrac{3}{2},\ 3\right)$ になる。点 D の座標は(0，6)なので，

(直線 DP の傾き)＝$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{3-6}{\frac{3}{2}-0}=\dfrac{-3\times 2}{\frac{3}{2}\times 2}=\dfrac{-6}{3}=-2$

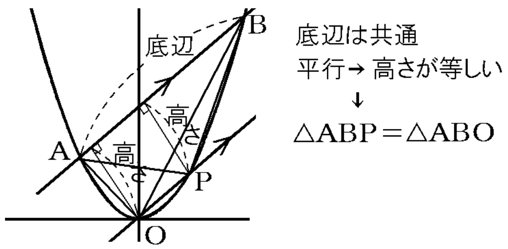
直線 DP の切片は 6 なので，
直線 DP の式は，$y=-2x+6$ になる。

【】等積変形

[解答 30](1，1)

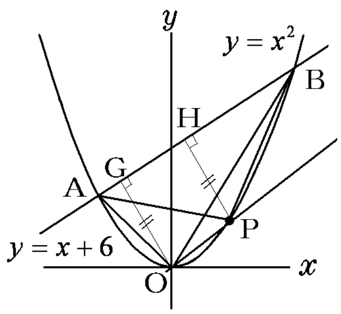
[解説]

平行線を引き，等積変形



右@図のように，原点を通って，AB に平行な直線を引く。この直線と放物線と交わる点が求める点 P になる。

△AOB と△APB の共通の底辺を AB とすると，AB // OP ならば，右図のように，OG＝PH となり，高さが等しくなるので，2 つの三角形の面積は等しくなる。



OP の傾きは直線 AB($y=x+6$)の傾きと同じなので，OP の式は，$y=x$ となる。$y=x$ と $y=x^2$ の交点を求めるために，$y=x$ と $y=x^2$ を連立方程式として解く。$y=x^2$ を $y=x$ に代入して，

$x^2=x,\ x^2-x=0,\ x(x-1)=0,\ x=0,\ 1$

よって，点 P の x 座標は 1 になる。$x=1$を $y=x$ に代入すると，$y=1$

よって，点 P の座標は，(1，1)となる。

[解答 31](1) (－2，4)　(2) $y=-x+2$　(3) $x=-1$

[解説]

(1)(2) 点 A の x 座標は－2 なので，$y=x^2$ に $x=-2$ を代入すると，$y=(-2)^2=4$

よって，点 A の座標は(－2，4)

同様に，点 B の x 座標は 1 なので，$y=x^2$ に $x=1$を代入すると，$y=1^2=1$

よって，点 B の座標は(1，1)

直線 AB は，A(－2，4)，B(1，1)を通るので，

(直線 AB の傾き)＝$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$＝$\dfrac{1-4}{1-(-2)}=\dfrac{-3}{3}=-1$

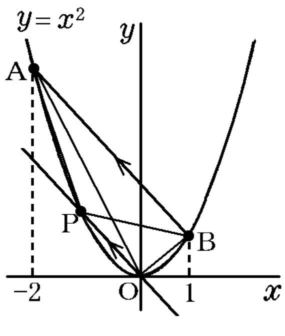
傾きが－1 なので，直線 AB の式は $y=-x+b$ とおくことができる。

点 B(1，1)を通るので，$y=-x+b$ に $x=1,\ y=1$ を代入すると，

$1=-1+b$，$b=2$

よって，直線 AB の式は，$y=-x+2$

(3) 右図のように，OP // BA となるような直線 OP を引くと，△PAB の面積と△OAB の面積は等しくなる(底辺 AB が共通で，高さが等しいから)。
このとき，OP の傾きは，直線 AB($y=-x+2$)の傾き－1 と等しくなるので，OP の式は $y=-x$ となる。
$y=-x$ と $y=x^2$ の交点を求めるために， $x^2=-x$ とおく。
$x^2+x=0$， $x(x+1)=0$， $x=0,\ -1$　よって，点 P の x 座標は
$x=-1$



[解答 32](1) $a=\dfrac{1}{3}$　(2) $y=x+6$　(3) $t=2$

[解説]
(1) 点 B(6，12)は $y=ax^2$ 上にあるので， $x=6,\ y=12$ を $y=ax^2$ に代入すると，

$12=a\times 6^2$， $36a=12$， $a=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

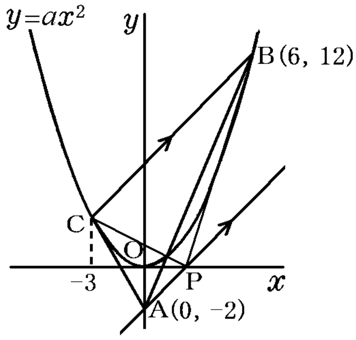
(2) まず，点 C の座標を求める。点 C は放物線 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ 上にあるので，

$x=-3$ を $y=\dfrac{1}{3}x^2$ に代入すると， $y=\dfrac{1}{3}\times(-3)^2=3$

よって，点 C の座標は(－3，3)
直線 BC は，B(6，12)，C(－3，3)を通るので，

(直線 BC の傾き)＝ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ＝ $\dfrac{12-3}{6-(-3)}=\dfrac{9}{9}=1$

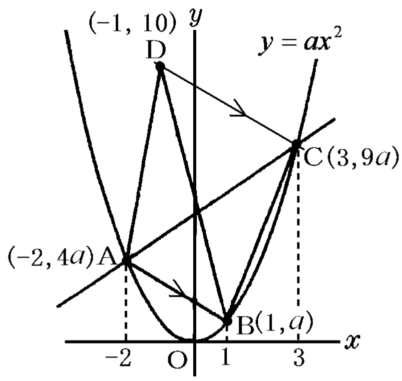
傾きが 1 なので，直線 BC の式は $y=x+b$ とおくことができる。
点 C(－3，3)を通るので， $y=x+b$ に $x=-3,\ y=3$ を代入すると， $3=-3+b$， $b=6$
よって，直線 BC の式は， $y=x+6$
(3) 右図のように，AP // CB となるように，x 軸上に点 P をとると，△PBC と△ABC の面積が等しくなる(底辺 BC が共通で，高さが等しいから)。このとき，直線 AP の傾きは直線 BC($y=x+6$)の傾きと同じなので 1 である。また，点 A の座標が(0, －2)であるので, AP の切片は－2 である。よって，直線 AP の式は， $y=x-2$ である。 $y=x-2$ は点 P(t，0)を通るので， $x=t,\ y=0$ を代入すると， $0=t-2$， $t=2$



[解答 33] $a=\dfrac{10}{13}$

[解説]

△ABC と△ABD の底辺を AB とすると，面積が等しくなることから，この 2 つの三角形の高さは等しい。



よって, AB // DC で, 直線 AB と直線 DC の傾きは等しい。

点 A は $y=ax^2$ 上にあり， x 座標が－2 なので，

$x=-2$ を $y=ax^2$ に代入して， $y=a\times(-2)^2=4a$

よって，点 A の座標は$(-2,\ 4a)$になる。

同様にして，点 B$(1,\ a)$，点 C$(3,\ 9a)$になる。

また，点 D(－1，10)なので，

(直線 AB の傾き)＝$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{a-4a}{1-(-2)}=\dfrac{-3a}{3}=-a$

(直線 DC の傾き)＝$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{9a-10}{3-(-1)}=\dfrac{9a-10}{4}$

直線 AB と直線 DC の傾きは等しいので,

$-a=\dfrac{9a-10}{4}$， $-4a=9a-10$, $-13a=-10$,

$a=\dfrac{10}{13}$

【】線分比と面積比

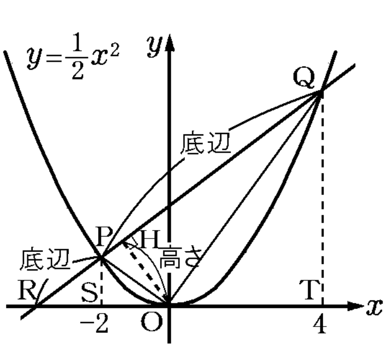
[解答 34](1) $y=x+4$ (2) 1：3

[解説]

(1) 点 P の x 座標 $x=-2$ を $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入すると $y=\dfrac{1}{2}\times(-2)^2=2$ なので，P(－2，2)

点 Q の x 座標 $x=4$ を $y=\dfrac{1}{2}x^2$ に代入すると $y=\dfrac{1}{2}\times4^2=8$ なので，Q(4，8)

(直線 PQ の傾き)＝$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{8-2}{4-(-2)}=\dfrac{6}{6}=1$ なので，直線 PQ の式は， $y=x+b$ とおくことができる。



$y=x+b$ に P(－2，2)を代入すると， $2=-2+b$ ， $b=4$

したがって，直線 PQ の式は， $y=x+4$ となる。

(2) 右図のように，△PRO の底辺を RP，△POQ の底辺を PQ とすると，高さ(OH)は共通である。

したがって，△PRO と△POQ の面積比は，底辺 RP と PQ の比(RP：PQ)と等しくなる。

PS // QT なので，平行線の性質より，RP：PQ＝RS：ST である。

そこで，点 R の x 座標を求める。

(1)で求めた $y=x+4$ に $y=0$ を代入すると， $0=x+4$， $x=-4$

よって，RS＝－2－(－4)＝2，ST＝4－(－2)＝6

したがって，(△PRO の面積)：(△POQ の面積)＝RP：PQ＝RS：ST＝2：6＝1：3 である。

[解答 35](1) $a=1$　(2) $y=2x+8$　(3) $\dfrac{3}{4}$ 倍

[解説]

(1) 点 A(－2，4)は $y=ax^2$ 上にあるので， $x=-2,\ y=4$ を $y=ax^2$ に代入して，

$4=a\times(-2)^2$， $4a=4$， $a=1$

(2) 点 B の x 座標は 4 なので， $y=x^2$ に $x=4$ を代入して， $y=4^2=16$

よって点 B の座標は(4，16)である。点 A の座標は(－2，4)なので，

(直線 AB の傾き)＝$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{16-4}{4-(-2)}=\dfrac{12}{6}=2$

傾きが 2 なので，直線 AB の式は $y=2x+b$ とおくことができる。

点 A(－2，4)を通るので， $y=2x+b$ に $x=-2,\ y=4$ を代入すると，

$4=-4+b$, $b=8$

よって，直線 AB の式は， $y=2x+8$

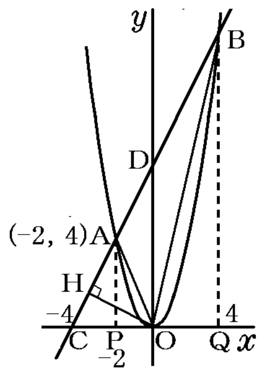
(3) 右図のように，△OAB の底辺を AB とすると，高さは OH である。また，△OCB の底辺を CB とすると，高さは OH である。よって，この 2 つの三角形は高さが共通なので，

面積比は底辺の長さの比になる。すなわち，

(△OAB の面積)：(△OCB の面積)＝AB：CB

AP // BQ なので，AB：CB＝PQ：CQ

点 C の x 座標を求めるために， $y=2x+8$ に $y=0$ を代入する。



$0=2x+8$， $2x=-8$， $x=-4$

したがって，点 C の x 座標は－4

PQ＝4－(－2)＝6，CQ＝4－(－4)＝8

よって，

(△OAB の面積)：(△OCB の面積)＝AB：CB＝PQ：CQ＝6：8＝3：4

したがって，△OAB の面積は△OCB の面積の $\dfrac{3}{4}$ 倍になる。

[解答 36](1) $a=\frac{1}{3}$　$b=2$　(2) (−6，0)　(3) 5：4

[解説]

(1) $y=ax^2$ は点 B(3，3)を通るので，$x=3,\ y=3$ を $y=ax^2$ に代入すると，

$3=a\times3^2$，$9a=3$，$a=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

$y=\frac{1}{3}x+b$ は点 B(3，3)を通るので，$x=3,\ y=3$ を直線 $y=\frac{1}{3}x+b$ に代入すると，

$3=\frac{1}{3}\times3+b$，$3=1+b$，$b=2$

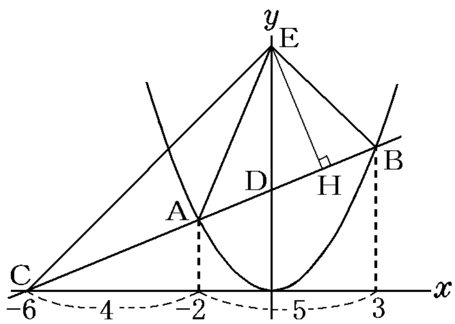
(2) 点 C は x 軸上にあるので，y 座標は 0

$y=\frac{1}{3}x+2$ に $y=0$ を代入すると，$0=\frac{1}{3}x+2$，

両辺を 3 倍して，$0=x+6$，$x=-6$

よって，点 C の座標は(−6，0)

(3) C，A，B の x 座標がそれぞれ−6，−2，3 であることから CA：AB＝4：5



△ABE と△ACE の底辺をそれぞれ AB，AC とすると，高さ(右図 EH)は共通になる。
よって，底辺の比が面積比となる。
したがって，△ABE：△ACE＝5：4

[解答 37](1) $y=-x+4$　(2) ($2\sqrt{2}$，4)　(3) $y=\frac{5}{3}x+\frac{20}{3}$

[解説]

(1) 点 A の x 座標が -4 なので，点 A の y 座標は $y=\frac{1}{2}x^2$ に $x=-4$ を代入して

$y=\frac{1}{2}\times(-4)^2=8$　よって，点 A の座標は(−4，8)

点 P の x 座標が 2 なので，点 P の y 座標は $y=\frac{1}{2}x^2$ に $x=2$ を代入して

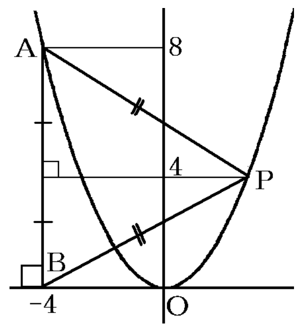
$y=\frac{1}{2}\times2^2=2$　よって，点 P の座標は(2，2)

(直線 AP の傾き)＝$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-8}{2-(-4)}=\frac{-6}{6}=-1$

傾きが−1 なので，直線 AP の式は $y=-x+b$ とおくことができる。

点P(2，2)を通るので，$y=-x+b$ に $x=2,\ y=2$ を代入すると，

$2=-2+b$，$b=4$　よって，直線APの式は，$y=-x+4$

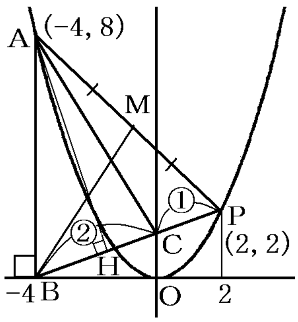


(2) △PABが，PA＝PBの二等辺三角形であることから，点Pの y 座標は点Aと点Bの y 座標の中点となる。点Aの y 座標は(1)より8なので，点Pの y 座標は $y=\dfrac{8+0}{2}=4$

$y=\dfrac{1}{2}x^2$ に $y=4$ を代入すると $4=\dfrac{1}{2}x^2$，$x^2=8$，$x>0$ なので

$x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

ゆえに点Pの座標は$(2\sqrt{2}，4)$



(3) △ABCの底辺をBC，△ACPの底辺をCPとすると，高さはともに図のAHになる。高さが同じなので底辺の長さの比が面積比と等しくなる。

△ABCの面積が△ACPの面積の2倍になるので，

BC：CP＝2：1となる。

よって，点Bの x 座標が -4 なので，点Pの x 座標は2，点Pの y 座標は $y=\dfrac{1}{2}\times 2^2=2$　ゆえに点Pの座標は$(2，2)$となる。(1)より点Aの座標は$(-4，8)$　点B$(-4，0)$を通り，△ABPの面積を2等分する直線はAPの中点 M$\left(\dfrac{-4+2}{2},\ \dfrac{8+2}{2}\right)$＝$(-1，5)$を通る。

(直線BMの傾き)＝$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{5-0}{-1-(-4)}=\dfrac{5}{3}$

傾きが $\dfrac{5}{3}$ なので，直線BMの式は $y=\dfrac{5}{3}x+b$ とおくことができる。

点B$(-4，0)$を通るので，$y=\dfrac{5}{3}x+b$ に $x=-4,\ y=0$ を代入すると，

$0=\dfrac{5}{3}\times(-4)+b$，$0=-\dfrac{20}{3}+b$，$b=\dfrac{20}{3}$

よって，直線BMの式は，$y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{20}{3}$

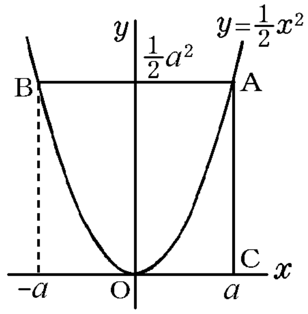
【】正方形・平行四辺形など

[正方形]

[解答 38](4，8)

[解説]

点 A の x 座標を a とする(ただし，$a>0$)。



点 A は $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上にあるので，y 座標は，$y=\dfrac{1}{2}a^2$

よって，AC＝$\dfrac{1}{2}a^2$

AB は x 軸に平行なので，点 B は y 軸について点 A と対称である。

したがって，点 B の x 座標は $-a$ である。

よって，AB＝$a-(-a)=2a$

AB＝AC なので，$2a=\dfrac{1}{2}a^2$，$a^2=4a$，$a^2-4a=0$，$a(a-4)=0$

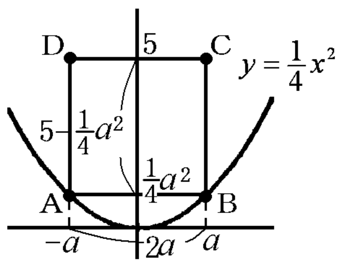
$a>0$ なので，$a=4$

点 A の y 座標は，$y=\dfrac{1}{2}a^2=\dfrac{1}{2}\times 4^2=8$

したがって，点 A の座標は(4，8)

[解答 39](2，1)

[解説]



点 B の x 座標を a とすると B$\left(a,\ \dfrac{1}{4}a^2\right)$

点Cの y 座標が 5 なので，BC=$5-\dfrac{1}{4}a^2$

また，点 B の x 座標は a なので，AB＝ $2a$

四角形 ABCD は正方形なので，

$2a=5-\dfrac{1}{4}a^2$，$8a=20-a^2$，$a^2+8a-20=0$，$(a-2)(a+10)=0$

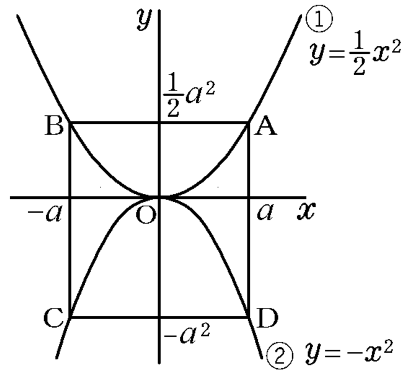
$a=2,\ -10$　　$a>0$ なので，$a=2$

$y=\dfrac{1}{4}x^2$ に $x=2$ を代入すると，$y=1$

よって，点 B の座標は(2，1)

[解答 40](1) $\left(-a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ (2) $a=\frac{4}{3}$

[解説]



右図より，点 A，B，D の座標は，

A$\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$，B$\left(-a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$，D$\left(a,\ -a^2\right)$である。

四角形 ABCD が正方形になることから，AB＝AD

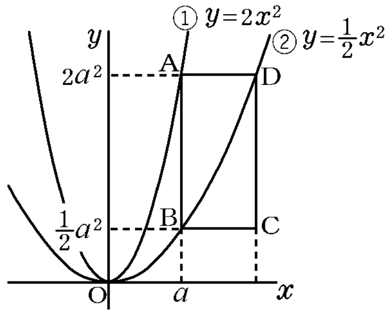
AB＝$a-(-a)=2a$，AD＝$\frac{1}{2}a^2-\left(-a^2\right)=\frac{3}{2}a^2$

よって，$2a=\frac{3}{2}a^2$，$3a^2=4a$，$a^2=\frac{4}{3}a$，

$a^2-\frac{4}{3}a=0$，$a\left(a-\frac{4}{3}\right)=0$　$a>0$ なので，$a=\frac{4}{3}$

[解答 41](1) $\left(2a,\ 2a^2\right)$ (2) $\left(\frac{2}{3},\ \frac{8}{9}\right)$

[解説]



点 A，B の座標は，右図より，

A$\left(a,\ 2a^2\right)$，B$\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$

点 D の y 座標は，右図より $2a^2$ なので，

$y=\frac{1}{2}x^2$ に $y=2a^2$ を代入して，

$2a^2=\frac{1}{2}x^2$，$x^2=4a^2$，$x=\pm 2a$，$x>0$ なので，$x=2a$

よって，点 D の座標は$\left(2a,\ 2a^2\right)$

ABCD が正方形のとき AB＝AD，AB＝$2a^2-\frac{1}{2}a^2=\frac{3}{2}a^2$，AD＝$2a-a=a$

よって，$\frac{3}{2}a^2=a$，$3a^2=2a$，$3a^2-2a=0$，$3a\left(a-\frac{2}{3}\right)=0$

$a>0$ なので，$a=\frac{2}{3}$

A$\left(a,\ 2a^2\right)$なので，A$\left(\frac{2}{3},\ 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$，A$\left(\frac{2}{3},\ \frac{8}{9}\right)$

[平行四辺形]

[解答 42](1)A(6，12)　B(−3，3)　(2) (3，15)

[解説]

(1) $y=\frac{1}{3}x^2$ と $y=x+6$ の交点を求めるために，$\frac{1}{3}x^2=x+6$ とおく。

$x^2=3x+18$，$x^2-3x-18=0$，$(x+3)(x-6)=0$，$x=-3,\ 6$

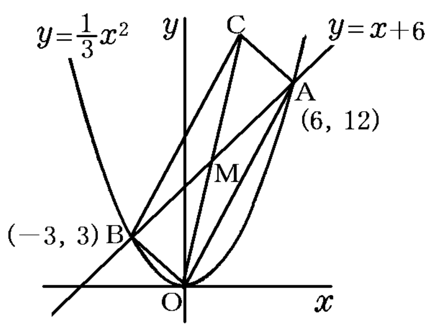
$x=-3$ のとき，$y=x+6=-3+6=3$　よって，点 B の座標は(−3，3)

$x=6$ のとき，$y=x+6=6+6=12$　よって，点 A の座標は(6，12)

(2)

平行四辺形→対角線はそれぞれ中点で交わる

平行四辺形 AOBC の対角線 AB と OC の交点を M とすると，M は AB の中点であり，かつ，OC の中点である。



M は A(6，12)，B(−3，3)の中点なので，

M$\left(\frac{6-3}{2},\frac{12+3}{2}\right)$，M$\left(\frac{3}{2},\ \frac{15}{2}\right)$

C の座標を C$(p,\ q)$とすると，

M は OC の中点なので，$\left(\frac{0+p}{2},\ \frac{0+q}{2}\right)$，$\left(\frac{p}{2},\ \frac{q}{2}\right)$

よって，$\frac{p}{2}=\frac{3}{2}$，$\frac{q}{2}=\frac{15}{2}$

したがって，$p=3,\ q=15$ で，点 C の座標は(3，15)

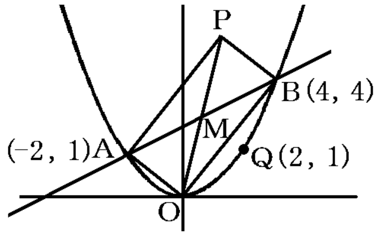
[解答 43](1) $a=-2$　(2) (2，5)　(3) $y=-\frac{3}{2}x+4$

[解説]

(1) 点 A(a，1)は $y=\frac{1}{4}x^2$ 上にあるので，$x=a,\ y=1$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入して，

$1=\frac{1}{4}a^2$，$a^2=4$，図より $a<0$ なので，$a=-2$

(2) 対角線 OP と AB の交点を M とする。



M は AB の中点なので，

M$\left(\frac{-2+4}{2},\ \frac{1+4}{2}\right)$，M$\left(1,\ \frac{5}{2}\right)$

P の座標を P$(p,\ q)$とすると，

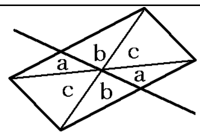
M は OP の中点なので，$\left(\frac{0+p}{2},\ \frac{0+q}{2}\right)$，$\left(\frac{p}{2},\ \frac{q}{2}\right)$

したがって，$\frac{p}{2}=1$，$\frac{q}{2}=\frac{5}{2}$，$p=2,\ q=5$

よって，点 P の座標は(2，5)

(3)

平行四辺形の対角線の交点を通る直線は，
平行四辺形の面積を二等分する



点 Q(2，1)を通り，平行四辺形 AOBP の面積を 2 等分する直線は対角線の交点 M を通る。

(2)より，$M\left(1,\ \frac{5}{2}\right)$である。(直線 QM の傾き)$=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-\frac{5}{2}}{2-1}=\frac{-\frac{3}{2}}{1}=-\frac{3}{2}$

傾きが$-\frac{3}{2}$なので，この直線の式は$y=-\frac{3}{2}x+b$とおくことができる。

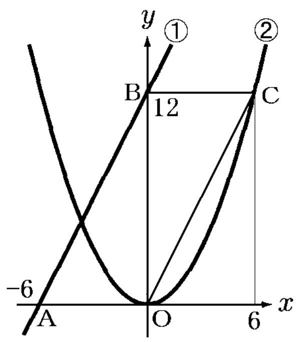
点 Q(2，1)を通るので，$y=-\frac{3}{2}x+b$に$x=2,\ y=1$を代入すると，

$1=-\frac{3}{2}\times 2+b$，$1=-3+b$，$b=4$　よって，直線 QM の式は，$y=-\frac{3}{2}x+4$

[解答 44] $a=\frac{1}{3}$

[解説]

平行四辺形→対辺が平行で長さが等しい



$y=2x+12$ の y 切片は 12 なので，点 B の座標は(0，12)

$y=2x+12$ に $y=0$ を代入すると，

$0=2x+12,\ 2x=-12,\ x=-12\div 2,\ x=-6$

よって，点 A の座標は(−6，0)

四角形 BAOC は平行四辺形なので，BC // AO，BC＝AO＝6

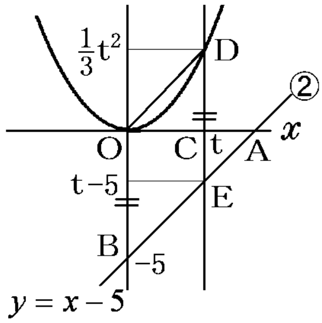
よって，点 C の座標は(6，12)

点 C は $y=ax^2$ 上の点なので，$x=6,\ y=12$ を $y=ax^2$ に代入して，

$12=a\times 6^2$，$36a=12,\ a=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

[解答 45]3

[解説]



四角形 OBED は平行四辺形なので，DE＝OB

点 B は $y=x-5$ の y 切片なので，B の y 座標は－5

よって，OB＝5　点 C の x 座標を $x=t$ とすると，

点 D の y 座標は $y=\frac{1}{3}t^2$ で，点 E の y 座標は $y=t-5$

よって，DE＝$\frac{1}{3}t^2-(t-5)=\frac{1}{3}t^2-t+5$

DE＝OB なので，$\frac{1}{3}t^2-t+5=5$, $\frac{1}{3}t^2-t=0$, $t^2-3t=0$, $t(t-3)=0$

$t>0$ なので，$t=3$

【】いろんな事象と関数

【】動点

[解答 46](1)　$y=x^2$　②　$0\leqq x\leqq 10$　(2)　$2\sqrt{3}$ 秒後

[解説]

(1)　x 秒後には，AP＝ x cm，AQ＝ $2x$ cm　よって $y=\frac{1}{2}\times x\times 2x=x^2$

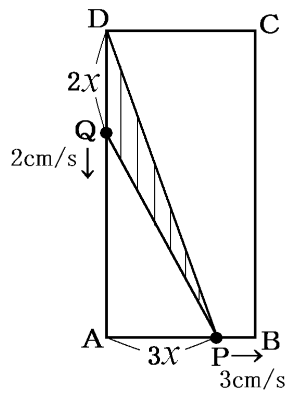
P が B 点に達するのは 10 秒後，Q が C 点に達するのも 10 秒後

よって，x の変域は，$0\leqq x\leqq 10$

(2)　$y=x^2$ に $y=12$ を代入すると，$12=x^2$　$x\geqq 0$ なので $x=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

[解答 47](1)　$y=3x^2$　(2) 5 秒後

[解説]



(1)　x 秒後には，DQ＝ $2x$ cm，AP＝ $3x$ cm なので，

(△DPQ の面積)＝$\frac{1}{2}$×(底辺 DQ)×(高さ PA)

$y=\frac{1}{2}\times 2x\times 3x=3x^2$

(2)　長方形の面積は 30×15＝450cm² なので，

$y=450\times\frac{1}{6}=75$　cm²

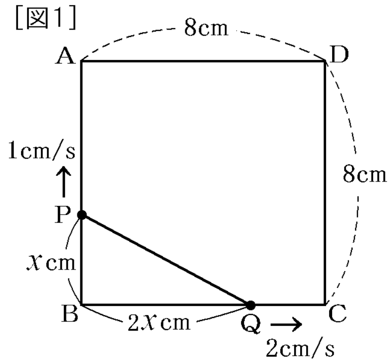
よって，$y=3x^2$ に $y=75$ を代入すると，$75=3x^2$，$x^2=75\div 3$, $x^2=25$

$x>0$ なので $x=5$　これは条件を満たす。

[解答 48](1)①式： $y=x^2$　変域：$0 \leqq x \leqq 4$　②式： $y=4x$　変域：$4 \leqq x \leqq 8$

(2) 6 秒後

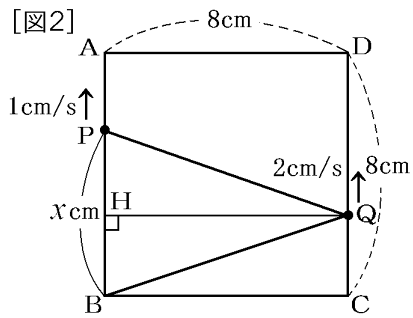
[解説]



(1)① 点 Q は毎秒 2cm の速さで動くので,
BC 間の 8cm を移動するのにかかる時間は,
8(cm)÷2(cm／秒)＝4(秒)である。したがって，点 Q が辺 BC 上を動くときの x の変域は $0 \leqq x \leqq 4$ である。
このときの P, Q の位置関係は右の図 1 のようになっており,
BQ＝2(cm／秒)× x (秒)＝ $2x$ (cm)
BP＝1(cm／秒)× x (秒)＝ x (cm)なので,

(△BPQ の面積)＝ $\frac{1}{2}$ ×BQ×BP＝ $\frac{1}{2}\times 2x \times x = x^2$

よって， $y=x^2$



② 点 Q が辺 CD 間の 8cm を移動するのにかかる時間は,
8(cm)÷2(cm／秒)＝4(秒)である。したがって，点 Q が辺 CD 上を動くときの x の変域は $4 \leqq x \leqq 8$ である。
このときの P，Q の位置関係は右の図 2 のようになっている。△BPQ の底辺を BP とすると高さは QH なので,

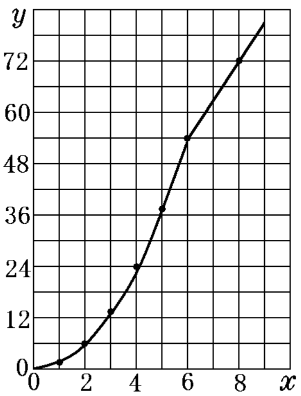
(△BPQ の面積)＝ $\frac{1}{2}$ ×BP×QH＝ $\frac{1}{2}\times x \times 8 = 4x$

よって， $y=4x$

(2) (1)より，$0 \leqq x \leqq 4$ のとき $y=x^2$ であるが， $x=4$ のとき $y=4^2=16$ なので,
このときの y の変域は，$0 \leqq y \leqq 16$ である。したがって，この範囲のとき，面積が 24 cm² になることはない。
$4 \leqq x \leqq 8$ のとき $y=4x$ なので， $x=4$ のとき $y=4\times 4=16$， $x=8$ のとき
$y=4\times 8=32$ で， y の変域は，$16 \leqq y \leqq 32$ である。したがって，この範囲のとき，面積が 24 cm² になることがある。
$y=4x$ に $y=24$ を代入すると,
$24=4x$， $x=6$
よって，△BPQ の面積が 24 cm² になるのは，点 P が B を出発してから 6 秒後である。

[解答 49](1)①　$y=\dfrac{3}{2}x^2$　②　$y=9x$

(2)



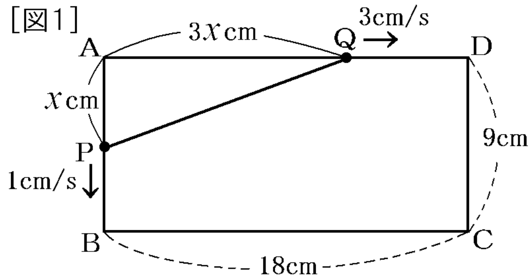
[解説]

(1)①　点 Q が D に到着するのは，

18(cm)÷3(cm／秒)＝6(秒)後なので，

$0 \leqq x \leqq 6$ のとき，P，Q は右の図 1 のような位置関係にある。したがって，

[図1]

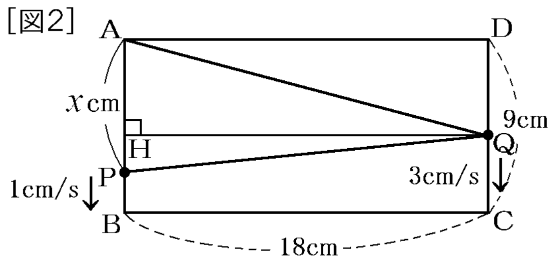


(△APQ の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×AQ×AP＝$\dfrac{1}{2}\times 3x\times x$

よって，$y=\dfrac{3}{2}x^2$

②　$6 \leqq x \leqq 9$ のとき，P，Q は右の図 2 のような位置関係にある。

[図2]



△APQ の底辺を AP とすると高さは QH なので，

(△APQ の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×AP×QH＝$\dfrac{1}{2}\times x\times 18$

よって，$y=9x$

(2) $0 \leqq x \leqq 6$ のとき $y=\dfrac{3}{2}x^2$ なので，

右図のように，x が 1～6 のときの y の値を計算し，

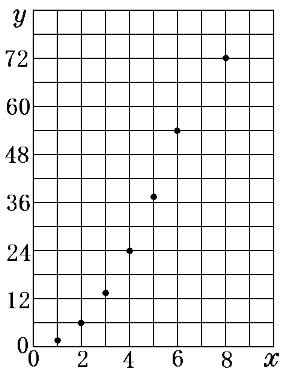
グラフ上に点をとる。その点をなめらかな曲線になるように結ぶ。

$6 \leqq x \leqq 9$ のとき $y=9x$ で直線になる。

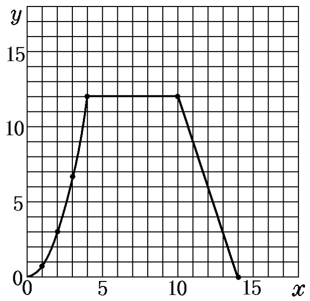
$x=6$ のとき $y=9\times 6=54$

$x=8$ のとき $y=9\times 8=72$

なので，(6，54)，(8，72)を通る直線を $6 \leqq x \leqq 9$ の範囲でかく。

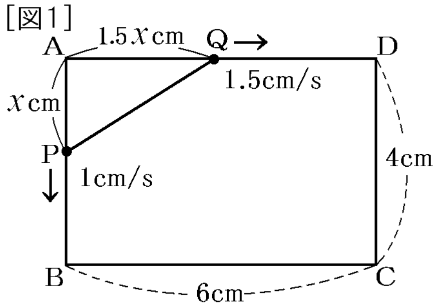


[解答 50](1)① $y=\frac{3}{4}x^2$　② $y=12$　③ $y=-3x+42$　(2) 12cm²

(3)


[解説]

(1)①0≦ x ≦4 のとき，右の図 1 のように，P は AB 上に，Q は AD 上にある。

[図1]


x 秒で P は，1(cm／秒)× x (秒)＝ x (cm)

x 秒で Q は，1.5(cm／秒)× x (秒)＝1.5x (cm)進む。

(△APQ の面積)＝$\frac{1}{2}$×AQ×AP＝$\frac{1}{2}\times1.5x\times x$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}x\times x=\frac{3}{4}x^2$ (cm²)　よって，$y=\frac{3}{4}x^2$

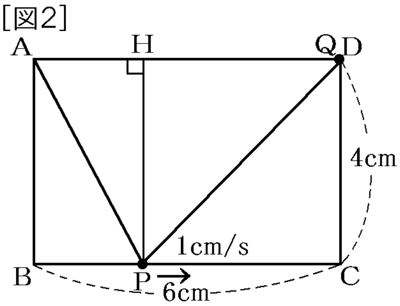
② 4 秒で Q は，1.5(cm／秒)×4(秒)＝6(cm)

進み，D の位置に到着して停止するので，

4≦ x ≦10 のとき Q は D の位置にある。

また，P は BC 間にある。

よって，4≦ x ≦10 のときの位置関係は右の図 2 のようになる。

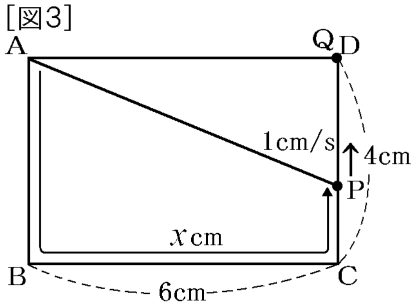
[図2]


△APQ の底辺を AQ とすると，高さは PH になるので，

(△APQ の面積)＝$\frac{1}{2}$×AQ×PH＝$\frac{1}{2}\times6\times4$＝12(cm²)

よって，$y=12$

③ 10≦ x ≦14 のとき，右の図 3 のように，Q は D の位置に停止しており，P は CD 間にある。

[図3]


△APQ の底辺を AQ とすると，高さは PQ になる。

図 3 より，PQ＝AB＋BC＋CQ－ x ＝ $4+6+4-x=14-x$

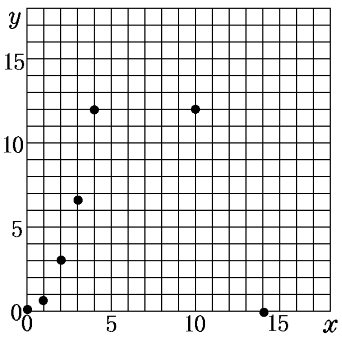
(△APQ の面積)＝$\frac{1}{2}$×AQ×PQ＝$\frac{1}{2}\times6\times(14-x)$＝

$3(14-x)=-3x+42$ (cm²)

よって，$y=-3x+42$

(2) 出発してから 7 秒後は，$4 \leqq x \leqq 10$ の範囲にあるので，(1)より $y=12$

よって，そのときの面積は 12cm²



(3) $0 \leqq x \leqq 4$ のときは $y=\dfrac{3}{4}x^2$

x	0	1	2	3	4
y	0	0.75	3	6.75	12

右図のように点を打ち，なめらかな曲線でむすぶ。

$4 \leqq x \leqq 10$ のときは $y=12$ なので，x 軸に平行な線分をかく。

$10 \leqq x \leqq 14$ のときは $y=-3x+42$

$x=10$ のとき $y=12$，$x=14$ のとき $y=0$

2 点(10，12)，(14，0)をむすぶ。

[解答 51](1)① $y=x^2$，$0 \leqq x \leqq 3$　② $y=3x$，$3 \leqq x \leqq 8$　(2) 12cm²

[解説]

(1)① 点 P が点 B に到着するのは $6 \div 2 = 3$ 秒後

よって，点 P が AB 上にあるときの x の変域は $0 \leqq x \leqq 3$

AP＝$2x$，AQ＝x なので，面積は $y=\dfrac{1}{2}\times x \times 2x = x^2$

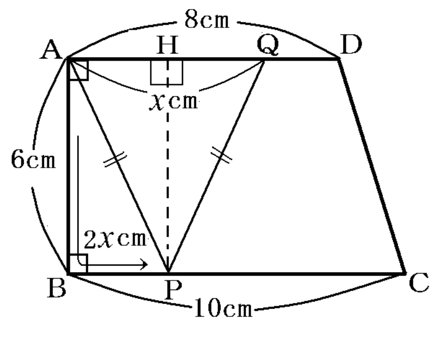
② 点 P が点 C に到着するのは，$(6+10)\div 2 = 8$ 秒後

ゆえに点 P が BC 上にあるときの x の変域は $3 \leqq x \leqq 8$

AQ＝x cm を底辺とすると，高さは常に 6cm

ゆえに $y=\dfrac{1}{2}\times x \times 6 = 3x$

(2) P が AB 上にあるときは AP＜PQ で AP＝PQ とならない。P が BC 上にあるとき，AP＝PQ であるので右図のような状態になる。



Q は毎秒 1cm で移動するので，AQ＝x cm

二等辺三角形の性質より，AH＝$\dfrac{1}{2}$AQ＝$\dfrac{1}{2}x$(cm)

よって，BP＝AH＝$\dfrac{1}{2}x$(cm)

P は毎秒 2cm で A→B→P と移動するので，AB＋BP＝$2x$(cm)

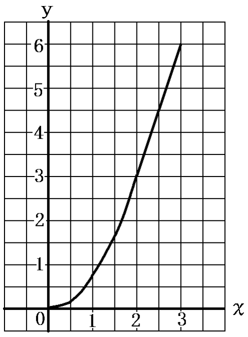
AB＝6(cm)，BP＝$\dfrac{1}{2}x$(cm)なので，

$6+\frac{1}{2}x=2x$， $12+x=4x$， $3x=12$， $x=4$

よって， $y=3x=3\times4=12$

[解答 52](1)① $y=\frac{3}{4}x^2$ ② $y=3x-3$

(2)



[解説]

(1)① 直線 OA の式は原点を通るので $y=ax$ とおける。

点 A を通るので $x=2,\ y=3$ を代入して $3=2a$

ゆえに $a=\frac{3}{2}$ ゆえに OA の式は $y=\frac{3}{2}x$

ゆえに OQ＝ x のとき PQ＝ $\frac{3}{2}x$

よって面積 $y=\frac{1}{2}\times x\times\frac{3}{2}x$ $y=\frac{3}{4}x^2$

② P が AB 上にあるとき，AP＝ $x-2$ なので

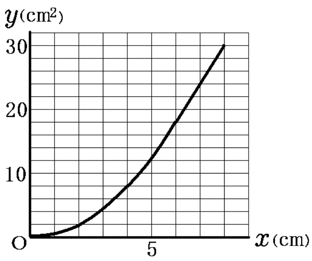
(面積)＝△OAH＋四角形

ゆえに $y=\frac{1}{2}\times2\times3+(x-2)\times3$ $y=3x-3$

【】図形の移動による重なる面積

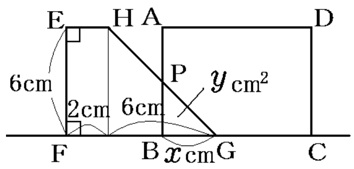
[解答 53](1) $0\leqq x\leqq6$ ： $y=\frac{1}{2}x^2$ $6<x\leqq8$ ： $y=6x-18$ (3) $\frac{19}{3}$ cm

(2)



[解説]

(1) $0 \leqq x \leqq 6$ のときは，右図のような状態になっている。

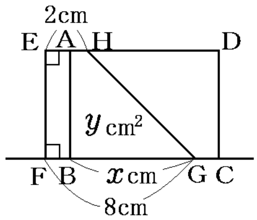


右図で，BP＝BG＝x(cm)なので，

(△BPG の面積)＝$\frac{1}{2}$×BG×BP＝$\frac{1}{2} \times x \times x = \frac{1}{2}x^2$ (cm²)

よって，$y = \frac{1}{2}x^2$

$6 < x \leqq 8$ のときは，右図のような状態になっている。



(台形 ABGH の面積)＝$\frac{1}{2}$×(AH＋BG)×AB

BG＝x(cm)，AB＝6cm である。

AH は次のようにして求める。

図より，FB＝8－x(cm)なので，EA＝FB＝8－x(cm)

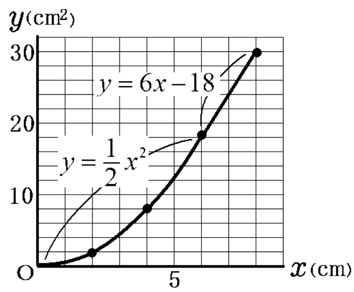
AH＝EH－EA＝2－(8－x)＝x－6

よって，(台形 ABGH の面積)＝$\frac{1}{2}$×(AH＋BG)×AB

＝$\frac{1}{2} \times (x - 6 + x) \times 6$ ＝$3(2x - 6) = 6x - 18$

したがって，$y = 6x - 18$

(2) $0 \leqq x \leqq 6$ のときは $y = \frac{1}{2}x^2$



$x = 2$ のとき $y = 2$，$x = 4$ のとき $y = 8$

$x = 6$ のとき $y = 18$

たとえば，この 3 点を打って，なめらかな曲線で結ぶ。

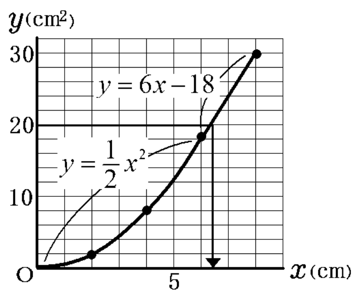
$6 < x \leqq 8$ のときは $y = 6x - 18$

$x = 6$ のとき $y = 18$，$x = 8$ のとき $y = 30$

この 2 点を直線で結ぶ。

(3) (台形 EFGH の面積)＝$\frac{1}{2}$×(EH＋FG)×EF＝$\frac{1}{2}$×(2＋8)×6＝30(cm²)

30(cm²)の$\frac{2}{3}$は 20(cm²)



右のグラフより，y ＝20 のとき，$x > 6$

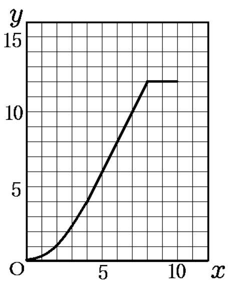
よって，$y = 6x - 18$ に y ＝20 を代入して，

$20 = 6x - 18$, $6x = 38$

$x = \frac{38}{6} = \frac{19}{3}$

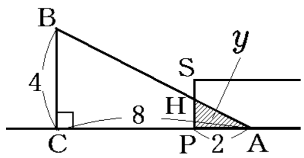
[解答 54](1)　$y=1$　(2) $0< x \leqq 4$　(3)　$y=8$

(4)



[解説]

(1)　$x=2$ のとき，右図のような状態になっており，

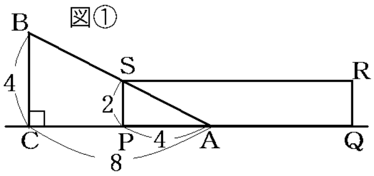


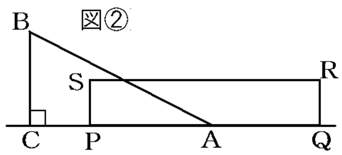
HP : PA＝BC : CA＝4 : 8＝1 : 2 なので,

HP : PA＝1 : 2，HP : 2＝1 : 2 で，HP＝1 になる。

したがって，$y=\dfrac{1}{2}\times \mathrm{PA}\times \mathrm{HP}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 1=1$

(2) 重なった部分の図形が直角三角形となるのは，右の図①の $x=4$ の場合までである。x が 4 より大きくなると，重なった部分は図②のように台形になる。



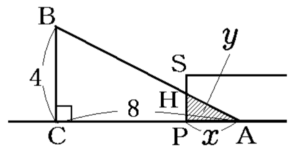


したがって，重なった部分の図形が直角三角形となるのは，$0< x \leqq 4$ の範囲である。

(3)(4) 0<0≦4 のとき，右の図③のような状態になる。

このとき，重なった部分は三角形になるので，

図③



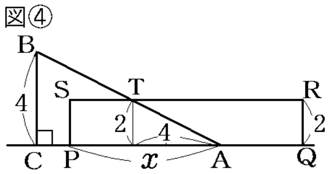
(重なった部分の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times \mathrm{PA}\times \mathrm{PH}$ となる

PA＝x，PH＝$\dfrac{1}{2}x$ なので，$y=\dfrac{1}{2}\times x\times \dfrac{1}{2}x$　よって，$y=\dfrac{1}{4}x^2$

$4< x \leqq 8$ のとき，右の図④のような状態になる。

重なった部分は，台形 STAP になる。

図④



(重なった部分の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times(\mathrm{ST}+\mathrm{PA})\times \mathrm{SP}$

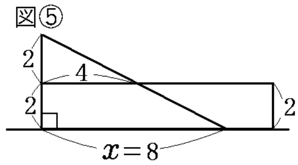
図より，ST＝$x-4$ なので，$y=\dfrac{1}{2}\left(x-4+x\right)\times 2=2x-4$

したがって，$x=6$ のとき，$y=2\times 6-4=8$ となる。

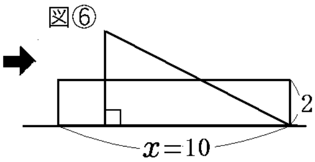
$8< x \leqq 10$ のとき, 右の図⑤→図⑥のように，

重なった部分は一定で，

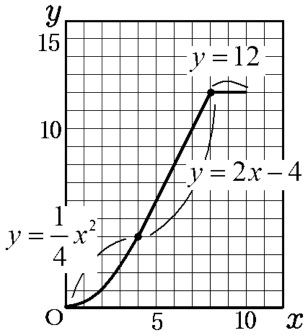
図⑤



図⑥



(重なった部分の面積)$=\frac{1}{2}\times(4+8)\times 2=12$ となる。以上より，



$0< x \leqq 4$ のとき， $y=\frac{1}{4}x^2$

$4< x \leqq 8$ のとき， $y=2x-4$

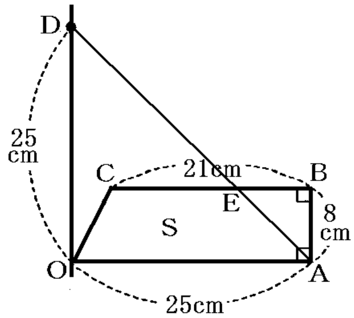
$8< x \leqq 10$ のとき， $y=12$

で，グラフは右図のようになる。

[解答 55](1) 152cm^2　(2) $\frac{1}{3}x^2$(cm^2)　(3) $8x-48$(cm^2)

[解説]

(1) 点 P が点 O を出発してから 25 秒後にできる図形 S は右図のようになっている。



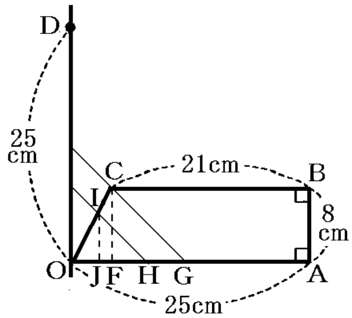
BE＝AB＝8(cm)，CE＝21－BE＝21－8＝13(cm)

S は台形なので，

(S の面積)＝$\frac{1}{2}$×(CE＋OA)×BA＝$\frac{1}{2}\times(13+25)\times 8$

＝152(cm^2)

(2) 線分 PQ が点 C を通るとき，右図で，



OF＝25－21＝4(cm)，FG＝FC＝AB＝8(cm)なので，

OG＝OF＋FG＝4＋8＝12(cm)である。

よって，$0\leqq x \leqq 12$ の場合の図形 S は右図の△IOH のようになっている。

このとき，OH＝x である。

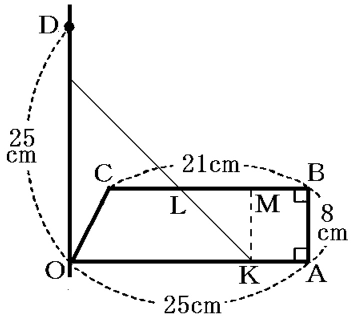
IJ：CF＝OH：OG

IJ：8＝x ：12

12IJ＝$8x$，IJ＝$\frac{8}{12}x=\frac{2}{3}x$(cm)

よって，(S の面積)＝$\frac{1}{2}$×OH×IJ＝$\frac{1}{2}\times x\times\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}x^2$(cm^2)

(3) $12\leqq x \leqq 25$ のとき，右図のような状態になる。



図形 S は右図の台形 COKL である。

OK＝x(cm)

LM＝MK＝8(cm)

MB＝KA＝OA－OK＝25－x(cm)

CL＝CB－LM－MB＝21－8－(25－x)＝x－12(cm)

(台形 COKL の面積)$=\frac{1}{2}\times$(CL＋OK)$\times$BA$=\frac{1}{2}(x-12+x)\times 8$

$=4(2x-12)=8x-48$ (cm²)

【】落下運動・制動距離

[落下運動]

[解答 56](1) $y=5x^2$　(2) 125m　(3) 9 秒

[解説]

(1) 落ちる距離 y (m)は，落ち始めてからの時間 x (秒)の 2 乗に比例するので，$y=ax^2$ とおくことができる(a は定数)。

$y=ax^2$ に $x=3,\ y=45$ を代入すると，$45=a\times 9$ となり，$a=5$

よって，$y=5x^2$ が成り立つ。

(2) $y=5x^2$ に $x=5$ を代入して，$y=5\times 5^2=125$

(3) $y=5x^2$ に $y=405$ を代入して，$405=5x^2$，$x^2=405\div 5=81$

$x>0$ なので，$x=9$

[解答 57]10 秒

[解説]

落ちる距離を y m，落ち始めてからの時間を x 秒とすると，

落ちる距離 y は，落ち始めてからの時間 x の 2 乗に比例するので，$y=ax^2$ とおくことができる(a は定数)。

4 秒間に落ちた距離が 80 m であるので，$80=a\times 4^2$，$a=5$

よって $y=5x^2$　この式に $y=500$ を代入すると，$500=5x^2$，$x^2=100$

$x>0$ なので，$x=10$　よって，10 秒かかる。

[解答 58](1) $a=\frac{1}{4}$　(2) 2m／s　(3) 8 秒後　(4) 12m

[解説]

(1)「ボールが転がり始めてから 4 秒間に転がる距離は 4m であった」ので，$x=4$ のとき $y=4$ になる。$y=ax^2$ に $x=4$，$y=4$ を代入すると，$4=a\times 16$，よって，$a=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

(2) (1)より，転がり始めてから x 秒後のボールの進んだ距離は，$y=\frac{1}{4}x^2$ である。

$x=2$ のとき，$y=\frac{1}{4}\times 2^2=1$

$x=6$のとき，$y=\frac{1}{4}\times 6^2=9$

したがって，(平均の速さ)＝$\frac{(\text{進んだ距離})}{(\text{かかった時間})}=\frac{9-1}{6-2}=\frac{8}{4}=2$(m／s)

(3) ボールが転がり始めてからx秒間に進んだ距離は$y=\frac{1}{4}x^2$(m)である。A さんは秒速 2m の速さで進んでいるので，x秒間に進んだ距離は$2x$ m である。

A さんがボールに追いつかれるとき，A さんとボールの進んだ距離は等しくなるので，

$\frac{1}{4}x^2=2x$が成り立つ。$\frac{1}{4}x^2=2x$, $x^2=8x$, $x^2-8x=0$, $x(x-8)=0$

よって，$x=0$, 8　$x>0$なので，$x=8$

(4) $x=12$のとき，

A さんは，$2x=2\times 12=24$(m)進んでいる。

ボールは，$y=\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}\times 12^2=\frac{1}{4}\times 144=36$(m) 進んでいる。

したがって，A さんとボールは，36－24＝12(m)はなれている。

[制動距離]

[解答 59] $y=\frac{1}{160}x^2$

[解説]

yはxの 2 乗に比例するので，$y=ax^2$とおく。

$x=40$, $y=10$を代入すると，$10=a\times 40^2$　ゆえに$a=\frac{1}{160}$　ゆえに$y=\frac{1}{160}x^2$

[解答 60](1) $y=\frac{2}{225}x^2$　(2) 時速 67km

[解説]

(1) 制動距離は，自動車の速さの 2 乗に比例するので，$y=ax^2$とおくことができる。

$x=30$，$y=8$を代入すると，$8=a\times 900$　ゆえに，$a=\frac{2}{225}$，$y=\frac{2}{225}x^2$

(2) 制動距離が 40m なので，$y=40$

これを$y=\frac{2}{225}x^2$に代入すると，$40=\frac{2}{225}x^2$, $x^2=4500$

$x>0$なので，$x=30\sqrt{5}=67.2$

【】いろいろな関数

[解答 61](1) 500 円　(2) 600 円

[解説]

x＝300(g)は，200≦ x ＜400 の範囲に入っているので y ＝500(円)である。

x＝400(g)は，400≦ x ＜600 の範囲に入っているので y ＝600(円)である。

[解答 62](1) 500 円　(2) 900 円　(3) イ

[解説]

(1) x＝120(分)は，90＜ x ≦120 の範囲に入っているので y ＝500(円)である。

(2) 3 時間 45 分＝225 分である。
グラフでは,「150＜ x ≦180 のときは y ＝700」までしか表示されていないが,
30 分ごとに 100 円ずつ加算されるので,
180＜ x ≦210 のときは y ＝700＋100＝800
210＜ x ≦240 のときは y ＝800＋100＝900
である。したがって， x＝225 のときは y ＝900 になる。

(3) x(分)が決まると y(円)の値はただ 1 つ決まるので， y は x の関数である。
これに対し, 例えば, y＝300(円)になるときの x(分)は, 10 分, 20 分･･･と複数あるので, y(円)の値が決まっても x(分)の値は決まらない。したがって， x は y の関数とはいえない。

[解答 63](1) いえる　(2) 120cm

[解説]

(1) x(cm)が決まると y(円)の値はただ 1 つ決まるので， y は x の関数である。

(2) 所持金が 1693 円のとき運賃 1700 円は支払えない。1400 円までしか支払えない。
y＝1400(円)に対応する x(cm)は，100＜ x ≦120 であるので，荷物の縦，横，高さの合計が 120cm までを送ることができる。