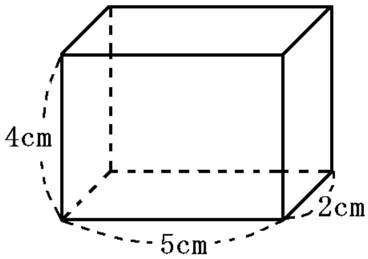
【FdData 中間期末：中学数学 3 年：三平方空間】

【】基本問題

【】対角線の長さ

[問題](3 学期)

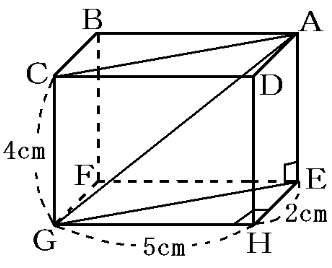
次の図のような直方体の対角線の長さを求めよ。



[解答欄]

[ヒント]

2 点 A，G を通る平面で立体を切る→切断面で考える



[解答] $3\sqrt{5}$ cm

[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る→切断面で考える

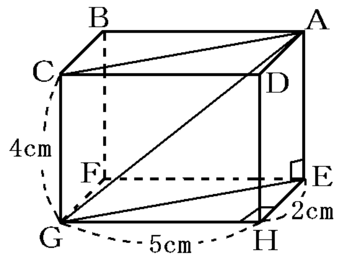
まず，底面の直角三角形 EGH について，三平方の定理より，

$EG^2 = GH^2 + EH^2 = 5^2 + 2^2 = 29$

次に，直角三角形 AEG について，

$AG^2 = AE^2 + EG^2 = 4^2 + 29 = 45$

ゆえに $AG = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$ (cm)



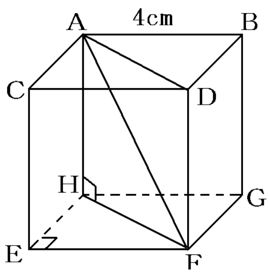
[問題](2 学期期末)

1 辺が 4cm の立方体の対角線の長さを求めよ。

[解答欄]

[ヒント]

2 点 A，F を通る平面で立体を切る→切断面で考える



[解答] $4\sqrt{3}$ cm

[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る→切断面で考える

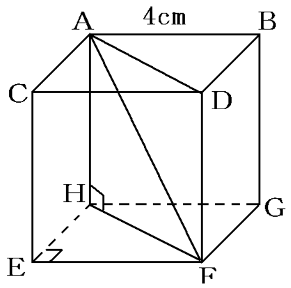
まず，直角三角形 HFE について，三平方の定理より，

$HF^2 = HE^2 + EF^2 = 4^2 + 4^2 = 32$

次に，直角三角形 AFH について，三平方の定理より，

$AF^2 = AH^2 + HF^2 = 4^2 + 32 = 48$

ゆえに $AF = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$ (cm)



【】体積(基本)

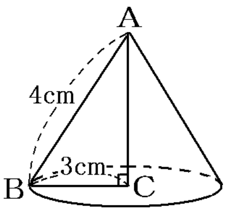
[円すいの体積]

[問題](2 学期期末)

底面の半径が 3cm，母線の長さが 4cm の円すいの高さを求めよ。

[解答欄]

[ヒント]

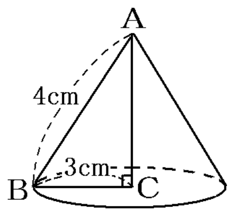


[解答] $\sqrt{7}$ cm

[解説]

右図の直角三角形 ABC について，三平方の定理より，

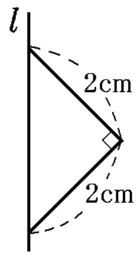
AC＝$\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$ (cm)



[問題](入試問題)

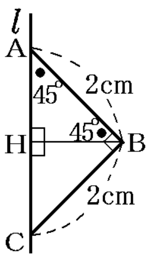
右の図のような直角二等辺三角形を，直線 l を回転の軸として 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

(鳥取県)



[解答欄]

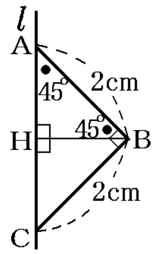
[ヒント]



[解答] $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\pi$ cm^3

[解説]

まず，△ABH を 1 回転させたときにできる円錐の体積を求める。



△ABH は 45° 45° 90° の直角三角形なので，3 辺の比は 1 : 1 : $\sqrt{2}$ になる。

したがって，AH＝BH＝AB×$\frac{1}{\sqrt{2}}$＝2×$\frac{1}{\sqrt{2}}$＝$\sqrt{2}$ (cm)

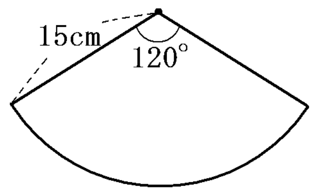
(体積)＝$\frac{1}{3}\times\pi\times BH^2\times AH=\frac{1}{3}\pi\times\left(\sqrt{2}\right)^2\times\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ (cm³)

同様にして，△CBH を 1 回転させたときにできる円錐の体積も $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ (cm³)である。

よって，(求める体積)＝$\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi+\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$ (cm³)

[問題](3 学期)

右の図のおうぎ形を側面の展開図とする円すいについて次の長さを求めよ。



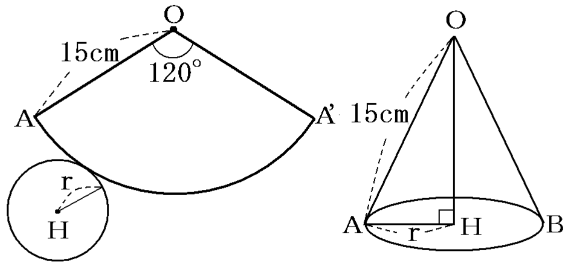
(1) 底面の半径

(2) 円すいの高さ

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]



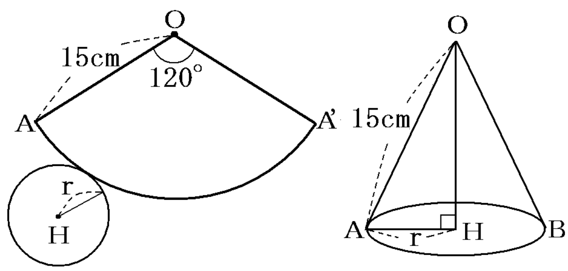
(弧 AA'の長さ)＝(円 H の円周)から r を求める。

[解答](1) 5cm (2) $10\sqrt{2}$ cm

[解説]

(1) 右図で，底面の円 H の円周の長さと弧 AA'の長さは等しい。

(弧 AA')＝2×π×15×$\frac{120}{360}$＝10π(cm)



底面の円 H の半径を rcm とすると，
$2\times\pi\times r=10\pi$ なので，$r=5$cm
(2) 図の△OAH で三平方の定理より，

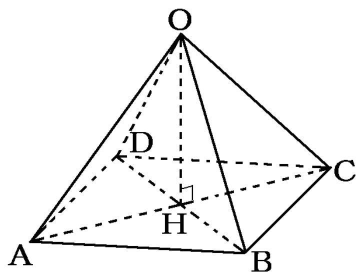
OH＝$\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{15^2-5^2}$

＝$\sqrt{225-25}=\sqrt{200}=\sqrt{100\times2}=10\sqrt{2}$ (cm)

[角すいの体積]

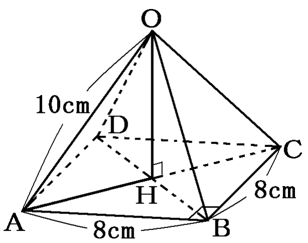
[問題](3 学期)

右のような正四角すいがある。底面が 1 辺 8cm の正方形で，OA が 10cm であるとき，この正四角すいの体積を求めよ。



[解答欄]

[ヒント]



直角三角形 ABC の AC の長さ→AH の長さ→高さ OH

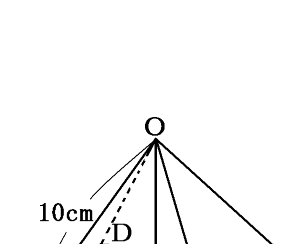
[解答] $\dfrac{128\sqrt{17}}{3}$ cm^3

[解説]

△ABC は直角三角形なので，三平方の定理より，

AC＝$\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{8^2+8^2}=\sqrt{8^2\times2}=8\sqrt{2}$ (cm)

H は線分 AC の中点なので，AH＝$8\sqrt{2}\div2=4\sqrt{2}$ (cm)
次に，△OAH も直角三角形なので，三平方の定理より，

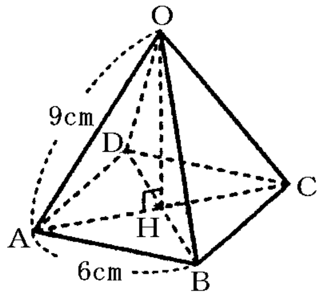


OH＝$\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{10^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{100-32}=\sqrt{68}=\sqrt{4\times17}=2\sqrt{17}$ (cm)

(すいの体積)＝$\dfrac{1}{3}\times$(ABCD の底面積)$\times$(高さ OH)＝$\dfrac{1}{3}\times8\times8\times2\sqrt{17}=\dfrac{128\sqrt{17}}{3}$ (cm^3)

[問題](3 学期)

右の図のように底面が 1 辺 6cm の正方形で，他の辺が 9cm の正四角すいがある。次の各問いに答えよ。



(1) 高さ OH の長さを求めよ。

(2) 体積を求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

直角三角形 ABC の AC の長さ→AH の長さ→高さ OH

[解答](1) $3\sqrt{7}$ cm (2) $36\sqrt{7}$ cm^3

[解説]

(1) まず，直角三角形 ABC について，

AC＝$\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{6^2\times 2}=6\sqrt{2}$ (cm)

H は AC の中点なので，AH＝$6\sqrt{2}\div 2=3\sqrt{2}$ (cm)

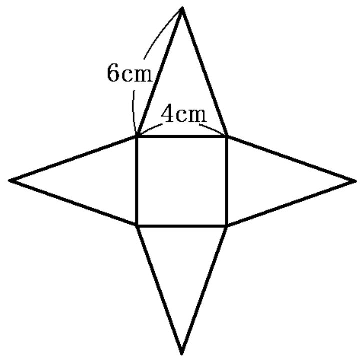
次に直角三角形 OAH について，三平方の定理より，

OH＝$\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{9^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{81-18}=\sqrt{63}=\sqrt{9\times 7}=3\sqrt{7}$ (cm)

(2) (体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積 ABCD)×(高さ OH)＝$\dfrac{1}{3}\times 6^2\times 3\sqrt{7}=36\sqrt{7}$ (cm^3)

[問題](入試問題)

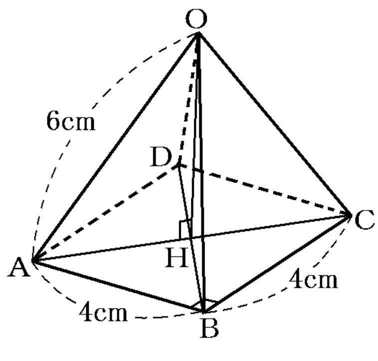
ある正四角錐を展開すると右図のようになる。この正四角錐の体積を求めよ。



(佐賀県)

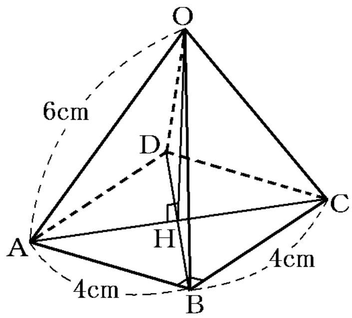
[解答欄]

[ヒント]



[解答] $\dfrac{32\sqrt{7}}{3}$ cm³

[解説]



右図の直角三角形 ACB で，三平方の定理より，

$$\mathrm{AC}=\sqrt{AB^2+CB^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{16\times 2}=4\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

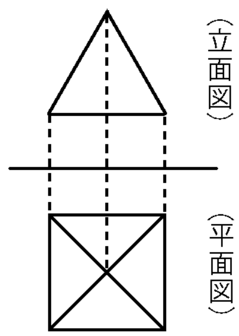
$$\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

直角三角形 OAH で，三平方の定理より，

$$\mathrm{OH}=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{6^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{36-8}=\sqrt{28}=\sqrt{4\times 7}=2\sqrt{7}\ (\mathrm{cm})$$

$$(\text{正四角錐の体積})=\frac{1}{3}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{BC}\times\mathrm{OH}=\frac{1}{3}\times 4\times 4\times 2\sqrt{7}=\frac{32\sqrt{7}}{3}\ (\mathrm{cm}^3)$$

[問題](入試問題)

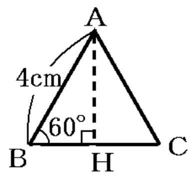


右の図は，ある正四角錐の投影図である。立面図は 1 辺の長さが 4cm の正三角形である。この正四角錐の体積を求めよ。

(宮城県)

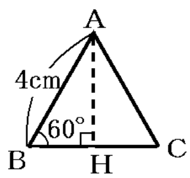
[解答欄]

[ヒント]



[解答] $\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$ cm³

[解説]



右図の AH がこの正四角錐の高さになる。

△ABH は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は 1：2：$\sqrt{3}$ なので，

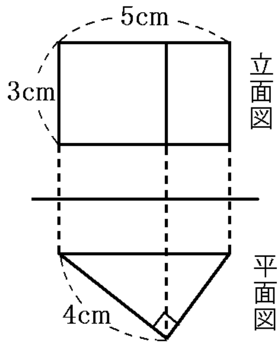
$$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\ (\mathrm{cm})$$

$$(\text{正四角錐の体積})=\frac{1}{3}\times 4\times 4\times 2\sqrt{3}=\frac{32\sqrt{3}}{3}\ (\mathrm{cm}^3)$$

[角柱の体積]

[問題](入試問題)

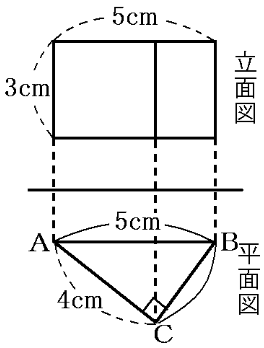
右の図は，底面が直角三角形である三角柱の投影図である。この三角柱の体積を求めよ。



(徳島県)

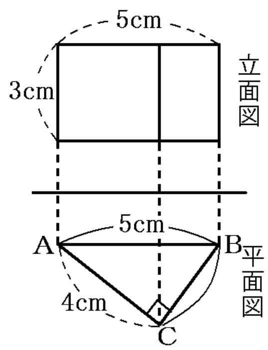
[解答欄]

[ヒント]



[解答]18cm³

[解説]



右図の平面図で，AB＝5cm である。

直角三角形 ABC で，三平方の定理より，

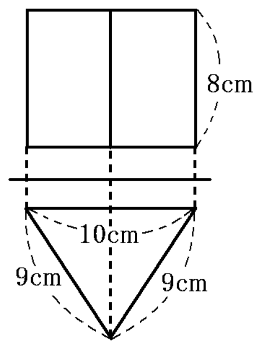
BC＝$\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$(cm)

よって，(底面積)＝$\dfrac{1}{2}$×4×3＝6(cm²)

(三角柱の体積)＝(底面積)×(高さ)＝6×3＝18(cm³)

[問題](入試問題)

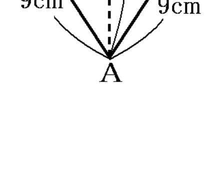
右の図は，三角柱の投影図である。この三角柱の体積を求めよ。



(秋田県)

[解答欄]

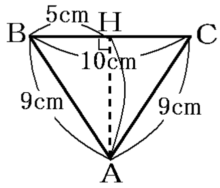
[ヒント]



[解答] $80\sqrt{14}$ cm³

[解説]

右図の直角三角形 ABH で，三平方の定理より，



AH＝$\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{81-25}=\sqrt{56}=\sqrt{4\times14}=2\sqrt{14}$ (cm)

(△ABC の面積)＝$\frac{1}{2}\times$BC$\times$AH＝$\frac{1}{2}\times10\times2\sqrt{14}=10\sqrt{14}$ (cm²)

(三角柱の体積)＝(△ABC の面積)×8＝$10\sqrt{14}\times8=80\sqrt{14}$ (cm³)

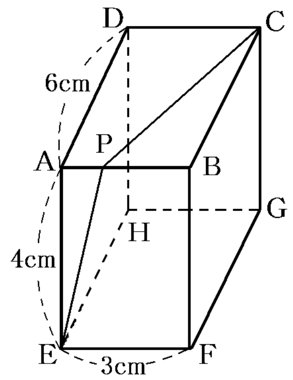
【】最短距離など

【】最短距離

[角柱・角錐の最短距離]

[問題](3 学期)

次の図は，直方体 ABCD－EFGH で，AD＝6cm，AE＝4cm，EF＝3cm である。AB 上に点 P をとって，EP＋PC が最小になるようにした。



(1) EP＋PC の長さを求めよ。

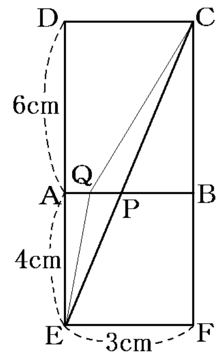
(2) AP の長さを求めよ。

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]

最短距離の線が通る部分の展開図をかく

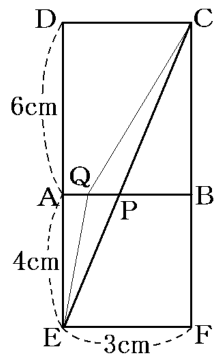


[解答](1) $\sqrt{109}$ cm　(2) 1.2cm

[解説]

<Point> 最短距離の線が通る部分の展開図をかく

右図で，E と C を結んだ線 EPC が最短距離になるが，その理由をまず説明する。



AB 上に P 以外の点 Q をとる。

△QEC で，三角形の 2 辺の和は他の 1 辺より長いので，

EQ＋QC＞EC で，EQ＋QC＞EP＋PC となる。

点 Q が BC 上のどこにあっても，この不等式は成り立つ。

したがって，EP＋PC が最短距離になる。

(1) △CEF で，三平方の定理より，

EC＝$\sqrt{EF^2+CF^2}=\sqrt{3^2+(4+6)^2}=\sqrt{9+100}=\sqrt{109}$ (cm)

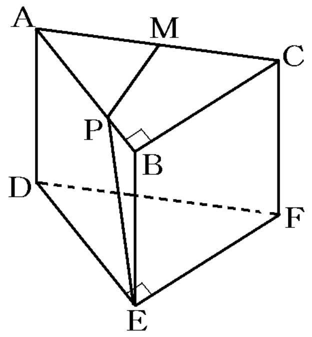
(2) △ECD で AP // DC なので，

AP：DC＝EA：ED，AP：3＝4：10

比の外項の積は内項の積に等しいので，AP×10＝3×4　AP＝12÷10＝1.2(cm)

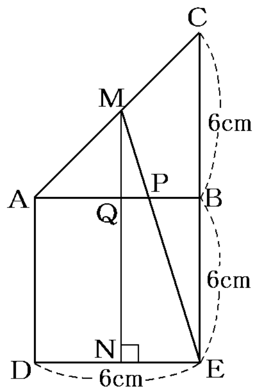
[問題](3 学期)

図のような，底面が DE＝EF＝6m の直角二等辺三角形で，高さが 6cm の三角柱がある。辺 AC の中点を M とし，辺 AB 上に，MP＋PE の長さがもっとも短くなるように点 P をとる。このとき，MP＋PE の長さを求めよ。



[解答欄]

[ヒント]



[解答] $3\sqrt{10}$ cm

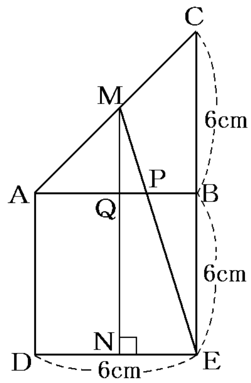
[解説]

右図のような展開図の直角三角形 MEN において，MN と NE がわかれば，三平方の定理より ME の長さを求めることができる。M は AC の中点なので，N も DE の中点になり，NE＝6÷2＝3(cm)，MQ＝BC÷2＝6÷2＝3(cm)

したがって，MN＝3＋6＝9(cm)

直角三角形 MEN で，三平方の定理より，

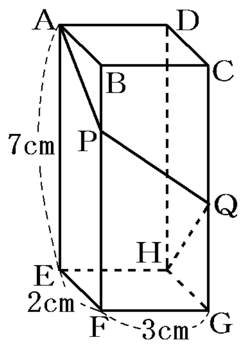
$$ME=\sqrt{MN^2+NE^2}=\sqrt{9^2+3^2}=\sqrt{81+9}=\sqrt{90}=\sqrt{9\times 10}=3\sqrt{10}\ \text{(cm)}$$



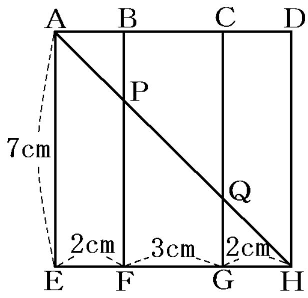
[問題](3 学期)

右の図のような直方体がある。辺 BF，CG 上にそれぞれ点 P，Q を AP＋PQ＋QH の長さが最短になるようにとる。その最短の長さを求めよ。

[解答欄]

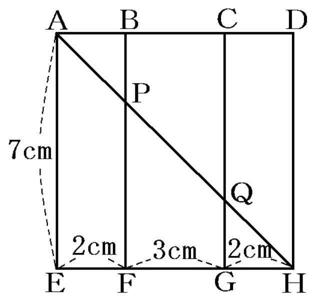


[ヒント]



[解答] $7\sqrt{2}$ cm

[解説]



展開図をかいたとき，A，P，Q，H が一直線上にあるとき，

AP＋PQ＋QH の長さが最短になる。

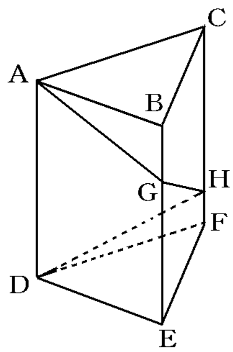
AP＋PQ＋QH＝AH

△AEH で，三平方の定理より，

$$\mathrm{AH}=\sqrt{AE^2+EH^2}=\sqrt{7^2+(2+3+2)^2}=\sqrt{7^2+7^2}$$

$$=\sqrt{7^2\times 2}=7\sqrt{2}\,(\mathrm{cm})$$

[問題](入試問題)

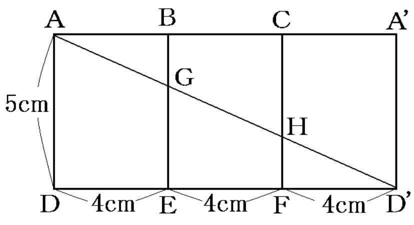


次の図は，底面の 1 辺が 4cm，高さが 5cm の正三角柱の見取り図である。図のように，辺 BE 上の任意の点を G，辺 CF 上の任意の点を H として，A から G，H を通って D まで糸を巻きつけた。この巻きつけた A から D までの糸が，最も短くなるときの長さを求めよ。

(宮城県)

[解答欄]

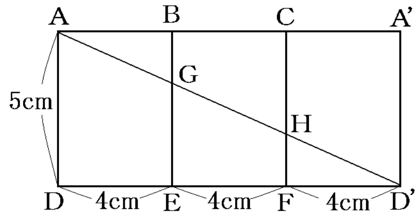
[ヒント]



[解答]13 cm

[解説]

<Point> 最短距離の線が通る部分の展開図をかく



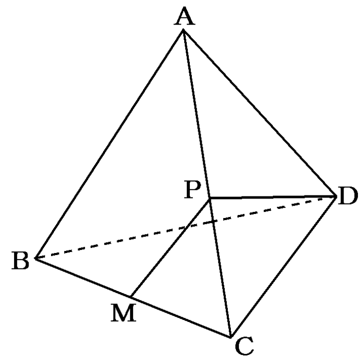
右図の△ADD'で，三平方の定理より，

AD'＝$\sqrt{AD^2+DD'^2}=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{25+144}$

＝$\sqrt{169}=13$(cm)

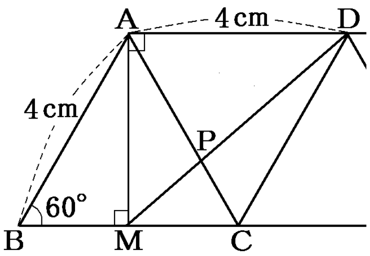
[問題](3 学期)

右の図のような，1 辺が 4cm の正四面体がある。辺 BC の中点 M から AC 上の点 P を通って頂点 D まで線分で結んだとき，MP+PD の長さがもっとも短くなるときの長さを求めよ。



[解答欄]

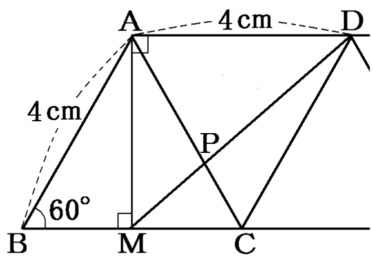
[ヒント]



[解答] $2\sqrt{7}$ cm

[解説]

<Point> 最短距離の線が通る部分の展開図をかく



M は BC の中点なので，AM⊥BC，BM＝2

直角三角形 ABM で，三平方の定理より，

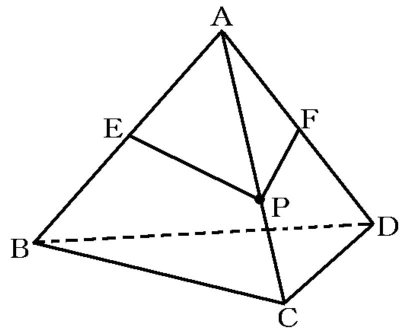
AM＝$\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}$

また，△ADM で，三平方の定理より，

DM＝$\sqrt{AM^2+AD^2}=\sqrt{12+4^2}=\sqrt{28}=\sqrt{4\times 7}=2\sqrt{7}$ (cm)

[問題](入試問題)

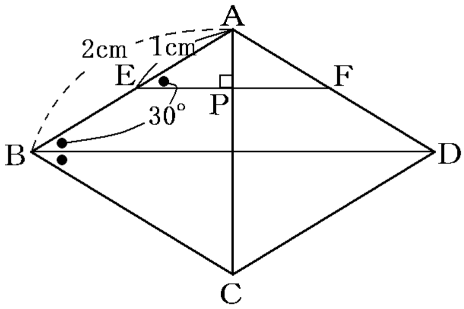
右の正四面体ABCDの1辺の長さを2cmとする。辺AB，ADの中点をそれぞれE，Fとし，点Pが辺AC上を動くものとする。線分EPとPFの長さの和が最も小さくなるとき，その値を求めよ。



(富山県)

[解答欄]

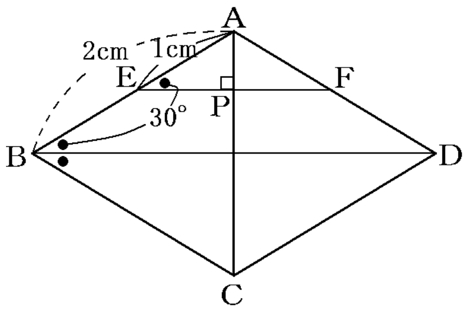
[ヒント]



[解答] $\sqrt{3}$ cm

[解説]

EP，PF が通る△ABC，△ACD の部分の展開図は右図の通りである。



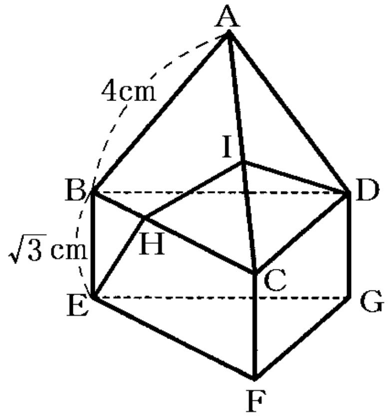
直角三角形AEPは30°90°60°の直角三角形で3辺の比は1：2：$\sqrt{3}$になるので，

$$EP = AE \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(\text{cm})$$

$$EF = EP \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}\,(\text{cm})$$

[問題](入試問題)

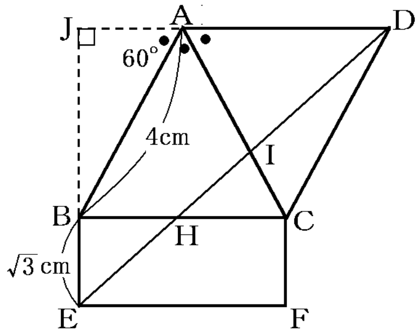
右の図は，正四面体と三角柱を合わせた形で，点A，B，C，D，E，F，G を頂点とする立体を表している。正四面体 ABCD の 1 辺の長さは 4cm であり，三角柱 BCDEFG の側面はすべて合同な長方形である。辺 BC 上に点H，辺AC上に点Iを，EH＋HI＋IDの長さが最も短くなるようにとる。BE＝$\sqrt{3}$ cmのとき，EH＋HI＋IDの長さを求めよ。



(福岡県)

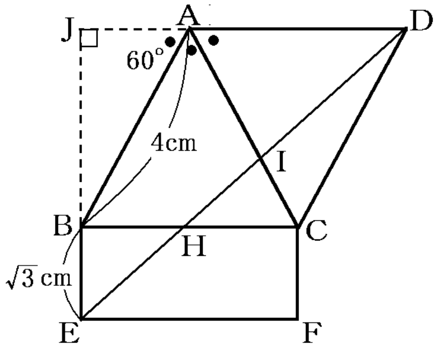
[解答欄]

[ヒント]



[解答] $3\sqrt{7}$ cm

[解説]



右は，EH，HI，ID が通る面の展開図である。

EH＋HI＋ID の長さが最も短くなるのは，E，H，I，D が一直線上にある場合で，その場合の最短距離は ED の長さである。

△ABJ は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は $1:2:\sqrt{3}$ になるので，

AJ＝$4\times\dfrac{1}{2}$＝2(cm)，BJ＝$4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ (cm)である。

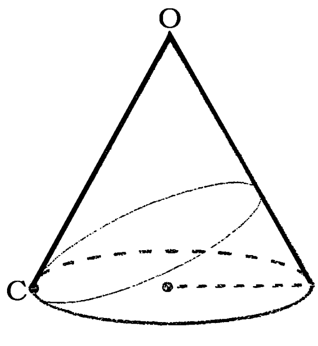
直角三角形 DEJ で，DJ＝AJ＋AD＝2＋4＝6(cm)，EJ＝BJ＋BE＝$2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$ (cm)

三平方の定理より，ED＝$\sqrt{DJ^2+EJ^2}=\sqrt{6^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{36+27}=\sqrt{63}=\sqrt{9\times7}=3\sqrt{7}$ (cm)

[円錐の最短距離]

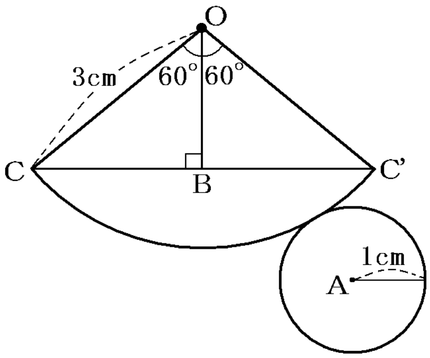
[問題](3 学期)

右の図のように O を頂点とし，底面の半径が 1cm，高さが $2\sqrt{2}$ cm の円すいがある。点 C を底面の円周上の点とする。点 C を出発し円すいの側面を 1 周してもとの点に戻ってくる最短経路を考える。このとき，最短経路の長さを求めよ。



[解答欄]

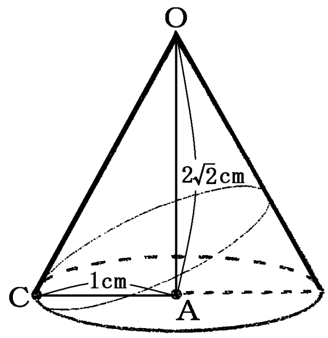
[ヒント]



[解答] $3\sqrt{3}$ cm

[解説]

<Point> 最短距離の線が通る部分の展開図をかく



展開図をかくと，側面はおうぎ形になる。まず，そのおうぎ形の半径 OC を求める。

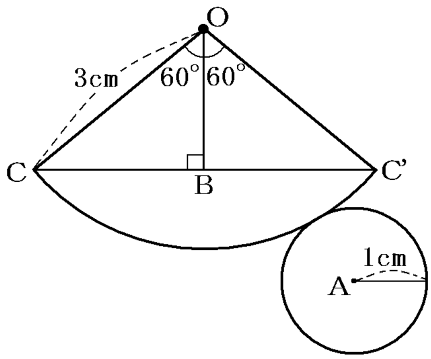
右図の直角三角形 OCA で，三平方の定理より，

$$OC = \sqrt{OA^2 + CA^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3\text{(cm)}$$

次に，右下図のように展開図をかく。

図の展開図において，CC'が最短経路の長さになる。

そこで，まず，この円すいを展開したときの側面のおうぎ形の中心角を求める。



底面の円の円周は，2×1×π＝2π(cm)なので，弧 CC'の長さも 2π(cm)になる。

側面の円 O の円周は，2×3×π＝6π(cm)である。

よって，中心角の大きさは，$360° \times \dfrac{2\pi}{6\pi} = 120°$ になる。

図のように，O から CC'に垂線 OB をおろすと，OB は∠COC'を二等分するので，∠BOC＝60° となる。

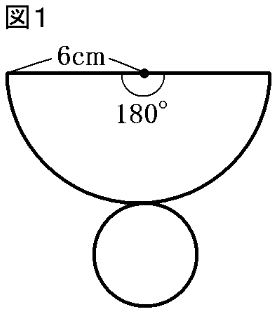
△BOC は 30° 60° 90° の直角三角形なので，BC：OC＝$\sqrt{3}$：2

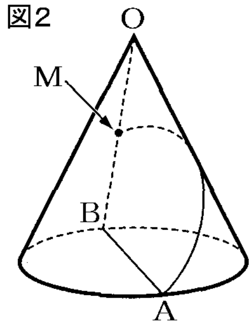
よって，BC：3＝$\sqrt{3}$：2　比の外項の積は内項の積に等しいので，

BC×2＝3×$\sqrt{3}$　よって，BC＝$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　ゆえに CC'＝$\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \times 2 = 3\sqrt{3}$(cm)

[問題](入試問題)

　図１は，円すいの展開図である。側面の展開図のおうぎ形は，半径 6cm，中心角 180°になっている。このとき，次の(1)，(2)の問いに答えよ。





(1) 底面の円の半径を求めよ。

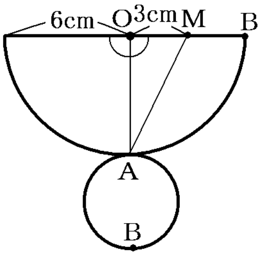
(2) 図1の展開図を組み立てた円すいの頂点をO，底面の円の直径をAB，OBの中点をMとする。図2のように，側面上にAとMを最短の長さで結ぶ線をひくとき，その線の長さを求めよ。

(栃木県)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]



[解答](1) 3cm　(2) $3\sqrt{5}$ cm

[解説]

(1) 図１の側面部分のおうぎ形の半円周の長さと底面の円の円周の長さは等しい。

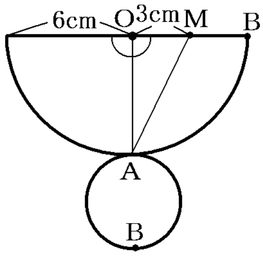
したがって，底面の半径を x cm とすると，

$2\pi \times x = 6 \times 2 \times \pi \div 2$，よって， $x = 3$(cm)

(2) 点 A が右図のような位置にあるとき，AB は底面の円を半周した位置にあるので，B と M の位置は右図のようになる。

A と M を最短の長さで結ぶ線は右図の AM になる。

直角三角形 AMO で，三平方の定理より，



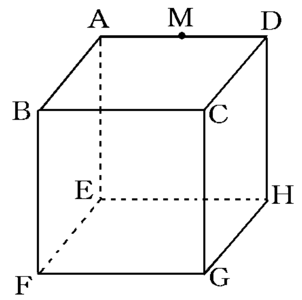
AM$= \sqrt{OA^2 + OM^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$ (cm)

【】立体上の 2 点の距離

[2 点の距離]

[問題](3 学期)

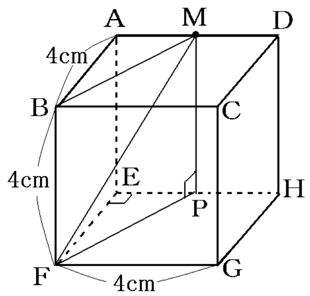
　右の図のように，1 辺の長さが 4cm の立方体 ABCD－EFGH があり，辺 AD の中点を M とする。MF の長さを求めよ。



[解答欄]

[ヒント]

2 点 M，F を通る平面で立体を切る→切断面で考える



[解答]6cm

[解説]

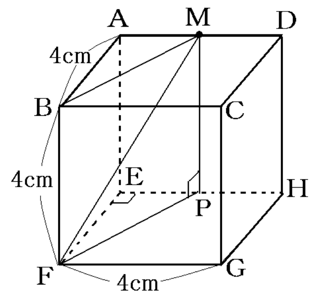
<Point> 2 点を通る平面で立体を切る→切断面で考える

右図のように，M と F を通り底面に垂直な断面 MBFP を考える。このとき，∠MPF＝90°で P は EH の中点になる。

MP＝4cm なので，FP の長さがわかれば，三平方の定理より，MF の長さが計算できる。そこで，直角三角形 FPE に注目する。

EF＝4cm，P は EH の中点なので，EP＝2cm

三平方の定理より，



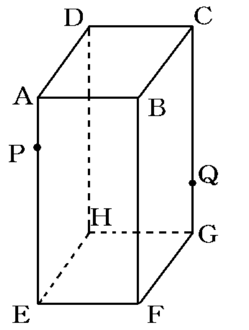
FP＝$\sqrt{EF^2+EP^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$

次に，△MFP で，三平方の定理より，

MF＝$\sqrt{FP^2+PM^2}=\sqrt{20+4^2}=\sqrt{36}=6$(cm)

[問題](後期期末)

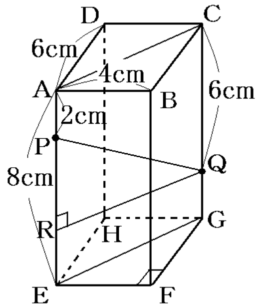
次の図の立体は，8つの点A，B，C，D，E，F，G，Hを頂点とする直方体であり，AB＝4cm，AD＝6cm，AE＝8cmである。辺AE，CG上にそれぞれ点P，Qを，AP＝2cm，CQ＝6cmとなるようにとるとき，PQの長さを求めよ。



[解答欄]

[ヒント]

2点P，Qを通る平面で立体を切る→切断面で考える



[解答] $2\sqrt{17}$ cm

[解説]

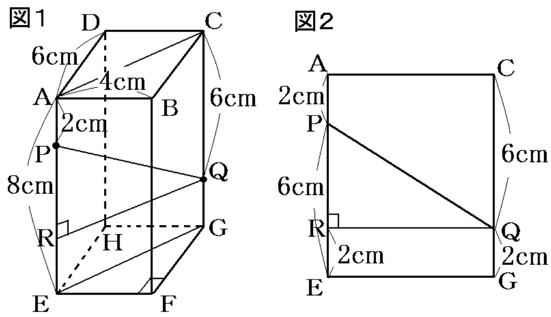
<Point> 2点を通る平面で立体を切る→切断面で考える

右図のように，2点P，Qを通り底面に垂直な断面AEGCを考える。

図2は切断面AEGCの部分を平面にしたものである。QからEGと平行にQRの線分を引くと，∠PRQ＝90°になる。

△PQRで，PR＝6－2＝4(cm)なので，

QR(＝EG)の長さがわかれば，三平方の定理よりPQの長さを求めることができる。



そこで，図1の直角三角形EGFに注目する。EF＝4cm，GF＝6cmなので，三平方の定理

より，EG＝$\sqrt{EF^2+GF^2}=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}$ (cm)

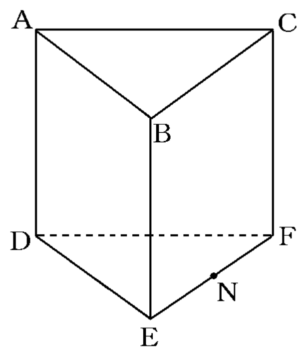
よって，QR＝EG＝$\sqrt{52}$

図2の直角三角形PQRで，三平方の定理より，

PQ＝$\sqrt{PR^2+QR^2}=\sqrt{4^2+52}=\sqrt{68}=\sqrt{4\times17}=2\sqrt{17}$ (cm)

[問題](入試問題)

次の図の立体は底面が直角二等辺三角形で，側面はすべて長方形の三角柱であり，∠ABC＝90°，AB＝BC＝4cm，AD＝5cm とする。また，辺 EF の中点を N とする。A，N を結ぶとき，線分 AN の長さを求めよ。

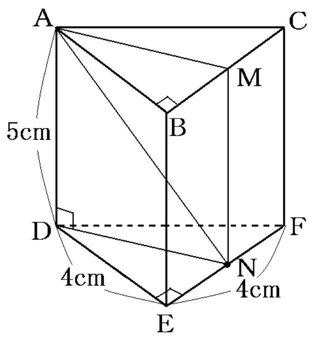


(佐賀県)

[解答欄]

[ヒント]

2 点 A，N を通る平面で立体を切る→切断面で考える



[解答] $3\sqrt{5}$ cm

[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る→切断面で考える

右の図 1 のように，A と N を通り底面に垂直な断面 ADNM を考える。

AD は底面に垂直なので，∠ADN＝90° である。したがって，直角三角形 AND で，AD＝5cm なので，あと DN の長さがわかれば，三平方の定理より AN の長さを求めることができる。

そこで，図 2 のように底面 DFE を平面に書き表してみる。

図 1

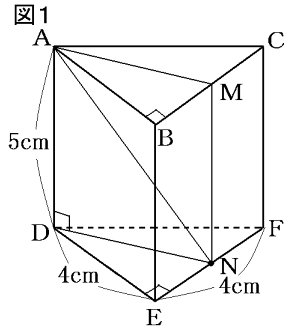


図 2

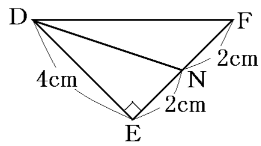


図 2 の直角三角形 DNE で，三平方の定理より，

DN＝$\sqrt{DE^2+EN^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$ (cm)

図 1 の直角三角形 AND で，三平方の定理より，

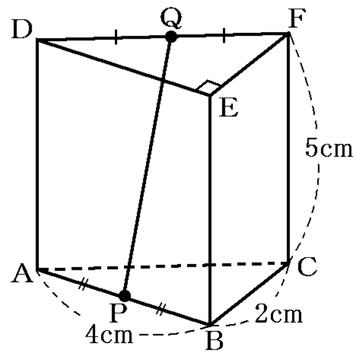
AN＝$\sqrt{AD^2+DN^2}=\sqrt{25+20}=\sqrt{45}=\sqrt{9\times 5}=3\sqrt{5}$ (cm)

[問題](入試問題)

右の図のような三角柱があり，AB＝4cm，BC＝2cm，CF＝5cm，∠DEF＝90°である。また，辺 AB，DF の中点をそれぞれ P，Q とし，点 P と点 Q を結ぶ。

線分 PQ の長さは何 cm か。

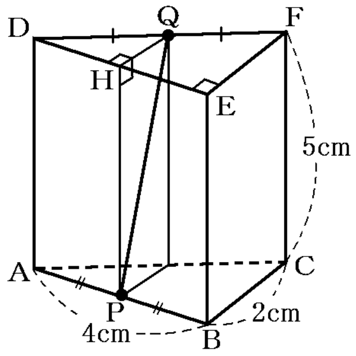
(香川県)



[解答欄]

[ヒント]

2 点 P，Q を通る平面で立体を切る→切断面で考える



[解答] $\sqrt{26}$ cm

[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る→切断面で考える

右図のように，Q から DE へ垂線 QH を引くと，

∠QHD＝∠FED＝90°で，同位角が等しいので，QH // FE

平行線の性質より，HQ：EF＝DQ：DF＝1：2 なので，

$\mathrm{QH}=\frac{1}{2}\mathrm{FE}=\frac{1}{2}\mathrm{CB}=\frac{1}{2}\times 2=1(\mathrm{cm})$

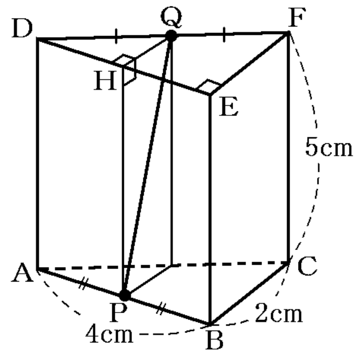
また，H は DE の中点になるので，四角形 HPBE は長方形になり，PH // BE になる。

BE⊥面 DEF なので，PH⊥面 DEF になる。

よって，∠PHQ＝90°

直角三角形 PQH で，三平方の定理より，

$\mathrm{PQ}=\sqrt{PH^2+QH^2}=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}\,(\mathrm{cm})$



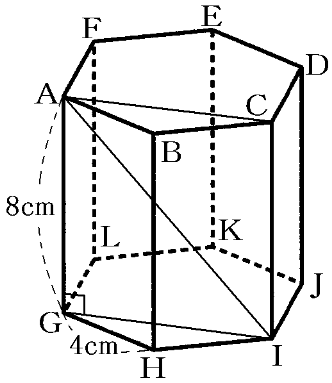
[問題](入試問題)

　右図のように，底面 GHIJKL が 1 辺 4cm の正六角形で，AG＝8cm の正六角柱 ABCDEF－GHIJKL がある。AI の長さを求めよ。

(石川県)

[解答欄]

[ヒント]



[解答] $4\sqrt{7}$ cm

[解説]

右の図 1 のように，AIG を結ぶ。辺 AG は底面と垂直なので，∠AGI＝90° である。

直角三角形 AIG で AG＝8cm なので，GI の長さがわかれば AI を計算できる。

図 2 のように，底面 GHIJKL は正六角形なので，

図1

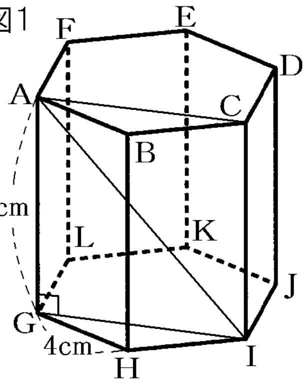
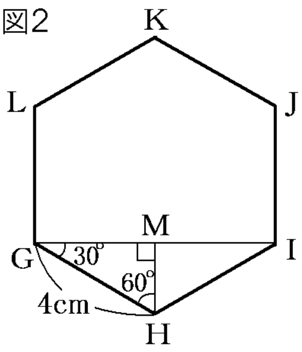


図2



△GHM は 30° 60° 90° の直角三角形である。

したがって，GM：GH＝$\sqrt{3}$：2,

GH＝4cm なので，GM：4＝$\sqrt{3}$：2

比の外項の積は内項の積に等しいので，

GM×2＝4×$\sqrt{3}$，GM＝4×$\sqrt{3}$÷2＝$2\sqrt{3}$(cm)，GI＝2GM＝$4\sqrt{3}$(cm)

図 1 の直角三角形 AIG で，三平方の定理より，

$AI^2=AG^2+GI^2=64+(4\sqrt{3})^2=64+48=112$

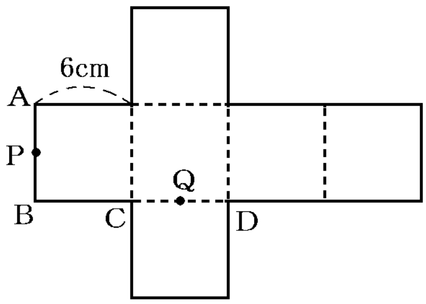
よって，AI＝$\sqrt{112}=\sqrt{16\times 7}=4\sqrt{7}$(cm)

[展開図上の 2 点]

[問題](入試問題)

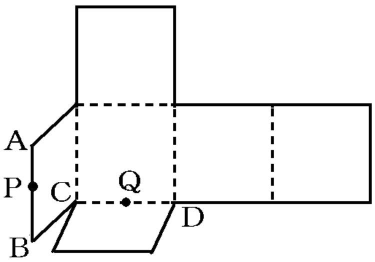
　右の図のように，1 辺の長さが 6cm の立方体の展開図がある。線分 AB，線分 CD の中点をそれぞれ P，Q とする。この展開図を組み立てて立方体をつくったとき，立方体上の 2 点 P，Q の間の距離を求めよ。

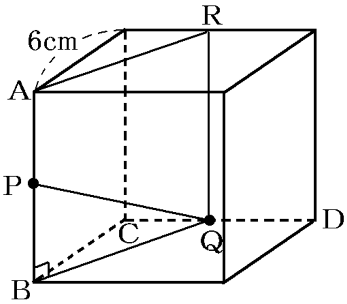
(秋田県)



[解答欄]

[ヒント]





[解答] $3\sqrt{6}$ cm

[解説]

展開図を組み立てた立方体は右下の図のようになる。

線分 PQ を含む切断面 ABQR に注目する。

この切断面上の直角三角形 PQB で，三平方の定理より，

$PQ^2 = PB^2 + BQ^2$・・・①が成り立つ。

P は AB の中点で AB＝6cm なので, PB＝6÷2＝3(cm)である。

あと，BQ の長さがわかれば，①より PQ を求めることができる。

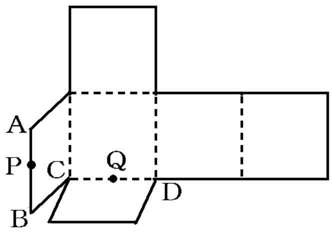
底面上の直角三角形 BQC で，BC＝(6cm)，CQ＝6÷2＝3(cm)なので，三平方の定理より，

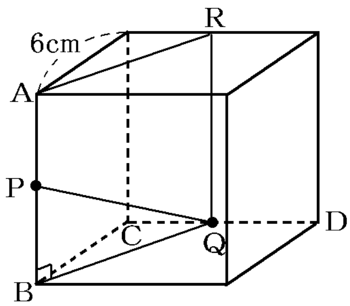
$BQ^2 = BC^2 + CQ^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45$

PB＝3cm なので，①式に代入すると，

$PQ^2 = PB^2 + BQ^2 = 3^2 + 45 = 9 + 45 = 54$

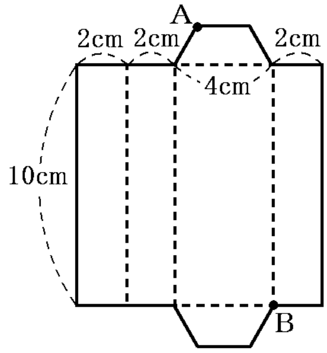
よって，$PQ = \sqrt{54} = \sqrt{9 \times 6} = 3\sqrt{6}$ (cm)





[問題]

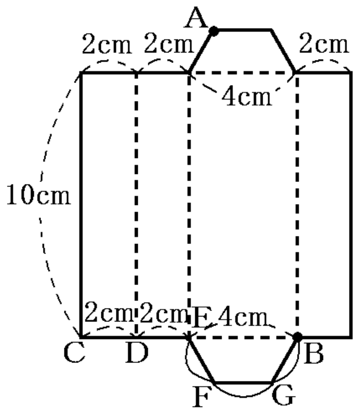
右の図は，底面が台形である四角柱の展開図である。これを組み立ててできる四角柱の 2 つの頂点 A，B を結ぶ線分 AB の長さを求めよ。

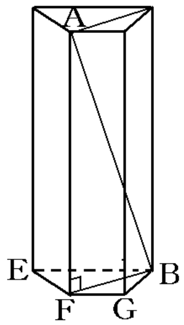


(愛媛県)

[解答欄]

[ヒント]





[解答] $4\sqrt{7}$ cm

[解説]

図1

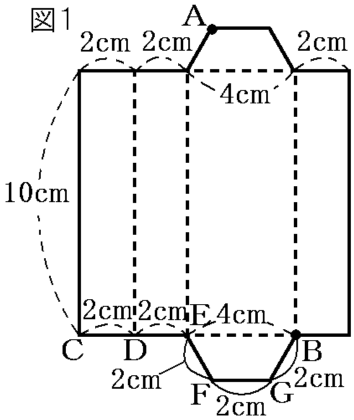


図2

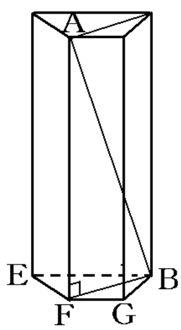


図3

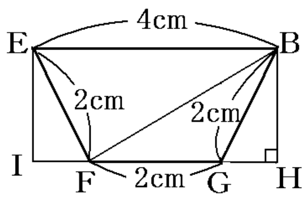


図 2 の直角三角形 ABF で，AF＝10cm なので，BF がわかれば AB の長さを計算できる。

図 1 で，D は F に，C は G に重なるので，EF＝2cm，FG＝2cm になる。

図 3 で，FI＝GH なので，GH＝(EB－FG)÷2＝(4－2)÷2＝1(cm)

直角三角形 BGH で，三平方の定理より，

BH＝$\sqrt{BG^2-GH^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$(cm)

直角三角形 BFH で，三平方の定理より，

BF＝$\sqrt{FH^2+BH^2}=\sqrt{(2+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}$ (cm)

図 2 の直角三角形 ABF で，三平方の定理より，

AB＝$\sqrt{AF^2+BF^2}=\sqrt{10^2+\left(\sqrt{12}\right)^2}=\sqrt{100+12}=\sqrt{112}=\sqrt{16\times7}=4\sqrt{7}$ (cm)

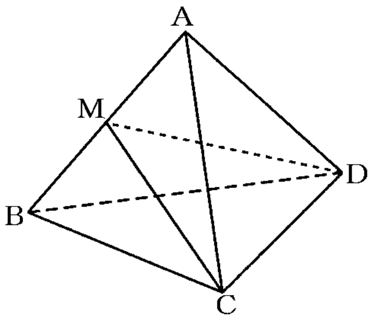
【】立体→切断面の平面図形

【】切断面が三角形

[切断面が二等辺三角形など]

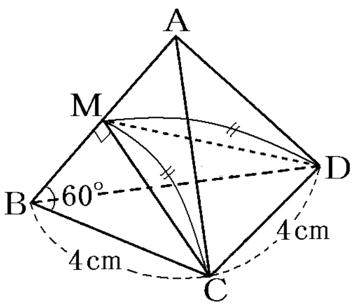
[問題](後期期末)

右の図のような1辺の長さが4cmの正四面体ABCDがある。辺ABの中点をMとするとき，△MCDの面積を求めよ。



[解答欄]

[ヒント]



[解答] $4\sqrt{2}$ cm²

[解説]

<Point> 二等辺三角形の高さ：頂点から垂線をおろす

図1で，△ABCは正三角形で，MはABの中点なので，CM⊥ABとなる。

△BCM は 30°60°90°の直角三角形なので，BM：BC：CM＝1：2：$\sqrt{3}$

BC＝4cmなので，

BM＝2cm，CM＝$2\sqrt{3}$ cmとなる。

同様に，DM＝$2\sqrt{3}$ cmで，DM＝CM

したがって，図2の△MCDは二等辺三角形である。

Mから辺CDに垂線MHをおろすと，HはCDの中点になる。したがって，CH＝2cm　直角三角形MCHで，三平方の定理より，

図1

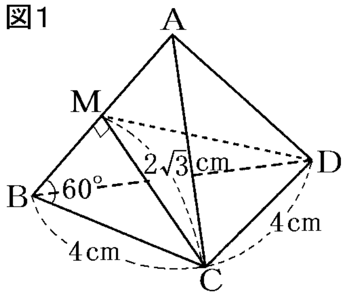
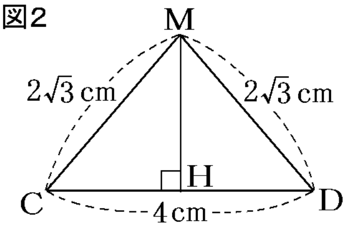


図2

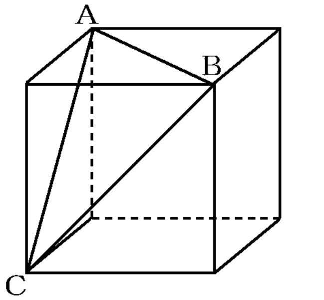


$$MH=\sqrt{MC^2-CH^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-2^2}=\sqrt{12-4}=\sqrt{8}=\sqrt{4\times2}=2\sqrt{2}\ (cm)$$

よって，(△MCDの面積)＝(底辺CD)×(高さMH)÷2＝4×$2\sqrt{2}$ ÷2＝$4\sqrt{2}$ (cm²)

[問題](入試問題)

右の図のように，1 辺が 6cm の立方体の 3 つの頂点 A，B，C を結んでできる右の図のような△ABC の面積を求めよ。



(京都府)

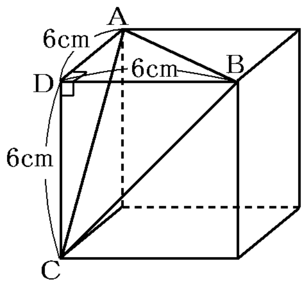
[解答欄]

[ヒント]

△ABC は，AB＝AC＝BC の正三角形になる。

[解答] $18\sqrt{3}$ cm²

[解説]

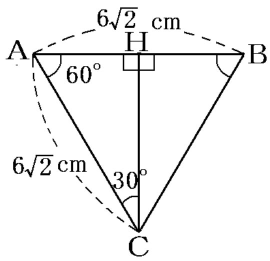


右図の直角三角形 ABD で，三平方の定理より，

AB＝$\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{36\times2}=6\sqrt{2}$ (cm)

同様にして，AC＝$6\sqrt{2}$ (cm)，BC＝$6\sqrt{2}$ (cm)

よって, △ABC は 1 辺が $6\sqrt{2}$ cm の正三角形になる。



右下図の△ACH は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は

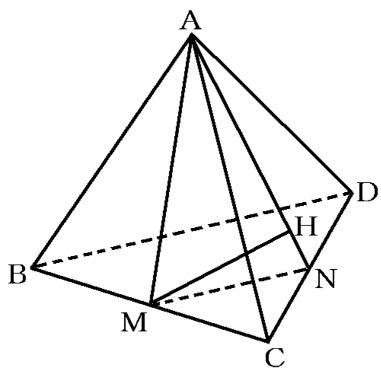
1：2：$\sqrt{3}$ になるので，CH＝$6\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{6}$ (cm)である。

(△ABC の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×AB×CH＝$\dfrac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times3\sqrt{6}$

＝$9\sqrt{12}=9\sqrt{4\times3}=18\sqrt{3}$ (cm²)

[問題](入試問題)

右の図のように，1 辺の長さが 4cm の正四面体 ABCD があり，辺 BC，CD の中点をそれぞれ M，N とする。また，点 M から線分 AN に垂線をひき，その交点を H とする。このとき，次の各問いに答えよ。



(1) MN の長さを求めよ。

(2) AM の長さを求めよ。

(3) △AMN の面積を求めよ。

(4) MH の長さを求めよ。

(佐賀県)

[解答欄]

(1)	(2)	(3)
(4)		

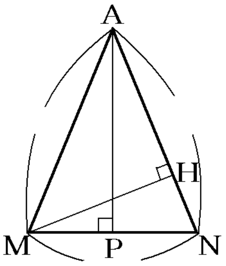
[ヒント]

正三角形 CBD→MN

正三角形 ABC→AM

二等辺三角形 AMN の面積を求める

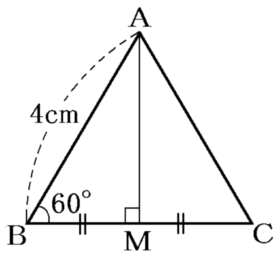
△AMN の面積，底辺 AN→高さ MN



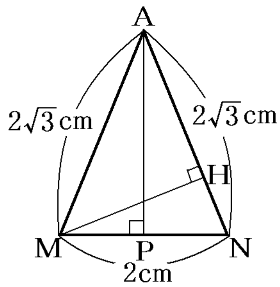
[解答](1) 2cm　(2) $2\sqrt{3}$ cm　(3) $\sqrt{11}$ cm²　(4) $\dfrac{\sqrt{33}}{3}$ cm

[解説]

(1) △CBD で，M，N は辺 BC，CD の中点なので，中点連結定理より，MN＝$\dfrac{1}{2}$BD＝$\dfrac{1}{2}\times 4=2$(cm)



(2) 右図の正三角形 ABC で，M は BC の中点なので，AM⊥BC。△ABM は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は 1 : 2 : $\sqrt{3}$ になるので，AM＝$4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$(cm)



(3) △AMN は，AM＝AN＝$2\sqrt{3}$(cm)，MN＝2(cm)の二等辺三角形になる。右図のように，A から MN に垂線 AP を引くと，P は MN の中点になる。直角三角形 AMP で，三平方の定理より，

$$AP=\sqrt{AM^2-MP^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{12-1}=\sqrt{11}\text{(cm)}$$

$$(\triangle AMN\text{ の面積})=\frac{1}{2}\times MN\times AP=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{11}=\sqrt{11}\text{(cm}^2\text{)}$$

(4) MH の長さは△AMN の面積と AN の長さから求める。

△AMN の底辺を AN とすると，高さは MH になるので，

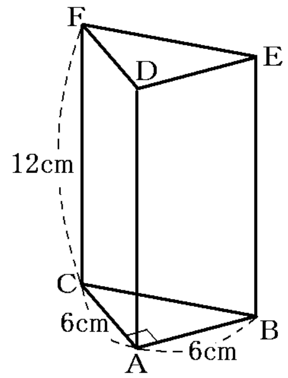
$$\frac{1}{2}\times AN\times MH=(\triangle AMN\text{ の面積})$$

$$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times MH=\sqrt{11},\quad \sqrt{3}MH=\sqrt{11},\quad MH=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{11}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{33}}{3}\text{(cm)}$$

[切断面が直角三角形]

[問題](入試問題)

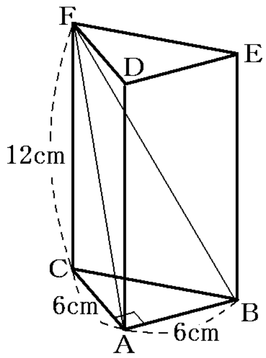
右の図は，底面 ABC が AB＝AC＝6cm の直角二等辺三角形で，側面がすべて長方形の三角柱 ABCDEF を表しており，CF＝12cm である。△FAB の面積を求めよ。



(福岡県)

[解答欄]

[ヒント]



直線 BA は平面 ACFD と垂直の位置関係にある(BA⊥AC，BA⊥AD なので)。

→BA⊥AF

[解答]$18\sqrt{5}$ cm²

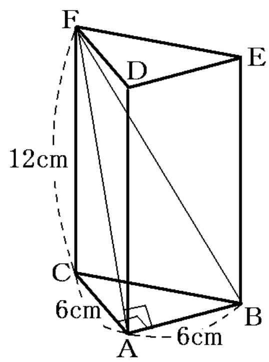
[解説]

∠FAB＝90° に気づくかどうかがポイントである。

直線 BA は平面 ACFD と垂直の位置関係にある(BA⊥AC, BA⊥AD なので)。したがって，平面 ACFD 上にある直線 AF と直線 BA は垂直に交わる。

FA の長さがわかれば，△FAB の面積を求めることができる。

直角三角形 FAC で，三平方の定理より，



FA＝$\sqrt{FC^2+AC^2}=\sqrt{12^2+6^2}=\sqrt{144+36}=\sqrt{180}$

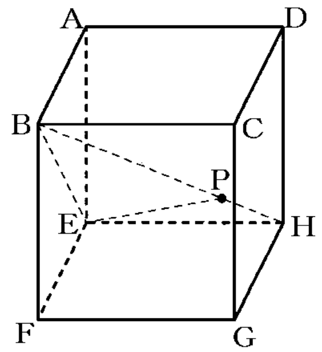
＝$\sqrt{36\times5}=6\sqrt{5}$ (cm)

(△FAB の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×AB×FA＝$\dfrac{1}{2}\times6\times6\sqrt{5}=18\sqrt{5}$ (cm²)

[問題](入試問題)

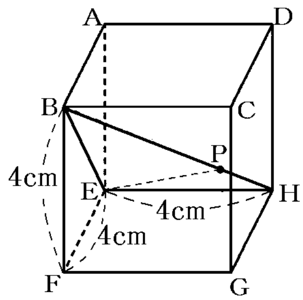
右の図のように，1 辺の長さが 4cm の立方体 ABCD－EFGH がある。対角線 BH 上に BP：PH＝3：1 となる点 P をとる。△PBE の面積を求めよ。

(新潟県改)



[解答欄]

[ヒント]



HE⊥面 ABFE なので，面 ABFE 上にある EB と HE は垂直に交わる。
よって，△BHE は直角三角形である。

[解答] $6\sqrt{2}$ (cm²)

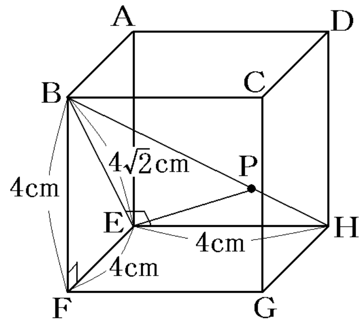
[解説]

∠BEH＝90°に気づくかどうかがポイントである。
HE⊥面 ABFE なので，面 ABFE 上にある EB と HE は垂直に交わる。
よって，△BHE は直角三角形である。
まず，△BHE の面積を求める。
直角三角形 BEF で，三平方の定理より，

BE＝$\sqrt{BF^2+EF^2}=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{4^2\times 2}=4\sqrt{2}$ (cm)

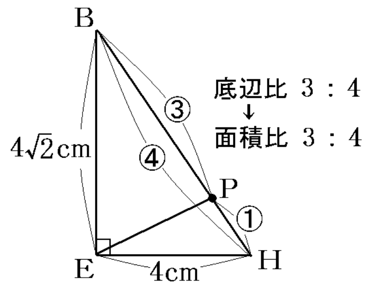
(△BEH の面積)＝$\frac{1}{2}$×EH×BE＝$\frac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$ (cm²)

△PBE の底辺を BP，△BEH の底辺を BH とすると高さは共通なので，
面積は底辺の比 BP：BH＝3：4 になる。



したがって，(△PBE の面積)＝(△BEH の面積)×$\frac{3}{4}$

＝$8\sqrt{2}\times\frac{3}{4}=6\sqrt{2}$ (cm²)

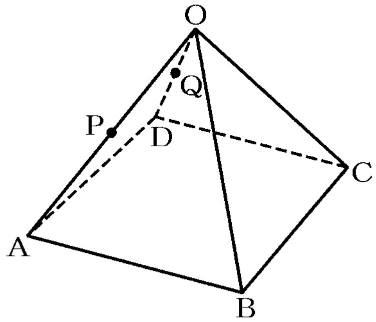


【】切断面が四角形

[問題](入試問題)

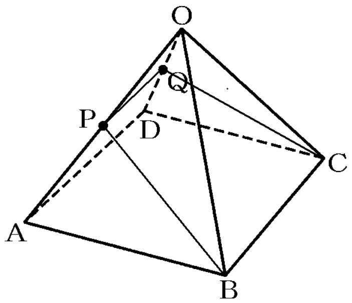
右の図のように，底面が正方形，側面が正三角形で，AB＝4cm の正四角すいが OABCD がある。また，辺 OA，OD の中点をそれぞれ P，Q とする。このとき，四角形 PBCQ の面積を求めよ。

(京都府)



[解答欄]

[ヒント]

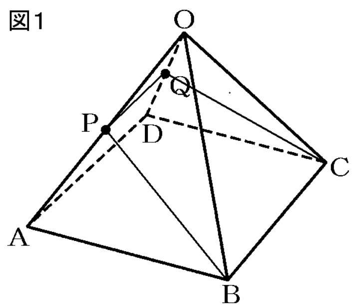


四角形 PBCQ は等脚台形→4 つの辺の長さが分かれば面積が計算できる。
PQ は正三角形 OAD，PB(QC)は正三角形 OAB(OCD)をかいて求める。

[解答] $3\sqrt{11}$ cm²

[解説]

図1



四角形 PBCQ は等脚台形になる。その面積は 4 つの辺の長さがわかれば計算できる。まず，PQ について図 2 で考える。
P，Q はそれぞれ OA，OD の中点なので，中点連結定理より，

PQ＝$\frac{1}{2}$AD＝2(cm)，PQ // AD となる。

AD // BC なので，PQ // BC となる。

次に，BP について図 3 で考える。

図2

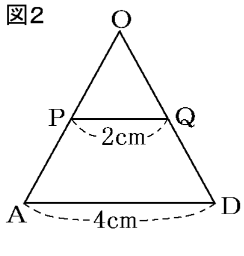
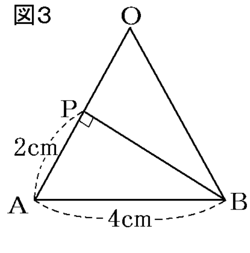


図3



△OAB は正三角形で，P は OA の中点なので，BP⊥OA となる。

直角三角形 ABP で，三平方の定理より，

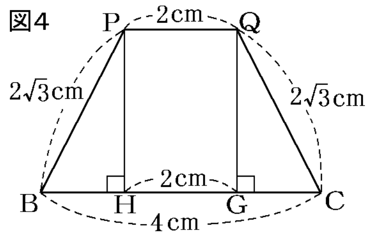
BP＝$\sqrt{AB^2 - AP^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$

＝$\sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$ (cm)

CQ もまったく同様にして，CQ＝$2\sqrt{3}$ cm となる。

<Point> 等脚台形の高さ：垂線を 2 つおろす。

台形 PBCQ は右の図 4 のようになる。



P，Q から辺 BC に垂線 PH，QG をおろす。

HG＝PQ＝2cm なので，BH＝CG＝(4－2)÷2＝1(cm)

直角三角形 PBH で，三平方の定理より，

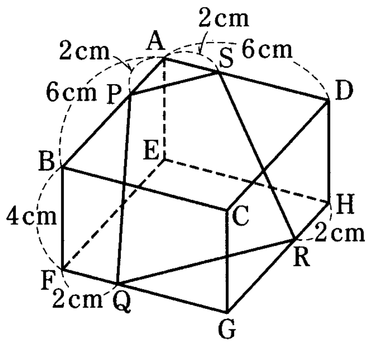
PH＝$\sqrt{PB^2 - BH^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{11}$ (cm)

よって，(台形 PBCQ の面積)＝(PQ＋BC)×PH÷2＝(2＋4)×$\sqrt{11}$÷2＝$3\sqrt{11}$ (cm²)

[問題](入試問題)

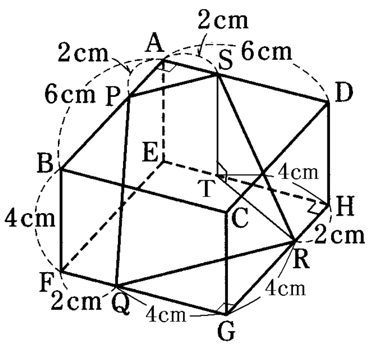
右の図は，AB＝AD＝6cm，BF＝4cm の直方体である。この直方体の辺 AB, FG, HG, AD 上に, それぞれ 4 点 P, Q, R, S を, AP＝FQ＝HR＝AS＝2cm となるようにとり，四角形 PQRS をつくる。四角形 PQRS の面積を求めよ。

(岩手県改)



[解答欄]

[ヒント]



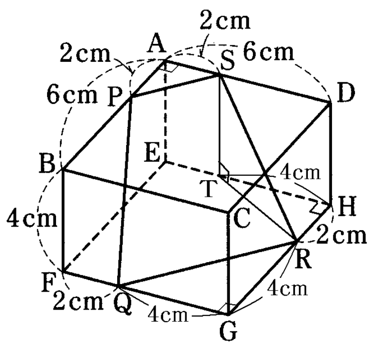
四角形 PQRS は等脚台形→4 つの辺の長さが分かれば面積が計算できる。

SR は図の直角三角形 SRT に着目して求める。

[解答] $6\sqrt{17}$ (cm²)

[解説]

四角形 PQRS は等脚台形になる。その面積は 4 辺の長さがわかれば計算できる。



直角三角形 PSA で，三平方の定理より，

PS＝$\sqrt{AP^2 + AS^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$ (cm)

直角三角形 QRG で，三平方の定理より，

QR＝$\sqrt{QG^2+RG^2}=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{4^2\times 2}=4\sqrt{2}$ (cm)

次に，S から辺 EH に垂線 ST をおろす。ST は底面に垂直なので，∠STR＝90°になる。直角三角形 TRH で，三平方の定理より，

TR＝$\sqrt{TH^2+RH^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}=2\sqrt{5}$ (cm)

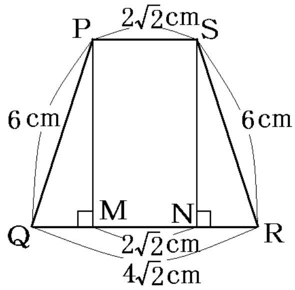
直角三角形 SRT で，三平方の定理より，

SR＝$\sqrt{ST^2+TR^2}=\sqrt{4^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{16+20}=\sqrt{36}=6$ (cm)

PQ もまったく同様なので，PQ＝6 cm

<Point> 等脚台形の高さ：垂線を 2 つおろす。

以上より，台形 PQRS は右図のようになる。
P，S から辺 QR に垂線 PM，SN をおろすと，
MN＝$2\sqrt{2}$ cm なので, QM＝RN＝$\left(4\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)\div 2=\sqrt{2}$ (cm)
直角三角形 PQM で，三平方の定理より，

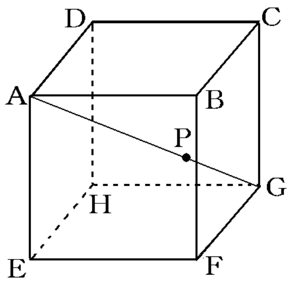


PM＝$\sqrt{PQ^2-QM^2}=\sqrt{6^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{36-2}=\sqrt{34}$ (cm)

したがって，(台形 PQRS の面積)=(PS＋QR)×PM÷2＝$\left(2\sqrt{2}+4\sqrt{2}\right)\times\sqrt{34}\div 2$
＝$6\sqrt{2}\times\sqrt{34}\div 2=3\sqrt{68}=3\sqrt{4\times 17}=6\sqrt{17}$ (cm^2)

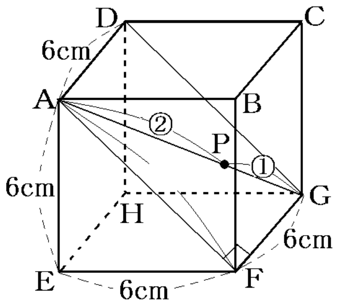
[問題](後期期末)

右の図は，1 辺の長さが 6cm の立方体 ABCD－EFGH において，線分 AG 上に点 P をとり，AP：PG＝2：1 となるようにしたものである。線分 PF の長さは何 cm か。



[解答欄]

[ヒント]



[解答] $2\sqrt{6}$ cm

[解説]

<Point> 2 点を通る平面で立体を切る

→切断面で考える

2 点 P, F, および線分 AG を含む断面 AFGD で考える。図 2 の△PFQ で，FQ と PQ の長さがわかれば，PF の長さを計算できる。そこで，まず AF の長さを求める。

図1

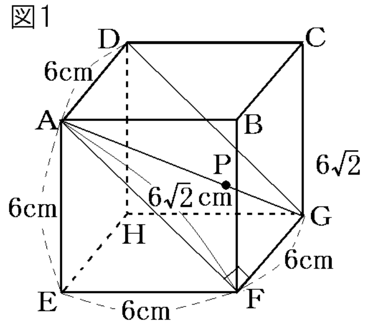


図2

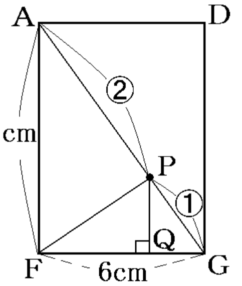


図 1 の直角三角形 AFE で，三平方の定理より，AF＝$\sqrt{AE^2+EF^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{6^2\times 2}=6\sqrt{2}$ (cm)

図 2 で，PQ : AF＝GP : GA＝1 : (1＋2)，よって，PQ : $6\sqrt{2}$ ＝1 : 3

比の外項の積は内項の積に等しいので，PQ×3＝ $6\sqrt{2}$ ×1

よって，PQ＝ $6\sqrt{2}\div 3=2\sqrt{2}$ (cm)･･･①

次に，GF＝6(cm)なので，

GQ : GF＝GP : GA＝1 : (1＋2)，よって，GQ : 6＝1 : 3

比の外項の積は内項の積に等しいので，GQ×3＝6×1，GQ＝6÷3＝2(cm)

FQ＝FG－GQ＝6－2＝4(cm)･･･②

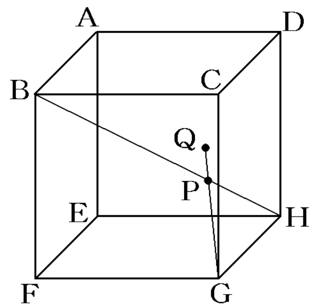
①，②より，PQ＝ $2\sqrt{2}$ cm，FQ＝4cm なので，直角三角形 PFQ で，三平方の定理より，

PF＝$\sqrt{PQ^2+FQ^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+4^2}=\sqrt{8+16}=\sqrt{24}=\sqrt{4\times 6}=2\sqrt{6}$ (cm)

[問題](入試問題)

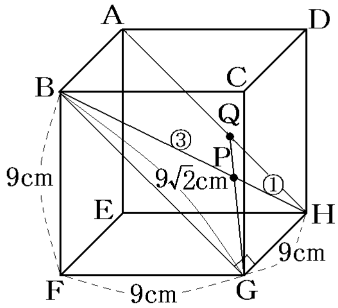
右の図のように，1 辺の長さが 9cm の立方体 ABCD－EFGH がある。対角線 BH 上に BP : PH＝3 : 1 となる点 P をとり，線分 GP の延長と平面 AEHD との交点を Q とする。このとき，線分 GQ の長さを求めよ。

(新潟県)



[解答欄]

[ヒント]



[解答] $3\sqrt{11}$ cm

[解説]

BPH，GPQ を含むこの立方体の切断面は，右の図 1 のように，ABGH になる。

GH⊥面 AEHD なので，GH⊥AH

同様に BA⊥AH

よって，切断面 ABGH は図 2 のような長方形になる。図 2 の△GQH は直角三角形なので，GH と QH がわかれば GQ を求めることができる。GH＝9cm なので，あとは QH である。

図1

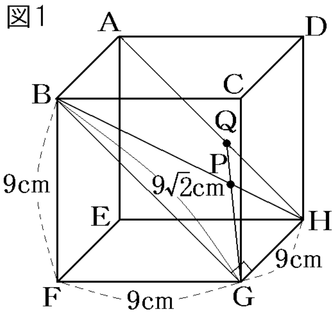
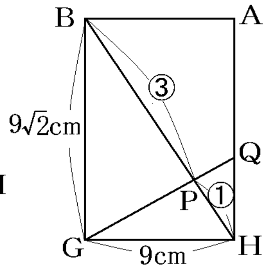


図2



BG // QH なので，平行線の性質より，QH：BG＝PH：BP＝1：3･･･①

図 1 で，三角形 BGF は直角三角形なので，三平方の定理より，

$$BG=\sqrt{BF^2+GF^2}=\sqrt{9^2+9^2}=\sqrt{9^2\times 2}=9\sqrt{2}\,(\text{cm})$$

①の QH：BG＝1：3 より，QH：$9\sqrt{2}$＝1：3

比の外項の積は内項の積に等しいので，QH×3＝$9\sqrt{2}\times 1$

よって，QH＝$9\sqrt{2}\div 3=3\sqrt{2}$ (cm)

図 2 の直角三角形 GQH で，三平方の定理より，

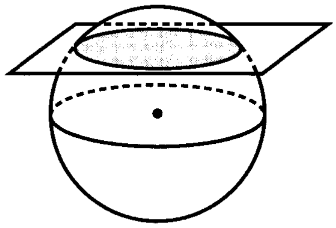
$$GQ=\sqrt{QH^2+GH^2}=\sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2+9^2}=\sqrt{18+81}=\sqrt{99}=\sqrt{9\times 11}=3\sqrt{11}\,(\text{cm})$$

【】球・円柱など

[球]

[問題](入試問題)

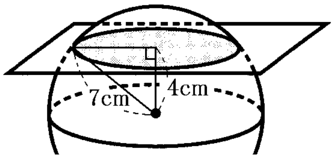
半径 7cm の球を，中心から 4cm の距離にある平面で切ったとき，切り口の円の面積を求めよ。



(埼玉県)(**)

[解答欄]

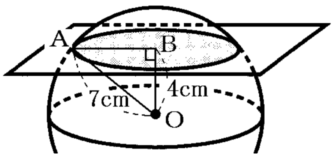
[ヒント]



[解答]$33\pi\,cm^2$

[解説]

右図で，三平方の定理より，

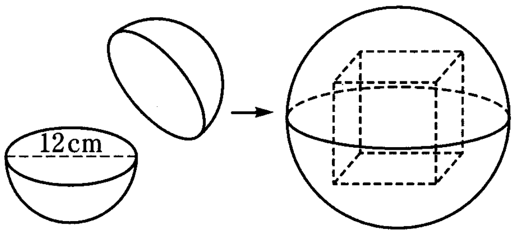


$AB^2=OA^2-OB^2=49-16=33$

(切り口の円の面積)$=\pi\times AB^2=\pi\times 33=33\pi(cm^2)$

[問題](入試問題)

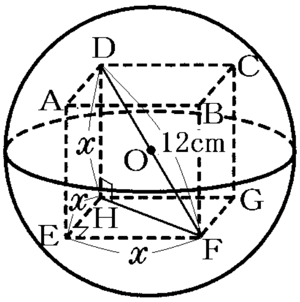
右の図のように，直径が 12cm の球の形をしたプラスチックの容器がある。この容器の中にちょうど入る立方体の 1 辺の長さを求めよ。ただし，プラスチックの容器の厚さは考えないものとする。



(埼玉県)

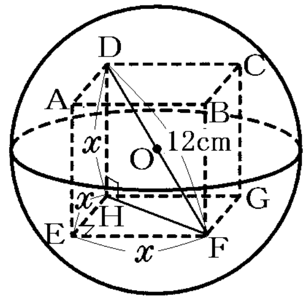
[解答欄]

[ヒント]



[解答] $4\sqrt{3}$ cm

[解説]



立方体の 8 つの頂点が，球に内接している。

右図のように，立方体の対角線 DF の中点に球の中心 O があり，DF は球の直径になる。

この立方体の 1 辺を x cm とする。

右図の直角三角形 HFE で，三平方の定理より，

$$\mathrm{HF}=\sqrt{HE^2+FE^2}=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{x^2\times 2}=\sqrt{2}x\,(\mathrm{cm})$$

直角三角形 DFH で，三平方の定理より，

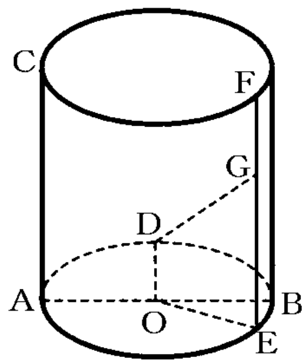
$$\mathrm{DF}=\sqrt{DH^2+HF^2}=\sqrt{x^2+\left(\sqrt{2}x\right)^2}=\sqrt{x^2+2x^2}=\sqrt{x^2\times 3}=\sqrt{3}x\,(\mathrm{cm})$$

DF は球の直径なので，

$$\sqrt{3}x=12,\ x=12\div\sqrt{3}=\frac{12}{\sqrt{3}}=\frac{12\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$$

[円柱]

[問題](入試問題)

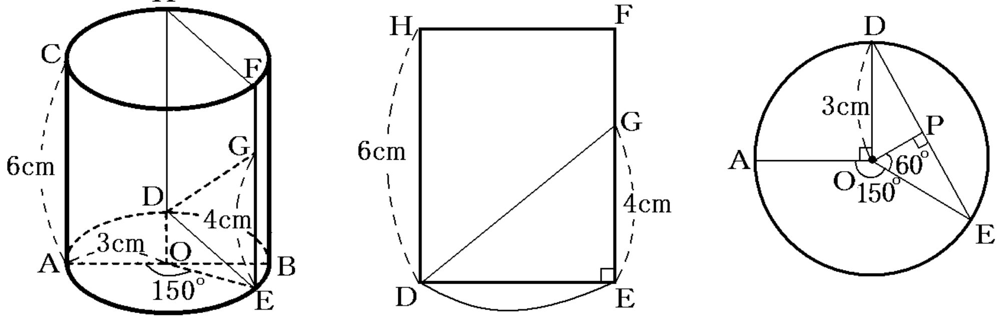


右の図は，線分 AB を直径とする円 O を底面とし，AC＝6cm を高さとする円柱である。点 D は円 O の周上の点で，∠AOD＝90° であり，点 E は点 D をふくまない弧 AB 上の点で，∠AOE＝150° である。また，点 F はこの円柱の 2 つの底面のうち円 O とは異なる円の周上の点で，線分 EF は底面に垂直である。AB＝AC である。線分 EF 上に点 G を EG＝4cm となるようにとるとき，2 点 D，G 間の距離を求めよ。

(神奈川県)

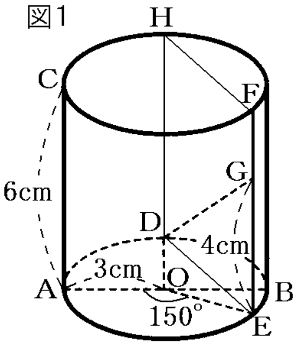
[解答欄]

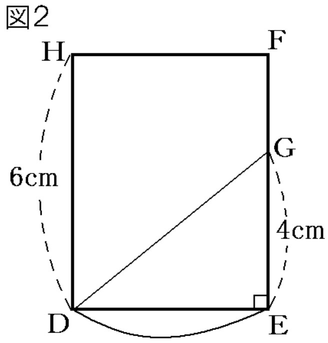
[ヒント]



[解答] $\sqrt{43}$ cm

[解説]





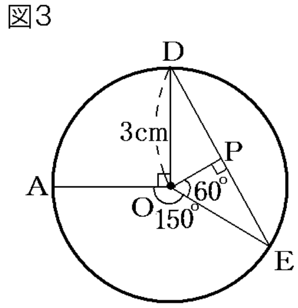


図 1 の DG を含む切断面 DEFH は図 2 のようになる。図 2 の DE の長さがわかれば，DG の長さを計算できる。

図 3 で，∠EOD＝360° －150° －90° ＝120° なので，∠EOP＝60° になる。

△OEP は 30° 90° 60° の直角三角形で 3 辺の比は 1 : 2 : $\sqrt{3}$ になるので，

$$\mathrm{EP}=\mathrm{OE}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\ (\mathrm{cm})$$

よって，DE＝EP×2＝$3\sqrt{3}$ (cm)

図 2 の直角三角形 DGE で，三平方の定理より，

$$\mathrm{DG}=\sqrt{DE^2+GE^2}=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2+4^2}=\sqrt{27+16}=\sqrt{43}\ (\mathrm{cm})$$

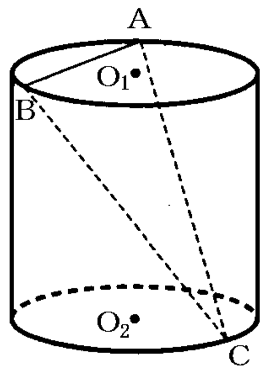
[問題](入試問題)

右の図のように，底面の半径が 2cm，高さが 6cm の円柱がある。底面の円の中心はそれぞれ O_1，O_2 で，円 O_1 の円周上に点 A と点 B を，∠AO_1B＝120° となるようにとる。また，円 O_2 の円周上に点 C を，△ABC の面積が最も大きくなるようにとる。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 線分 AB の長さを求めよ。

(2) △ABC の面積を求めよ。

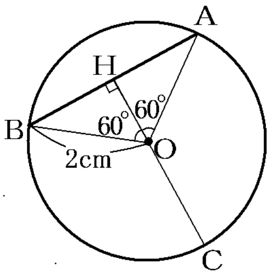
(京都府)

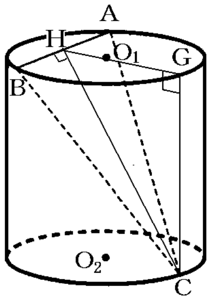


[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]





[解答](1) $2\sqrt{3}$ cm　(2) $3\sqrt{15}$ cm^2

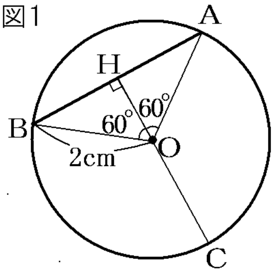
[解説]

(1) 右の図1で△OBHは30°90°60°の直角三角形で3辺の比は $1:2:\sqrt{3}$ になるので，

$$BH=OB\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\,(cm)$$

$$AB=2BH=2\sqrt{3}\,(cm)$$

図1



(2) 点Cが図1のような位置にあるとき△ABCの面積が最も大きくなる。

図2のCHの長さがわかれば△ABCの面積が計算できる。

図1の△OBHで，(1)と同じように考えると，

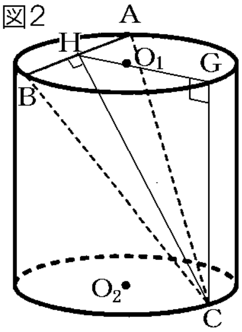
$$OH=OB\times\frac{1}{2}=2\times\frac{1}{2}=1(cm)$$

したがって，図2の $GH=GO_1+O_1H=2+1=3(cm)$

図2の直角三角形CHGで，三平方の定理より，

$$CH=\sqrt{CG^2+GH^2}=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=3\sqrt{5}\,(cm)$$

図2



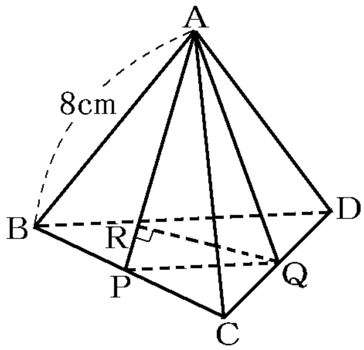
よって，(△ABCの面積)$=\frac{1}{2}\times AB\times CH=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3\sqrt{5}=3\sqrt{15}\,(cm^2)$

【】体積(応用)

【】正四面体など

[問題](入試問題)

右の図の正四面体は，1 辺の長さが 8cm である。辺 BC, CD の中点をそれぞれ点 P，Q，点 Q から AP にひいた垂線と AP との交点を R とする。次の各問いに答えよ。



(1) △APQ の面積を求めよ。

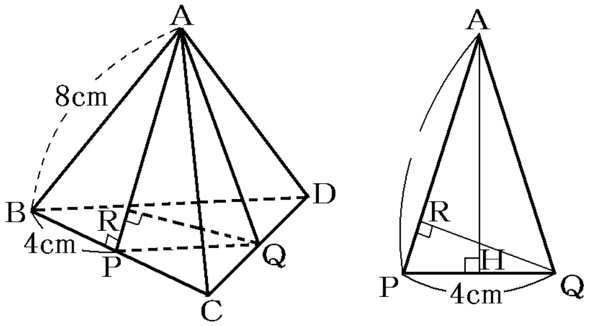
(2) QR の長さを求めよ。

(青森県)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]



[解答](1) $4\sqrt{11}\,\text{cm}^2$　(2) $\dfrac{2\sqrt{33}}{3}\text{cm}$

[解説]

(1) 図 1 の直角三角形 ABP で, 三平方の定理より，$\text{AP}=\sqrt{AB^2-BP^2}=\sqrt{64-16}=\sqrt{48}$

$=\sqrt{16\times3}=4\sqrt{3}\,(\text{cm})$

図 2 の直角三角形 APH で, 三平方の定理より,

$\text{AH}=\sqrt{AP^2-PH^2}=\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2-2^2}=\sqrt{48-4}$

$=\sqrt{44}=\sqrt{4\times11}=2\sqrt{11}\,(\text{cm})$

図1

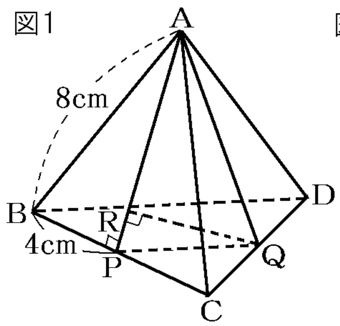
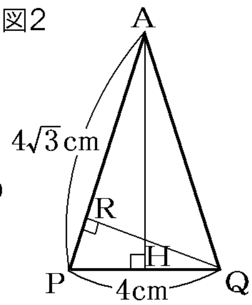


図2



(△APQ の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times\text{PQ}\times\text{AH}=\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{11}=4\sqrt{11}\,(\text{cm}^2)$

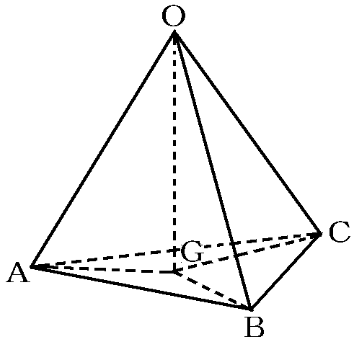
(2) 図 2 の△APQ の底辺を AP とすると，高さは QR になるので,

(△APQ の面積)＝$\dfrac{1}{2}\times\text{AP}\times\text{QR}=4\sqrt{11}$ が成り立つ。

$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times \mathrm{QR} = 4\sqrt{11}$，$2\sqrt{3} \times \mathrm{QR} = 4\sqrt{11}$，$\mathrm{QR} = \frac{4\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{11}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{33}}{3}$ (cm)

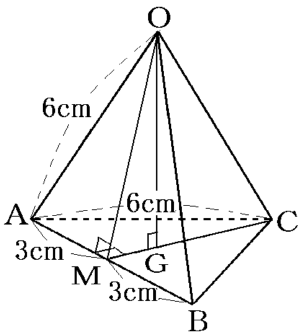
[問題](後期期末)

右の図の OABC は，1 辺の長さが 6cm の正四面体である。この正四面体の体積を求めよ。



[解答欄]

[ヒント]



△OMC は OM＝CM の二等辺三角形である→3 辺が分かれば面積を計算できる
底辺を CM とすると高さは OG→面積と CM から OG(h)を計算。

[解答]$18\sqrt{2}$ cm³

[解説]

図 1 の△OMC に注目する。

△OAB は 1 辺が 6cm の正三角形で∠OAM＝60° なので，
△OAM は 30° 90° 60° の直角三角形で，3 辺の比は 1 : 2 : $\sqrt{3}$
である。よって，$\mathrm{OM} = \mathrm{OA} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (cm)である。
CM も同様にして，CM＝$3\sqrt{3}$ (cm)である。
△OMC の面積がわかれば図 3 の OG を求めることができる。

図1

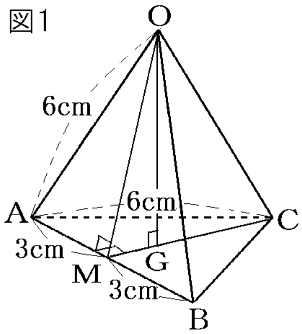


図 2 の直角三角形 OMH で，三平方の定理より，

$\mathrm{MH} = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - 3^2} = \sqrt{27-9}$

$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (cm)

(△OMC の面積)$= \frac{1}{2} \times \mathrm{OC} \times \mathrm{MH} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{2}$

$= 9\sqrt{2}$ (cm²)・・・①

図2

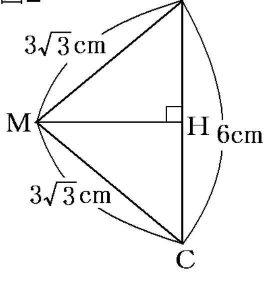
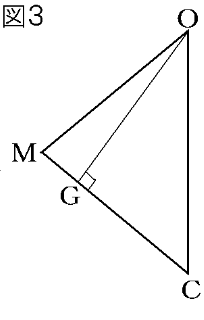


図3



次に，図 3 で，底辺を MC とすると，高さは OG なので，

(△OMC の面積)$=\dfrac{1}{2}\times$MC$\times$OG・・・②

①，②より，$\dfrac{1}{2}\times$MC$\times$OG$=9\sqrt{2}$

$\dfrac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times$OG$=9\sqrt{2}$， $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$OG$=9\sqrt{2}$，

OG$=9\sqrt{2}\div\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{2}\times\dfrac{2}{3\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{6}}{3}=2\sqrt{6}$ (cm)

CM$=3\sqrt{3}$ (cm)なので，

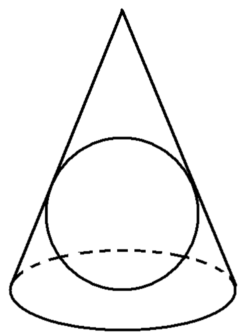
(△ABC の面積)$=\dfrac{1}{2}\times$AB$\times$CM$=\dfrac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$ (cm^2)

よって，(三角錐 OABC の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(△ABC の面積)$\times$OG$=\dfrac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times 2\sqrt{6}$

$=6\sqrt{18}=18\sqrt{2}$ (cm^3)

[問題](3 学期)

右の図のように，円すいの中に球がすきまのない状態で入っている。円すいの底面の半径は 3cm，母線の長さは 9cm である。次の各問いに答えよ。



(1) 円すいの体積を求めよ。

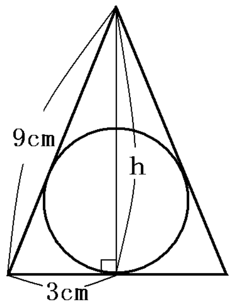
(2) 円すいの中に入っている球の半径を求めよ。

[解答欄]

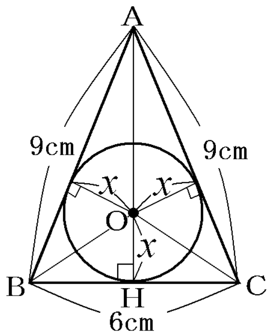
(1)	(2)

[ヒント]

(1)



(2)



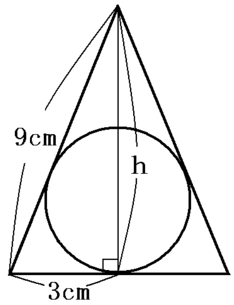
(△OBC)+(△OAB)+(△OAC)
=(△ABCの面積)

[解答](1) $18\sqrt{2}\pi\,\text{cm}^3$　(2) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$cm

[解説]

<Point> 接点を含む断面で考える。

(1) 高さをhとすると三平方の定理より，



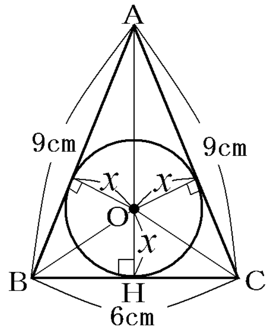
$h=\sqrt{9^2-3^2}=\sqrt{81-9}=\sqrt{72}=\sqrt{36\times 2}=6\sqrt{2}$ (cm)

(円すいの体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)$=\dfrac{1}{3}\times\pi\times 3^2\times 6\sqrt{2}$

$=18\sqrt{2}\pi$ (cm³)

(2) 球の半径を$x$cm とする。

<Point> 内接円の半径：面積利用で計算



右図の△ABC の面積に注目すると，

(△OBC の面積)+(△OAB の面積)+(△OAC の面積)＝(△ABC の面積)

なので，$\dfrac{1}{2}\times 6\times x+\dfrac{1}{2}\times 9\times x+\dfrac{1}{2}\times 9\times x=\dfrac{1}{2}\times 6\times 6\sqrt{2}$

両辺を 2 倍すると，$6x+9x+9x=36\sqrt{2}$，$24x=36\sqrt{2}$

$x=36\sqrt{2}\div 24=\dfrac{36\sqrt{2}}{24}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (cm)

よって球の半径は，$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$cm

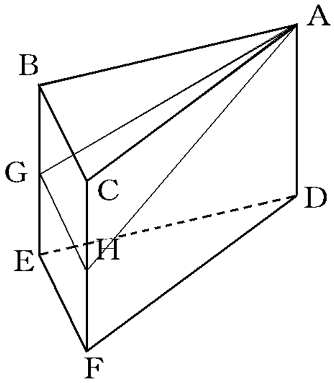
【】体積と高さ

[高さの発見]

[問題](入試問題)

右の図のような三角柱がある。△DEF は二等辺三角形で，DE＝DF＝7cm，EF＝4cm である。また，この三角柱の高さは AD＝6cm である。

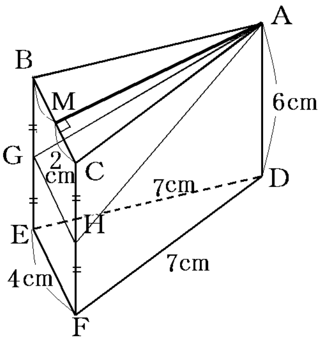
辺 BE，CF の中点をそれぞれ G，H とし，3 点 A，G，H を通る平面で切って，この三角柱を 2 つに分けるとき，点 B を含む立体の体積を求めよ。



(香川県)

[解答欄]

[ヒント]

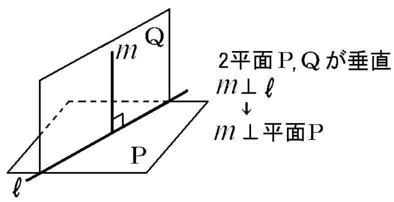


三角柱の底面 ABC と側面 BEFC は垂直なので，AM は面 BEFC に垂直になる。
したがって，四角すい A－BGHC の底面を BGHC とすると，高さは AM になる。

[解答] $12\sqrt{5}$ cm^3

[解説]

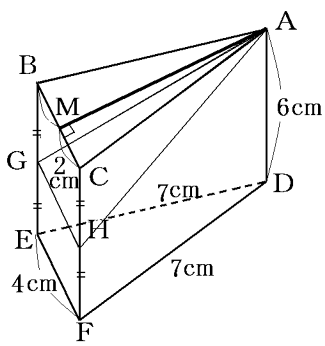
右図のように，BC の中点を M とすると，



△ABC は AB＝AC の二等辺三角形なので，AM⊥BC となる。

ところで，三角柱の底面 ABC と側面 BEFC は垂直なので，AM は面 BEFC に垂直になる。

したがって，四角すい A－BGHC の底面を BGHC とすると，高さは AM になる。



この四角すいの体積を求めるために，まず，AM を求める。

CM＝CB÷2＝EF÷2＝4÷2＝2(cm)，AC＝DF＝7(cm)

直角三角形 ACM で，

三平方の定理より，

AM＝$\sqrt{AC^2-CM^2}=\sqrt{7^2-2^2}=\sqrt{45}=\sqrt{9\times5}=3\sqrt{5}$(cm)

次に，(底面 BCHG の面積)＝BC×CH＝4×3＝12(cm²)

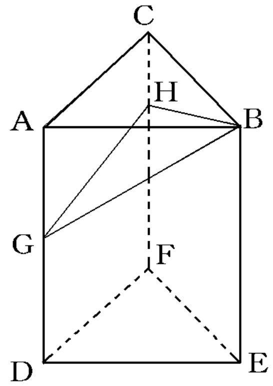
よって，(四角すい A－BGHC の体積)＝$\frac{1}{3}$×(底面積 BCHG)×(高さ AM)

＝$\frac{1}{3}\times12\times3\sqrt{5}=12\sqrt{5}$(cm³)

[問題](入試問題)

次の図のように，1 辺の長さが 6cm の正三角形を底面とし，AD＝BE＝CF＝10cm の正三角柱 ABC－DEF がある。

辺 AD，CF 上に，それぞれ点 G，H を，AG＝5cm，CH＝3cm であるようにとり，さらに，3 点 G，B，H を通る平面で切り，2 つの部分に分けたとき，次の問いに答えよ。



(1) 平面 GBH より上の部分の頂点 A を含む方の立体図形の名前を書け。

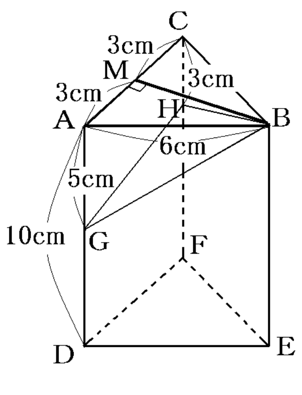
(2) 平面 GBH より下の部分の頂点 E を含む方の立体の体積を求めよ。

(山梨県)

[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]



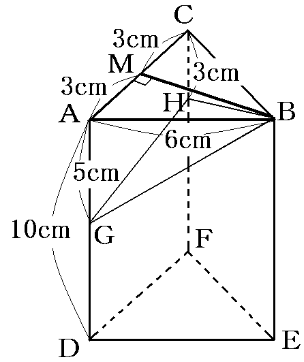
(2) まず，四角すい B－AGHC の体積を求める。

もとの四角柱で底面 ABC と側面 ADFC が垂直であるので，

B から AC に引いた垂線 BM は，面 ADFC とも垂直になる。

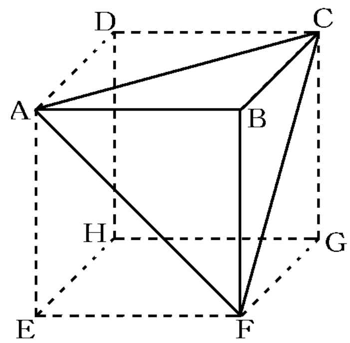
したがって，四角すい B－AGHC の高さは BM になる。

[解答](1) 四角すい　(2) $66\sqrt{3}$ cm³
[解説]
まず，四角すい B－AGHC の体積を求める。
高さを求めるのがポイントである。



もとの四角柱で底面 ABC と側面 ADFC が垂直であるので，
B から AC に引いた垂線 BM は，面 ADFC とも垂直になる。
したがって，四角すい B－AGHC の高さは BM になる。
高さ BM を求める。
△BAC は正三角形なので，BM⊥AC となるとき，
M は AC の中点になる。直角三角形 ABM で，三平方の定理より，BM＝$\sqrt{AB^2-AM^2}=\sqrt{6^2-3^2}=\sqrt{27}=\sqrt{9\times3}=3\sqrt{3}$ (cm)
底面 AGHC は AG // CH の台形なので，
(底面積 AGHC)＝(CH＋AG)×CA÷2＝(3＋5)×6÷2＝24(cm²)
(四角すい B－AGHC の体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\dfrac{1}{3}\times24\times3\sqrt{3}=24\sqrt{3}$ (cm³)
次に，正三角柱 ABC－DEF の体積を求める。
(底面の△ABC の面積)＝AC×BM÷2＝6×$3\sqrt{3}$ ÷2＝$9\sqrt{3}$ (cm²)
よって，(正三角柱 ABC－DEF の体積)＝(底面積)×(高さ AD)＝$9\sqrt{3}$ ×10＝$90\sqrt{3}$ (cm³)
したがって，求める体積は，$90\sqrt{3}-24\sqrt{3}=66\sqrt{3}$ (cm³)

[体積→高さ]
[問題](3 学期)
　右の図は，1 辺の長さが 6cm の立方体 ABCD－EFGH で，A, B，C，F を頂点とする三角すいについて考えたものである。これについて，次の各問いに答えよ。



(1) この立体の体積を求めよ。
(2) 頂点 B から, 面 ACF におろした垂線の長さ, すなわち面 ACF を底面としたときの点 B の高さを求めよ。
[解答欄]

(1)	(2)

[ヒント]
(1) △ABC を底面とすると高さは BF→この立体の体積
(2) 正三角形 AFC の面積とこの立体の体積→高さ

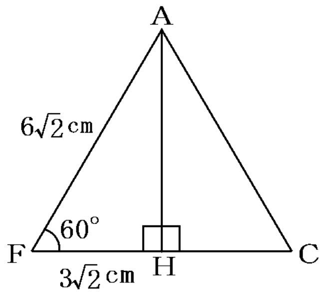
[解答](1) 36cm³　(2)　$2\sqrt{3}$ cm

[解説]

<Point> 体積・底面積→高さ

(1) (すいの体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)

△ABC を底面とすると，(体積)＝$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times6\times6\times6=36$ cm³



(2) まず，正三角形 AFC の面積を計算する。

直角三角形 ABF で，三平方の定理より，

AF＝$\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{6^2\times2}=6\sqrt{2}$ (cm)

同様にして，AC，CF の長さも $6\sqrt{2}$ cm

右図の△AFH は 30°60°90°の直角三角形なので，

FH：AF：AH＝1：2：$\sqrt{3}$

AF＝$6\sqrt{2}$ cm なので，FH＝$3\sqrt{2}$ cm，AH＝$3\sqrt{2}\times\sqrt{3}=3\sqrt{6}$ (cm)

ゆえに(△ACF の面積)＝$\dfrac{1}{2}$×FC×AH＝$\dfrac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times3\sqrt{6}=9\sqrt{12}=18\sqrt{3}$ (cm²)

点 B の高さを x cm とすると，A，B，C，F を頂点とする三角すいの体積について

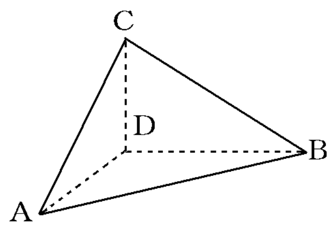
(体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(△ACF の面積)×(高さ x)＝36

$\dfrac{1}{3}\times18\sqrt{3}\times x=36$　，　$6\sqrt{3}x=36,\ \sqrt{3}x=6,\ x=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=\dfrac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$

ゆえに高さは $2\sqrt{3}$ cm

[問題](後期期末)

　次の図の三角すいにおいて，CD は底面 ABD に垂直である。AD＝CD＝6cm，DB＝8cm，∠ADB＝90°のとき，D から平面 ABC におろした垂線の長さを求めよ。



[解答欄]

[ヒント]

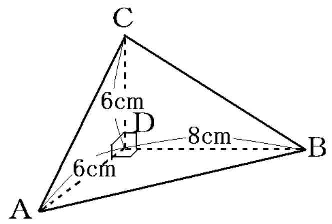
体積・底面積(△ABC)→高さ

[解答]$\dfrac{24\sqrt{41}}{41}cm$

[解説]

<Point> 体積・底面積→高さ

まず，△ABD を底面，CD を高さとして体積を求める。



$(\text{体積})=\dfrac{1}{3}\times(\triangle\text{ABD の面積})\times(\text{高さ CD})$

$=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times6\times8\right)\times6=48(\text{cm}^3)$

D から平面 ABC におろした垂線の長さを x cm とすると，

$(\text{体積})=\dfrac{1}{3}\times(\triangle\text{ABC の面積})\times(\text{高さ }x)=48(\text{cm}^3)$・・・① となる。

そこで，△ABC の面積を求める。まず，3 つの直角三角形(△ACD，△BCD，△ABD)で，三平方の定理より，

AC$=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{6^2\times2}=6\sqrt{2}$ (cm)

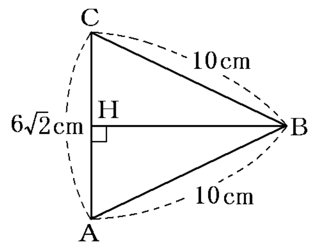
BC$=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$ (cm)

AB$=\sqrt{BD^2+AD^2}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$ (cm)

よって，△ABC は右図のような二等辺三角形になる。

B から CA に垂線 BH を引くと，H は CA の中点となる。

直角三角形 BCH で，三平方の定理より，



BH$=\sqrt{BC^2-CH^2}=\sqrt{10^2-(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{100-18}=\sqrt{82}$ (cm)

よって，(△ABC の面積)＝AC×BH÷2＝$6\sqrt{2}\times\sqrt{82}\div2$

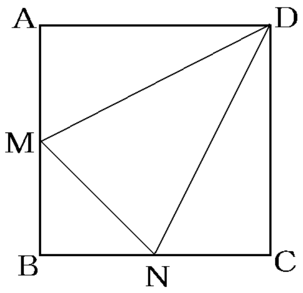
$=3\sqrt{164}=3\sqrt{4\times41}=6\sqrt{41}$ (cm²)

①に，(△ABC の面積)＝$6\sqrt{41}$ (cm²)を代入すると，

$\dfrac{1}{3}\times6\sqrt{41}\times x=48$，$2\sqrt{41}x=48$，$x=\dfrac{48}{2\sqrt{41}}=\dfrac{24\times\sqrt{41}}{\sqrt{41}\times\sqrt{41}}=\dfrac{24\sqrt{41}}{41}$ (cm)

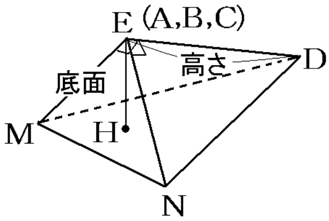
[問題](後期期末)

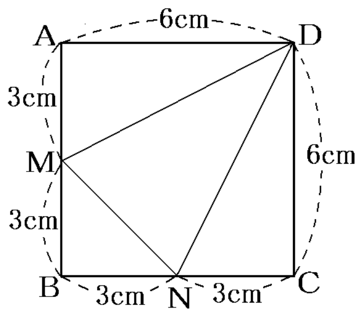
1 辺 6cm の正方形 ABCD の，辺 AB，BC の中点を M，N とし，DM，MN，DN を折り目として，頂点 A，B，C を 1 点に重ねて，立体を組み立てる。頂点 A，B，C が重なった点を E として，E から面 DMN に下した垂線の長さを求めよ。



[解答欄]

[ヒント]





∠DEN＝∠DCN＝90°，∠DEM＝∠DAM＝90° なので，
DE は底面 MNE 上の EN と EM にそれぞれ垂直になる。
よって，DE⊥△MNE となる。

[解答]2 cm

[解説]

組み立てた立体は右の図 1 のようになる。
まず，△MNE を底面として，この立体の体積を求める。
このときの，ポイントは DE が高さになることである。
ここで，直線が平面と垂直になるための条件について説明しておこう。右の図 2 のように，直線 PQ が平面 T 上の 2 つの直線 QR，QS とそれぞれ垂直である(PQ⊥QS，PQ⊥QR)とき，PQ は平面 T に垂直になる。

図1

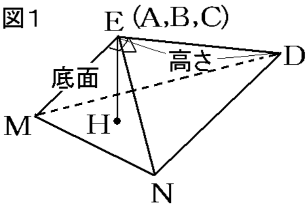


図2

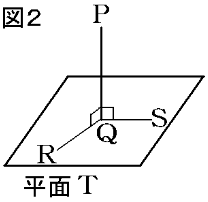


図 1 で，∠DEN＝∠DCN＝90°，∠DEM＝∠DAM＝90° なので，
DE は底面 MNE 上の EN と EM にそれぞれ垂直になる。
よって，DE⊥△MNE となる。

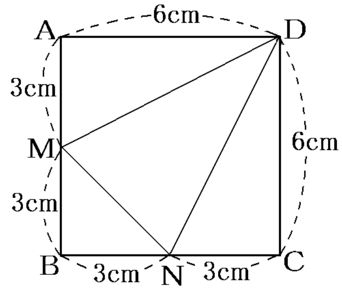
(△MNE の面積)＝(△MNB の面積)＝$3\times3\div2=\dfrac{9}{2}$(cm²)

DE＝DA＝6(cm)　したがって，

(体積)＝$\dfrac{1}{3}$×(△MNE の面積)×(高さ DE)＝$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9}{2}\times6=9$(cm³)

次に，図 1 の△MND を底面としたとき，E から△MND へおろした垂線 EH が高さになる。このとき，

$$(\text{体積})=\frac{1}{3}\times(\triangle\text{MND の面積})\times(\text{高さ EH})=9(\text{cm}^3)\cdots①$$



そこで，△MND の面積を求める。右図から，

$$(\triangle\text{MND})=(\text{正方形 ABCD})-(\triangle\text{MDA})-(\triangle\text{NDC})-(\triangle\text{MNB})$$

$$=6\times6-6\times3\div2-6\times3\div2-3\times3\div2$$

$$=36-9-9-\frac{9}{2}=\frac{27}{2}(\text{cm}^2)$$

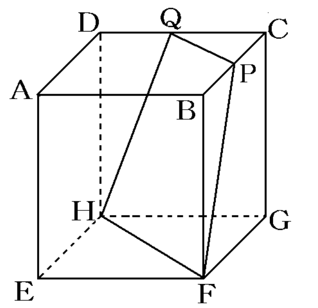
①に$(\triangle\text{MND})=\frac{27}{2}$を代入すると，$\frac{1}{3}\times\frac{27}{2}\times(\text{高さ EH})=9$

よって，$(\text{高さ EH})=9\div\frac{1}{3}\div\frac{27}{2}=9\times3\times\frac{2}{27}=2(\text{cm})$

【】角錐台

[問題](入試問題)

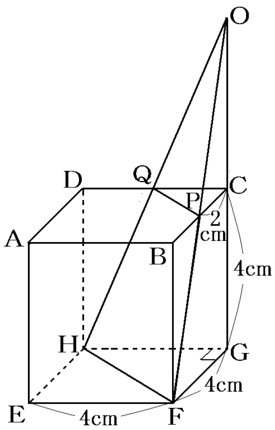
右の図のように，1 辺 4cm の立方体において，辺 BC，CD 上にそれぞれ中点 P，Q をとり，4 点 P，Q，H，F を通る平面でこの直方体を切った。このとき，立体 PCQ－FGH の体積を求めよ。



(長崎県)

[解答欄]

[ヒント]



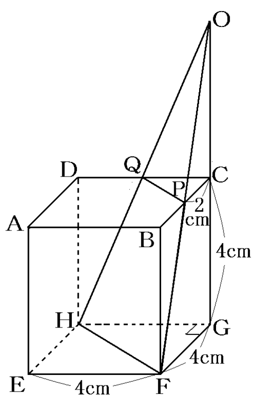
[解答] $\frac{56}{3}$cm^3

[解説]

<Point> 右図のように，GC，FP，HQ を延長して考える

OC：OG＝PC：FG＝2：4＝1：2

よって，OC＝CG＝4cm，OG＝8cm



(O－HFG の体積)＝$\frac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)

$=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times4\times4)\times8=\frac{64}{3}$ (cm^3)

三角錐 O－QPC と三角錐 O－HFG は相似で，

相似比は，PC：FG＝1：2 なので，体積比は $1^3:2^3=1:8$

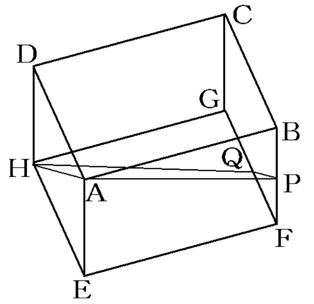
よって，(O－QPC の体積)＝(O－HFG の体積)×$\frac{1}{8}=\frac{64}{3}\times\frac{1}{8}=\frac{8}{3}$(cm^3)

よって，(立体 PCQ－FGH の体積)＝(O－HFG の体積)－(O－QPC の体積)

$=\frac{64}{3}-\frac{8}{3}=\frac{56}{3}$ (cm^3)

[問題](入試問題)

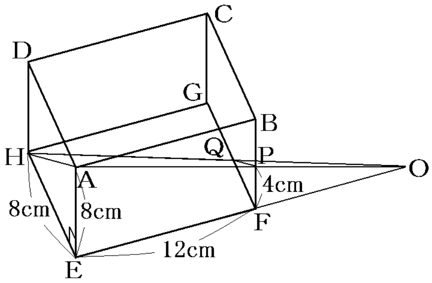
右の図は，AD＝AE＝8cm，AB＝12cm の直方体の容器 ABCD－EFGH に水がいっぱい入っていたものを傾けて，水面が四角形 APQH になるところまで水を流し出したものである。点 P，Q がそれぞれ辺 BF，FG の中点であるとき，容器に残っている水の体積を求めよ。



(高知県)

[解答欄]

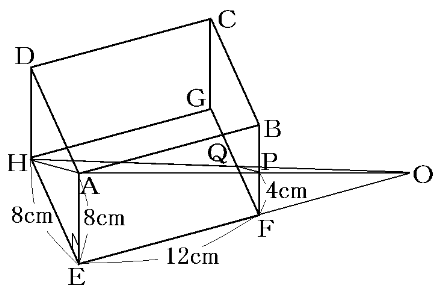
[ヒント]



[解答]224cm³

[解説]

<Point> EF，AP，HQ を延長して考える。



OF : OE＝PF : AE＝4 : 8＝1 : 2

よって，OF＝FE＝12cm，OE＝24cm

三角錐 O－AHE の底面を△AHE とすると，

高さは OE＝24cm

(底面積)＝HE×AE÷2＝8×8÷2＝32(cm²)

(三角錐 O－AHE の体積)＝$\frac{1}{3}$×(底面積)×(高さ)＝$\frac{1}{3}$×32×24＝256(cm³)

三角錐 O－PQF と三角錐 O－AHE は相似で，相似比は PF : AE＝1 : 2 なので，

体積比は，$1^3 : 2^3$＝1 : 8

よって，(三角錐 O－PQF の体積)＝256×$\frac{1}{8}$＝32(cm³)

ゆえに，(三角錐 O－AHE の体積)－(三角錐 O－PQF の体積)＝256－32＝224(cm³)

【FdData 中間期末製品版のご案内】
詳細は，[FdData 中間期末ホームページ]に掲載（[Shift]＋左クリック→新規ウィンドウ）
◆印刷・編集
この PDF ファイルは，FdData 中間期末を PDF 形式に変換したサンプルで，印刷はできないように設定しております。製品版の FdData 中間期末は Windows パソコン用のマイクロソフト Word(Office)の文書ファイルで，印刷・編集を自由に行うことができます。
◆FdData 中間期末の特徴
中間期末試験で成績を上げる秘訣は過去問を数多く解くことです。FdData 中間期末は，実際に全国の中学校で出題された試験問題をワープロデータ(Word 文書)にした過去問集です。各教科(社会・理科・数学)約 1800～2100 ページと豊富な問題を収録しているため，出題傾向の 90%以上を網羅しております。
FdData 中間期末を購入いただいたお客様からは,「市販の問題集とは比べものにならない質の高さですね。子どもが受けた今回の期末試験では，ほとんど同じような問題が出て今までにないような成績をとることができました。」,「製品の質の高さと豊富な問題量に感謝します。試験対策として，塾の生徒に FdData の膨大な問題を解かせたところ，成績が大幅に伸び過去最高の得点を取れました。」などの感想をいただいております。
◆サンプル版と製品版の違い
ホームページ上に掲載しておりますサンプルは，印刷はできませんが，製品の全内容を掲載しており，どなたでも自由に閲覧できます。問題を「目で解く」だけでもある程度の効果をあげることができます。しかし，FdData 中間期末がその本来の力を発揮するのは印刷ができる製品版においてです。印刷した問題を，鉛筆を使って一問一問解き進むことで，大きな学習効果を得ることができます。さらに，製品版は，すぐ印刷して使える「問題解答分離形式」，編集に適した「問題解答一体形式」，暗記分野で効果を発揮する「一問一答形式」(理科と社会)の 3 形式を含んでいますので，目的に応じて活用することができます。
※FdData 中間期末の特徴(QandA 方式) ([Shift]＋左クリック→新規ウィンドウ)
◆FdData 中間期末製品版(Word 版)の価格(消費税込み)
※以下のリンクは[Shift]キーをおしながら左クリックすると，新規ウィンドウが開きます
数学 1 年，数学 2 年，数学 3 年：各 7,800 円(統合版は 18,900 円) ([Shift]＋左クリック)
理科 1 年，理科 2 年，理科 3 年：各 7,800 円(統合版は 18,900 円) ([Shift]＋左クリック)
社会地理，社会歴史，社会公民：各 7,800 円(統合版は 18,900 円) ([Shift]＋左クリック)
※Windows パソコンにマイクロソフト Word がインストールされていることが必要です。(Mac の場合はお電話でお問い合わせください)。
◆ご注文は，メール(info2@fdtext.com)，または電話(092-811-0960)で承っております。
※注文→インストール→編集･印刷の流れ，※注文メール記入例　([Shift]＋左クリック)

【Fd 教材開発】 Mail： info2@fdtext.com　 Tel ：092-811-0960